

Thales Fernandes Bittencourt

Eletrodinâmica quântica bidimensional como um sistema geometrodinâmico

Brasil

2025

Thales Fernandes Bittencourt

Eletrodinâmica quântica bidimensional como um sistema geometrodinâmico

Dissertação apresentada ao Instituto de Física
da UFF para obtenção do grau de Mestre em
Física

Universidade Federal Fluminense

Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro

Brasil

2025

Ficha catalográfica automática - SDC/BIF
Gerada com informações fornecidas pelo autor

B624e Bittencourt, Thales Fernandes
Eletrodinâmica quântica bidimensional como um sistema
geometrodinâmico / Thales Fernandes Bittencourt. - 2025.
59 f.: il.

Orientador: Rodrigo Ferreira Sobreiro.
Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,
Instituto de Física, Niterói, 2025.

1. Teorias de calibre. 2. Gravidade. 3. Eletrodinâmica. 4.
Formalismo BRST. 5. Produção intelectual. I. Sobreiro,
Rodrigo Ferreira, orientador. II. Universidade Federal
Fluminense. Instituto de Física. III. Título.

CDD - XXX

Thales Fernandes Bittencourt

**ELETRODINÂMICA QUÂNTICA BIDIMENSIONAL COMO UM SISTEMA
GEOMETRODINÂMICO**

Dissertação submetida ao curso de
pós-graduação em Física da Universidade
Federal Fluminense, como requisito
parcial para obtenção do Título de Mestre
em Física.

Aprovado em: 24/02/2025.

BANCA AVALIADORA

Membros titulares



Documento assinado digitalmente

RODRIGO FERREIRA SOBREIRO

Data: 20/03/2025 07:15:13-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro
(Orientador)
UFF



Documento assinado digitalmente

OCTAVIO COSTA JUNQUEIRA

Data: 19/03/2025 19:06:34-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dr. Octávio Costa Junqueira
UFABC



Documento assinado digitalmente

REINALDO FARIA DE MELO E SOUZA

Data: 18/03/2025 04:45:09-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Reinaldo Faria de Melo e Souza
UFF



Documento assinado digitalmente

MARCELO SANTOS GUIMARAES

Data: 19/03/2025 22:06:18-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Marcelo Santos Guimarães
UERJ

Ao possível leitor. Espero que haja, neste trabalho, ao menos alguma oportuna combinação de palavras que o ajude no que estiver estudando.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro, por todo o auxílio como orientador desde os tempos de graduação na construção da minha carreira e na confecção deste trabalho, apontando os melhores atalhos e me evitando os piores, mas principalmente por me conferir a tranquilidade de que não é preciso entender tudo de maneira estritamente sequencial na física.

Aos membros da banca avaliadora, Dr. Octávio Costa Junqueira, Prof. Dr. Reinaldo Faria de Melo e Souza, Prof. Dr. Marcelo Santos Guimarães, pela pronta disposição em contribuir com a melhoria deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Antônio Duarte Pereira Jr., pelas aulas de Métodos Geométricos na Física, que foram fundamentais na minha formação para elaborar este trabalho, e por todas as histórias contadas e incentivos dados.

A Deus, à minha mãe, Lays, e ao meu pai, Sandro, por me oferecerem um mundo tão lindo para se estudar física. À minha irmã, Júlia, por me fazer presenciar suas loucuras capilares. Ao meu padasto, Luis Fernando, pelas influências que trouxe para minha família, da qual faz parte hoje.

Ao meu grande amor, Helena, por me proporcionar os momentos mais felizes da minha vida, além de todo o apoio e discussões sobre física.

Ao meu primo, Matheus, pelo companheirismo nos mais diferentes momentos da minha vida.

A Pedro, pela amizade já fraternal que formamos graças ao Skateboard.

A Climério e seu pupilo, Daniel, que, além de compartilharem tantas risadas, me ajudaram nos momentos de dor com a fisioterapia necessária para conseguir continuar a estudar com conforto.

A toda a Nação Rubro-Negra, por estar presente em todo e qualquer lugar, me garantindo sempre boas conversas e novas histórias.

À UFF, por apostar em mim para fazer parte do seu Programa de Pós-Graduação e do Programa de Tutoria.

À CAPES, pelo apoio financeiro ao meu mestrado e a todos aqueles que lutam pela valorização da ciência brasileira.

Resumo

A eletrodinâmica bidimensional, uma teoria invariante sob transformações $U(1)$, é um sistema com solução exata de grande interesse na física, principalmente por sua aplicabilidade em sistemas de dimensões reduzidas em matéria condensada, mas também como um *toy model* para examinar sistemas mais complicados. Isto também é válido para a gravidade bidimensional, uma teoria invariante sob transformações $SO(2)$, especialmente na busca por uma quantização consistente da gravidade. Motivado pela conhecida existência de um isomorfismo entre $U(1)$ e $SO(2)$, aqui, no formalismo de primeira ordem, é apresentado um mapa entre essas teorias com acoplamento a férmions de Dirac. Dessa forma, o mapa conecta dois pontos. O ponto de partida é a ação de Maxwell-Dirac para a eletrodinâmica bidimensional com um termo extra: um termo de borda que carrega campos extras que são introduzidos para que o número de campos independentes de ambas as teorias coincidam. O outro ponto é uma ação de Mardones-Zanelli que descreve gravidade de Lovelock bidimensional somada a uma ação fermiônica e outra com campos extras. O acoplamento férmion-gravidade obtido claramente viola as simetrias de paridade (P) e reversão temporal (T) devido ao termo de interação da ação além de gerar uma simetria de calibre não usual para os férmions. O mapeamento é também estudado via formalismo BRST para garantir segurança do significado físico e para realizar a quantização do modelo.

Palavras-chaves: Teorias de calibre, Gravidade, Eletrodinâmica, Formalismo BRST.

Abstract

Two-dimensional electrodynamics, a theory invariant under $U(1)$ transformations, is an exact solvable system of great interest in Physics, mainly because of its usage in two-dimensional condensed matter systems, but also as a toy model used to probe more complicated systems. The latter statement is also valid for two-dimensional gravity, a theory invariant under $SO(2)$ transformations, specially in the pursuit of a consistent quantization of gravity. Motivated by the well known existence of an isomorphism between $U(1)$ and $SO(2)$, here, in the first order formalism, it is presented a map between these theories with Dirac fermions coupling. Then this map connects two points. The starting point is the Maxwell-Dirac action for two-dimensional electrodynamics with an extra term: a boundary one that carries extra fields which are introduced in order to match the number of independent fields of both theories. The other point is a Mardones-Zanelli action describing Lovelock two-dimensional gravity plus a fermionic action and another one with extra fields. The resulting coupling fermion-gravity clearly violates parity (P) and time reversal (T) symmetries due to the interacting term of the action, in addition to generating an unusual gauge symmetry for the fermions. The mapping is also studied via BRST formalism to guarantee the security of the physical meaning and to perform the quantization of the model.

Key-words: Gauge theories, Gravity, Electrodynamics, BRST formalism.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	7
2	ELETRODINÂMICA EM 2 DIMENSÕES	9
2.1	A Liberdade de Calibre das Equações de Maxwell	9
2.2	Caso Ilustrativo	12
3	GRAVITAÇÃO EM 2 DIMENSÕES	14
3.1	Formalismo de segunda ordem	14
3.2	Formalismo de primeira ordem	17
3.3	Princípio de ação no formalismo de primeira ordem	23
4	MAPEAMENTO	26
4.1	Teoria de partida e contagem de campos independentes	26
4.2	Da eletrodinâmica para a gravitação	28
4.3	Teoria de chegada e violação de paridade e reversão temporal	31
4.4	Simetria de calibre	32
5	QUANTIZAÇÃO	36
5.1	Método de Faddeev-Popov	36
5.2	Formalismo BRST	38
5.3	Mapeamento via BRST	40
6	CONCLUSÃO	44
A	FORMAS DIFERENCIAIS	46
B	MATRIZES GAMMA	49
C	ISOMORFISMO	50
D	JACOBIANO	52
	REFERÊNCIAS	54

1 Introdução

Um dos maiores problemas ainda em aberto na física é a unificação das quatro interações (ou forças) fundamentais. O modelo padrão é descrito pela teoria de Yang-Mills, uma teoria de calibre (ou de gauge) não abeliana que assume que a natureza deva ser invariante sob transformações dos grupos $SU(3)$, $SU(2)$ e $U(1)$ em cada ponto do espaço-tempo formando uma simetria local. Dessa forma, o modelo padrão descreve três das quatro interações fundamentais: a nuclear forte (através da cromodinâmica quântica - QCD - com o grupo $SU(3)$), a nuclear fraca (através da dinâmica quântica de sabor - QFD - com o grupo $SU(2)$) e o eletromagnetismo (através da eletrodinâmica quântica - QED - com o grupo $U(1)$). Esta é uma teoria de enorme sucesso em sua escala de aplicação: é uma teoria de calibre renormalizável, sem anomalias, quantizável e preditiva [1] (apesar de apresentar alguns problemas como, por exemplo, não ser capaz de explicar o fato de neutrinos possuírem massa [2]). Já a quarta interação fundamental da natureza, a gravidade (descrita através da relatividade geral - RG), ainda não possui uma versão quantizada, resistindo, portanto, à unificação com o modelo padrão. Então, um primeiro passo em busca da descrição quântica da gravidade para tentar a unificação das interações fundamentais seria escrever a gravidade como uma teoria de calibre para colocá-la em pé de igualdade com o modelo padrão. Isso foi alcançado e a formulação de calibre da gravitação, que também pode ser chamada de formalismo de primeira ordem da gravitação [3, 4, 5, 6], será explorada neste trabalho.

Diante deste contexto, é interessante partir de casos de dimensão reduzida como *toy models* para averiguar possibilidades de unificações. Particularmente neste trabalho, que rendeu artigo que se encontra em fase de publicação e já pode ser acessado em [7], é apresentado um mapeamento entre eletrodinâmica e gravitação bidimensionais com acoplamento fermiônico que se baseia no isomorfismo entre os grupos de calibre de cada teoria, $U(1)$ e $SO(2)$ respectivamente. É importante mencionar que, aqui, as 2 dimensões (2D), são entendidas como 2 dimensões espaço-temporais, ou seja, $(1+1)D$, significando 1 dimensão espacial e 1 dimensão temporal. Não somente, o espaço-tempo será assumido como uma variedade diferenciável euclidiana por simplicidade e também para que se possa fazer uso do isomorfismo mencionado, já que se o espaço-tempo fosse de Minkowski, o grupo de calibre da gravitação seria o $SO(1,1)$ que não é isomorfo ao grupo $U(1)$. Essa escolha também se deve ao futuro desejo de realizar a quantização do modelo que será construído neste trabalho: este processo de quantização não é possível de se realizar diretamente em um espaço-tempo de Minkowski. Portanto, os cálculos são realizados no espaço-tempo euclidiano e, ao final, se for desejado, é possível realizar uma rotação de Wick [8] para se estar no espaço-tempo de Minkowski.

Do ponto de vista prático, a eletrodinâmica bidimensional, por ser um sistema com solução exata [9, 10, 11], é de grande interesse na física, principalmente em sistemas de dimensões reduzidas em matéria condensada [12, 13, 14]. Portanto seria enriquecedora uma nova descrição para o comportamento de um férmion, como por exemplo o elétron, em um sistema destes. Do ponto de vista conceitual, em física, é muito útil realizar reduções dimensionais durante o enfrentamento de problemas com sistemas muito complicados para ganhar entendimento dos conceitos fundamentais. Isso é comumente feito, por exemplo, em aulas de mecânica clássica ou quântica quando as análises são feitas a partir de uma perspectiva bidimensional para evidenciar os pontos cruciais das teorias. Para o caso da eletrodinâmica bidimensional, pedagogicamente não se faz muito isso, mas há diversas aplicabilidades, como o modelo de Ising [15], por exemplo.

Por outro lado, gravitação bidimensional também é um sistema com solução exata [16] e tem sua gama de aplicações, principalmente na busca por uma teoria quântica da gravidade. Em duas dimensões é possível quantizá-la de maneira consistente [17, 18, 19, 20, 21, 22], motivando a busca para a quantização em 4 dimensões [23]. Também é possível desenvolver descrições geometrodinâmicas de certos sistemas de calibre [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31] onde a gravidade (geometrodinâmica) é empregada como alternativa ao modelo de calibre usual.

O trabalho está organizado da seguinte maneira. No Capítulo 2, são estabelecidos os fundamentos da teoria eletrodinâmica em 2 dimensões no espaço euclidiano e é explorado como exemplo o caso da determinação do campo elétrico gerado por uma configuração arbitrária de partículas carregadas. No Capítulo 3, a gravitação no formalismo de segunda ordem é revisada e o formalismo de primeira ordem é apresentado com mais aprofundamento. No Capítulo 4, o mapeamento entre a eletrodinâmica bidimensional com acoplamento fermiônico e a gravitação bidimensional é estabelecido e os principais resultados obtidos são discutidos: a teoria de gravidade encontrada é exótica, contando com um termo de acoplamento entre os férmions e o campo de calibre que viola paridade (P) e reversão temporal (T), além de conferir aos férmions uma simetria de calibre distinta. No Capítulo 5, é realizada a quantização do mapeamento pelo uso do formalismo BRST, verificando a fisicalidade de cada termo do modelo apresentado, chegando a uma teoria de gravidade quântica a partir da eletrodinâmica quântica. Por fim, o Capítulo 6 aborda as conclusões e aponta as perspectivas deste trabalho.

Antes de seguir, é importante informar que nesta dissertação é utilizada teoria clássica de campos e teoria de calibre, mas não vão ser definidos os conhecimentos básicos. Para referências com aprofundamentos, consultar [32].

2 Eletrodinâmica em 2 dimensões

Sendo a eletrodinâmica bidimensional o ponto de partida do mapeamento que será proposto no presente trabalho, este capítulo está dedicado a fornecer, de maneira breve, os fundamentos para sua compreensão.

2.1 A Liberdade de Calibre das Equações de Maxwell

As equações de Maxwell são os pilares da teoria eletromagnética e podem ser escritas de diversas maneiras como, por exemplo, através do cálculo vetorial, do cálculo tensorial ou do cálculo exterior [33]. Ao analisar a eletrodinâmica de corpos em movimento, Albert Einstein elaborou, em 1905 [34], o que é hoje conhecida como a teoria da relatividade restrita. A relatividade geral é uma decorrência desta última teoria e faz enorme uso de geometria diferencial para seu estudo, sendo extremamente úteis as ferramentas do cálculo exterior principalmente porque neste formalismo os objetos já são invariantes por difeomorfismos¹. Assim, como este trabalho lida de certa forma com a equivalência entre eletromagnetismo e gravitação, ao longo do texto será feita de maneira recorrente a apresentação das equações sob o uso de formas diferenciais como padronização. Propriedades deste formalismo assim como breves discussões sobre seu uso podem ser consultadas no apêndice A. Além disso, o produto exterior \wedge será omitido ao longo de todo o trabalho.

Isto posto, as equações de Maxwell podem ser escritas da seguinte maneira fazendo uso do cálculo exterior [35]:

$$*d * F = J , \quad (2.1)$$

$$dF = 0 , \quad (2.2)$$

em que J é a 1-forma densidade de corrente (fonte de campo) e F é a 2-forma intensidade de campo eletromagnético, definida em termos da 1-forma potencial vetor A como²:

$$F = dA . \quad (2.3)$$

Diante disso, a liberdade de calibre fica evidente já que pelo Lema de Poincaré (A.21), a equação (2.3) e por conseguinte (2.1) e (2.2) são invariantes por transformações

¹ Um difeomorfismo entre duas variedades é um mapa de classe C^∞ que possui inversa também de classe C^∞ . Assim, pode ser entendido como uma mudança geral de coordenadas. Para definições mais aprofundadas, consultar [8].

² Na linguagem covariante do cálculo tensorial, as grandezas são dadas em termos apenas das suas componentes: $J = J_i dx^i$ em que $J_i = (\rho, \vec{j})$ sendo ρ a densidade de carga e \vec{j} a densidade de corrente; $F = \frac{1}{2} F_{ij} dx^i dx^j$ em que $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$; e $A = A_i dx^i$ em que $A_i = (\phi, \vec{A})$ sendo ϕ o potencial elétrico e \vec{A} o potencial vetor. Por ser um caso bidimensional, é convencionado que os índices $a, b, \dots \in \{0, 1\}$.

do tipo:

$$A \rightarrow A' = A + d\alpha , \quad (2.4)$$

em que α é uma função escalar bem comportada das coordenadas do espaço-tempo, caracterizando A como um campo de calibre. Essas são transformações de invariância que atuam exclusivamente nos campos: não são induzidas por transformações de coordenadas, caracterizando-as, portanto, como transformações de calibre. Elas podem ser globais, isto é, não dependem do ponto do espaço e nem do momento no tempo ou, caso contrário, podem ser locais.

É possível mostrar que a transformação (2.4) pode ser dada em termos do grupo unitário de simetria $U(1)$, caracterizado por um conjunto cujos elementos obedecem a:

$$u^* u = 1 \therefore u^* = u^{-1} , \quad (2.5)$$

em que $u \in U(1)$ e u^* é o complexo conjugado de u . O elemento de grupo u pode ser escrito em sua forma exponencial:

$$u = e^\alpha \therefore u^* = e^{-\alpha} = u^{-1} , \quad (2.6)$$

em que $\alpha = -\alpha^*$, isto é, α é um complexo imaginário. Assim, se o potencial, como toda conexão em uma teoria de calibre, se transforma através da representação adjunta [32], tem-se que:

$$\begin{aligned} A' &= u^{-1}(d + A)u \\ &= A + u^{-1}du \\ &= A + u^{-1}ud\alpha \\ &= A + d\alpha , \end{aligned} \quad (2.7)$$

deixando evidente que a transformação (2.4) é apenas uma maneira de constatar que a eletrodinâmica é uma teoria de calibre para o grupo de simetria $U(1)$, um grupo abeliano, ou seja, o produto definido entre elementos do grupo é comutativo.

É fundamental esclarecer que a eletrodinâmica bidimensional possui uma simetria local pelo grupo $U(1)$. Mas por outro lado possui uma simetria global pelo grupo de Poincaré $ISO(2)$ que representa as transformações de Lorentz somadas a translações. A cada simetria contínua se pode associar uma grandeza conservada, a corrente de Noether [36]: para o grupo de Poincaré, se obtém a conservação do tensor energia-momento enquanto que para as transformações locais se obtém a conservação local da carga elétrica.

A teoria de calibre se baseia em um postulado [32]:

Definição 1 (Princípio de Calibre): *Todas as quantidades físicas (observáveis) devem ser invariantes por transformações de calibre.*

Logo, na construção de um princípio de ação, é necessário que a lagrangiana, além de por definição [37] (em 2 dimensões) seja uma 2-forma, deva conter apenas quantidades invariantes de calibre. É possível provar que a ação de Maxwell:

$$S_M = \int \left(\frac{1}{2} F * F + A * J \right) , \quad (2.8)$$

leva justamente às equações de Maxwell (2.1) e (2.2) através da aplicação da equação de Euler-Lagrange para o potencial A . O primeiro termo representa os campos livres e o segundo termo representa a interação dos campos com a matéria.

Para acoplar férmions, deve-se ter em mente que estes serão justamente as fontes de campo e, portanto, o acoplamento é feito substituindo o termo geral de fontes de campo $A * J$ pela lagrangiana de Dirac com acoplamento mínimo, isto é, trocando a derivada exterior pela derivada covariante da interação. A parte fermiônica da ação fica dada por [38]:

$$S_D = \int \bar{\psi} (i\gamma * \mathcal{D} - m * 1) \psi , \quad (2.9)$$

em que a 1-forma $\gamma = \gamma_i dx^i$, com $x \in \mathbb{R}^2$ e $i, j, k \dots \in \{0, 1\}$, é dada em termos das matrizes gamma de Dirac em duas dimensões (algumas convenções e propriedades estão listadas no apêndice B). Dessa forma, por comparação, a densidade de corrente de Dirac é $J = \bar{\psi} i \gamma \psi$. O campo ψ é um férmion de Dirac enquanto que $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ é o seu conjugado e $\mathcal{D} = d - A$ é a derivada covariante exterior para a eletrodinâmica. Pode-se mostrar que aplicando a equação de Euler-Lagrange para os campos fermiônicos $\bar{\psi}$ ou ψ se chega justamente à equação de Dirac:

$$(i\gamma * \mathcal{D} - m * 1) \psi = 0 . \quad (2.10)$$

A ação (2.9) é invariante por transformações locais (e, portanto, também por transformações globais) do tipo (2.4) juntamente com:

$$\psi \rightarrow e^\alpha \psi , \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-\alpha} , \quad (2.11)$$

com $\alpha = -\alpha^*$ sendo um parâmetro infinitesimal local. Isso implica que a intensidade de campo eletromagnético é um invariante de calibre: $\delta F = 0$ pelo Lema de Poincaré (A.21). A substituição da ação (2.9) na ação (2.8) gera a ação de Maxwell-Dirac da QED [8]:

$$S_{QED} = \int \left[\frac{1}{2} F * F + \bar{\psi} (i\gamma * \mathcal{D} - m * 1) \psi \right] , \quad (2.12)$$

que é, portanto, invariante sob transformações de calibre do grupo $U(1)$ do tipo:

$$\begin{aligned} \delta A &= d\alpha , \\ \delta \psi &= \alpha \psi , \\ \delta \bar{\psi} &= -\alpha \bar{\psi} . \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.2 Caso Ilustrativo

Eletrodinâmica bidimensional é um sistema com solução exata e esta seção está dedicada a mostrar isso através do caso de N partículas que se movem no espaço-tempo de 2 dimensões na presença de campos eletromagnéticos conforme feito em [9]. É válido mencionar que, especialmente nesta seção, a utilização do cálculo exterior e das formas diferenciais será deixada de lado, prezando pelo uso dos tensores e suas componentes pois serão feitos cálculos mais explícitos. Vale já mencionar que no caso bidimensional não há campo magnético pois a intensidade de campo é definida através da 2-forma $F \equiv F_{10} = E_1$, objeto de 4 componentes sendo 2 delas nulas e as outras duas dependentes entre si devido à sua antissimetria. As componentes de F podem ser representadas, em duas dimensões, pela matriz:

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -E_1 \\ E_1 & 0 \end{bmatrix} = \partial_i A_j - \partial_j A_i . \quad (2.14)$$

Pois bem, a ação para este caso é dada por:

$$S_M = \frac{1}{4} \int d^2x F_{ij}(x) F^{ij}(x) + \sum_{n=1}^N m_n \int d\tau_n + \int d^2x j^i A_i , \quad (2.15)$$

que pode ser reescrita, conforme [10] e [39], como:

$$S_M = \frac{1}{4} \int d^2x F_{ij}(x) F^{ij}(x) + \sum_{n=1}^N m_n \int d\tau_n + \sum_{n=1}^N q_n \int d\xi_n^i A_i(\xi_n) , \quad (2.16)$$

em que a primeira integral se refere aos campos livres, a segunda integral está relacionada à energia cinética relativística de uma partícula pontual e a última integral se refere à interação entre essas partículas carregadas e o campo eletromagnético: é o termo de fonte de campo. Cada uma das N partículas possui, respectivamente, massa m_n , carga q_n , coordenadas de espaço-tempo ξ_n^i , tempo próprio τ_n , cujo diferencial é:

$$d\tau_n = dt(1 + v_n^2)^{1/2} = dt \frac{1}{\gamma} , \quad (2.17)$$

em que $t = x^0$ e v_n são o tempo e a velocidade.

Aplicando a equação de Euler-Lagrange com respeito ao potencial vetor A_i , se obtém a seguinte equação de campo:

$$\partial_i F^{ij}(x) = \sum_{n=1}^N q_n \int d\xi_n^j \delta_{(2)}(x - \xi_n) , \quad (2.18)$$

que é basicamente a equação de Maxwell (2.1), e leva a:

$$\partial_1 F_{10} = \sum_{n=1}^N q_n \delta(x - \xi_n^1(t)) , \quad (2.19)$$

$$\partial_0 F_{10} = - \sum_{n=1}^N q_n v_n \delta(x - \xi_n^1(t)) , \quad (2.20)$$

em que x é a componente espacial de x , ou seja, $x = x^1$ e, é claro, $\tau_n = \xi_n^0$. E usando a equação de Euler-Lagrange agora com respeito às coordenadas das partículas ξ_n^i se obtém a equação de campo:

$$m_n \frac{d^2 \xi_n^i}{d\tau^2} = q_n F^i_j(\xi_n) \frac{d\xi_n^j}{d\tau} , \quad (2.21)$$

que é basicamente a força de Lorentz e leva a:

$$m_n \frac{d}{dt} ((1 + v_n^2)^{-1/2} v_n) = q_n F^1_0(\xi_n) . \quad (2.22)$$

Integrando as equações (2.19) e (2.20) se obtém:

$$F_{10}(x) = - \sum_{n=1}^N q_n \theta(\xi_n^1(t) - x) + C_0 = \sum_{n=1}^N q_n \theta(x - \xi_n^1(t)) + C_1 . \quad (2.23)$$

Nota-se, portanto, que o tensor intensidade de campo eletromagnético, ou simplesmente o campo elétrico, tem uma descontinuidade no ponto em que cada partícula está localizada. Além disso, as equações (2.19) e (2.20) podem ser entendidas como equações para funções de Green do eletromagnetismo bidimensional visto que são as substituições da equação de Maxwell (2.1) por inomogeneidades na forma de funções delta de Dirac. Assim, a equação (2.23) é a função de Green, sendo útil para a composição de soluções gerais já que o método de Green [40] estabelece que para obter a solução $\phi(x)$ de uma equação do tipo:

$$\hat{L}\phi(x) = f(x) , \quad (2.24)$$

em que \hat{L} é um operador diferencial de segunda ordem e $f(x)$ uma inomogeneidade qualquer, basta resolver a seguinte equação primeiramente:

$$\hat{L}G(x, x') = \delta(x - x') , \quad (2.25)$$

em que $G(x, x')$ é a chamada função de Green e então obter a solução geral através de:

$$\phi(x) = \int dx' G(x, x') f(x') . \quad (2.26)$$

Olhando para a equação (2.23), pode-se tirar algumas conclusões. O campo elétrico, dado através de (2.14) por $F_{10} = E_1$, de uma única partícula é uma função degrau: é igual a 0 para valores de $x < \xi_n^1(t)$ e vale q_n para valores de $x \geq \xi_n^1(t)$, uma vez fixadas as constantes em $C_0 = q_n$ e $C_1 = 0$. Dessa forma, nota-se que longe das cargas o campo elétrico é constante e, assim, constata-se que não há onda eletromagnética em 2 dimensões mesmo que estas cargas puntiformes estejam em movimento até mesmo acelerado. Logo, a velocidade da luz c não representa uma velocidade de propagação.

3 Gravitação em 2 dimensões

Através do mapeamento que será introduzido no Capítulo 4, será visto que é possível associar eletrodinâmica 2D a um sistema geometrodinâmico 2D, ou seja, um sistema de gravitação bidimensional. Dessa forma, o presente capítulo se dedica a exibir os pontos principais que fundamentam esta teoria.

3.1 Formalismo de segunda ordem

Aqui será feita uma revisão sobre a formulação padrão da Relatividade Geral (ou formalismo de segunda ordem da gravitação), discutida com base em [6, 41, 42, 43].

No início do século XX, Albert Einstein formulou o que hoje se conhece por Relatividade Geral, uma teoria de gravitação que refinou a gravitação newtoniana. Sua escrita foi feita em termos de componentes de tensores, e não de formas diferenciais, portanto será seguido este formalismo nesta seção. O pilar fundamental para a construção desta teoria foi o princípio de equivalência, que pode ser enunciado da seguinte maneira:

Definição 2 (Princípio de Equivalência Fraco): *É sempre possível escolher um referencial inercial local.*

Isto é, a gravidade sempre pode ser localmente eliminada através de uma escolha apropriada de referencial, de forma que, em uma vizinhança local, o espaço-tempo possua invariância de Lorentz conforme ilustra a Figura 1. Este princípio pode ser estendido à versão forte:

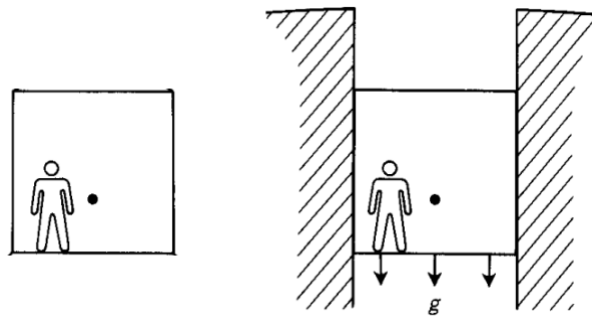


Figura 1 – A dinâmica de uma partícula dentro de um elevador em queda livre é regida pelos efeitos da gravidade (direita). Entretanto, escolhendo o referencial de um observador dentro do elevador é possível descrever perfeitamente a dinâmica da partícula como se não estivesse sujeita à força gravitacional: este é um referencial inercial local (esquerda) [42].

Definição 3 (Princípio de Equivalência Forte): *As leis da natureza são as mesmas na presença de um campo gravitacional uniforme estático e em um referencial equivalentemente acelerado.*

Isto é, é impossível identificar, localmente, se há um campo gravitacional ou se o referencial adotado está apropriadamente acelerado, como ilustra a Figura 2.

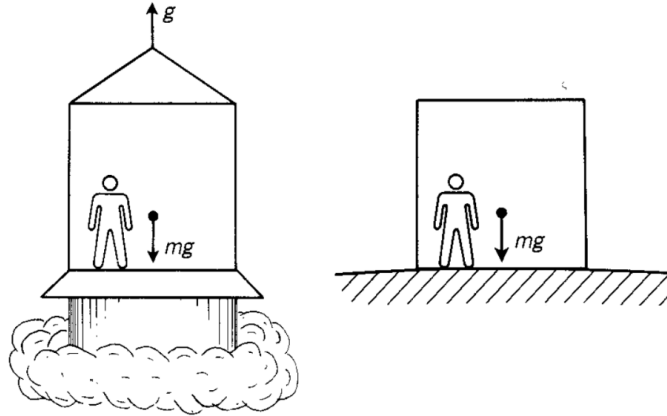


Figura 2 – A dinâmica de uma partícula em um referencial local que está sujeito a um campo gravitacional (direita) é totalmente equivalente à dinâmica de uma partícula em um referencial acelerado apropriadamente (esquerda) [42].

Com isso, em 1915, Einstein apresentou em seus trabalhos [44, 45] o que hoje se conhece como equações de Einstein, que podem ser compiladas da seguinte maneira¹:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} . \quad (3.1)$$

Assim, pode-se ver que matéria e energia, representadas através do tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, curvam o espaço-tempo, representado pelo tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, mas também o próprio espaço-tempo afeta a dinâmica da matéria e energia (a força gravitacional é entendida como consequência da curvatura espaço-temporal, ou seja, é uma descrição geometrodinâmica). A consequência disso é que a trajetória de uma partícula no espaço-tempo é uma geodésica, a generalização de linha reta para uma geometria de curvatura arbitrária, que é por definição uma curva que transporta paralelamente o seu próprio vetor tangente U^μ :

$$U^\mu \nabla_\mu U^\nu = 0 , \quad (3.2)$$

em que o transporte paralelo é controlado pela derivada covariante ∇_μ , que pode ser definida através da sua atuação sobre um tensor $X^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n}$:

$$\begin{aligned} \nabla_\gamma X^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n} = & \partial_\gamma X^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n} + \Gamma^{\alpha_1}_{\rho\gamma} X^{\rho \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n} + \dots + \Gamma^{\alpha_m}_{\rho\gamma} X^{\alpha_1 \dots \rho}_{\beta_1 \dots \beta_n} \\ & - \Gamma^{\rho}_{\beta_1\gamma} X^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\rho \dots \beta_n} - \dots - \Gamma^{\rho}_{\beta_n\gamma} X^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \rho} , \end{aligned} \quad (3.3)$$

¹ O termo contendo a constante cosmológica Λ foi adicionado posteriormente por Einstein, em 1917 [46], de forma *ad hoc* para se obter soluções cosmológicas estáticas. A presença deste termo foi tema de muitas discussões no século XX, mas hoje é garantida por consenso da comunidade científica.

de onde se pode compreender a conexão afim $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ como uma maneira de corrigir o transporte paralelo de tensores ao longo do espaço-tempo.

O espaço-tempo pode ter basicamente dois tipos de propriedades. As propriedades métricas (codificadas dentro da métrica) estão relacionadas a medições de distâncias, ângulos, áreas, volumes e outros no espaço-tempo. A métrica, então, serve para calcular distâncias entre objetos próximos:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (3.4)$$

Já as propriedades afins, representadas pela conexão afim $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, estão relacionadas à covariância sob translações no espaço-tempo, baseada fortemente nas noções de paralelismo. Portanto, são propriedades muito importantes e completamente independentes, a princípio.

Entretanto, Einstein formulou a relatividade geral com a conexão afim sendo dada em termos da métrica ao assumir duas propriedades: (i) compatibilidade da métrica, isto é, $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$, o que garante que a norma de vetores seja preservada por transportes paralelos; (ii) torção nula, isto é, $T^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} = 0$, o que reduz as componentes da conexão afim aos símbolos de Christoffel:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (\partial_\beta g_{\gamma\rho} + \partial_\gamma g_{\rho\beta} - \partial_\rho g_{\beta\gamma}) . \quad (3.5)$$

Essas imposições implicam em todo o espaço-tempo poder ser descrito através apenas da métrica, resultando em equações de segunda ordem para a dinâmica gravitacional, daí o nome de formalismo de segunda ordem da gravitação para este caso.

Entretanto, essas imposições foram alvo de discussões entre Einstein e o matemático Élie Cartan [47]. Cartan presava pela independência entre as propriedades métrica e afim, enquanto que Einstein presava pela economia de campos independentes de acordo com o que ele postulava para o espaço-tempo: métrica compatível e torção nula. Daqui pra frente, será seguida a perspectiva de Cartan, que possui mais variáveis (a métrica e a conexão afim serão independentes) mas é mais econômica nas suposições de partida da teoria (não se impõe a condição de torção nula, e, sim, apenas a compatibilidade da métrica) e acaba atribuindo generalidade a ela. Além disso, essa formulação deixa mais evidente as relações com teorias de calibre.

Pode-se tomar como motivação para a separação entre a métrica e a conexão afim o fato de que, enquanto a métrica participa da definição da energia cinética das partículas e do tensor energia-momento, a conexão atua, por exemplo, no acoplamento fermiônico com a gravidade. Ao considerar sistemas de gravidade quântica, deve-se levar em conta que, além da massa da partícula, o spin também é responsável por alterar o espaço-tempo, portanto no caminho pela unificação de todas as interações seria necessário distinguir a métrica da conexão, levando ao formalismo de primeira ordem que será discutido seção seguinte.

É importante mencionar que para quantizar uma teoria é extremamente necessária a descrição do sistema através do princípio de ação. David Hilbert propôs o princípio de mínima ação correto para a gravidade no formalismo de segunda ordem em 4 dimensões que admite espaço plano como uma solução (ou seja, na ausência de fontes de campo - matéria ou energia): a conhecida ação de Einstein-Hilbert [48]; permitindo geometrias de curvatura constante, deve-se somar um termo nesta ação: o da constante cosmológica, resultando em:

$$S_{EH}[g] = \frac{1}{8\pi G} \int \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2} - \Lambda \right) d^4x, \quad (3.6)$$

em que R é o escalar de curvatura, definido como função da métrica $g_{\mu\nu}$, sua inversa e suas derivadas, G é a constante de Newton e Λ é a constante cosmológica.

Neste trabalho, será utilizado o princípio de ação para o formalismo de primeira ordem, logo, serão exibidos, na próxima seção, os objetos e teoremas matemáticos fundamentais para a elaboração da ação desejada.

3.2 Formalismo de primeira ordem

Neste formalismo, desenvolvido muito pelos trabalhos de Utiyama [3], Kibble [4] e Sciama [5], portanto, as propriedades métricas e afins serão codificadas em campos completamente independentes. O objetivo aqui é construir os objetos fundamentais para se construir o princípio de ação para a gravitação.

Para tal, começa-se, assim como fez Einstein para a gravitação de segunda ordem, analisando o princípio de equivalência. Este princípio abre oportunidade de interpretar o espaço-tempo como uma variedade diferenciável D -dimensional M que possui em cada ponto $X \in M$ um espaço tangente T_X D -dimensional plano que é uma boa aproximação de M nas redondezas do ponto X . Isso quer dizer que existe um jeito de representar os vetores de M por vetores de T_X e vice-versa², dado através do isomorfismo e^a_μ que é um mapa linear entre esses dois espaços. Esta correspondência está ilustrada na Figura 3 a seguir.

Esse isomorfismo e^a_μ devido à mudança do espaço-tempo curvo da variedade M para o espaço tangente T_X pode ser compreendido como uma mudança de referencial conforme o princípio de equivalência: uma transformação entre um sistema de coordenadas X^μ numa região aberta de X na variedade M e um sistema de coordenadas z^a no espaço de Minkowski T_X onde valem as leis da relatividade restrita. É, portanto, a matriz jacobiana:

$$\frac{\partial z^a}{\partial X^\mu} = e^a_\mu(X). \quad (3.7)$$

² O ramo da matemática que lida com este tipo de estrutura é justamente a geometria diferencial que implica no uso natural do cálculo exterior. Para mais aprofundamento, consultar [8].

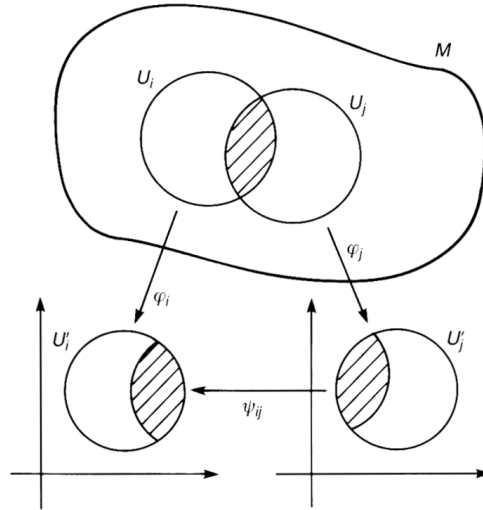


Figura 3 – A vizinhança U_i da variedade M é mapeada em $U'_i \subset \mathbb{R}^n$ através do isomorfismo φ_i enquanto que a vizinhança U_j é mapeada em $U'_j \subset \mathbb{R}^n$ através do isomorfismo φ_j . Nas regiões de sobreposição, é possível estabelecer um isomorfismo ψ_{ij} [8].

Assim, as formas de base na variedade se relacionam com as formas de base no espaço cotangente T_X^* (este é o espaço dual ao espaço tangente onde se definem os duais dos vetores: as formas³) através de:

$$dz^a = e^a_{\mu}(X)dX^{\mu} . \quad (3.8)$$

Neste contexto, a vielbein, que em duas dimensões é chamada particularmente de zweibein⁴, é a entidade matemática que garante o princípio de equivalência. Ela pode ser codificada na 1-forma $e^a = e^a_{\mu}dX^{\mu}$ fazendo com que a relação (3.8) seja reescrita como:

$$dX^a = e^a_{\mu}(X)dX^{\mu} = e^a , \quad (3.9)$$

em que dX^a é o referencial local e dX^{μ} é o referencial geral, evidenciando que o grupo de calibre local tem que ser o grupo de Lorentz $SO(1, D-1)$ para que valha o princípio de equivalência. Como este trabalho trata de um espaço-tempo bidimensional, o grupo seria $SO(1, 1)$. Entretanto, será assumido que o espaço-tempo plano local é euclidiano e, portanto, o grupo de Lorentz fica caracterizado por $SO(2)$. Dessa maneira, pode-se estabelecer uma convenção que será utilizada daqui em diante: índices latinos fazem referência a coordenadas do espaço tangente (referencial local inercial) e índices gregos fazem referência a coordenadas da variedade (referencial não-inercial).

³ São espaços duais porque $T_X^* : T_X \rightarrow \mathbb{R}$ e $T_X : T_X^* \rightarrow \mathbb{R}$, isto é, um 1-vetor é um objeto do tipo $A = A^{\mu}\partial_{\mu} \in T_X$ e uma 1-forma é um objeto do tipo $B = B_{\mu}dX^{\mu} \in T_X^*$. Assim, $AB = A^{\mu}\partial_{\mu}B_{\nu}dX^{\nu} = A^{\mu}B_{\nu}\delta^{\nu}_{\mu} = A^{\mu}B_{\mu} \in \mathbb{R}$.

⁴ A palavra vielbein significa algo como "muitas (*viel*) pernas (*beine*)". Assim, em duas dimensões só há duas (*zwein*) pernas, portanto é chamada de zweibein [37].

Aplicando a relação (3.8) ao caso de tensores (objetos matemáticos definidos num espaço produto de espaços tangentes e cotangentes⁵): se Π é um tensor com componentes $\Pi^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n}(X)$ em M , então as componentes $P^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n}(X)$ do tensor correspondente P no espaço tangente T_X são:

$$\begin{aligned}
 P &= \Pi \\
 P^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n} \partial_{a_1} \dots \partial_{a_m} dX^{b_1} \dots dX^{b_n} &= \Pi^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} dX^{\nu_1} \dots dX^{\nu_n} \\
 P^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n} \partial_{a_1} \dots \partial_{a_m} dX^{b_1} \dots dX^{b_n} &= \Pi^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n} e^{a_1}_{\mu_1} \partial_{a_1} \dots e^{a_m}_{\mu_m} \partial_{a_m} e^{\nu_1}_{b_1} dX^{b_1} \dots e^{\nu_n}_{b_n} dX^{b_n} \\
 P^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n} \partial_{a_1} \dots \partial_{a_m} dX^{b_1} \dots dX^{b_n} &= \Pi^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n} e^{a_1}_{\mu_1} \dots e^{a_m}_{\mu_m} e^{\nu_1}_{b_1} \dots e^{\nu_n}_{b_n} \partial_{a_1} \dots \partial_{a_m} dX^{b_1} \dots dX^{b_n} \\
 \therefore P^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n} &= e^{a_1}_{\mu_1} \dots e^{a_m}_{\mu_m} e^{\nu_1}_{b_1} \dots e^{\nu_n}_{b_n} \Pi^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n} ,
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

em que $e^\mu_a(X)$ é a zweinbein inversa dada através de: $e^\mu_a(X)e^b_\mu(X) = \delta^b_a$ e também de $e^\mu_a(X)e^a_\nu(X) = \delta^\mu_\nu$; ∂_μ é a base dos vetores do espaço tangente; e dX^μ é a base das formas do espaço cotangente.

Diante do que foi posto, dada a métrica euclidiana:

$$ds^2 = \delta_{ab} dX^a dX^b , \tag{3.11}$$

é possível obter a métrica $g_{\mu\nu}$ na variedade:

$$ds^2 = \delta_{ab} e^a_\mu(X) e^b_\nu(X) dX^\mu dX^\nu , \tag{3.12}$$

em que:

$$g_{\mu\nu}(X) = \delta_{ab} e^a_\mu(X) e^b_\nu(X) . \tag{3.13}$$

Assim, é possível obter também que:

$$g = \det g_{\mu\nu} = \det (\delta_{ab} e^a_\mu e^b_\nu) = \det (\delta_{ab}) \det (e^a_\mu) \det (e^b_\nu) = 1 e e = e^2 . \tag{3.14}$$

Já que a zweinbein determina a métrica, todas as propriedades métricas do espaço-tempo estão contidas na zweinbein. A recíproca já não é válida porque dada uma métrica existem infinitas possibilidades de zweinbein devido à arbitrariedade na escolha dos referenciais locais ortonormais que podem ser usados como base do espaço tangente. A zweinbein, então, pode substituir a métrica como campo fundamental métrico no formalismo de primeira ordem.

Resta, agora, definir o campo fundamental responsável pelas propriedades afins neste formalismo. Este será a conexão de spin, a 1-forma local:

$$\omega^a_b(X) = \omega^a_{b\mu}(X) dX^\mu , \tag{3.15}$$

⁵ Um tensor é um objeto do tipo $X \in T^{(m)}_n$ tal que $X : T^{(n)}_m \rightarrow \mathbb{R}$ onde $T^{(m)}_n$ é o espaço definido através do produto tensorial entre espaços tangentes e cotangentes $T^{(m)}_n = \otimes^m T_X \otimes^n T_X^*$.

que define o transporte paralelo de tensores de Lorentz no espaço tangente e cotangente entre pontos vizinhos. O transporte paralelo de um tensor $\phi^{a_1 \dots a_n}_{b_1 \dots b_m}$ de $X + dX$ para X é:

$$\begin{aligned}
\phi^{a_1 \dots a_n}_{b_1 \dots b_m}|(X) &= \phi^{a_1 \dots a_n}_{b_1 \dots b_m}(X + dX) + dX^\mu \omega^{a_1}_{c_1 \mu}(X) \phi^{c_1 \dots a_n}_{b_1 \dots b_m}(X) \\
&\quad + \dots + dX^\mu \omega^{a_n}_{c_n \mu}(X) \phi^{a_1 \dots c_n}_{b_1 \dots b_m}(X) - dX^\mu \omega^{c_1}_{b_1 \mu}(X) \phi^{a_1 \dots a_n}_{c_1 \dots b_m}(X) \\
&\quad - \dots - dX^\mu \omega^{c_m}_{b_m \mu}(X) \phi^{a_1 \dots a_n}_{b_1 \dots c_m}(X) \\
&= \phi^{a_1 \dots a_n}_{b_1 \dots b_m}(X) + dX^\mu [\omega^{a_1}_{c_1 \mu}(X) \phi^{c_1 \dots a_n}_{b_1 \dots b_m}(X) \\
&\quad + \dots + \omega^{a_n}_{c_n \mu}(X) \phi^{a_1 \dots c_n}_{b_1 \dots b_m}(X) - \omega^{c_1}_{b_1 \mu}(X) \phi^{a_1 \dots a_n}_{c_1 \dots b_m}(X) \\
&\quad - \dots - \omega^{c_m}_{b_m \mu}(X) \phi^{a_1 \dots a_n}_{b_1 \dots c_m}(X)] \\
&= \phi^{a_1 \dots a_n}_{b_1 \dots b_m}(X) + dX^\mu D_\mu \phi^{a_1 \dots a_n}_{b_1 \dots b_m}(X) .
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Isso acontece porque se deve levar em consideração que tanto as componentes do tensor quanto seus elementos de base mudam ponto a ponto na variedade, portanto não se deve comparar somente as componentes do tensor em $X + dX$ e X , mas também suas bases. Assim, a derivada covariante D_μ mede a mudança no tensor produzido pelo transporte paralelo entre pontos vizinhos.

$$\begin{aligned}
dX^\mu D_\mu \phi^{a_1 \dots a_n}_{b_1 \dots b_m}(X) &= \phi^{a_1 \dots a_n}_{b_1 \dots b_m}|(X) - \phi^{a_1 \dots a_n}_{b_1 \dots b_m}(X) \\
&= dX^\mu [\omega^{a_1}_{c_1 \mu}(X) \phi^{c_1 \dots a_n}_{b_1 \dots b_m}(X) \\
&\quad + \dots + \omega^{a_n}_{c_n \mu}(X) \phi^{a_1 \dots c_n}_{b_1 \dots b_m}(X) - \omega^{c_1}_{b_1 \mu}(X) \phi^{a_1 \dots a_n}_{c_1 \dots b_m}(X) \\
&\quad - \dots - \omega^{c_m}_{b_m \mu}(X) \phi^{a_1 \dots a_n}_{b_1 \dots c_m}(X)] .
\end{aligned} \tag{3.17}$$

A conexão de spin é, portanto, uma conexão de calibre pois é construída para se definir um operador de derivada covariante na variedade de modo a manter invariante a estrutura diferencial sob as transformações locais de grupo (neste caso, grupo de Lorentz). O termo "de spin" se deve ao fato de que este campo nasce naturalmente na discussão sobre espinores [37]. Portanto, as propriedades afins do espaço-tempo estão codificadas nas componentes da conexão de spin, que nesse formalismo é inteiramente independente da métrica. A Figura 4 ilustra os diferentes papéis da zweinbein e da conexão de spin em uma variedade.

O grupo de Lorentz $SO(2)$ tem dois tensores invariantes: a métrica euclidiana δ_{ab} e o tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita ϵ_{ab} . Eles são definidos pela estrutura da álgebra do grupo, sendo, portanto, os mesmos em qualquer espaço tangente e, assim, constantes por toda a variedade ($d\delta_{ab} = 0 = d\epsilon_{ab}$). Dessa forma, devem ser covariantemente constantes ($D\delta_{ab} = 0 = D\epsilon_{ab}$). Isso implica que a conexão de spin satisfaz:

$$\delta_{ac} \omega^c_b = -\delta_{bc} \omega^c_a , \tag{3.18}$$

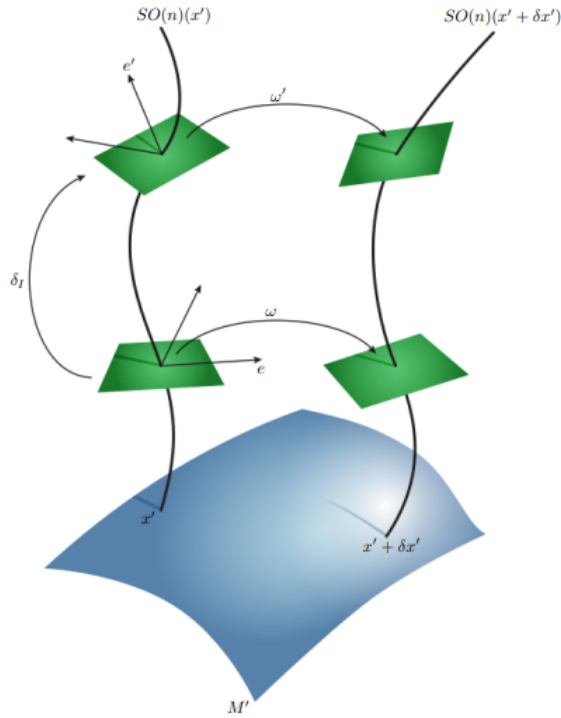


Figura 4 – Existem infinitos referenciais locais em um ponto x' da variedade n -dimensional M , dados através da vielbein e , todos conectados por transformações δ_I do grupo de Lorentz local $SO(n)(x')$. Para obter um referencial local em outro ponto da variedade, basta aplicar o transporte paralelo através da conexão de spin ω , criando, assim, uma nova infinidade de referenciais locais [49].

o que restringe ω_{ab} a ser antissimétrica. Uma consequência disso é que o quadrado de uma derivada covariante não é mais um operador diferencial, que pode ser verificado ao fazer a seguinte aplicação sobre um campo vetorial ϕ^a :

$$\begin{aligned}
 D^2\phi^a &= D[d\phi^a + \omega_b^a\phi^b] \\
 &= d[d\phi^a + \omega_b^a\phi^b] + \omega_b^a[d\phi^b + \omega_c^b\phi^c] \\
 &= [d\omega_b^a + \omega_c^a\omega_b^c]\phi^b .
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

É um operador simplesmente algébrico conhecido como a 2-forma curvatura:

$$\begin{aligned}
 R_b^a &= d\omega_b^a + \omega_c^a\omega_b^c \\
 &= \frac{1}{2}R_{b\mu\nu}dx^\mu dx^\nu .
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Especialmente se o espaço-tempo possui 2 dimensões, como se assume neste trabalho, a curvatura é simplesmente:

$$R_b^a = d\omega_b^a , \tag{3.21}$$

devido à propriedade de antissimetria da conexão de spin e do produto exterior. A Figura 5 ilustra como se pode perceber que um espaço possui curvatura.

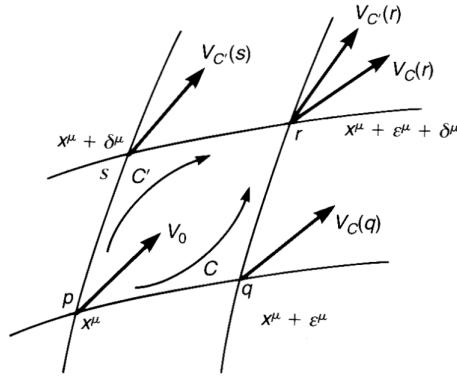


Figura 5 – Transporte paralelo do vetor V_0 ao longo das trajetórias C e C' entre os pontos p e r . Um espaço com curvatura é capaz de fazer com que $V_C \neq V_{C'}$ [8].

Como consequência, é possível obter uma relação extremamente importante:

$$DR_b^a = dR_b^a + \omega_c^a R_b^c - \omega_b^c R_c^a = 0, \quad (3.22)$$

que para o caso da eletrodinâmica é traduzido na equação (2.2), pois vale para qualquer conexão 1-forma. Em duas dimensões, essa relação é trivial, pois DR_b^a é uma 3-forma, que, como discutido no Apêndice A, deve ser nula em 2 dimensões. Vale mencionar que a conexão de spin e o potencial vetor da eletrodinâmica $A = A_i dx^i$ são ambos 1-formas e têm propriedades similares já que são as conexões de calibre de cada teoria. Dessa maneira, a curvatura é totalmente análoga ao tensor intensidade de campo da eletrodinâmica.

Outro objeto muito importante de ser introduzido é a Torção:

$$T^a = De^a = de^a + \omega_b^a e^b. \quad (3.23)$$

Uma manifestação da sua existência está ilustrada na Figura 6. Pode-se mostrar [8] que,

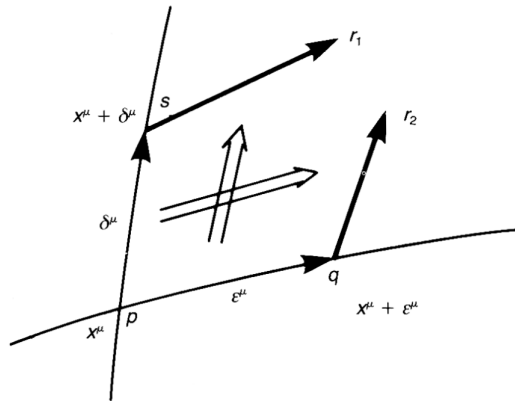


Figura 6 – Transportes paralelos do vetor ps até q e do vetor pq até s . Um espaço com torção é capaz de fazer com que $r_1 \neq r_2$. Ou seja, a regra do paralelogramo de adição dos vetores não fecha [8].

fazendo uso de (3.13) e da propriedade de torção nula assumida por Einstein, se chega justamente aos símbolos de Christoffel (3.5).

Foi visto que a aplicação consecutiva da derivada covariante é a mesma coisa que aplicar a curvatura sobre este campo, o que implica em:

$$DT^a = dT^a + \omega^a_b T^b = D^2 e^a = R^a_b e^b . \quad (3.24)$$

As equações (3.22), (3.23) e (3.24) são conhecidas como Identidades de Bianchi e são extremamente úteis para a construção de uma lagrangiana pois garantem que tomar derivadas covariantes sucessivas não produz novos tensores independentes. Diante do exposto, os ingredientes disponíveis para construir um princípio de ação para a teoria de gravitação de primeira ordem são: e^a , ω^a_b , R^a_b e T^a .

Assim, todas as propriedades geométricas da variedade podem ser expressas em termos da zweinbein e da conexão de spin, seus produtos exteriores e suas derivadas exteriores somente. Como são 1-formas locais, não carregam índices gregos de espaço-tempo (estão omitidos e saturados com a 1-forma de base dX^μ) que são associados a difeomorfismos (transformações gerais de coordenadas na variedade), conferindo, consequentemente, invariância sob essas transformações. A zweinbein se transforma, sob uma transformação de Lorentz caracterizada pela matriz de transformação Λ , da seguinte forma:

$$e^a_\mu = \Lambda^a_b e^b_\mu , \quad (3.25)$$

enquanto que a conexão de spin se transforma da seguinte maneira:

$$\omega^{ab}_\mu = \Lambda^a_c \Lambda^b_d \omega^{cd}_\mu - \Lambda^{bc} \partial_\mu \Lambda^a_c . \quad (3.26)$$

Assim, é direto ver que estas são transformações de calibre já que atuam apenas nos índices locais latinos, sem afetar as transformações gerais de difeomorfismos nos índices gregos. Portanto, as transformações locais de Lorentz ficam codificadas nos índices latinos, recebendo maior foco e caracterizando o grupo de simetria local da teoria, o grupo abeliano $SO(2)$. Diante do exposto, fica evidente a vantagem do uso das formas diferenciais do cálculo exterior em teorias de gravitação.

3.3 Princípio de ação no formalismo de primeira ordem

Como feito para a eletrodinâmica, o princípio de calibre dado na Definição 1 impõe que na construção da lagrangiana deve-se utilizar composições de objetos que sejam invariantes sob o grupo de calibre. A ação mais geral a ser construída deve ser polinomial nos campos e suas derivadas para garantir a localidade da teoria de forma que uma possível quantização seja viável das maneiras tradicionais. Os ingredientes disponíveis para essa construção são: e^a , ω^{ab} , T^a , R^{ab} e os invariantes δ^{ab} , ϵ_{ab} .

Assim sendo, o teorema de Lovelock [50] enuncia a expressão geral para obtenção de uma ação para uma teoria de gravitação em D dimensões sem conter torção.

Teorema 1 (Lovelock): *A ação mais geral para gravitação sem depender explicitamente da torção que fornece equações de campo de até segunda ordem na métrica para D dimensões é dada através de:*

$$S_L = \int \sum_{p=0}^{D/2} a_p L^{(D,p)} , \quad (3.27)$$

em que cada a_p é uma constante arbitrária e $L^{(D,p)}$ é definido por:

$$L^{(D,p)} = \epsilon_{a_1 \dots a_D} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_D} . \quad (3.28)$$

Já o teorema de Mardones-Zanelli [51] é considerado uma extensão para os casos com a torção podendo aparecer explicitamente. Não existe uma fórmula fechada para dimensão arbitrária, mas existe um algoritmo para fazer dimensão a dimensão. O teorema é enunciado a seguir.

Teorema 2 (Mardones-Zanelli): *A extensão do teorema de Lovelock para considerar termos explícitos da torção é feita adicionando os seguintes polinômios:*

$$\begin{aligned} A_{2n} &= e_{a_1} R^{a_1}_{a_2} R^{a_2}_{a_3} \dots R^{a_{n-1}}_{a_n} e^{a_n} , \text{ para } n \geq 2 \text{ par} \\ B_{2n+2} &= T_{a_1} R^{a_1}_{a_2} R^{a_2}_{a_3} \dots R^{a_{n-1}}_{a_n} e^{a_n} , \text{ para } n \geq 1 \\ C_{2n+1} &= T_{a_1} R^{a_1}_{a_2} R^{a_2}_{a_3} \dots R^{a_{n-1}}_{a_n} T^{a_n}_{a_n} , \text{ para } n \geq 1 \text{ ímpar} \\ P_{2n} &= R^{a_1}_{a_2} R^{a_2}_{a_3} \dots R^{a_n}_{a_1} , \text{ para } n \text{ par} \end{aligned} \quad (3.29)$$

na lagrangiana da ação de Lovelock S_L , em que os índices de cada polinômio representam o seu grau de forma.

Para duas dimensões, portanto, não existem termos extras para se adicionar à ação já que só se podem ter 2-formas na lagrangiana, bastando o teorema 1 para descrever a gravitação, resultando em:

$$S_G = \int \epsilon_{ab} \left(R^{ab} + \frac{\Lambda}{2} e^a e^b \right) . \quad (3.30)$$

Nota-se, dessa forma, que gravitação bidimensional é uma teoria topológica já que pela definição da curvatura (3.20), a ação é uma integral de uma derivada total (termo de Einstein-Hilbert) somado ao termo volumétrico da constante cosmológica, se tornando apenas um termo de borda (ou superfície), não contribuindo para as equações de campo. O termo de Einstein-Hilbert é, portanto, um termo de Gauss-Bonnet que mede a característica de Euler do espaço-tempo, estando relacionada à topologia e ao número de buracos deste espaço. Sendo assim, gravitação em 2 dimensões pode ser interpretada simplesmente como

um problema de Plateau, isto é, um problema de minimização de superfície/volume definido apenas em função das condições de contorno e é importante mencionar que gravitação em duas dimensões é um sistema solúvel, como apresentado em [16].

Para se introduzir férmions na ação gravitacional, será seguido o procedimento do acoplamento mínimo como feito na eletrodinâmica no Capítulo 2, isto é, a ação de Dirac será somada à ação (3.30) de gravitação pura (sem fontes de campo, já que as fontes estariam presentes num termo de tensor energia-momento [52]) com a derivada exterior substituída pela derivada covariante da respectiva interação:

$$S_{GD} = \int \epsilon_{ab} \left(R^{ab} + \frac{\Lambda}{2} e^a e^b \right) + \int \bar{\psi} (i\gamma * D - m * 1) \psi , \quad (3.31)$$

lida como $D = d - \sigma_{ab}\omega^{ab}$, em que σ_{ab} está definido no Apêndice B.

4 Mapeamento

Neste capítulo, será construído o mapa que levará a teoria eletrodinâmica bidimensional com acoplamento fermiônico para uma teoria de gravitação bidimensional baseado na ideia de que, se os grupos de calibre destas teorias são isomorfos, as teorias devam ser, de certa forma, equivalentes. Isto é, serão estabelecidas relações bem ajustadas entre os campos de cada teoria a fim de que os comportamentos dos campos e dos férmions sejam descritos não pelas equações de Maxwell, mas, sim, por uma alteração do espaço-tempo.

4.1 Teoria de partida e contagem de campos independentes

O ponto de partida é a ação (2.12) da eletrodinâmica, que pode ser escrita da seguinte maneira:

$$S_e = \int \left[\frac{1}{e^2} \left(\kappa F + \Theta * F - \frac{1}{2} \Theta * \Theta \right) + \bar{\psi} (i\gamma * \mathcal{D} - m * 1) \psi \right]. \quad (4.1)$$

Nesta ação, e é a carga elétrica¹, κ é um parâmetro de massa, definindo o primeiro termo da lagrangiana como uma densidade topológica de Chern-Pontryagin [8], adicionado para dar generalidade à teoria, de forma que não altera a dinâmica dos campos já que, conforme (2.3), é um termo de derivada total. Pelo Teorema do Cálculo Exterior, apresentado no Apêndice A, integrais de derivadas totais podem ser reescritas como integrais na borda e portanto não modificam as equações de Euler-Lagrange já que as variações são feitas com a borda fixa. Além disso, é importante mencionar que este termo claramente viola paridade (P) e reversão temporal (T)². O campo Θ é um campo auxiliar cuja equação é simplesmente $\Theta = F$, como se mostra a seguir a partir da aplicação da equação de Euler-Lagrange. Apenas os termos que contêm Θ na ação (2.12) são relevantes para definir a dinâmica deste campo, sendo definida a seguinte ação S_Θ que só contém estes termos e está transcrita para notação covariante para efetuar esse cálculo explícito:

$$S_\Theta = \int d^2x \frac{1}{2e^2} \left(\Theta_{ij} F^{ij} - \frac{1}{2} \Theta_{ij} \Theta^{ij} \right) = \int d^2x \mathcal{L}_\Theta. \quad (4.2)$$

¹ O termo $1/e^2$ geralmente não aparece, pois a carga elétrica é costumeiramente escrita de maneira explícita na definição da derivada covariante $\mathcal{D} = d - ieA$. Entretanto, ao definir como feito neste trabalho, isto é, $\mathcal{D} = d - A$, a carga fica absorvida no campo de calibre, o que permite a introdução do termo $1/e^2$ para uma definição de dimensões de massa mais apropriada para os campos e para o mapeamento que será visto. A inserção desta constante na ação acarreta apenas numa redefinição das equações de Maxwell por uma constante. Isso tudo é feito através de um reescalonamento no campo de calibre: $A \mapsto A/e$.

² Isso fica evidente ao reescrever este termo em notação tensorial, isto é, em componentes, pois aparece um símbolo de Levi-Civita ao reescrever as bases de formas diferenciais como um termo volumétrico. Uma discussão mais detalhada sobre esse tipo de violação é feita na Seção 4.3.

A partir desta ação, a equação de Euler-Lagrange é dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_\Theta}{\partial \Theta_{ab}} &= \frac{1}{2e^2} \left(\frac{\partial \Theta_{ij}}{\partial \Theta_{ab}} F^{ij} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Theta_{ij}}{\partial \Theta_{ab}} \Theta^{ij} - \frac{1}{2} \Theta_{ij} \frac{\partial \Theta^{ij}}{\partial \Theta_{ab}} \right) \\
&= \frac{1}{2e^2} \left[\delta_a^i \delta_b^j F^{ij} - \frac{1}{2} \delta_a^i \delta_b^j \Theta^{ij} - \frac{1}{2} \Theta_{ij} \frac{\partial}{\partial \Theta_{ab}} (\Theta_{kl} \delta^{ki} \delta^{lj}) \right] \\
&= \frac{1}{2e^2} \left(F^{ab} - \frac{1}{2} \Theta^{ab} - \frac{1}{2} \Theta_{ij} \delta^{ki} \delta^{lj} \delta_a^k \delta_b^l \right) \\
&= \frac{1}{2e^2} \left(F^{ab} - \frac{1}{2} \Theta^{ab} - \frac{1}{2} \Theta^{ab} \right) = 0,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

o que leva a:

$$F^{ab} = \Theta^{ab} \iff F = \Theta, \tag{4.4}$$

Desse modo, o segundo e o terceiro termo da lagrangiana de (4.1) são equivalentes ao primeiro termo da lagrangiana de (2.12). A ação (4.1) é, portanto, invariante sob as transformações de calibre do grupo $U(1)$ dadas em (2.13) além de $\delta\Theta = 0$, fazendo uso de (4.4) e de que F é um invariante de calibre. A Tabela 1 exhibe algumas propriedades³ de cada campo da ação (4.1).

Campos	A	Θ	ψ	e	κ
Dimensão	1	2	1/2	1	2
Ordem	(1, 0, 0)	(2, 0, 0)	(0, 1, 0)	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)
Estatística	—	+	—	+	+

Tabela 1 – Propriedades dos campos eletrodinâmicos: dimensão representa a dimensão de massa do campo ou parâmetro; e ordem representa ordem de forma, ordem espinorial e número de ghost, respectivamente. O sinal \pm indica se o campo ou parâmetro segue estatística bosônica ou fermiônica.

Antes de proceder com o mapeamento, é interessante realizar uma contagem dos campos independentes das teorias que se lidam aqui. A eletrodinâmica bidimensional como formulada neste trabalho possui, além dos férmions, 3 campos independentes, codificados na 1-forma $A \equiv (A_0, A_1)$ e na 2-forma $\Theta \equiv (\Theta_{01})^4$. Por outro lado, uma teoria de gravitação bidimensional possui, além dos férmions, 6 campos independentes, codificados na 1-forma $e^a \equiv (e^0_0, e^0_1, e^1_0, e^1_1)$ e na 1-forma $\omega^{ab} \equiv (\omega^{01}_0, \omega^{01}_1)$. Então a princípio, o máximo que se pode fazer é construir um mapa que seja um homomorfismo⁵, ou seja, que estabeleça apenas o caminho de ida. Para poder ir e voltar de uma teoria para a outra, deve-se construir um mapa que seja um isomorfismo⁶ e, para isso, é necessário que a quantidade de campos livres na teoria de partida seja igual à da teoria de chegada. Isso pode ser feito

³ Uma explicação para o chamado número de ghost é dada na Seção 5.3.

⁴ Apesar do campo auxiliar ter como solução (4.4) *on-shell*, a independência com o campo de calibre é garantida de maneira *off-shell*.

⁵ Uma aplicação entre dois conjuntos que preserva as leis de composição [8].

⁶ Um homomorfismo bijetivo [8].

ao se introduzir uma ação adicional que possua campos extras na forma:

$$S_b = \int d \left[(\bar{\varphi}\varphi - \bar{\zeta}\zeta) + (\bar{w}w - \bar{z}z) \right] . \quad (4.5)$$

A lagrangiana nesta ação é uma derivada exterior, portanto, pelo Teorema do Cálculo Exterior, apresentado no Apêndice A, esta ação é apenas um termo de borda que não contribui para as equações de campo. Mesmo se o sistema possuir uma borda não trivial, as contribuições destes campos na borda são apenas algébricas e não afetam a dinâmica do interior do sistema. A Tabela 2 exibe algumas propriedades de cada campo extra.

Campos	$\bar{\varphi}$	φ	$\bar{\zeta}$	ζ	\bar{w}	w	\bar{z}	z
Dimensão	0	1	0	1	0	1	0	1
Ordem	(0, 0, 0)	(1, 0, 0)	(0, 0, -1)	(1, 0, 1)	(0, 0, 0)	(1, 0, 0)	(0, 0, -1)	(1, 0, 1)
Estatística	+	-	-	+	+	-	-	+

Tabela 2 – Propriedades dos campos extras da eletrodinâmica.

Agora, utilizando a ação total :

$$S_{eb} = S_e + S_b , \quad (4.6)$$

a quantidade de campos independentes na eletrodinâmica, sem contar os férmions, será 15, já que os campos $(\bar{\varphi}, \bar{\zeta}, \bar{w}, \bar{z})$ são escalares e os campos $\varphi = \varphi_a e^a \equiv (\varphi_0, \varphi_1)$, $\zeta = \zeta_a e^a \equiv (\zeta_0, \zeta_1)$, $w = w_a e^a \equiv (w_0, w_1)$, $z = z_a e^a \equiv (z_0, z_1)$ são 1-formas, contabilizando 12 campos adicionais. Será visto que se pode ajustar também a teoria de gravitação bidimensional para ter 15 campos independentes, sem contar os férmions, justificando, o acréscimo feito na eletrodinâmica⁷.

4.2 Da eletrodinâmica para a gravitação

O mapa será construído com base no isomorfismo entre os grupos de calibre da eletrodinâmica e da gravitação: $U(1) \cong SO(2)$. Este isomorfismo induz um mapa entre as variedades que abrigam cada teoria: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow M$ (a partir daqui, $x \in \mathbb{R}^2$ e $X \in M$) [53]. Logo, um elemento $u = \exp \alpha \in U(1)$ pode ser mapeado, como mostra o Apêndice C, em um elemento $s = \exp(\alpha^{ab} \epsilon_{ab} E) \in SO(2)$ com índices $a, b, c, \dots, h \in \{0, 1\}$ sendo associado ao espaço tangente $T(M)$. O objeto $E = -\epsilon$ é o gerador do grupo $SO(2)$ e $\epsilon \equiv \epsilon_{ab}$ é a forma matricial do símbolo de Levi-Civita. Assim:

$$\alpha \longmapsto \alpha^{ab} \epsilon_{ab} , \quad (4.7)$$

⁷ Este mapa provavelmente não é único e construí-lo usando 15 campos independentes é uma liberdade que se pode fazer uso. Além disso, construir o mapa desta forma faz com que o termo de borda adicionado seja BRST exato, garantindo que sejam campos não físicos como mostra o Capítulo 5.

com α sendo imaginário. Não somente, para se obter uma ação de gravitação pós-mapeamento, parte-se da seguinte associação dos campos eletrodinâmicos com os campos de gravitação:

$$\begin{aligned}\Theta(x) &\longmapsto \mu^2 \epsilon_{ab} e^a(X) e^b(X) , \\ A(x) &\longmapsto \epsilon_{ab} \omega^{ab}(X) ,\end{aligned}\tag{4.8}$$

em que μ é um parâmetro de massa com dimensão $[\mu] = 1$ que pode ser construído a partir de κ e e . Por simplicidade, é escolhido $\mu = e$.

Para os campos extras da ação de borda auxiliar (4.5) da eletrodinâmica, se estabelece:

$$\begin{aligned}(\bar{\varphi}(x), \varepsilon \bar{\zeta}(x)) &\equiv \bar{\Phi}^a(x) \longmapsto \sigma^a(X) , \\ (\varphi(x), -\varepsilon^{-1} \zeta(x)) &\equiv \Phi^a(x) \longmapsto \phi^a(X) , \\ \bar{w}(x) &\longmapsto \bar{\eta}(X) , \\ \bar{z}(x) &\longmapsto \bar{\chi}(X) , \\ w(x) &\longmapsto \eta(X) , \\ z(x) &\longmapsto \chi(X) ,\end{aligned}\tag{4.9}$$

em que $\phi^a = \phi^a_b e^b \mid \phi_{ab} = -\phi_{ba}$. Dessa forma, fica evidente que ao aumentar o número de campos independentes do lado eletrodinâmico através dos campos extras, se induz campos independentes adicionais no lado gravitacional. A Tabela 3 exhibe algumas propriedades de cada campo da parte gravitacional. Assim, há um acréscimo no número de campos

Campos	e^a	ω^{ab}	$\bar{\eta}$	η	ϕ^a	$\bar{\chi}$	χ	σ^a
Dimensão	0	1	0	1	1	0	1	0
Ordem	(1, 0, 0)	(1, 0, 0)	(0, 0, 0)	(1, 0, 0)	(1, 0, 0)	(0, 0, -1)	(1, 0, 1)	(0, 0, 0)
Estatística	—	—	+	—	—	—	+	+

Tabela 3 – Propriedades dos campos da gravitação.

independentes na gravitação, chegando a 15 (sem contar os férmions) já que $(\bar{\eta}, \bar{\chi}, \sigma^0, \sigma^1)$ são escalares e $\eta = \eta_a e^a \equiv (\eta_0, \eta_1)$, $\chi = \chi_a e^a \equiv (\chi_0, \chi_1)$ e $\phi^a = \phi^a_b e^b \equiv (\phi^0_1)$ são 1-formas.

As matrizes de Dirac são idênticas:

$$\gamma_i dx^i \longmapsto \gamma_a dX^a = \gamma_a e^a(X) .\tag{4.10}$$

E para o espinor que representa os férmions de Dirac, o mapeamento é simples: espinores em \mathbb{R}^2 são mapeados em espinores em M,

$$\psi(x) \longmapsto \psi(X) .\tag{4.11}$$

É interessante mencionar que o jacobiano para o mapeamento levando em consideração todos os campos é não trivial e é necessário para possíveis tentativas de quantização do

modelo. Seu cálculo está feito no Apêndice D, e seu módulo⁸ é dado por:

$$|\det J| = 2e^2 \det^{3/2}(\phi^a_b) e^3. \quad (4.12)$$

Aplicando o mapeamento estipulado em (4.8), (4.9), (4.10) e (4.11) na ação (4.6) se obtém:

$$\begin{aligned} S_e &\mapsto \int \left\{ \frac{1}{e^2} \left[\kappa \epsilon_{ab} d\omega^{ab} + (e^2 \epsilon_{cd} e^c e^d) * (\epsilon_{ab} d\omega^{ab}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} (e^2 \epsilon_{ab} e^a e^b) * (e^2 \epsilon_{cd} e^c e^d) \right] + \bar{\psi} (i\gamma_a e^a * \nabla - m * 1) \psi \right\} \\ &= \int \left\{ \frac{1}{e^2} \left[\kappa \epsilon_{ab} d\omega^{ab} + e^2 \epsilon_{cd} e^c e^d \epsilon_{ab} \epsilon^{fe} \partial_f \omega^{ab}_e \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} e^2 \epsilon_{ab} e^a e^b e^2 \epsilon_{cd} \epsilon^{cd} \right] + \bar{\psi} \left(i\gamma_a e^a * \nabla - m \frac{1}{2} \epsilon_{ab} e^a e^b \right) \psi \right\} \\ &= \int \left\{ \frac{1}{e^2} \left[\kappa \epsilon_{ab} d\omega^{ab} + e^2 \epsilon_{ab} (\delta^f_c \delta^e_d - \delta^f_d \delta^e_c) \partial_f \omega^{ab}_e e^c e^d \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} e^4 \epsilon_{ab} (\delta^c_c \delta^d_d - \delta^c_d \delta^d_c) e^a e^b \right] + \bar{\psi} \left(i\gamma_a e^a * \nabla - m \frac{1}{2} \epsilon_{ab} e^a e^b \right) \psi \right\} \\ &= \int \left\{ \frac{1}{e^2} \left[\kappa \epsilon_{ab} d\omega^{ab} + e^2 \epsilon_{ab} \partial_c \omega^{ab}_d e^c e^d - e^2 \epsilon_{ab} \partial_d \omega^{ab}_c e^c e^d \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} e^4 \epsilon_{ab} (2) e^a e^b \right] + \bar{\psi} \left(i\gamma_a e^a * \nabla - m \frac{1}{2} \epsilon_{ab} e^a e^b \right) \psi \right\} \\ &= \int \left\{ \frac{1}{e^2} \left[\kappa \epsilon_{ab} d\omega^{ab} + e^2 \epsilon_{ab} d\omega^{ab} + e^2 \epsilon_{ab} d\omega^{ab} - e^4 \epsilon_{ab} e^a e^b \right] \right. \\ &\quad \left. + \bar{\psi} \left(i\gamma_a e^a * \nabla - m \frac{1}{2} \epsilon_{ab} e^a e^b \right) \psi \right\} \\ &= \int \left\{ \frac{1}{e^2} \left[(\kappa + 2e^2) \epsilon_{ab} R^{ab} - e^4 \epsilon_{ab} e^a e^b \right] + \bar{\psi} \left(i\gamma_a e^a * \nabla - m \frac{1}{2} \epsilon_{ab} e^a e^b \right) \psi \right\}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

e:

$$S_b \mapsto \int d(\phi^a \sigma_a + \bar{\eta} \eta - \bar{\chi} \chi). \quad (4.14)$$

O resultado é uma ação de gravidade da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_{grav} &= \int \frac{1}{8\pi G} \epsilon_{ab} \left(R^{ab} - \frac{\Lambda^2}{2} e^a e^b \right) + \int \bar{\psi} \left(i\gamma_a e^a * \nabla - \frac{m}{2} \epsilon_{ab} e^a e^b \right) \psi \\ &\quad + \int d(\phi^a \sigma_a + \bar{\eta} \eta - \bar{\chi} \chi), \end{aligned} \quad (4.15)$$

com:

$$G = \frac{1}{8\pi} \frac{e^2}{(\kappa + 2e^2)}, \quad (4.16)$$

$$\Lambda^2 = \frac{2e^4}{(\kappa + 2e^2)}, \quad (4.17)$$

em que suas dimensões de massa são $[G] = 0$ e $[\Lambda] = 1$. Além disso, o mapeamento induz uma derivada covariante ∇ definida como:

$$\nabla = d - \epsilon_{ab} \omega^{ab}. \quad (4.18)$$

⁸ Para a quantização, o que interessa é basicamente a forma funcional, por isso sinais e outros fatores multiplicativos não são relevantes.

4.3 Teoria de chegada e violação de paridade e reversão temporal

Uma vez aplicado o mapeamento, é interessante analisar cada termo da ação (4.15) obtida.

A primeira integral se refere ao setor de gravitação pura e seu primeiro termo é o termo de Einstein-Hilbert, que é um termo topológico de Gauss-Bonnet [6] já que $R^{ab} = d\omega^{ab}$ em 2 dimensões. O segundo termo na primeira integral é um termo volumétrico de constante cosmológica. Assim, o setor de gravitação define um problema de Plateau [6], isto é, se resume a determinar a superfície mínima a partir de condições de contorno. Além disso, as constantes fundamentais da gravitação G (constante de Newton) e Λ (constante cosmológica) são dadas inteiramente em termos das constantes fundamentais da eletrodinâmica e (carga elétrica) e κ (constante do termo de Chern-Pontryagin) como mostrado em (4.16) e (4.17). Caso o termo de Chern-Pontryagin não esteja presente na ação (2.12) de partida do mapeamento, as constantes da gravitação ficam fixadas da seguinte forma:

$$G = \frac{1}{16\pi} , \quad (4.19)$$

$$\Lambda^2 = e^2 . \quad (4.20)$$

que é consistente com o fato de que G é um parâmetro adimensional em 2 dimensões.

A última integral de (4.15) é de uma lagrangiana de derivada total: se o espaço-tempo não tem borda, este termo não contribui para as equações de campo, não conferindo dinâmica extra para o sistema. Entretanto, se o espaço-tempo for não trivial, este termo deve ser levado em consideração, mas apenas para correções algébricas e somente na borda. A origem desta integral está justamente na adição dos campos extras de eletrodinâmica feita para que o número de campos independentes fosse o mesmo nos dois lados do mapeamento: o mapa (4.9) associa os campos extras da eletrodinâmica com campos extras para a gravitação.

Por fim, resta analisar a segunda integral, referente aos férmions. Devido à presença da derivada covariante (4.18) induzida pelo mapeamento, este termo não é simplesmente um termo de férmions de Dirac em espaço-tempo curvo: para isso, a derivada covariante deveria ser apenas $D = d - \sigma_{ab}\omega^{ab}$. A presença do símbolo de Levi-Civita no lugar da matriz σ^{ab} acarreta em violação de paridade (P) e reversão temporal (T) no termo de interação já que, sob uma transformação de coordenadas, o símbolo se transforma com o determinante da transformação, dado em (A.17). Dessa forma, como as transformações de paridade e reversão temporal representam transformações discretas representadas em termos de elementos do grupo $O(2)$ com determinante negativo, a aplicação dessas transformações carregariam um sinal que impediria a invariância da lagrangiana. Fazendo uso de (B.5),

pode-se escrever o termo de interação da derivada covariante como:

$$\mathcal{L}_I = e_\mu^a \epsilon_{bc} \omega_\mu^{bc} \bar{\psi} \gamma_a \psi = -e_\mu^a \omega_\mu^{bc} \bar{\psi} \gamma_a \gamma^3 \sigma_{bc} \psi , \quad (4.21)$$

Desta forma, a ação (4.15) descreve uma teoria de gravitação com violação de paridade e reversão temporal. É importante salientar que esta violação acontece mesmo quando $\kappa = 0$, ou seja, apesar da teoria de partida possuir um termo de κF que viole paridade, a violação na teoria de chegada não é causada pela presença deste termo de Chern-Pontryagin.

4.4 Simetria de calibre

É interessante avaliar as transformações de calibre da ação (4.15) obtida através do mapeamento, que são:

$$\begin{aligned} \delta \omega^a_b &= d\alpha^a_b , \\ \delta e^a &= \alpha^a_b e^b , \\ \delta \psi &= \alpha^{ab} \epsilon_{ab} \psi , \\ \delta \bar{\psi} &= -\bar{\psi} \alpha^{ab} \epsilon_{ab} , \end{aligned} \quad (4.22)$$

e atuam apenas nas duas primeiras integrais da ação já que a última integral se refere apenas aos campos extras. Definindo:

$$S_g = \frac{1}{8\pi G} \int \epsilon_{ab} \left(R^{ab} - \frac{\Lambda^2}{2} e^a e^b \right) = \frac{1}{8\pi G} \int \mathcal{L}_g , \quad (4.23)$$

e:

$$S_\nabla = \int \bar{\psi} \left(i\gamma_a e^a * \nabla - \frac{m}{2} \epsilon_{ab} e^a e^b \right) \psi = \int \mathcal{L}_\nabla , \quad (4.24)$$

é possível reescrever a ação (4.15) da seguinte maneira:

$$S_{grav} = S_g + S_\nabla + \int d(\phi^a \sigma_a + \bar{\eta} \eta - \bar{\chi} \chi) . \quad (4.25)$$

Como as transformações de calibre não devem mudar a dinâmica do sistema, ao aplicar as transformações (4.22) nas lagrangianas \mathcal{L}_g e \mathcal{L}_∇ de (4.15) se deve obter que as variações

$\delta\mathcal{L}_g$ e $\delta\mathcal{L}_\nabla$ são nulas e, conseqüentemente, que $\delta S = 0$. Conferindo para \mathcal{L}_g :

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_g &= \delta \left(\epsilon_{ab} R^{ab} \right) - \delta \left(\epsilon_{ab} \frac{\Lambda^2}{2} e^a e^b \right) \\
&= \epsilon_{ab} \left(\delta R^{ab} \right) - \epsilon_{ab} \frac{\Lambda^2}{2} \delta \left(e^a e^b \right) \\
&= \epsilon_{ab} \left[\delta \left(d\omega^{ab} \right) \right] + \epsilon_{ab} \frac{\Lambda^2}{2} \left[(\delta e^a) e^b + e^a (\delta e^b) \right] \\
&= \epsilon_{ab} d \left(\delta\omega^{ab} \right) + \epsilon_{ab} \frac{\Lambda^2}{2} \left(\alpha^a{}_c e^c e^b + e^a \alpha^b{}_c e^c \right) \\
&= \cancel{\epsilon_{ab} d^2 \omega^{ab}} + \frac{\Lambda^2}{2} \left(\epsilon_{ab} \alpha^a{}_c e^c e^b + \epsilon_{ab} \alpha^b{}_c e^a e^c \right) \\
&= \frac{\Lambda^2}{2} \left(\epsilon_{cb} \alpha^c{}_a e^a e^b + \epsilon_{ac} \alpha^c{}_b e^a e^b \right) \\
&= \frac{\Lambda^2}{2} \left(\epsilon_{cb} \alpha^c{}_a + \epsilon_{ac} \alpha^c{}_b \right) e^a e^b \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{4.26}$$

em que foi usado que $\alpha^a{}_b e^c = e^c \alpha^a{}_b$, $\delta\epsilon_{ab} = \epsilon_{cb} \alpha^c{}_a + \epsilon_{ac} \alpha^c{}_b = 0$ e também o Lema de Poincaré (A.21). Assim, fica evidente que \mathcal{L}_g é invariante sob as transformações propostas.

Resta conferir se \mathcal{L}_∇ também é invariante, isto é, se $\delta\mathcal{L}_\nabla = 0$. Reescrevendo:

$$\delta\mathcal{L}_\nabla = \delta \left(\bar{\psi} i \gamma_a e^a * \nabla \psi \right) - \delta \left(\bar{\psi} \frac{m}{2} \epsilon_{ab} e^a e^b \psi \right), \tag{4.27}$$

e conferindo o primeiro termo desta ação:

$$\begin{aligned}
\delta \left(\bar{\psi} i \gamma_a e^a * \nabla \psi \right) &= \delta \left(\bar{\psi} i \gamma_a e^a * d\psi - \bar{\psi} i \gamma_a e^a * \omega^{bc} \epsilon_{bc} \psi \right) \\
&= (\delta\bar{\psi}) i \gamma_a e^a * d\psi + \bar{\psi} i (\delta\gamma_a) e^a * d\psi + \bar{\psi} i \gamma_a (\delta e^a) * d\psi - \bar{\psi} i \gamma_a e^a * d(\delta\psi) \\
&\quad - (\delta\bar{\psi}) i \gamma_a e^a * \omega^{bc} \epsilon_{bc} \psi - \bar{\psi} i (\delta\gamma_a) e^a * \omega^{bc} \epsilon_{bc} \psi - \bar{\psi} i \gamma_a (\delta e^a) * \omega^{bc} \epsilon_{bc} \psi \\
&\quad - \bar{\psi} i \gamma_a e^a * (\delta\omega^{bc}) \epsilon_{bc} \psi - \bar{\psi} i \gamma_a e^a * \omega^{bc} \epsilon_{bc} (\delta\psi) \\
&= -\bar{\psi} \alpha^{bc} \epsilon_{bc} i \gamma_a e^a * d\psi + \cancel{\bar{\psi} i \alpha^b{}_a \gamma_b e^a * d\psi} + \cancel{\bar{\psi} i \gamma_a \alpha^a{}_b e^b * d\psi} + \bar{\psi} i \gamma_a e^a * d(\alpha^{bc} \epsilon_{bc} \psi) \\
&\quad + \bar{\psi} \alpha^{de} \epsilon_{de} i \gamma_a e^a * \omega^{bc} \epsilon_{bc} \psi - \bar{\psi} i \alpha^d{}_a \gamma_d e^a * \omega^{bc} \epsilon_{bc} \psi - \bar{\psi} i \gamma_a \alpha^a{}_d e^d * \omega^{bc} \epsilon_{bc} \psi \\
&\quad - \bar{\psi} i \gamma_a e^a * (d\alpha^{bc}) \epsilon_{bc} \psi - \bar{\psi} i \gamma_a e^a * \omega^{bc} \epsilon_{bc} \alpha^{de} \epsilon_{de} \psi \\
&= -\bar{\psi} \alpha^{bc} \epsilon_{bc} i \gamma_a e^a * d\psi + \bar{\psi} i \gamma_a e^a * d(\alpha^{bc} \epsilon_{bc} \psi) + \cancel{\bar{\psi} \alpha^{de} \epsilon_{de} i \gamma_a e^a * \omega^{bc} \epsilon_{bc} \psi} \\
&\quad - \bar{\psi} i \alpha^d{}_a \gamma_d e^a * \omega^{bc} \epsilon_{bc} \psi - \bar{\psi} i \gamma_a \alpha^a{}_d e^d * \omega^{bc} \epsilon_{bc} \psi - \bar{\psi} i \gamma_a e^a * (d\alpha^{bc}) \epsilon_{bc} \psi \\
&\quad - \cancel{\bar{\psi} i \gamma_a e^a * \omega^{bc} \epsilon_{bc} \alpha^{de} \epsilon_{de} \psi} \\
&= -\bar{\psi} \alpha^{bc} \epsilon_{bc} i \gamma_a e^a * d\psi + \bar{\psi} i \gamma_a e^a * d(\alpha^{bc} \epsilon_{bc} \psi) - \cancel{\bar{\psi} i \alpha^d{}_a \gamma_d e^a * \omega^{bc} \epsilon_{bc} \psi} \\
&\quad - \cancel{\bar{\psi} i \gamma_a \alpha^a{}_d e^d * \omega^{bc} \epsilon_{bc} \psi} - \bar{\psi} i \gamma_a e^a * (d\alpha^{bc}) \epsilon_{bc} \psi \\
&= -\bar{\psi} \alpha^{bc} \epsilon_{bc} i \gamma_a e^a * d\psi + \bar{\psi} i \gamma_a e^a * d(\alpha^{bc} \epsilon_{bc} \psi) - \bar{\psi} i \gamma_a e^a * (d\alpha^{bc}) \epsilon_{bc} \psi \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

em que foi utilizado que $\gamma_a e_\mu^a = \gamma_\mu$ e $\delta\gamma_\mu = 0$ de forma que, a fim de garantir isso, é necessário introduzir a variação: $\delta\gamma_a = \alpha_a^b \gamma_b$; também foi utilizado que $\alpha_a^b = -\alpha_b^a$ de acordo com a construção da álgebra do grupo de Lorentz [37]. Por fim, conferindo o segundo termo:

$$\begin{aligned}
\delta \left(\bar{\psi} \frac{m}{2} \epsilon_{ab} e^a e^b \psi \right) &= (\delta\bar{\psi}) \frac{m}{2} \epsilon_{ab} e^a e^b \psi + \bar{\psi} \frac{m}{2} \epsilon_{ab} (\delta e^a) e^b \psi + \bar{\psi} \frac{m}{2} \epsilon_{ab} e^a (\delta e^b) \psi + \bar{\psi} \frac{m}{2} \epsilon_{ab} e^a e^b (\delta\psi) \\
&= - \cancel{\bar{\psi} \alpha^{cd} \epsilon_{cd} \frac{m}{2} \epsilon_{ab} e^a e^b \psi} + \bar{\psi} \frac{m}{2} \epsilon_{ab} \alpha^a_c e^c e^b \psi + \bar{\psi} \frac{m}{2} \epsilon_{ab} e^a \alpha^b_c e^c \psi \\
&\quad + \cancel{\bar{\psi} \frac{m}{2} \epsilon_{ab} e^a e^b \alpha^{cd} \epsilon_{cd} \psi} \\
&= \bar{\psi} \frac{m}{2} \epsilon_{cb} \alpha^c_a e^a e^b \psi + \bar{\psi} \frac{m}{2} \epsilon_{ac} e^a \alpha^c_b e^b \psi \\
&= \bar{\psi} \frac{m}{2} (\epsilon_{cb} \alpha^c_a + \epsilon_{ac} \alpha^c_b) e^a e^b \psi \\
&= 0 .
\end{aligned} \tag{4.29}$$

em que foram utilizadas as mesmas relações aplicadas nas análises dos outros termos.

Uma vez conferidas as transformações de calibre, é importante interpretá-las. As transformações da zweinbein e da conexão de spin são as transformações $SO(2)$ de Lorentz usuais, ou seja, os campos de gravitação se transformam normalmente por rotações locais.

Já os férmions não se transformam como o esperado: como mencionado na seção anterior, o termo de interação não é um termo de férmions de Dirac em espaço-tempo curvo e faz com que as transformações de calibre tenham um símbolo de Levi-Civita em vez da matriz sigma de Lorentz (B.4). O mapeamento, portanto, acarreta em transformações de calibre nada usuais como as apresentadas em (4.22) e confere propriedades inusitadas aos férmions: os férmions saem da teoria eletrodinâmica se comportando de uma determinada maneira e, através do mapa, chegam na teoria de gravitação se comportando de outra forma. As transformações dos férmions em (4.22) se parecem com transformações quirais locais [54], mas não são: são transformações de Lorentz dotadas de uma matriz γ^3 já que podem ser reescritas, utilizando as relações (B.5), da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\delta\psi &= -\alpha^{ab} \gamma^3 \sigma_{ab} \psi , \\
\delta\bar{\psi} &= \bar{\psi} \alpha^{ab} \gamma^3 \sigma_{ab} .
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Uma abordagem possível para conseguir alguma interpretação física dessas transformações de calibre distintas é avaliar como elas atuam sobre as projeções quirais do espinor dos férmions. Os projetores quirais são o operador hermitiano P e seu transposto⁹:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2} (1 + i\gamma^3) , \\
P^T &= \frac{1}{2} (1 - i\gamma^3) ,
\end{aligned} \tag{4.31}$$

⁹ O fator i é necessário porque $(\gamma^3)^2 = -1$, que é uma consequência de se estar trabalhando no espaço euclidiano.

e, portanto, as componentes direita e esquerda do espinor são dadas por:

$$\begin{aligned}\psi_R &= P\psi , \\ \psi_L &= P^T\psi ,\end{aligned}\tag{4.32}$$

que possuem transformações de calibre do tipo:

$$\begin{aligned}\delta\psi_R &= i\alpha^{ab}\sigma_{ab}\psi_R , \\ \delta\psi_L &= -i\alpha^{ab}\sigma_{ab}\psi_L .\end{aligned}\tag{4.33}$$

Estas são transformações do grupo de calibre $SO(2)$ para espinores [54] com um fator $-i$ extra em cada componente. Dessa forma, a componente direita se transforma normalmente sob o grupo de Lorentz enquanto que a componente esquerda se transforma com a inversa. Um efeito desta constatação pode ser visto através do seguinte exemplo. Sejam duas partículas em configurações distintas, isto é, a partícula rotulada como p_R é descrita inteiramente pela sua componente direita e a partícula rotulada como p_L é descrita inteiramente pela sua componente esquerda. Ambas estão em repouso de acordo com o observador O_1 . O observador O_2 viaja com velocidade V para a direita com relação ao observador O_1 . A transformação de Lorentz para as respectivas velocidades v_R e v_L de cada partícula são simplesmente:

$$v_{R,L} = \mp V ,\tag{4.34}$$

já que elas estão em repouso com relação ao observador O_1 . Assim, em vez do observador O_2 ver as duas partículas indo para a esquerda com velocidade $-V$, ele vê p_R indo pra esquerda com velocidade $-V$ e p_L indo pra direita com velocidade V . Este efeito inusitado está associado à violação de paridade e reversão temporal do modelo, fazendo com que, além de uma rotação $SO(2)$ de Lorentz, os férmions descritos inteiramente pelas suas componentes esquerdas também invertam o eixo do sistema de coordenadas.

5 Quantização

Neste capítulo serão discutidas as bases teóricas [54] necessárias para, ao final, abordar o mapeamento em nível quântico.

5.1 Método de Faddeev-Popov

Em teoria quântica de campos é usualmente empregada a técnica da integral de caminho para obter as probabilidades de transição de estados a fim de descrever a dinâmica de um sistema, conferindo um caráter totalmente análogo ao cálculo de probabilidades de observáveis em termos da função de partição em Mecânica Estatística. A integral de caminho é uma integral funcional dada em termos da ação e calculada em todo o espaço de configuração dos campos:

$$Z = \int \mathcal{D}A \exp(-S[A]) , \quad (5.1)$$

em que $\mathcal{D}A$ indica que a integral é calculada em todas as configurações dos campos que compõem a teoria¹; o argumento da exponencial é negativo e não carrega o termo imaginário, pois se está trabalhando no espaço-tempo euclidiano. Entretanto, teorias com simetria de calibre possuem redundâncias nos graus de liberdade já que diferentes configurações dos campos de calibre representam o mesmo estado físico. É comumente dito que campos fisicamente equivalentes habitam a mesma órbita de calibre, dessa forma, durante o cálculo da integral de caminho no processo de quantização da teoria, é necessário fixar o calibre, isto é, escolher uma configuração específica que represente cada classe de equivalência dentro da teoria com o objetivo de desconsiderar as redundâncias, ou seja, escolher um campo de cada órbita de calibre para remover a degenerescência. Isso pode ser feito através do método de Faddeev-Popov [55], desenvolvido para a quantização de teorias de calibre não-abelianas. Como neste trabalho se lida com teorias de calibre abelianas, a apresentação do método será em sua forma abeliana².

Seja a teoria eletromagnética de Maxwell sem termo de fontes, isto é, uma teoria abeliana, cuja ação é dada por:

$$S[A] = \int \frac{1}{2} F * F , \quad (5.2)$$

¹ Em muitos casos se usa $Z[J]$ para indicar que o funcional gerador depende de uma fonte externa acoplada aos campos, entretanto esta notação será suprimida para apenas Z neste trabalho e serão indicados apenas os campos já que nenhum cálculo explícito será feito.

² Para teorias não-abelianas como o modelo padrão, devem ser consideradas as cópias de Gribov para o cálculo correto da integral funcional [56].

Começa-se introduzindo a seguinte identidade na integral funcional:

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha \delta(G[A^\alpha]) \det\left(\frac{\delta G[A^\alpha]}{\delta \alpha}\right), \quad (5.3)$$

que força a condição $G[A] = 0$ de fixação de calibre, garantindo que a integral desconsidere os termos redundantes, em que A^α é o campo transformado por uma transformação de calibre de parâmetro α . A integral funcional fica escrita como:

$$Z = \int \mathcal{D}A \int \mathcal{D}\alpha \delta(G[A^\alpha]) \det\left(\frac{\delta G[A^\alpha]}{\delta \alpha}\right) \exp(-S[A]). \quad (5.4)$$

Dessa forma, surge um determinante que é basicamente o jacobiano da transformação que fixa o calibre. Escolhendo, por exemplo, os calibres lineares covariantes:

$$G = d * A + w, \quad (5.5)$$

para a fixação, se obtém que:

$$G[A^\alpha] = d * A + \frac{1}{e} d * d\alpha + w, \quad (5.6)$$

e:

$$\frac{\delta G}{\delta \alpha} = \frac{1}{e} d * d. \quad (5.7)$$

Portanto, o determinante é independente de α , podendo trocar todas as quantidades invariantes de calibre seguindo a troca $A^\alpha \rightarrow A$, permitindo escrever que:

$$Z = \left(\int \mathcal{D}\alpha \right) \int \mathcal{D}A \delta(d * A + w) \det\left(\frac{1}{e} d * d\right) \exp(-S[A]). \quad (5.8)$$

É possível integrar sobre w ambos os lados da equação acima com uma distribuição gaussiana do tipo:

$$\int \mathcal{D}w \exp\left(-\int \frac{w^2}{2\xi}\right), \quad (5.9)$$

em que o lado esquerdo, dado através de (5.1), não depende de w , sendo apenas multiplicado por uma função de ξ . Chega-se então a:

$$Z = N(\xi) \int \mathcal{D}A \det\left(\frac{1}{e} d * d\right) \exp\left\{-\int \left[\frac{1}{2} F * F + \frac{1}{2\xi} (d * A)^2\right]\right\}, \quad (5.10)$$

em que $N(\xi)$ é apenas uma função de ξ podendo ser entendida como um fator de normalização. Esse determinante é mais complicado para o caso não-abeliano e foi engenhosamente reescrito por Faddeev e Popov em termos dos chamados campos de ghost c e anti-ghost \bar{c} :

$$\det\left(\frac{1}{e} d * d\right) = \int \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \exp\left[-\int \bar{c} (d * d) c\right], \quad (5.11)$$

de modo que a integral funcional com calibre fixado fica dada por:

$$Z = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \exp\left\{-\int d^4x \left[\frac{1}{2} F * F + \frac{1}{2\xi} (d * A)^2 + \bar{c} (d * d) c\right]\right\}. \quad (5.12)$$

Assim, é direto ver que o processo de fixação de calibre introduz termos extras na ação. Os campos de ghost são simplesmente artifícios matemáticos sem interpretação física, mas que garantem a consistência da quantização das teorias de calibre e aparecem justamente na construção da teoria BRST que introduz uma nova simetria para o problema. O termo de Faddeev-Popov pode ser eliminado por normalização no caso abeliano já que o determinante que aparece é mais simples que o do caso não-abeliano. Entretanto, foi mantido para deixar a simetria BRST evidente.

5.2 Formalismo BRST

O formalismo BRST, que leva este nome em razão dos seus desenvolvedores Becchi, Rouet, Stora [57] e (de maneira independente) Tyutin [58], é extremamente vantajoso de se usar ao se trabalhar com teorias de calibre, principalmente no âmbito quântico, pois evidencia quais são as quantidades físicas e não físicas da teoria ao organizar e distinguir os graus de liberdade em uma estrutura coomológica³.

Para identificar essa nova simetria de (5.12) de forma simples, é interessante introduzir um campo auxiliar b (campo de Lautrup-Nakanishi [59]) na lagrangiana da integral funcional (5.12) seguindo um procedimento totalmente análogo ao utilizado para acrescentar o campo auxiliar Θ na eletrodinâmica, dado na equação (4.1), resultando em:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} F * F - \frac{\xi}{2} b^2 - b d * A + \bar{c} (d * d) c . \quad (5.13)$$

Para voltar à ação na sua forma anterior, basta completar o quadrado com o segundo e o terceiro termo, lembrando que agora é necessária uma integral sobre o campo b . Agora a lagrangiana é invariante sob as seguintes transformações (BRST):

$$\begin{aligned} \delta A &= \epsilon dc , \\ \delta c &= 0 , \\ \delta \bar{c} &= \epsilon b , \\ \delta b &= 0 , \end{aligned} \quad (5.14)$$

com ϵ sendo um parâmetro infinitesimal anticomutativo, ou seja, uma variável de Grassmann. A transformação do campo A é claramente uma transformação de calibre local com parâmetro de calibre dado por $\alpha = \epsilon c$. As transformações para um campo qualquer ϕ podem ser definidas como $\delta \phi = \epsilon s \phi$, com s sendo o chamado operador BRST.

O operador BRST s é nilpotente:

$$s^2 = 0 . \quad (5.15)$$

³ Para aprofundamento sobre coomologia, consultar [8].

como se pode conferir a partir de (5.14) ao aplicar as variações dos campos sobre as próprias variações [54]. Isso faz com que seja possível separar o espaço de atuação desse operador em 3 subespaços diferentes. Para ver isso, é interessante considerar a quantização canônica, em vez da quantização por integral de caminho, a fim de se trabalhar com a formulação hamiltoniana. Neste cenário, é possível associar uma carga s (autovalor do operador BRST s) conservada devido à simetria contínua BRST através do Teorema de Noether [36]. Dessa forma, o operador BRST comuta com o espaço de Hilbert \mathcal{H} , já que s é conservado [60], compartilhando portanto o mesmo conjunto de autoestados e permitindo dividir o respectivo espaço de Hilbert em $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, de maneira que:

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &\in \mathcal{H}_0, \text{ tal que } s|\psi_0\rangle = 0, \text{ e } |\psi_0\rangle \neq s|\psi_1\rangle, \\ |\psi_1\rangle &\in \mathcal{H}_1, \text{ tal que } s|\psi_1\rangle \neq 0, \\ |\psi_2\rangle &\in \mathcal{H}_2, \text{ tal que } s|\psi_2\rangle = 0, \text{ e } |\psi_2\rangle = s|\psi_1\rangle. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Assim, é possível realizar o seguinte raciocínio intuitivo⁴. Analisando as transformações BRST (5.14) neste regime e notando que a equação de Lagrange para o campo auxiliar b é dada por $\xi b = -d * A$, é possível reescrevê-las como:

$$\begin{aligned} sA &= dc, \\ sc &= 0, \\ s\bar{c} &= b = -\frac{1}{\xi}d * A, \\ sb &= -s\frac{1}{\xi}d * A = 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Lançando mão de uma transformada de Fourier a fim de se trabalhar no espaço de momento, é possível ver que o operador s aniquila o ghost e transforma a componente longitudinal de A com polarização positiva em ghost; por outro lado, aniquila uma componente longitudinal de A com polarização negativa e transforma um antighost em uma componente longitudinal de A com polarização negativa. Assim, bósons associados a campos de calibre transversos (os únicos componentes físicos da teoria) pertencem a \mathcal{H}_0 , anti-ghosts e bósons associados a campos de calibre com polarização positiva pertencem a \mathcal{H}_1 e ghosts e bósons associados a campos com polarização negativa pertencem a \mathcal{H}_2 . Os bósons associados a campos de calibre longitudinais (os componentes não físicos da teoria), portanto, ficam separados nestes outros dois subespaços.

Com isso, o formalismo BRST traça as seguintes definições. Uma quantidade X é chamada de BRST fechada se:

$$sX = 0. \quad (5.18)$$

Quantidades BRST fechadas são fisicamente relevantes para os observáveis da teoria contanto que não sejam exatas. Uma quantidade Y é chamada de BRST exata se:

$$Y = sZ, \quad (5.19)$$

⁴ Um argumento mais rigoroso é dado em [61].

em que Z é uma outra quantidade (operador ou campo), fazendo com que Y seja necessariamente fechada. Quantidades BRST exatas são não físicas (puramente matemáticas). Diante do que foi apresentado, já é possível trabalhar o mapeamento proposto neste trabalho em nível quântico fazendo uso deste formalismo.

5.3 Mapeamento via BRST

Primeiramente, a ação da eletrodinâmica (4.1) é invariante sob as transformações BRST:

$$\begin{aligned}
 sA &= dc , \\
 sc &= 0 , \\
 s\Theta &= 0 , \\
 s\psi &= c\psi , \\
 s\bar{\psi} &= -c\bar{\psi} ,
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

em que tanto c como s carregam número de ghost 1 (enquanto que \bar{c} possui número de ghost -1) e não possuem dimensão de massa. O número de ghost é uma quantidade conservada em uma teoria pois, justamente, checka se há um equilíbrio entre ghosts e antighosts, estando associado à variável de Grassmann ϵ , sendo, portanto, um número fermiônico. Analisando, agora, o termo de borda (4.5) adicionado na eletrodinâmica. Os campos extras que este termo carrega podem ser organizados como dubletos BRST, garantindo que sejam quantidades exatas e, portanto, não estejam no espectro físico do modelo, sendo caracterizadas pelas transformações:

$$\begin{aligned}
 s\bar{\zeta} &= \bar{\varphi} , \\
 s\bar{\varphi} &= 0 , \\
 s\varphi &= \zeta , \\
 s\zeta &= 0 ,
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

e:

$$\begin{aligned}
 s\bar{z} &= \bar{w} , \\
 s\bar{w} &= 0 , \\
 sw &= z , \\
 sz &= 0 .
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Isso permite escrever a ação de borda (4.5) como uma quantidade BRST exata:

$$S_b = -s \int d \left(\bar{\zeta}\varphi - \bar{z}w \right) , \tag{5.23}$$

garantindo e reforçando que, além dos campos extras, a própria ação auxiliar não contribua em observáveis físicos.

Assim, o mapa da eletrodinâmica para a gravitação pode ser estendido para as simetrias BRST apresentadas acima. O mapa para o campo de ghost é obtido substituindo o parâmetro de calibre α de (4.7) pelo campo de ghost c :

$$c(x) \rightarrow \epsilon_{ab} c^{ab}(X) , \quad (5.24)$$

o que faz com que as transformações BRST para os campos da gravitação e os espiniores sejam:

$$\begin{aligned} s\omega^{ab} &= dc^{ab} , \\ sc^{ab} &= 0 , \\ se^a &= c^a_b e^b , \\ s\psi &= \epsilon_{ab} c^{ab} \psi , \\ s\bar{\psi} &= -\epsilon_{ab} c^{ab} \bar{\psi} , \end{aligned} \quad (5.25)$$

e para os campos auxiliares da gravitação:

$$\begin{aligned} s\xi^a &= \phi^a + c^a_b \xi^b , \\ s\phi^a &= c^a_b \phi^b , \\ s\rho^a &= \sigma^a + c^a_b \rho^b , \\ s\sigma^a &= c^a_b \sigma^b , \end{aligned} \quad (5.26)$$

e:

$$\begin{aligned} s\bar{\chi} &= \bar{\eta} , \\ s\bar{\eta} &= 0 , \\ s\eta &= \chi , \\ s\chi &= 0 , \end{aligned} \quad (5.27)$$

em que $s\phi^{ab} = c^a_c \phi^{cb} - c^b_c \phi^{ca}$. Organizando dessa forma, os campos auxiliares da gravitação são dubletos BRST e o termo de borda (4.14) pode ser reescrito como um termo BRST exato:

$$S_b = s \int d(\xi^a \sigma_a - \bar{\chi} \eta) . \quad (5.28)$$

garantindo que não afete observáveis físicos. Os campos ξ^a e ρ^a foram introduzidos para garantir esta estrutura de dubleto e não afetam o modelo. Dessa forma, fica mais claro o porquê de se ter adicionado mais campos independentes na parte eletrodinâmica no Capítulo 4 do que o necessário para estabelecer um isomorfismo entre as teorias: foram adicionados campos extras também para formar dubletos para que o mapeamento funcionasse de modo BRST com termos de borda exatos.

Portanto, uma vez conferidas quais são as transformações BRST da ação (4.15) de gravitação obtida através do mapa dado pelas equações (4.8), (4.9), (4.10) e (4.11), o

próximo passo é definir o funcional gerador desta teoria de gravidade quântica. Partindo do funcional gerador da QED, dado em termos da ação (4.6):

$$Z_{qed} = \int [d\Phi_{qed}] \exp(-S_e - S_b) , \quad (5.29)$$

que é a integral de caminho obtida após quantização dos campos da ação (4.6), com:

$$[d\Phi_{qed}] = [dA][d\Theta][d\psi][d\bar{\psi}][d\bar{\varphi}][d\varphi][d\bar{\zeta}][d\zeta][d\bar{z}][dz][d\bar{w}][dw] , \quad (5.30)$$

e aplicando o mapeamento, será necessário introduzir o jacobiano, $\det J$, das transformações dos campos, isto é, do próprio mapa, na integral:

$$Z_{grav} = \int [d\Phi_{grav}] \det J \exp(-S_{grav}) , \quad (5.31)$$

em que o jacobiano está definido no Apêndice D como $\det J \propto \det^{3/2}(\phi_b^a) e^3$ e:

$$[d\Phi_{grav}] = [de^a][d\omega^{ab}][d\psi][d\bar{\psi}][d\phi^a][d\sigma^a][d\eta][d\bar{\eta}][d\chi][d\bar{\chi}] . \quad (5.32)$$

Seguindo as relações para integrais gaussianas de campos escalares, fermiônicos e bosônicos [54], é possível reescrever:

$$e^3 = e^4 e^{-1} = \int [d\bar{Y} dY dZ] \exp \left[- \int \left(\bar{Y}^a Y_a + \frac{1}{2} Z^a Z_a \right) \epsilon_{cd} e^c e^d \right] , \quad (5.33)$$

e:

$$\begin{aligned} \det^{3/2}(\phi_b^a) &= \det^4(\phi_b^a) \det^{-1/2}(\phi_b^a) \\ &= \int [dK d\bar{W} dW] \exp \left[- \int \left(\bar{W}_a \phi^{ab} W_b + \frac{1}{2} K_a \phi^{ab} K_b \right) \epsilon_{cd} e^c e^d \right] . \end{aligned} \quad (5.34)$$

As propriedades dos novos campos estão dadas na Tabela 4.

Campos	ξ	ρ	Y	\bar{Y}	W	\bar{W}	Z	K
Dimensão	1	0	1	1	1/2	1/2	1	1/2
Ordem	$(1, 0, -1)$	$(0, 0, -1)$	$(0, 0, 1)$	$(0, 0, -1)$	$(0, 0, 1)$	$(0, 0, -1)$	$(0, 0, 0)$	$(0, 0, 0)$
Estatística	+	−	−	−	−	−	+	+

Tabela 4 – Propriedades dos novos campos.

Estes termos podem ser organizados em tripletos BRST:

$$\begin{aligned} s\bar{Y}^a &= \frac{1}{2} Z^a , \\ sZ^a &= -Y^a , \\ sY^a &= 0 , \end{aligned} \quad (5.35)$$

e:

$$\begin{aligned} s\bar{W}^a &= \frac{1}{2} K^a + c_b^a \bar{W}^b , \\ sK^a &= -W^a + c_b^a K^b , \\ sW^a &= c_b^a W^b , \end{aligned} \quad (5.36)$$

Dessa maneira, o jacobiano pode ser separado de (5.31) em uma ação distinta:

$$S_{det} = \int \left(\bar{Y}^a Y_a + \frac{1}{2} Z^a Z_a + \bar{W}_a \phi^{ab} W_b + \frac{1}{2} K_a \phi^{ab} K_b \right) \epsilon_{cd} e^c e^d , \quad (5.37)$$

que é uma quantidade BRST exata:

$$S_{det} = s \int \left(\bar{Y}^a Z_a + \bar{W}_a \phi^{ab} K_b \right) \epsilon_{cd} e^c e^d , \quad (5.38)$$

garantindo que, por mais que os campos que descrevem a ação do jacobiano não sejam dubletos BRST, a ação é exata fazendo com que o jacobiano não interfira em observáveis físicos. Assim, o mapeamento em nível quântico gera uma teoria de gravidade quântica descrita pelo funcional gerador:

$$Z_{qg} = \int [d\Phi_{qg}] e^{-S_{qg}} , \quad (5.39)$$

com a medida funcional dada por:

$$[d\Phi_{qg}] = [de^a][d\omega^{ab}][d\psi][d\bar{\psi}][d\phi^a][d\sigma^a][d\eta][d\bar{\eta}][d\chi][d\bar{\chi}][d\bar{Y}^a][dY^a][dZ^a][d\bar{W}^a][dW^a][dK^a] , \quad (5.40)$$

e:

$$\begin{aligned} S_{qg} &= S_G + S_{det} , \\ &= \int \frac{1}{8\pi G} \epsilon_{ab} \left(R^{ab} - \frac{\Lambda^2}{2} e^a e^b \right) + \int \bar{\psi} \left(i\gamma_a e^a * \nabla - m\epsilon_{ab} e^a e^b \right) \psi \\ &\quad + s \int \left[d(\xi^a \sigma_a - \bar{\chi} \eta) + \left(\bar{Y}^a Z_a + \bar{W}_a \phi^{ab} K_b \right) \epsilon_{cd} e^c e^d \right] , \end{aligned} \quad (5.41)$$

sendo a ação de gravidade quântica total. De posse desta ação e do respectivo funcional gerador, é possível calcular quantidades físicas como, por exemplo, funções de correlação ou amplitudes de espalhamento. Esses já são cálculos mais explícitos que se estendem para além do escopo do presente trabalho. Entretanto, é importante mencionar que para realizar o cálculo desta integral de caminho de maneira consistente em nível perturbativo, é necessário fixar o calibre a fim de evitar as redundâncias já discutidas.

6 Conclusão

Nesta dissertação, foram apresentadas, primeiramente, as teorias bidimensionais de eletrodinâmica e gravitação, ambas com acoplamento a férmions seguindo os fundamentos de teoria de calibre. Na maior parte do trabalho foi utilizado o formalismo do cálculo exterior advindo da geometria diferencial, sendo muito útil para organização dos conceitos, principalmente na identificação das simetrias de calibre.

O foco deste trabalho foi direcionado ao desenvolvimento e à apresentação do mapeamento entre as teorias abordadas, que foi motivado pelo conhecimento prévio da existência do isomorfismo entre os grupos de calibre de cada teoria. Por fim, foram identificadas violações de paridade e reversão temporal no termo de interação dos férmions com o espaço-tempo. Além disso, o resultado mais interessante deste trabalho foi encontrar uma simetria de calibre não-usual para os férmions submetidos ao mapeamento: as transformações de calibre ainda seguem a simetria de Lorentz, mas são dotadas de uma matriz γ^3 , que faz com que as projeções quirais dos férmions possuam transformações de calibre distintas, conferindo uma dinâmica diferente para este tipo de sistema.

Diante do exposto, foi visto que é possível conferir uma interpretação geometrodinâmica para sistemas de eletrodinâmica bidimensional que podem ser descritos por uma ação do tipo (2.12). Por exemplo, o comportamento dos férmions não é mais regido pelas equações de Maxwell, mas, sim, pela sua interação com as deformações do espaço-tempo. Assim, em duas dimensões, ao menos alguns modelos de eletrodinâmica e gravitação são, em última instância, descrições diferentes de um mesmo fenômeno físico.

Como perspectivas futuras, seria interessante trabalhar os seguintes aspectos. Primeiramente, estudar mais a fundo o mapa em sua versão quântica sob a luz do formalismo BRST e verificar se a teoria de gravitação obtida é, de fato, renormalizável como se espera. Também seria proveitoso estudar a simetria por conjugação de carga (C) na ação de gravitação obtida a fim de se entender se a simetria CPT é violada ou não no modelo encontrado. O estudo da simetria de calibre dos férmions mapeados em sistemas diversos seria interessante para traçar paralelos com teorias já conhecidas a fim de se investigar se este tipo de simetria aparece em outros tipos de modelos. Realizar a rotação de Wick para realizar o mapeamento no espaço-tempo de Minkowski seria importante para descobrir se é possível estender este mapa entre teorias com grupos de calibre que não sejam isomorfos, podendo levar a ideias sobre a expansão para 4 dimensões. Finalmente, realizar este mapeamento entre a teoria de eletrodinâmica 4D com redução dimensional na dimensão temporal e em uma das dimensões espaciais e uma teoria de gravitação 2D seria fundamental para se obter uma descrição geometrostática para férmions, como elétrons,

habitando uma folha de grafeno, conferindo aplicações práticas ao mapa confeccionado.

A Formas Diferenciais

René Descartes introduziu o uso das famosas coordenadas cartesianas na matemática, revolucionando além da própria, áreas como a ciência e até mesmo a filosofia. Dessa forma, foi possível realizar a tradução das ideias geométricas, fundamentadas nas proposições de Euclides, para análise e álgebra, permitindo uma descrição em termos de equações analíticas para cada componente de um vetor, levando ao cálculo vetorial. Por exemplo, seja um vetor F , então:

$$F_x \hat{x} = m a_x \hat{x} , \quad (\text{A.1})$$

$$F_y \hat{y} = m a_y \hat{y} , \quad (\text{A.2})$$

$$F_z \hat{z} = m a_z \hat{z} . \quad (\text{A.3})$$

Porém, com o avanço em geometria de espaços curvos, o uso explícito de coordenadas acabou gerando complicações de notação e obscurecimento das ideias que carregavam as contas. Daí veio o cálculo tensorial como forma de escrever as equações de um jeito mais sucinto e com base no princípio de covariância das propriedades geométricas. As equações acima ficam compiladas em:

$$F^i = m a^i . \quad (\text{A.4})$$

Pode-se representar as componentes dos tensores em outro sistema de coordenadas, realizando a seguinte operação:

$$\frac{\partial x'^j}{\partial x^i} F^j = m \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} a^j . \quad (\text{A.5})$$

Logo:

$$F'^i = m a'^i , \quad (\text{A.6})$$

vê-se que ambos os lados se transformam igualmente, mantendo a forma da equação em qualquer sistema de coordenadas, evidenciando a covariância.

Já o cálculo exterior dá um passo além e em vez de fazer uso das componentes dos tensores, é utilizado o objeto como um todo, isto é, componentes ao lado dos elementos de base, fazendo com que os cálculos sejam invariantes por transformações de coordenadas.

$$F = F^i \partial_i , \quad (\text{A.7})$$

$$a = a^i \partial_i , \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} F^j \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \partial_i &= m \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} a^j \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \partial_i \\ F &= m a . \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Aqui, os vetores são entendidos como objetos definidos no espaço tangente a uma variedade diferencial, cujos elementos de base são ∂_i . Assim, as coordenadas ficam implícitas, assim como seus respectivos índices, limpando visualmente as equações. Uma vantagem extra é que os difeomorfismos não precisam ser impostos: eles já são garantidos por construção.

Em uma variedade diferencial, formas diferenciais são objetos definidos no espaço cotangente. Uma p -forma α em n dimensões é basicamente um tensor completamente antissimétrico:

$$\alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}, \quad (\text{A.10})$$

em que dx^μ é a base de uma 1-forma de maneira que $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}$ é a base de p -formas. O operador produto wedge \wedge é antissimétrico. Assim, uma 0-forma é um escalar e uma 1-forma é um vetor covariante por exemplo, e é direto ver que em n dimensões não há $(p > n)$ -formas devido à antissimetria do produto exterior $dx^\mu \wedge dx^\nu$. Além disso, faz com que o produto de uma p -forma α e uma q -forma β seja dado por:

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha. \quad (\text{A.11})$$

E também implica que o número de componentes independentes de α , isto é, sua dimensão, é dado pela combinação:

$$\dim X = \binom{n}{p}. \quad (\text{A.12})$$

É possível, portanto, criar um objeto dual à p -forma X que pode representá-la completamente através da atuação do operador dual de Hodge:

$$*X = \frac{1}{(n-p)!p!} X^{\mu_1 \dots \mu_p} \sqrt{g} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_{n-p}} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_{n-p}}, \quad (\text{A.13})$$

que é uma $(n-p)$ -forma de dimensão igual à da p -forma:

$$\dim *X = \binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}, \quad (\text{A.14})$$

em que g é o determinante da métrica e $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d}$ é o símbolo de Levi-Civita em d dimensões, definido como:

$$\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} = \begin{cases} +1, & \text{se } \mu_1 \dots \mu_d \text{ é uma permutação par de } 123\dots d \\ -1, & \text{se } \mu_1 \dots \mu_d \text{ é uma permutação ímpar de } 123\dots d \\ 0, & \text{se há algum índice repetido} \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

O símbolo de Levi-Civita também é utilizado para se obter determinantes: se M^μ_{ν} são as componentes de um tensor em d dimensões, seu determinante é definido através de:

$$\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} M^{\mu_1}_{\nu_1} \dots M^{\mu_d}_{\nu_d} = \det(M) \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_d}. \quad (\text{A.16})$$

Portanto, sob uma transformação de Lorentz $x \rightarrow x'$, o símbolo de Levi-Civita se transforma de maneira não covariante (não se transforma como um tensor) já que aparece o jacobiano da mudança de coordenadas:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu'_1 \dots \mu'_d} &= \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_d} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\mu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_d}}{\partial x^{\mu'_d}} \\ &= \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} . \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Não somente, a equação (A.13) pode ser reescrita na base da vielbein como:

$$*X = \frac{1}{(n-p)!p!} X^{a_1 \dots a_p} \epsilon_{a_1 \dots a_p b_1 \dots b_{n-p}} e^{b_1} \wedge \dots \wedge e^{b_{n-p}} , \quad (\text{A.18})$$

uma vez imposta a relação entre o determinante da vielbein e da métrica como dado em (3.14).

O operador 1-forma de derivada exterior $dx^\mu \partial_\mu \wedge$ ao atuar sobre uma p-forma α leva a uma (p+1)-forma $d\alpha$:

$$d\alpha = \frac{1}{p!} \partial_{\mu_0} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_0} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} , \quad (\text{A.19})$$

de maneira que a derivada do produto é dada por:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta . \quad (\text{A.20})$$

Devido ao fato de que derivadas parciais comutam $\partial_\mu \partial_\nu \alpha = \partial_\nu \partial_\mu \alpha$ enquanto que o produto exterior anticomuta $dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu$, se obtém o Lema de Poincaré que enuncia que se α é uma p-forma, então:

$$d^2 \alpha = 0 . \quad (\text{A.21})$$

A partir de (3.9), estas relações também são válidas usando a base da vielbein.

Por fim, o cálculo exterior possui uma ferramenta de extrema importância que é uma espécie de generalização do Teorema de Stokes do cálculo vetorial para dimensões arbitrárias:

Teorema 3 (Teorema Fundamental do Cálculo Exterior): *Seja $M^{(d)}$ uma variedade d -dimensional orientável e compacta. A borda da variedade corresponde ao embebimento de uma variedade $(d-1)$ -dimensional $\partial M^{(d)}$ em $M^{(d)}$:*

$$X : \partial M^{(d)} \rightarrow M^{(d)} , \quad (\text{A.22})$$

Então para toda $(d-1)$ -forma α definida sobre a variedade $M^{(d)}$, se cumpre que:

$$\int_{M^{(d)}} d\alpha = \int_{\partial M^{(d)}} X^* \alpha , \quad (\text{A.23})$$

em que $X^ \alpha$ é o pull-back de α sobre $\partial M^{(d)}$, isto é, a forma diferencial α escrita na variedade de borda.*

B Matrizes Gamma

Em 2 dimensões, as matrizes gamma de Dirac são definidas através da álgebra de Clifford (no caso particular deste trabalho, a álgebra euclidiana de Clifford):

$$\{\gamma_i, \gamma_j\} = \gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2\delta_{ij} \times I , \quad (\text{B.1})$$

com $i, j = \{0, 1\}$, de onde se pode obter as seguintes soluções hermitianas:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (\text{B.2})$$

Também se define o análogo da matriz quadridimensional γ_5 :

$$\gamma_3 = \gamma_0 \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad (\text{B.3})$$

e:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} [\gamma_i, \gamma_j] . \quad (\text{B.4})$$

Dessa maneira, as seguintes relações são válidas:

$$\sigma_{ij} = \gamma^3 \epsilon_{ij} , \quad \epsilon_{ij} = -\gamma^3 \sigma_{ij} . \quad (\text{B.5})$$

Assim como:

$$\{\gamma_i, \gamma^3\} = 0 , \quad (\text{B.6})$$

$$[\gamma_i, \gamma^3] = 2\epsilon_i^j \gamma_j , \quad (\text{B.7})$$

$$[\gamma^3, \sigma_{ij}] = 0 . \quad (\text{B.8})$$

A escolha feita para as matrizes gamma se relacionam com as matrizes de Pauli através de:

$$\gamma^0 = \sigma_1 , \quad \gamma^1 = \sigma_3 , \quad \gamma^3 = i\sigma_2 . \quad (\text{B.9})$$

Também valem as seguintes propriedades:

$$(\gamma^i)^\dagger = (\gamma^i)^{-1} = \gamma^i , \quad (\text{B.10})$$

$$(\gamma^3)^\dagger = (\gamma^3)^{-1} = -\gamma^3 , \quad (\text{B.11})$$

$$(\gamma^i)^2 = -(\gamma^3)^2 = I , \quad (\text{B.12})$$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 , \quad (\text{B.13})$$

$$\psi^\dagger = \bar{\psi} \gamma^0 . \quad (\text{B.14})$$

C Isomorfismo

O grupo $U(n)$ é o grupo das matrizes unitárias $n \times n$, isto é, que satisfazem $U^\dagger U = \mathbb{I}$. Logo, o grupo $U(1)$ é o grupo dos números complexos de módulo 1, isto é, se $z \in U(1)$, então $z^* z = 1$. Um elemento de $U(1)$ pode ser escrito como $z = e^\alpha$, em que α é um número imaginário. A lei de composição do grupo é a multiplicação de números complexos já que: $e^{\alpha_1} e^{\alpha_2} = e^{\alpha_1 + \alpha_2}$.

O grupo $SO(2)$ é o grupo das matrizes reais ortogonais 2×2 com determinante +1, o que faz com que representem rotações num plano. Portanto, um elemento $s \in SO(2)$ é escrito como:

$$s = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

em que θ é o ângulo da rotação. O mesmo elemento pode ser escrito como $s = \exp(\alpha^{ab}\epsilon_{ab}E) \in SO(2)$ com $E = -\epsilon \equiv -\epsilon_{ab}$ sendo o gerador do grupo $SO(2)$ e $\alpha^{ab}\epsilon_{ab}$ sendo um escalar em que $\alpha_b^a = -\alpha^a_b$. Isso é possível porque por expansão em série de potências:

$$\begin{aligned} s &= \exp(\alpha^{ab}\epsilon_{ab}E) = \mathbb{I} + \alpha^{ab}\epsilon_{ab}E + \frac{(\alpha^{ab}\epsilon_{ab}E)^2}{2!} + \frac{(\alpha^{ab}\epsilon_{ab}E)^3}{3!} + \dots \\ &= \mathbb{I} \left(1 - \frac{(\alpha^{ab}\epsilon_{ab})^2}{2!} + \frac{(\alpha^{ab}\epsilon_{ab})^4}{4!} - \dots \right) + E \left(\alpha^{ab}\epsilon_{ab} - \frac{(\alpha^{ab}\epsilon_{ab})^3}{3!} + \frac{(\alpha^{ab}\epsilon_{ab})^5}{5!} - \dots \right) \\ &= \mathbb{I} \cos(\alpha^{ab}\epsilon_{ab}) + E \sin(\alpha^{ab}\epsilon_{ab}) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha^{ab}\epsilon_{ab}) & -\sin(\alpha^{ab}\epsilon_{ab}) \\ \sin(\alpha^{ab}\epsilon_{ab}) & \cos(\alpha^{ab}\epsilon_{ab}) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

o que leva a identificar $\alpha^{ab}\epsilon_{ab} \equiv \theta$ justamente como o ângulo de rotação. A lei de composição é a multiplicação de matrizes, que na sua forma exponencial segue a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff [37]:

$$e^A e^B = \exp \left[A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}([A, [A, B]] - [B, [A, B]]) + \dots \right], \quad (\text{C.3})$$

mas que como $E^2 = -\mathbb{I}$, se reduz a:

$$s_1 s_2 = \exp(\alpha_1^{ab}\epsilon_{ab}E) \exp(\alpha_2^{ab}\epsilon_{ab}E) = \exp[(\alpha_1^{ab}\epsilon_{ab} + \alpha_2^{ab}\epsilon_{ab})E]. \quad (\text{C.4})$$

Para mostrar que os grupos apresentados são isomorfos, deve-se mostrar que são homomorfos primeiramente. Uma proposta de homomorfismo $\phi : U(1) \rightarrow SO(2)$ é:

$$\phi(e^\alpha) = \exp(\alpha^{ab}\epsilon_{ab}E). \quad (\text{C.5})$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 \phi(e^{\alpha_1} e^{\alpha_2}) &= \phi(e^{\alpha_1 + \alpha_2}) \\
 &= \exp \left[\left(\alpha_1^{ab} \epsilon_{ab} + \alpha_2^{ab} \epsilon_{ab} \right) E \right] \\
 &= \phi(e^{\alpha_1}) \phi(e^{\alpha_2}) ,
 \end{aligned} \tag{C.6}$$

evidenciando que as leis de composição são preservadas. Agora resta provar a bijetividade, que consiste em provar a injetividade e a sobrejetividade. Para a injetividade, suponha que $\phi(e^{\alpha_1}) = \phi(e^{\alpha_2})$, ou seja, $\exp(\alpha_1^{ab} \epsilon_{ab} E) = \exp(\alpha_2^{ab} \epsilon_{ab} E)$ e então $e^{\alpha_1} = e^{\alpha_2}$, garantindo que elementos distintos de $U(1)$ são mapeados em elementos distintos de $SO(2)$. Já para a sobrejetividade, é evidente que para cada $\alpha \in U(1)$ existe $\alpha^{ab} \in SO(2)$ tal que $\phi(z) = s$.

Dessa forma, o isomorfismo entre os grupos $U(1)$ e $SO(2)$ fica caracterizado através de $\alpha \mapsto \alpha^{ab} \epsilon_{ab}$. A existência deste isomorfismo pode ser vislumbrada geometricamente através da constatação de que estes grupos representam o círculo S^1 : o grupo $U(1)$ simboliza rotação no plano complexo enquanto que o grupo $SO(2)$ simboliza rotação no plano cartesiano, preservando ângulos e distâncias nos dois casos fazendo com que as operações de multiplicação de números complexos e de composição de rotações sejam equivalentes geometricamente.

D Jacobiano

Para calcular o jacobiano do mapa proposto e definido através das transformações (4.8), (4.9) e (4.11), deve-se montar a matriz jacobiana primeiramente, definida por:

Definição 4 (Matriz Jacobiana): *Seja $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ uma função que suas derivadas parciais de primeira ordem existam. A matriz jacobiana J dessa função é dada por:*

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.1})$$

Uma vez determinada a matriz jacobiana, o jacobiano do mapa é simplesmente o determinante desta matriz. Como o determinante de uma matriz é igual ao determinante da sua transposta, pode-se usar qualquer uma das duas para o cálculo do jacobiano.

Como existem, 15 campos independentes tanto na eletrodinâmica 2D quanto na gravitação 2D construídas neste trabalho, a matriz jacobiana será uma matriz 17 x 17 ao se considerar os férmions também, isto é, os campos $\bar{\psi}$ e ψ . Entretanto, apenas os seguintes termos são não nulos. Do mapa dado em (4.8):

$$\frac{\partial \Theta}{\partial e^a} = e^2 \epsilon_{ab} e^b, \quad (\text{D.2})$$

$$\frac{\partial A}{\partial \omega^{ab}} = \epsilon_{ab}. \quad (\text{D.3})$$

Do mapa dado em (4.9):

$$\frac{\partial \bar{\Phi}^a}{\partial \sigma^b} = \delta_b^a, \quad (\text{D.4})$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}^a}{\partial e^a} = \phi^a_b, \quad (\text{D.5})$$

$$\frac{\partial \Phi^a}{\partial \phi^b_c} = \delta_b^a e^c, \quad (\text{D.6})$$

e:

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{\eta}} = 1 , \quad (\text{D.7})$$

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\chi}} = 1 , \quad (\text{D.8})$$

$$\frac{\partial w}{\partial e^a} = \eta_a , \quad (\text{D.9})$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta_a} = e^a , \quad (\text{D.10})$$

$$\frac{\partial z}{\partial e^a} = \chi_a , \quad (\text{D.11})$$

$$\frac{\partial z}{\partial \chi_a} = e^a . \quad (\text{D.12})$$

De (4.11), os férmions são mapeados neles mesmos:

$$\frac{\partial \psi(x)}{\partial \psi(X)} = 1 , \quad (\text{D.13})$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}(x)}{\partial \bar{\psi}(X)} = 1 . \quad (\text{D.14})$$

Além disso, como se pode notar, alguns termos são triviais e essa matriz pode ser reduzida à seguinte matriz 9 x 9:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \phi & 0 & \eta_0 & 0 & \chi_0 & 0 & e^2 e_1^1 \\ 0 & 0 & 0 & \phi & 0 & \eta_0 & 0 & \chi_0 & -e^2 e_0^1 \\ \phi & 0 & 0 & 0 & \eta_1 & 0 & \chi_1 & 0 & -e^2 e_1^0 \\ 0 & \phi & 0 & 0 & 0 & \eta_1 & 0 & \chi_1 & e^2 e_0^0 \\ e_0^1 & e_1^1 & e_0^0 & e_1^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_0^0 & e_1^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_0^1 & e_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_0^0 & e_1^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_0^1 & e_1^1 & 0 \end{pmatrix} . \quad (\text{D.15})$$

O jacobiano fica dado, então, pelo determinante desta matriz:

$$\det J = -2e^2 \det^{3/2}(\phi^a_b) e^3 . \quad (\text{D.16})$$

Referências

- [1] G. 'T HOOFT (Editor). 50 years of Yang-Mills theory. Singapore, World Scientific (2005). Citado na página 7.
- [2] S. BILENKY. Introduction to the physics of massive and mixed neutrinos. Lecture Notes in Physics, vol. 947. Springer (2018). Citado na página 7.
- [3] UTIYAMA, R. Invariant theoretical interpretation of interaction. Physical Review, vol. 101, p. 1597–1607 (1956). Citado 2 vezes nas páginas 7 e 17.
- [4] KIBBLE, T. W. B. Lorentz invariance and the gravitational field. Journal of Mathematical Physics, vol. 2, p. 212–221 (1961). Citado 2 vezes nas páginas 7 e 17.
- [5] SCIAMA, D. W. The Physical structure of general relativity. Reviews of Modern Physics, v. 36, p. 463–469 (1964). [Erratum: Reviews of Modern Physics, v. 36, p. 1103 (1964)]. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 17.
- [6] J. Zanelli, Lecture notes on Chern-Simons (SUPER-)GRAVITIES, CECS (2008). Citado 3 vezes nas páginas 7, 14 e 31.
- [7] T. Bittencourt, R. Sobreiro, Relating electrodynamics and gravity in two Euclidean dimensions. (2025). <https://arxiv.org/pdf/2502.09272>. e-Print: 2502.09272 [hep-th] Citado na página 7.
- [8] M. Nakahara, Geometry, Topology and Physics. Institute of Physics Publishing (2003). Citado 9 vezes nas páginas 7, 9, 11, 17, 18, 22, 26, 27 e 38.
- [9] I. Bialynicki-Birula, Classical Electrodynamics in Two Dimensions: Exact Solution. Physical Review D. vol. 3, n. 4 (1971). Citado 2 vezes nas páginas 8 e 12.
- [10] B. Kosyakov, Introduction to the Classical Theory of Particles and Fields. Springer (2007). Citado 2 vezes nas páginas 8 e 12.
- [11] B. P. Kosyakov, Is classical reality completely deterministic?. Foundations of Physics, vol. 38, p. 76–88 (2008). Citado na página 8.
- [12] A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov, and A. K. Geim, The electronic properties of graphene. Reviews of Modern Physics, vol. 81 (2009) 109–162. Citado na página 8.
- [13] T. Farajollahpour, Z. Faraei, and S. A. Jafari, Solid-state platform for space-time engineering: The 8Pmmn borophene sheet. Physical Review B, vol. 99 n. 23 (2019) 235150. Citado na página 8.

- [14] S. Cahangirov, M. Topsakal, E. Akturk, H. Sahin, and C. S., Two- and One-Dimensional Honeycomb Structures of Silicon and Germanium. *Physical Review Letters*, vol. 102 (2009) 236804. Citado na página 8.
- [15] R. K. Pathria, P. D. Beale, *Statistical Mechanics*. Elsevier (2011). Citado na página 8.
- [16] P. Collas, General relativity in two- and three-dimensional spacetimes. *American Journal of Physics*, 45, 833 (1977). Citado 2 vezes nas páginas 8 e 25.
- [17] A. M. Polyakov, Quantum Gravity in Two-Dimensions. *Modern Physics Lettes A* volume 2, p. 893 (1987). Citado na página 8.
- [18] D. J. Gross e A. A. Migdal, Nonperturbative Two-Dimensional Quantum Gravity. *Physics Review Letters*, volume 64, p. 127 (1990). Citado na página 8.
- [19] E. Witten, On the Structure of the Topological Phase of Two-dimensional Gravity. *Nuclear Physics B*, volume 340, p. 281-332 (1990). Citado na página 8.
- [20] A. H. Chamseddine, Two-dimensional quantum gravity. A mini review. *Nuclear Physics B Proc. Suppl.* volume 16, p. 579-580 (1990). Citado na página 8.
- [21] M. Fukuma, H. Kawai, R. Nakayama, Continuum Schwinger-Dyson Equations and Universal Structures in Two-dimensional Quantum Gravity. *International Journal of Modern Physics A*, volume 6, p. 1385-1406 (1991). Citado na página 8.
- [22] Y. Kazama, H. Nicolai, On the exact operator formalism of two-dimensional Liouville quantum gravity in Minkowski space-time: A riview. 4th Hellenic School on Elementary Particle Physics, p. 753-789 (1992). Citado na página 8.
- [23] G. Sadoski, R. F. Sobreiro, Topological symmetry-restored phase of gravity. Citado na página 8.
- [24] A. Achucarro and P. K. Townsend, A Chern-Simons Action for Three-Dimensional anti-De Sitter Supergravity Theories. *Physics Letters B*180 (1986) 89. 14 Citado na página 8.
- [25] E. Witten, (2+1)-Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System. *Nucl. Phys.* B311 (1988) 46. Citado na página 8.
- [26] Yu. N. Obukhov, Gauge fields and space-time geometry. *Theor. Math. Phys.* 117 (1998) 1308–1318. [Teor. Mat. Fiz.117,249(1998)]. Citado na página 8.
- [27] R. F. Sobreiro and V. J. Vasquez Otoyá, Effective gravity from a quantum gauge theory in Euclidean space-time. *Class. Quant. Grav.* 24 (2007) 4937–4953. Citado na página 8.

- [28] R. F. Sobreiro, A. A. Tomaz, and V. J. V. Otoya, de Sitter gauge theories and induced gravities. *Eur. Phys. J. C* 72 (2012) 1991. Citado na página 8.
- [29] T. S. Assimos, A. D. Pereira, T. R. S. Santos, R. F. Sobreiro, A. A. Tomaz, and V. J. Vasquez Otoya, From $SL(5, \mathbb{R})$ Yang-Mills theory to induced gravity. *Int. J. Mod. Phys. D* 26 no. 08, (2017) 1750087. Citado na página 8.
- [30] T. S. Assimos and R. F. Sobreiro, Constrained gauge-gravity duality in three and four dimensions. *Eur. Phys. J. C* 80 no. 1, (2020) 20. Citado na página 8.
- [31] T. S. Assimos and R. F. Sobreiro, Topological gauge-gravity equivalence: fiber bundle and homology aspects. (2021). <https://arxiv.org/pdf/2111.14675.pdf>. e-print: 2111.01672 [hep-th]. Citado na página 8.
- [32] V. Rubakov, *Classical Theory of Gauge Fields*. Princeton University Press (2002). Citado 2 vezes nas páginas 8 e 10.
- [33] J. M. F. Bassalo, M. S. D. Cattani. *Cálculo Exterior*. Livraria da Física (2009). Citado na página 9.
- [34] A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik* 17: p. 891-921 (1905). Citado na página 9.
- [35] J. P. Fortney, *A Visual Introduction to Differential Forms and Calculus on Manifolds*. Birkhauser (2018). Citado na página 9.
- [36] E. Noether, Invariant Variation Problems. *Gott. Nachr.*, vol. 1918, p. 235–257 (1918). Citado 2 vezes nas páginas 10 e 39.
- [37] F. Izaurieta, Notas personales para el curso de Gravitación y Geometría de Cartan. Universidad de Concepción, Chile (2014). Citado 5 vezes nas páginas 11, 18, 20, 34 e 50.
- [38] A. O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields Particles*. Dover (1980). Citado na página 11.
- [39] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*. Pergamom (1975) Citado na página 12.
- [40] L. R. W. Barata. Notas sobre Funções de Green - FMA 403. Departamento de Física Matemática - Instituto de Física - USP. Citado na página 13.
- [41] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press (2019). Citado na página 14.

- [42] R. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*. Clarendon Press (1992). Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.
- [43] A. G. Melchior, *Gravitação de Newton-Cartan no Formalismo de Primeira Ordem*. UFF (2020). Citado na página 14.
- [44] A. Einstein, *Zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte, part 2, p. 778–786, p. 799–801 (1915). Citado na página 15.
- [45] A. Einstein, *Zur allgemeinen Relativitätstheorie (Nachtrag)*, Citado na página 15.
- [46] A. Einstein, *Die Feldgleichungen der Gravitation*. Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte, part 4, p. 844–847 (1915). Citado na página 15.
- [47] R. Debever, *Elie Cartan and Albert Einstein: Letters on Absolute Parallelism, 1929–1932*. Princeton University Press (2015). Citado na página 16.
- [48] D. Hilbert, *Die Grundlagen der Physik*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen – Mathematisch - Physikalische Klasse, 3: p. 395–407. Citado na página 17.
- [49] T. S. Assimos, R. F. Sobreiro, *Homological aspects of topological gauge-gravity equivalence*. *Reviews in Mathematical Physics*, p. 2450028 (2021). Citado na página 21.
- [50] D. Lovelock, *The Einstein tensor and its generalizations*. *Journal of Mathematical Physics*, v. 12, p. 498–501 (1971). Citado na página 24.
- [51] A. Mardones, J. Zanelli, *Lovelock-Cartan theory of gravity*. *Classical and Quantum Gravity*, v. 8, p. 1545–1558, 1991. Citado na página 24.
- [52] T. F. Bittencourt, *Formalismo Lagrangiano da Relatividade Geral*. UFF (2022). Citado na página 25.
- [53] R. F. Sobreiro, *Geometrodynamical description of two-dimensional electrodynamics*. *Europhysics Letters* vol. 139, 64002 (2022). Citado na página 28.
- [54] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. CRC (1995). Citado 5 vezes nas páginas 34, 35, 36, 39 e 42.
- [55] L. D. Faddeev and V. N. Popov, *Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field*. *Phys. Lett. B*, volume 25, p. 29–30 (1967). Citado na página 36.
- [56] V. N. Gribov, *Quantization of non-Abelian gauge theories*. *Nuclear Physics B*, volume 139(1), p. 1-19 (1978). Citado na página 36.

- [57] C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora, Renormalization of Gauge Theories. *Annals Phys.* volume 98, p. 287–321, (1976). Citado na página 38.
- [58] I. V. Tyutin, Gauge Invariance in Field Theory and Statistical Physics in Operator Formalism. (1975). Citado na página 38.
- [59] O. Piguet, S. P. Sorella, Algebraic renormalization: Perturbative renormalization, symmetries and anomalies. *Lecture Notes in Physics Monographs*, vol. 28, p. 1–134 (1995). Citado na página 38.
- [60] N. Lemos, *Mecânica Analítica*. Livraria da Física (2007). Citado na página 39.
- [61] T. Kugo, I. Ojima, Local Covariant Operator Formalism of Non-Abelian Gauge Theories and Quark Confinement Problem. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, volume 66, p. 1–130 (1979). Citado na página 39.