

Rafael Luis Junqueira Costa

**UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE EFEITOS
QUÂNTICOS NA PRESENÇA DA VIOLAÇÃO
DA SIMETRIA DE LORENTZ**

Niterói-RJ

2025

Rafael Luis Junqueira Costa

UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE EFEITOS QUÂNTICOS NA PRESENÇA DA VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ

Tese submetida ao curso de pós-graduação em
Física da Universidade Federal Fluminense,
como requisito parcial para obtenção do Tí-
tulo de Doutor em Física.

Universidade Federal Fluminense – UFF

Orientador: Rodrigo Ferreira Sobreiro

Niterói-RJ

2025

Ficha catalográfica automática - SDC/BIF
Gerada com informações fornecidas pelo autor

C837i Costa, Rafael Luis Junqueira
Uma investigação sobre efeitos quânticos na presença da
violação da simetria de Lorentz / Rafael Luis Junqueira
Costa. - 2025.
91 f.: il.

Orientador: Rodrigo Ferreira Sobreiro.
Tese (doutorado)-Universidade Federal Fluminense, Instituto
de Física, Niterói, 2025.

1. Violação de Lorentz. 2. Efeito Schwinger. 3.
Temperatura finita. 4. Produção intelectual. I. Sobreiro,
Rodrigo Ferreira, orientador. II. Universidade Federal
Fluminense. Instituto de Física. III. Título.

CDD - XXX

Rafael Luis Junqueira Costa

**UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE EFEITOS QUÂNTICOS NA
PRESENÇA DA VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ**

Tese submetida ao curso de
pós-graduação em Física da Universidade
Federal Fluminense, como requisito
parcial para obtenção do Título de Doutor
em Física.

Aprovado em: 28/02/2025.

BANCA AVALIADORA

Membros titulares

Prof. Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro
(Orientador)
IF/UFF

Prof. Dr. Marcelo Santos Guimarães
UERJ

Prof. Dr. Carlos Alfonso M. B. Bayona
UFRJ

Prof. Dr. Reinaldo Faria de M. e Souza
IF/UFF

Prof. Dr. Antonio Duarte Pereira Junior
IF/UFF

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a minha família: minha mãe Aida, meu pai Luís Cláudio e minha irmã Mariana pelo apoio durante minha trajetória. Em especial, também agradeço à minha tia, Caca, que sempre me ajudou em todos os momentos da minha vida.

Agradeço a minha companheira Lauriene por todos os momentos juntos. Durante esses quatro anos muita coisa aconteceu em nossas vidas, fico feliz de ter a honra de dividi-los com você.

Aos meus grandes amigos Pedro e Jack, por me acompanharem durante todo o processo e contribuir para minha formação acadêmica e pessoal. Desde o início, em Bambuí, vocês estiveram do meu lado. Meu muitíssimo obrigado!

À todos os professores que contribuíram para que eu pudesse chegar até aqui. Em especial, aos meus professores do IFMG - *Campus* Bambuí, João, Mário, Mayler e Warley e da UFLA, Tati e Bufalo.

Por fim, agradeço a pessoa que me guiou durante minha jornada no doutorado, Professor Rodrigo, com quem tive a honra de adquirir importantes conhecimentos sobre Física. Agradeço todo o apoio e toda a confiança que depositou em mim, para a execução desta tese. Muito obrigado Rodrigo, e espero que continuemos a trabalhar juntos.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

À minha mãe, que sempre me incentivou a continuar...

Resumo

Nesta tese, investigamos a influência da violação da simetria de Lorentz em diversos efeitos resultantes da Eletrodinâmica Quântica (QED). Na primeira parte do trabalho, aplicamos o método do tempo próprio para analisar o efeito Schwinger na presença de campos de fundo que violam a simetria de Lorentz. Em particular, estudamos a Lagrangiana efetiva à *1-loop* considerando um campo de fundo vetorial do tipo temporal, representado por b_μ , e um campo pseudo-escalar dado por m_5 , restrito ao caso elétrico puro. Derivamos a ação efetiva utilizando o formalismo de integrais de caminho, levando em conta a interação entre férmions quânticos e um campo eletromagnético externo combinado com os campos de fundo que violam Lorentz. A parte imaginária da Lagrangiana efetiva foi obtida para avaliar a taxa de produção de pares de elétron e pósitron (E-P) devido ao efeito Schwinger. Além disso, discutimos as implicações fenomenológicas dessas violações, com ênfase em possíveis consequências observacionais e ajustes experimentais. Na segunda etapa do trabalho, analisamos um gás quântico fermiônico na presença de um campo de fundo que viola a simetria de Lorentz, considerando o sistema em temperatura finita. Derivamos a ação efetiva utilizando novamente o formalismo de integrais de caminho, levando em conta a interação entre férmions quânticos e um campo eletromagnético externo combinado com os campos de fundo que violam Lorentz. Posteriormente o campo eletromagnético é tomado como nulo para obtermos somente os efeitos de temperatura e de Violação de Lorentz (VL). Para introduzir os efeitos relacionados à temperatura, empregamos o formalismo de Matsubara, adaptando-o ao contexto das violações de simetria. Adicionalmente, discutimos as implicações fenomenológicas desses resultados, incluindo possíveis efeitos observáveis e considerações experimentais relevantes para testar essas teorias.

Palavras-chaves: Violação de Lorentz, Efeito Schwinger e temperatura finita.

Abstract

In this thesis, we investigate the influence of Lorentz symmetry violation on various effects arising from quantum electrodynamics. In the first part of the work, we apply the proper time method to analyze the Schwinger effect in the presence of background fields that violate Lorentz symmetry. Specifically, we study the effective Lagrangian at the 1-*loop* level, considering a time-like vector background field represented by b_μ and a pseudo-scalar field denoted by m_5 , restricted to the purely electric case. We derive the effective action using the path integral formalism, accounting for the interaction between quantum fermions and an external electromagnetic field combined with Lorentz-violating background fields. The imaginary part of the effective Lagrangian was obtained to evaluate the pair production rate due to the Schwinger effect. Additionally, we discuss the phenomenological implications of these violations, emphasizing possible observational consequences and experimental adjustments. In the second part of the work, we analyze a quantum fermionic gas in the presence of a Lorentz symmetry-violating background field, considering the system at finite temperature. We derive the effective action again using the path integral formalism, taking into account the interaction between quantum fermions and an external electromagnetic field combined with Lorentz-violating background fields. Subsequently, the electromagnetic field is set to zero to isolate the effects of temperature and Lorentz violation. To incorporate the effects related to temperature, we employ the Matsubara formalism, adapting it to the context of symmetry violations. Furthermore, we discuss the phenomenological implications of these results, including potential observable effects and experimental considerations that are relevant for testing these theories.

Key-words: Lorentz Violation, Schwinger Effect and Finite Temperature.

Lista de Abreviaturas

CFJ Carrol, Field e Jackiw

CPT Conjugação de carga, Paridade e Reversão Temporal

ELI Extreme Light Infrastructure

E-P Elétron e Pósitron

IUCSS Center for Spacetime Symmetries da Universidade de Indiana

LHC Large Hadron Collider

LUXE Laser Und European X-ray Free Elec- tron (XFEL) Experiment

MSME Minimal Standard-Model Extension

QED Eletrodinâmica Quântica

QED_{ex} QED Estendida

RR Relatividade Restrita

SEL Station of Extreme Light

SI Sistema Internacional de Unidades

VL Violação de Lorentz

XFEL X-ray Free Electron Laser

Lista de ilustrações

Figura 1 – Interação de uma carga elétrica e_0 com pares virtuais de E-P do vácuo.	18
Figura 2 – Esquema qualitativo da constante de acoplamento eletromagnética gerada pela polarização do vácuo à 1-loop.	19
Figura 3 – Capacitor de placas paralelas.	27
Figura 4 – Capacitor de placas paralelas, com o referencial rotacionado $\phi = \pi/2$ em relação ao eixo x	27
Figura 5 – Capacitor de placas paralelas, com o vetor posição da partícula rotacionado $\phi = -\pi/2$ em relação ao x	28
Figura 6 – Representação diagramática de um evento na origem.	30
Figura 7 – Gráfico da energia livre em função da temperatura para $b = 2.10^{-14} GeV$.	68

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Um pouco sobre a escala de Planck	15
1.2	Um breve contexto histórico sobre o vácuo e gases	17
1.3	Contextualização histórica da violação da simetria de Lorentz	23
2	A SIMETRIA DE LORENTZ	25
2.1	Transformações de Lorentz de observador e de partícula	26
2.2	O espaço-tempo	29
2.2.1	O cone de luz	29
2.2.2	Causalidade	30
2.2.3	O tempo próprio	31
3	ELETRODINÂMICA QUÂNTICA ESTENDIDA	33
3.1	O modelo geral	33
3.2	Ação efetiva	40
3.2.1	Método do tempo próprio	41
3.2.2	Método da função zeta	44
4	EFEITO SCHWINGER A 1-LOOP COM VIOLAÇÃO DE LO- RENTZ	46
4.1	As contribuições m_5 e b_μ	47
4.2	Análise de criação de pares E-P	54
4.3	Fenomenologia	56
5	GÁS QUÂNTICO FERMIÔNICO A TEMPERATURA FINITA COM VIOLAÇÃO DE LORENTZ	59
5.1	A contribuição $d^{\mu\nu}$	61
5.2	A contribuição b^μ	66
5.3	As contribuições $c^{\mu\nu}$ e f^μ	69
5.4	Fenomenologia	70
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	72
6.1	Perspectivas futuras	74
	REFERÊNCIAS	76
A	MATRIZES γ^μ E SUAS PROPRIEDADES	86

B	INTEGRAIS GAUSSIANNAS	88
C	O CÁLCULO DA $\exp \left[-\frac{1}{2}tr \ln \frac{\sinh(e\mathcal{F}s)}{e\mathcal{F}s} \right]$	90

Capítulo 1

Introdução

A Relatividade Restrita (RR), formulada por Albert Einstein em 1905, revolucionou a compreensão da física ao alterar as noções de espaço e tempo, que até então eram consideradas absolutas. O princípio central dessa teoria é a constância da velocidade da luz no vácuo para todos os observadores, independentemente de seu estado de movimento, e a equivalência das leis da física para todos os sistemas de referência inerciais (EINSTEIN, 1905b). Isso levou à unificação do espaço e do tempo em um único contínuo de quatro dimensões, chamado de espaço-tempo, onde eventos são descritos por coordenadas espaciais e temporais de maneira interdependente.

A teoria da RR aborda a noção de tempo diferentemente da mecânica clássica newtoniana, que assume que o tempo é absoluto e o mesmo para todos os observadores, independentemente de seu estado de movimento. No entanto, os experimentos mostraram que a velocidade da luz é constante para todos os observadores, o que levou à necessidade de modificar a compreensão do espaço e do tempo. Essa modificação se dá por meio das transformações de Lorentz, que são centrais para a RR e expressam a simetria fundamental subjacente à teoria.

Na RR, o espaço e o tempo não são entidades separadas. Eles formam um contínuo de quatro dimensões chamado espaço-tempo. Um evento no espaço-tempo é descrito por quatro coordenadas: três espaciais (x, y, z) e uma temporal t . Quando dois observadores inerciais estão se movendo um em relação ao outro, suas descrições de um mesmo evento, em termos dessas coordenadas, serão diferentes. No entanto, essas descrições estão relacionadas pelas transformações de Lorentz, que garantem que as leis da física possuam a mesma forma para ambos os observadores.

As transformações de Lorentz são derivadas da exigência de que a velocidade da luz seja a mesma em todos os referenciais inerciais. No caso mais simples, de movimento

ao longo de uma única direção, como o eixo x , as transformações de Lorentz entre dois referenciais inerciais S e S' , com S' movendo-se com uma velocidade constante v ao longo de x em relação a S , são

$$\begin{aligned}x' &= \gamma (x - vt) \\t' &= \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \\y' &= y \\z' &= z.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Aqui, x' e t' são as coordenadas espaciais e temporais no referencial S' , enquanto x e t são as coordenadas no referencial S . A constante c é a velocidade da luz no vácuo, e γ é o fator de Lorentz, definido por

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.\tag{1.2}$$

Este fator é maior que 1 para velocidades v significativas em relação à c , e ele parametriza o efeito de dilatação do tempo e contração do espaço entre dois referenciais em movimento relativo.

Do ponto de vista de um observador no referencial S' , o tempo entre dois eventos que ocorrem no mesmo ponto do espaço no referencial S parecerá mais longo. Este fenômeno é conhecido como dilatação do tempo. Se Δt for o intervalo de tempo medido no referencial S e $\Delta t'$ o intervalo medido em S' , temos a relação

$$\Delta t' = \gamma \Delta t.\tag{1.3}$$

Isso implica que, para um observador em movimento, o tempo parece aumentar ou passar mais devagar em comparação com o tempo medido por um observador estacionário.

De maneira complementar, a contração do espaço refere-se ao fato de que, do ponto de vista de um observador em movimento, a distância entre dois pontos no referencial estacionário parece diminuir. Se L é o comprimento medido no referencial S e L' é o comprimento medido no referencial S' , a relação entre eles é

$$L' = \frac{L}{\gamma}.\tag{1.4}$$

Assim, à medida que a velocidade relativa entre os observadores aumenta, as distâncias no sentido do movimento parecem encolher.

Uma consequência importante das transformações de Lorentz é a invariância do intervalo de espaço-tempo, que é uma quantidade escalar que permanece inalterada para

todos os observadores inerciais. O intervalo de espaço-tempo entre dois eventos é definido como

$$s^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2. \quad (1.5)$$

Este valor é o mesmo para todos os referenciais, ou seja, é invariante sob as transformações de Lorentz. Isso significa que, embora o tempo e o espaço sejam percebidos de maneira diferente por observadores em movimento relativo, a “distância própria” entre dois eventos no espaço-tempo é constante para todos os observadores. Essa invariância é crucial para a consistência da RR e da física relativística.

A RR também modifica a forma como entendemos a relação entre energia, momento e massa. Na mecânica clássica, a energia total de uma partícula é dada pelas somas das energias potencial e cinética. Contudo, na RR, a relação entre energia e momento total de uma partícula é mais complexa e é expressa pela equação

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2. \quad (1.6)$$

Aqui, E é a energia total, p é o momento linear da partícula e m é a massa de repouso. No caso de uma partícula em repouso ($p = 0$), essa equação se reduz à relação entre a energia e a massa de repouso

$$E = mc^2. \quad (1.7)$$

Esta equação mostra que a massa pode ser vista como uma forma de energia armazenada. O conceito de equivalência entre massa e energia é uma das previsões mais conhecidas da RR, e tem profundas implicações, especialmente em contextos onde grandes quantidades de energia são liberadas a partir da conversão de massa, como em reações nucleares (EISBERG; RESNICK, 1986; GREINER et al., 2000).

A simetria de Lorentz é fundamental na formulação de teorias físicas modernas, especialmente em áreas como a física de partículas e a teoria quântica de campos. As equações que governam as partículas e os campos, como a equação de Dirac para férmions e as equações de Maxwell para o campo eletromagnético, são, a princípio, covariantes sob transformações de Lorentz, garantindo que respeitem a simetria fundamental da natureza em regimes relativísticos (ALDROVANDI; PEREIRA, 2004; PESKIN; SCHROEDER, 2018).

A RR transformou profundamente nossa compreensão do universo ao unir espaço e tempo em um contínuo quadridimensional e ao introduzir a invariância das leis da física sob as transformações de Lorentz. Essa simetria fundamental garante a consistência da física relativística e tem implicações diretas na energia, no momento e na dinâmica de partículas (ALDROVANDI; PEREIRA, 2004; PESKIN; SCHROEDER, 2018).

Embora a RR seja construída sobre o princípio da simetria de Lorentz, que garante a invariância das leis da física sob transformações entre referenciais inerciais, nas últimas décadas surgiram questionamentos sobre a possibilidade de violação dessa simetria em certos contextos físicos, veja, por exemplo, (KOSTELECKY; SAMUEL, 1989b; CARROLL; FIELD; JACKIW, 1990; KOSTELECKY; SAMUEL, 1989a; COLLADAY; KOSTELECKY, 1997; COLLADAY; KOSTELECKY, 1998; JACKIW; KOSTELECKY, 1999; KOSTELECKY, 2004; KOSTELECKY; POTTING, 2005; BELICH et al., 2005; MARIZ et al., 2005; GOMES et al., 2010; DIAZ; KOSTELECKY, 2012; SANTOS; SOBREIRO, 2016b; SANTOS; SOBREIRO, 2016a; GOMES; HELAYEL-NETO, 2020; FERREIRA et al., 2020; FILHO; PETROV, 2021; MARIZ et al., 2021; COSTA; SOBREIRO, 2022; COSTA; SOBREIRO, 2024). Esses estudos visam investigar se a simetria de Lorentz, amplamente aceita como fundamental, pode não ser exata em situações específicas, especialmente em escalas extremamente pequenas, como na gravidade quântica ou em teorias além do Modelo Padrão da física de partículas.

1.1 Um pouco sobre a escala de Planck

Especificando o que é definido como escalas de comprimento extremamente pequenas, temos a escala de Planck. A escala de Planck é um conjunto de unidades naturais derivadas das constantes fundamentais da física, que marcaria o limite no qual os efeitos da gravidade quântica se tornam significativos ¹. Ela foi introduzida pelo físico Max Planck no final do século XIX e representa uma região muito pequena nas escalas comprimento, tempo e energia, onde as interações entre a mecânica quântica e a gravidade deveriam ser levadas em consideração simultaneamente. As unidades de Planck são definidas a partir de três constantes fundamentais da natureza, a constante de Planck (\hbar), uma constante fundamental da mecânica quântica que define a quantização da energia em sistemas físicos, a velocidade da luz (c), a velocidade máxima permitida no universo e uma constante fundamental da RR e geral (teoria da relatividade para referenciais não inerciais) e a constante gravitacional (G), a constante que define a intensidade da força gravitacional entre duas massas e é central na teoria da gravitação de Newton e na Relatividade Geral de Einstein. Com base nessas três constantes, é possível definir várias quantidades na escala de Planck.

Uma delas é o comprimento de Planck (L_p), uma estimativa de distância em que as atuais teorias da física, como a Relatividade Geral e a mecânica quântica, falhariam e assim a necessidade de uma teoria de gravidade quântica. Vale ressaltar aqui que espera-se

¹ Embora esperamos que os efeitos da gravidade quântica já devem ser importantes algumas ordens de grandeza anterior a escala de Planck.

que a gravidade quântica já seria necessária antes da escala de Planck. Ele é dado por

$$L_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1,616 \times 10^{-35} m. \quad (1.8)$$

Esse valor é extremamente pequeno, muito menor que o núcleo de um átomo ou mesmo as partículas subatômicas. Em escalas menores que essa, acreditamos que o espaço-tempo deixa de ser contínuo e começa a exibir características quânticas ([MAGGIORE, 1993](#)).

A segunda quantidade é o tempo de Planck (t_p), um intervalo de tempo extremamente pequeno, e representa o tempo que a luz leva para atravessar o comprimento de Planck no vácuo. Ele é dado por

$$t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5,39 \times 10^{-44} s. \quad (1.9)$$

O tempo de Planck é muitas ordens de magnitude menor do que qualquer intervalo de tempo que já foi medido experimentalmente ([OSSIANDER et al., 2017](#)).

E por último a energia de Planck (E_p), que é a quantidade de energia associada a essa escala, e é definida como

$$E_p = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \approx 1,22 \times 10^{19} GeV. \quad (1.10)$$

Essa energia é extremamente alta, muito maior do que qualquer energia que pode ser alcançada em aceleradores de partículas atuais, como o Large Hadron Collider (LHC), que opera na faixa de TeV ($10^{12} eV$). Em energias comparáveis à energia de Planck, os efeitos da gravidade quântica se tornam relevantes, e a gravitação deve ser tratada em termos de princípios quânticos, o que implica a necessidade de uma nova teoria além da Relatividade Geral e do Modelo Padrão.

Como já mencionado, na escala de Planck, e até algumas ordens de magnitude antes, esperamos que os conceitos clássicos de espaço e tempo, descritos pela Relatividade Geral, sejam substituídos por uma nova descrição quântica da gravidade, onde o espaço-tempo se torna dinâmico e sujeito a flutuações quânticas. E dentro dessa nova Física, esperamos que a simetria de Lorentz não resista e seja violada.

Dentro das novas propostas para gravidade quântica, vale a pena mencionar o trabalho de Witten de 1999 ([SEIBERG; WITTEN, 1999](#)). Ele foi o primeiro trabalho a propor um espaço tempo não comutativo, com objetivo de construir uma teoria quântica para gravidade, que apresentava uma violação da simetria de Lorentz.

Uma outra possível origem da violação da simetria de Lorentz, surge no contexto da teoria de cordas. Onde em regimes de baixas energias, o vácuo persiste em ter um campo de fundo constante, fazendo com que a simetria de Lorentz seja violada ([FRADKIN;](#)

[TSEYTLIN, 1985](#); [KOSTELECKY; SAMUEL, 1989b](#); [POLCHINSKI, 1998](#); [SEIBERG; WITTEN, 1999](#); [HASHIMOTO, 2014](#)).

Experimentalmente, nos dias de hoje, ainda não é possível detectar a VL. Vale ressaltar que não encontrar VL experimentalmente também é uma informação importante, pois podemos assumir a invariância de Lorentz para todas as escalas de energia. Como visto anteriormente, existe uma diferença enorme entre as escalas de Planck e aquela acessada pelo LHC. Assim, esperamos que os efeitos da VL que sobrevivam na menor escala em que temos acesso hoje são em experimentos muito sensíveis ou cumulativos. Levando então, a ideia de tratar teorias com VL como uma teoria efetiva resultante de uma física nova dada em altas energias (cordas, espaço-tempo não comutativo, gravidade quântica etc), juntando o modelo padrão e a Relatividade Geral com pequenas correções oriundas da VL. E é justamente neste setor que esta tese se concentrará trabalhando com o modelo padrão estendido que será apresentado nas sessões 1.3 e 3.

Dentro do contexto de experimentos muito sensíveis, destacamos os efeitos que surgem da QED. A QED é a mais bem sucedida teoria da Física com relação a experimentos, extremamente precisos e com alta sensibilidade. Em especial, iremos voltar nossos esforços para os efeitos do vácuo quântico gerados pela QED e também em um sistema de férmions que se comportem como um gás quântico e que estejam sob um banho térmico a temperatura finita.

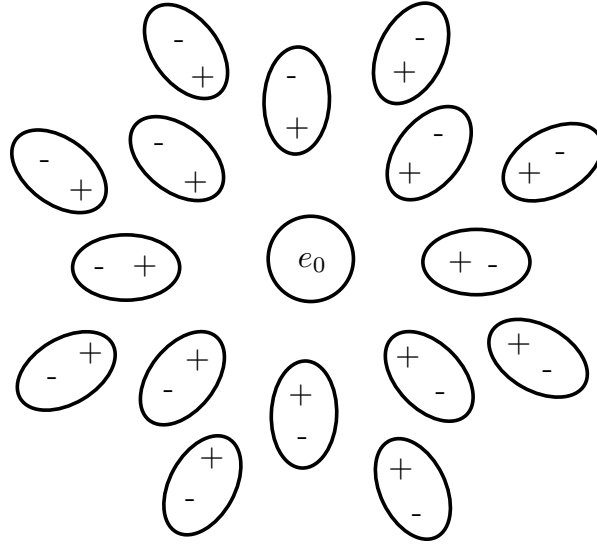
1.2 Um breve contexto histórico sobre o vácuo e gases

A ideia de vácuo vem sendo debatida ao longo de séculos na história da física, surgindo com a filosofia da Grécia antiga, onde se acreditava que o vácuo seria um espaço ausente de matéria, um vazio. Entretanto, esta ideia foi perdendo força com os questionamentos acerca do que havia no espaço entre os corpos celestes. Estes questionamentos conduziram o pensamento da época à ideia de uma substância que permearia todo o universo e não apresentaria resistência ao movimento, o “éter”, derrubando completamente a ideia de um espaço totalmente vazio, fornecendo assim um meio para a propagação de forças. Este pensamento ganhou ainda força após o desenvolvimento da teoria eletromagnética de Maxwell. Por mostrar o caráter ondulatório da luz, havia então a necessidade de um meio para que ela pudesse propagar-se, devido às luzes dos corpos celestes que chegavam até a Terra. Entretanto, em 1887 foi realizado o famoso experimento de Michelson-Morley cujo objetivo era justamente detectar o “éter” através do padrão de interferência causado na luz devido ao movimento da Terra em relação ao “éter”, análogo ao efeito do vento sobre as ondas sonoras ([MICHELSON; MORLEY, 1887](#)). Contudo, o experimento não apresentou resultados favoráveis com a teoria do “éter”, favorecendo o conceito de vácuo. Com o advento da teoria da Relatividade de Einstein, a ideia de “éter” foi finalmente

abandonada e substituída novamente pelo conceito de vácuo.

Todavia, essa visão pode ser entendida como sendo clássica. De um ponto de vista quântico, encontramos sistemas físicos simples que apresentam energia no ponto zero, como o oscilador harmônico simples. Desta forma, dependendo da energia adquirida pelo vácuo, é possível que ele apresente flutuações, permitidas pela relação de incerteza $\Delta E \Delta t \sim \hbar$. Num contexto de física de partículas, essas flutuações do vácuo para um determinado limiar de energia permitem agora a criação de pares virtuais de partícula e antipartícula. Por exemplo no caso da QED, tanto a propagação de um elétron ou de um fóton é agora afetada por suas interações com esses pares virtuais de partículas. Em particular, o movimento de uma carga elétrica e_0 é afetado pelas interações que essa partícula sofre com o vácuo, efetivamente o vácuo começa a se comportar como um meio “dielétrico” devido à presença dessa carga, esse fenômeno de alinhamento dos “dipolos” é o que chamamos de Polarização do Vácuo Fig. 1..

Figura 1 – Interação de uma carga elétrica e_0 com pares virtuais de E-P do vácuo.



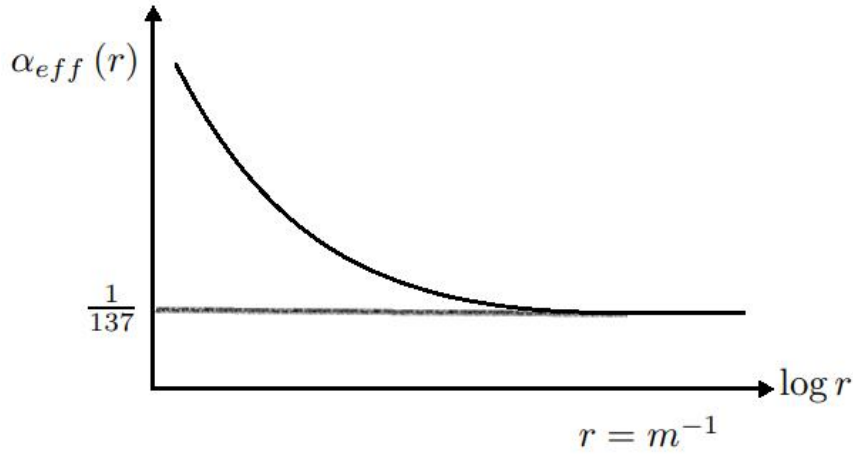
Fonte: Autor, 2025.

Ademais, ao medirmos a energia potencial eletrostática desse sistema para $r > m$, encontramos

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \left[1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}} + \dots \right]. \quad (1.11)$$

Isso mostra que se nos afastamos de uma distância espacial r da partícula, o valor da sua carga elétrica aparente é menor do que a carga “livre”, isto devido à interação desta partícula com os pares virtuais (PESKIN; SCHROEDER, 2018). Este fenômeno é conhecido como a blindagem da carga elétrica Fig. 2.

Figura 2 – Esquema qualitativo da constante de acoplamento eletromagnética gerada pela polarização do vácuo à 1-loop.



Fonte: Autor, 2025.

Estes consistem em alguns exemplos que exploraram o fenômeno de flutuação da energia do vácuo, há uma gama de exemplos interessantes que fazem uso da criação de pares virtuais de partícula e antipartícula, o que originou uma série de propostas de novos e instigantes fenômenos físicos envolvendo o vácuo quântico (JR; RETHERFORD, 1947; CASIMIR, 1948; HAWKING, 1977b; HAWKING, 1975; ROSA, 2006; SCHRECK, 2017).

Sobre o estudo de um gás quântico, começamos resgatando um pouco do conceito de gás na Antiguidade e Idade Média. Os primeiros estudos sobre gases remontam à Antiguidade, embora não de forma sistemática. Filósofos gregos, como Empédocles e Anaxímenes, já reconheciam o ar como uma das formas da matéria, mas as suas descrições eram qualitativas e ligadas a especulações filosóficas sobre os elementos primordiais. Durante a Idade Média, a ciência esteve mais focada na alquimia e nas teorias aristotélicas dos quatro elementos (terra, fogo, ar e água), que dominavam o pensamento científico europeu. Foi apenas com o Renascimento e com o início da ciência moderna que a compreensão do comportamento dos gases começou a se desenvolver de maneira significativa.

A Revolução Científica do século XVII trouxe um novo enfoque empírico ao estudo da natureza. Um dos marcos foi a invenção da bomba de vácuo por Otto von Guericke em 1650, que permitiu os primeiros experimentos com gases em condições controladas (HARSCH, 2007). No mesmo período, Robert Boyle realizou importantes investigações sobre a compressibilidade do ar, culminando na formulação da famosa Lei de Boyle em 1662, que descreve a relação inversa entre o volume e a pressão de um gás a temperatura

constante ($\mathcal{P}V = \text{constante}$) (BOYLE, 1967; BOYLE, 1974). A descoberta de Boyle foi crucial porque estabeleceu uma das primeiras equações quantitativas para descrever o comportamento dos gases.

No século XVIII, a atenção se voltou para a relação entre volume e temperatura dos gases. O cientista francês Jacques Charles, em 1787, descobriu empiricamente que, para uma quantidade fixa de gás a pressão constante, o volume varia diretamente com a temperatura. Esse princípio ficou conhecido como Lei de Charles, e mais tarde, com os trabalhos de outros cientistas como Joseph Louis Gay-Lussac, foi formalizada de maneira mais completa (CAMEL; FILGUEIRAS, 2013).

A combinação das leis de Boyle e Charles levou à formulação de uma equação mais geral que descreve o comportamento dos gases, considerando pressão, volume e temperatura. O químico e físico francês Émile Clapeyron, em 1834, unificou essas leis e expressou a relação em termos de uma equação conhecida como equação de estado dos gases ideais, na forma

$$\mathcal{P}V = nRT, \quad (1.12)$$

onde \mathcal{P} é a pressão, V o volume, n a quantidade de gás em moles, R a constante universal dos gases ideais e T a temperatura.

Embora a equação dos gases ideais fornecesse uma descrição empírica robusta, ela ainda não explicava por que os gases se comportam dessa maneira. A resposta veio com o desenvolvimento da teoria cinética dos gases no século XIX, que associou o comportamento macroscópico dos gases (pressão, volume e temperatura) ao movimento microscópico das moléculas.

Daniel Bernoulli foi um dos primeiros a propor, em 1738, que os gases consistiam em um grande número de partículas em movimento constante (BERNOULLI, 1968). No entanto, foi apenas com os trabalhos de James Clerk Maxwell e Ludwig Boltzmann, na segunda metade do século XIX, que a teoria cinética foi formalizada de maneira completa (MAXWELL, 1890; MAXWELL, 1867; MAXWELL, 1860; MAXWELL, 1867; BOLTZMANN, 1910). A teoria cinética explica que a pressão exercida por um gás é resultado das colisões das moléculas contra as paredes do recipiente, e que a temperatura do gás está relacionada à energia cinética média das moléculas.

A formulação da teoria dos gases ideais é uma dos pilares da física clássica e termodinâmica. Seu desenvolvimento não só ajudou a estabelecer princípios fundamentais da física, como também foi essencial para o avanço da química, especialmente na compreensão de reações químicas e processos industriais (EISBERG, 1984; NUSSENZVEIG, 1997).

Com o avanço das ideias relacionadas à teoria cinética e à mecânica estatística, o

século XIX viu o desenvolvimento de modelos que buscavam explicar o comportamento de partículas em sistemas termodinâmicos. No entanto, à medida que os físicos começaram a lidar com questões mais complexas, como os efeitos da quantização e as limitações da teoria clássica, tornou-se evidente que novos paradigmas eram necessários para descrever corretamente certos tipos de partículas.

O trabalho de Planck, sobre o problema da radiação de corpo negro ([PLANCK, 1901](#)), marcou o início de uma série de desenvolvimentos que culminariam na formulação da mecânica quântica. Albert Einstein, em 1905, utilizou a ideia dos quanta de Planck para explicar o efeito fotoelétrico ([EINSTEIN, 1905a](#)), sugerindo que a luz poderia ser pensada como composta de partículas, os fótons. Esta ideia ajudou a consolidar a teoria quântica, desafiando a visão de que a luz era apenas uma onda. Ao longo das décadas seguintes, cientistas como Niels Bohr, Werner Heisenberg e Erwin Schrödinger fizeram contribuições fundamentais para a mecânica quântica, proporcionando uma nova visão da estrutura atômica e dos fenômenos subatômicos.

Durante o século XIX, Ludwig Boltzmann desenvolveu a estatística clássica, que descrevia o comportamento estatístico de partículas em um gás ideal com base na mecânica clássica ([BOLTZMANN, 1910](#); [BLACKMORE, 1995](#)). A distribuição de Maxwell-Boltzmann fornecia uma descrição precisa para sistemas com um grande número de partículas, como moléculas em um gás, desde que as interações entre elas fossem desprezíveis ([MAXWELL, 1860](#); [MAXWELL, 1867](#); [BOLTZMANN, 1910](#)).

No entanto, no início do século XX, ficou claro que a estatística de Maxwell-Boltzmann falhava em descrever o comportamento de partículas em sistemas muito pequenos, como elétrons em metais ou partículas subatômicas. Essas partículas pareciam exibir propriedades que não podiam ser explicadas pelo formalismo clássico.

Uma das grandes revelações da física quântica foi a distinção entre dois tipos fundamentais de partículas: bósons e férmions. Férmions, que incluem partículas como elétrons, prótons e nêutrons, possuem uma característica crucial: obedecem ao princípio de exclusão de Pauli, formulado por Wolfgang Pauli em 1925 ([PAULI, 1925](#)). Esse princípio afirma que dois férmions idênticos não podem ocupar o mesmo estado quântico simultaneamente. Esse comportamento levou ao surgimento de uma nova estatística, adequada para descrever sistemas de férmions.

Em 1926, Enrico Fermi e Paul Dirac, de forma independente, desenvolveram uma nova distribuição estatística para descrever o comportamento de partículas que obedecem ao princípio de exclusão de Pauli ([FERMI, 1926](#); [DIRAC, 1926](#)). A distribuição de Fermi-Dirac foi formulada para partículas com spin semi-inteiro (férmions) e descreve a probabilidade de ocupação de diferentes estados quânticos em função da temperatura e do

potencial químico.

A equação básica da distribuição de Fermi-Dirac é dada por

$$f(\epsilon, T) = \frac{1}{e^{\frac{(\epsilon - \mu)}{k_b T}} + 1}, \quad (1.13)$$

onde $f(\epsilon)$ é a probabilidade de um estado de energia ϵ ser ocupado, μ é o potencial químico e k_b é a constante de Boltzmann.

Esta distribuição se mostrou fundamental para descrever o comportamento de elétrons em metais e semicondutores, além de ser aplicada em diversas áreas da física moderna, incluindo a astrofísica (em estrelas de nêutrons, por exemplo) e a física de partículas (EISBERG; RESNICK, 1986).

A distribuição de Fermi-Dirac é importante também pois ela aparece na expressão final do cálculo da energia livre (F_L) de um sistema de gás quântico fermiônico, de maneira geral dado por

$$F_L = K \int_0^\infty f(\epsilon, T) \epsilon^3 d\epsilon, \quad (1.14)$$

onde K é uma constante arbitrária.

No início dos anos 2000, alguns trabalhos foram feitos na analisando a termodinâmica de fenômenos envolvendo gases quânticos (COLLADAY; MCDONALD, 2004; COLLADAY; MCDONALD, 2006). Nas décadas seguintes foram ampliados os trabalhos sobre este tema e outros mecanismos foram estudados, como efeitos causados por uma relação de dispersão anômala de uma única partícula sugerida em vários modelos de gravidade quântica (CASTELLANOS; LÄMMERZAHN, 2012; CASTELLANOS; CAMACHO, 2009), a contribuição de 1-loop e 2-loop para a energia livre na QED com quebra de simetria de Lorentz, efeitos da VL no condensado de Bose-Einstein de um gás de bósons ideal (CASANA; SILVA, 2015), entre outros. Assim, nesta tese pretendemos dar continuidade nos estudos e explorar a distribuição de Fermi-Dirac Eq. (1.13) no contexto de campos de fundo VL.

De forma geral, a tese pretende explorar alguns efeitos quânticos da QED sob a influência de campos de fundo que apresentam VL. Com o objetivo de analisar o que estas mudanças podem influenciar para o efeito em si e também para tentar dar novas formas para se tentar medir a VL futuramente. Na primeira seção 1.3 será feita uma abordagem histórica comentando os principais trabalhos da área. Na seção 3 será apresentado o modelo que será trabalhado. Nas seções 4 e 5 serão feitas as apresentações dos efeitos Schwinger e um gás quântico fermiônico, ambos sob a influência de campos de fundo VL. E por fim, na seção 6 serão apresentados a conclusão e as perspectivas futuras.

1.3 Contextualização histórica da violação da simetria de Lorentz

A Simetria de Lorentz, um conceito fundamental na física moderna ([BARGMANN, 1947](#); [BARGMANN; WIGNER, 1948](#); [MARIZ; NASCIMENTO; PETROV, 2023](#)), desempenha um papel crucial na compreensão do universo em altas velocidades. Ela descreve como as leis da física permanecem inalteradas sob transformações de coordenadas que preservam a forma das equações de Maxwell, fornecendo uma estrutura matemática essencial para compreender o comportamento de objetos em movimento próximo à velocidade da luz.

Esta simetria recebe o nome em homenagem ao físico holandês Hendrik Lorentz, cujos estudos foram fundamentais para o avanço da teoria. Lorentz, em suas pesquisas, procurou desenvolver uma teoria que pudesse abranger de forma consistente os fenômenos elétricos, magnéticos e luminosos, considerando o éter como meio físico em repouso, no qual os elétrons se moviam ou não em relação a ele. Essa teoria conseguiu explicar muitos fenômenos, porém encontrou obstáculos com o resultado negativo do experimento de Michelson-Morley ([MICHELSON; MORLEY, 1887](#)), que apontava como explicação mais plausível o abandono da hipótese do éter.

Tentando superar esta dificuldade, Lorentz introduziu, em 1895, assim como Fitzgerald em 1889, a concepção de tempo próprio que associava-se à contração dos comprimentos ([FITZGERALD, 1889](#); [LORENTZ, 1892](#)). Avançando em suas pesquisas, ele chegou, em 1904, às transformações de Lorentz ([LORENTZ, 1904](#)), que têm um papel crucial na teoria especial da relatividade, concebida por Einstein no ano seguinte ([EINSTEIN, 1905b](#)).

Com o advento e aceitação da teoria da relatividade de Einstein, a simetria de Lorentz se tornou uma das bases da física moderna e por muito tempo, durante o século XX, foi tratada como uma simetria fundamental. No entanto, em 1989, Alan Kostelecký e Stuart Samuel demonstraram que existem interações presentes em teorias de cordas que podem resultar na quebra da simetria de Lorentz, ou seja, campos tensoriais que podem tomar valores esperados no vácuo não-triviais ([KOSTELECKY; SAMUEL, 1989b](#)), indicando um limite de energia para aplicabilidade da teoria. Isso acaba demonstrando que a relatividade especial é um limite de uma teoria mais fundamental, alguma que apresente uma relação de dispersão modificada ²

$$E^2 = p^2 + m^2 + \mathcal{O}_{\mathcal{VL}}, \quad (1.15)$$

onde $\mathcal{O}_{\mathcal{VL}}$ representa os possíveis parâmetros resultantes dos valores esperados no vácuo não-triviais. Uma outra hipótese para a quebra da simetria de Lorentz, uma VL, é a de

² A partir daqui será empregado em todo o trabalho as unidades naturais, $\hbar = c = k_b = 1$, quando for necessário será avisado quando retomaremos as unidades no Sistema Internacional de Unidades (SI).

premissas cosmológicas, uma espécie de anisotropia do espaço-tempo, como investigado por (LAND; MAGUEIJO, 2005). Ainda dentro dos pressupostos cosmológicos, podemos destacar também a hipótese de variabilidade da velocidade da luz, para explicar a aceleração cósmica (ALEXANDER; MAGUEIJO, 2004). Vale resaltar que a busca na compreensão acerca da VL não implica na negação da teoria da relatividade de Einstein. Assim como um campo magnético homogêneo externo estabelecido no espaço tridimensional quebra a simetria rotacional, qualquer anisotropia no espaço-tempo implica na violação da simetria de Lorentz. Toda investigação dentro do escopo da VL é motivada pela busca de compreender qual pode ser a origem das anisotropias espaço-temporais presentes no vácuo quântico, uma origem que pode indicar alguma nova física além do Modelo Padrão.

Dentre as hipóteses mencionadas acima para a busca e estudo de possíveis violações da simetria de Lorentz, em 1990, temos a publicação do famoso e importante trabalho de S. M. Carroll, G. B. Field e R. Jackiw (CARROLL; FIELD; JACKIW, 1990). Trabalho este que se tornou um dos mais proeminentes símbolos da quebra de simetria de Lorentz. No artigo, Carroll, Field e Jackiw (CFJ) buscam limites na quebra da simetria de Lorentz usando um modelo topológico, que é uma versão em $(1 + 3)$ dimensões do modelo de Chern-Simons em $(1 + 2)$ dimensões.

Em 1995, D. Colladay apresenta o Modelo-Padrão Minimamente Estendido, também conhecido como Minimal Standard-Model Extension (MSME), durante a escola de verão realizada no Center for Spacetime Symmetries da Universidade de Indiana (IUCSS) (MELO; HELAYËL-NETO, 2023). Após isso, no período entre 1997 e 1998, surge o famoso modelo padrão estendido, conhecido como Standard-Model Extension (SME), através de uma colaboração entre D. Colladay e V. A. Kostelecký, em dois trabalhos distintos (COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1997; COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1998). O modelo é formulado sem incluir derivadas de ordem superior e é renormalizável. Contudo, contempla a possibilidade de quebrar as simetrias de Lorentz, conjugação de carga, paridade e reversão temporal (CPT). Vale ressaltar que a teoria sofre transformações normalmente sob rotações ou *boosts*, onde as transformações de Lorentz do observador são aplicadas no referencial do laboratório. A VL surge somente quando os campos que descrevem as partículas são rotacionados ou aumentados em relação aos valores esperados de tensores que descrevem o estado do vácuo, conhecidos como transformações de Lorentz das partículas (MELO; HELAYËL-NETO, 2023).

O próximo capítulo será dedicado a comentar um pouco sobre a simetria de Lorentz, a ideia de espaço-tempo e algumas de suas principais implicações. E logo em seguida, apresentaremos o modelo da QED Estendida (QED_{ex}) no capítulo 3 e a introdução dos métodos de cálculo que foram utilizados para obter os resultados dos trabalhos descritos nos capítulos 4 e 5.

Capítulo 2

A simetria de Lorentz

Como mencionado no início do capítulo 1, a RR (Relatividade Restrita) foi desenvolvida por Fitzgerald, Lorentz, Poincaré e Einstein por meio de um extenso estudo das transformações de Lorentz. A principal tarefa era modificar a estrutura clássica, especialmente a noção de tempo absoluto, de maneira a preservar os aspectos confirmados por experimentos envolvendo corpos em altas velocidades. Essa transformação, impulsionada pelos postulados da RR, levou Poincaré e Minkowski a introduzirem o conceito revolucionário de espaço-tempo. Trata-se de um espaço quadridimensional, composto pelas três dimensões espaciais e uma temporal, dotado de uma métrica específica que define a distância entre eventos. Essa métrica é fundamental para descrever a geometria do espaço-tempo e é dada por

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.1)$$

com $\eta_{\mu\nu}$ denominada métrica de Minkowski sendo dada por $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, conforme definido no Apêndice A.

A introdução do conceito de espaço-tempo, munido com a métrica definida na Eq. (2.1), possibilitou que as leis físicas fossem expressas de maneira covariante, ou seja, de forma invariante sob transformações de coordenadas, neste caso as transformações de Lorentz. Como exemplo ilustrativo, podemos mencionar a lagrangeana clássica do campo eletromagnético, que é descrita por uma expressão específica e desempenha um papel central na formulação covariante do eletromagnetismo. Ela é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

onde $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético. Dessa forma, a Eq. (2.2) é invariante sob as transformações em Eq. (1.1) juntamente com as rotações em três dimensões. Em especial

para tensores, a transformação é dada por

$$(\mathcal{F}^{\alpha\beta})' = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \mathcal{F}^{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

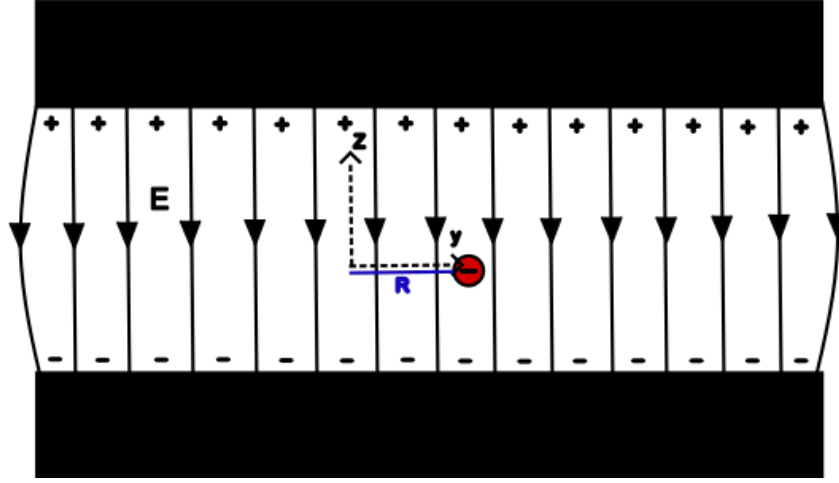
onde $\Lambda^{\alpha\mu}$ representa as transformações que satisfazem o elemento de espaço-tempo infinitesimal, dado pela Eq.(2.1), e são denominadas de transformações Lorentz. Ademais, também possui a propriedade de $\Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu = \eta^\alpha_\nu$, fazendo com que Eq. (2.2) seja invariante. As transformações Eq.(1.1), comumente chamadas de “*boosts*”, juntamente com as rotações em torno de um determinado eixo são as que satisfazem essas condições.

A quebra da simetria de Lorentz então se dá justamente adicionando termos à Eq. (2.2) que não mantém sua forma original mesmo com transformações do tipo Eq. (2.3). Estes termos são ditos constantes sob essas transformações. Na próxima seção, mostraremos um exemplo de diferenciação entre dois tipos, sutis, de transformações, chamadas de partícula (ativa) e de observador (passiva). Do ponto de vista das transformações de observador, consideramos a situação em que os pontos do espaço-tempo permanecem inalterados, e estabelecemos uma relação entre as bases de dois sistemas de referência inerciais. Por outro lado, do ponto de vista das transformações de partícula, em vez de alterarmos o sistema de referência, mantemos a base fixa, e são os pontos do espaço-tempo que se movimentam. Em uma teoria completamente invariante, as duas formas coincidem, porém quando temos termos constantes, como mencionado anteriormente, as duas não são mais equivalentes. Gerando então uma quebra de simetria.

2.1 Transformações de Lorentz de observador e de partícula

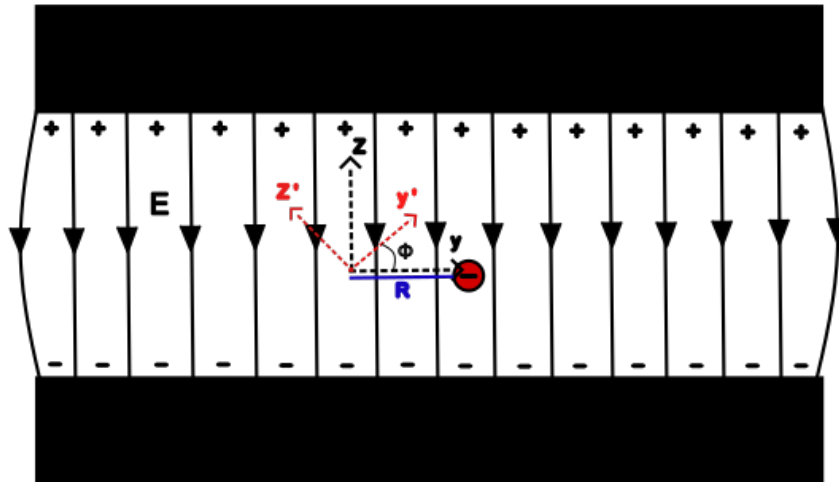
As transformações de Lorentz podem ser classificadas em duas categorias principais: transformações de Lorentz de observador e transformações de Lorentz de partícula. As transformações de observador descrevem como os eventos no espaço-tempo são percebidos por observadores que se encontram em movimento relativo uns em relação aos outros. Em contraste, as transformações de partícula estão relacionadas à maneira como as propriedades físicas, como momento e energia, de uma partícula específica são transformadas quando vistas a partir de diferentes referenciais inerciais. Essas distinções são fundamentais para entender como a simetria de Lorentz se aplica tanto à estrutura do espaço-tempo quanto ao comportamento das partículas sob diferentes condições de movimento.

Figura 3 – Capacitor de placas paralelas.



Fonte: Autor, 2025.

Para esclarecer melhor, suponha que um elétron seja colocado em uma região com um campo elétrico de fundo¹ na direção \hat{z} , como no caso de um capacitor de placas paralelas, conforme ilustrado na figura 3. Se considerarmos uma rotação do elétron de $\pi/2$ radianos, começando com o vetor posição inicial $R = (0, a, 0)$, que é perpendicular ao campo, podemos descrever essa situação de duas maneiras distintas. Uma delas é através das transformações de Lorentz de observador, também chamadas de transformações passivas, que relacionam o observador inicial O com um novo observador O' , que está rotacionado em $\phi = +\pi/2$ radianos em relação ao eixo x , conforme mostrado na Fig.2.1. Essa rotação envolve a mudança da perspectiva do observador sobre os eventos, sem alterar as propriedades físicas do sistema.

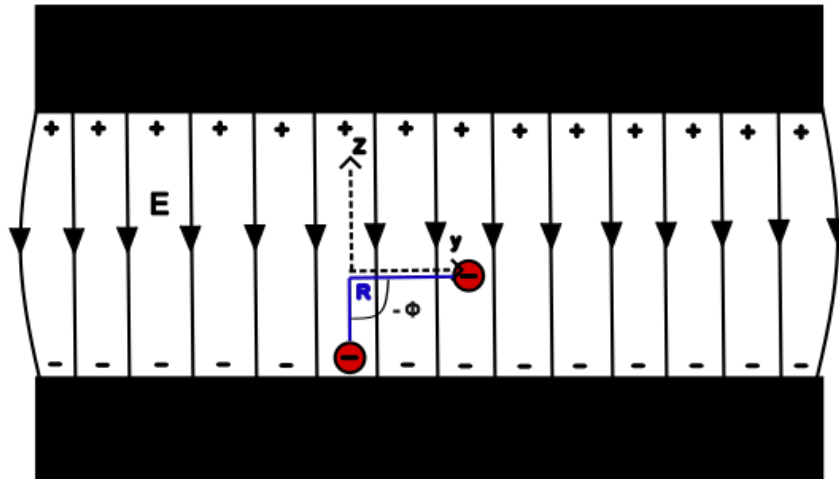
Figura 4 – Capacitor de placas paralelas, com o referencial rotacionado $\phi = \pi/2$ em relação ao eixo x .

Fonte: Autor, 2025.

¹ Aqui interpreta-se o campo elétrico como um campo constante de fundo que não é transformado juntamente com as outras variáveis.

Nesse caso os dois observadores irão concordar que o vetor posição R é perpendicular ao campo de fundo $R \perp E$. Ou, alternativamente, nas transformações de Lorentz de partícula, também chamadas de transformações ativas, o mesmo referencial é mantido, mas agora é realizada uma rotação no elétron de $\phi = -\pi/2$, novamente em relação ao eixo x . Como resultado dessa rotação, o vetor posição do elétron, inicialmente dado por $R = (0, a, 0)$, muda para $R = (0, 0, -a)$. De maneira surpreendente, essa nova orientação do vetor posição faz com que ele se torne paralelo ao campo de fundo, ou seja, $R \parallel E$, como mostrado na Fig. 2.1. Essa transformação ativa, ao contrário da passiva, não altera o referencial, mas sim a posição da partícula dentro desse referencial, ilustrando de maneira clara como a rotação no espaço das coordenadas da partícula pode alterar a relação entre a partícula e o campo, sem alterar o próprio sistema de referência.

Figura 5 – Capacitor de placas paralelas, com o vetor posição da partícula rotacionado $\phi = -\pi/2$ em relação ao x .



Fonte: Autor, 2025.

Note que, ao realizar essas duas descrições, chegamos a duas situações distintas, o que indica que a presença de um campo de fundo quebra a equivalência entre elas. Isso ocorre porque, enquanto nas transformações passivas de observador a mudança afeta a forma como o campo é percebido pelo observador, nas transformações ativas de partícula a mudança ocorre diretamente na partícula, alterando sua posição e interação com o campo de fundo. Como resultado, surge uma distinção fundamental entre as duas abordagens: a transformação de observador, que se refere à transformação passiva no contexto da presença de um campo de fundo, e a transformação de partícula, que descreve a transformação ativa, aplicada à partícula em presença de um campo de fundo. Essas duas abordagens, embora relacionadas, possuem diferenças significativas em sua aplicação e interpretação. Para uma discussão mais aprofundada sobre o tema, incluindo mais exemplos ilustrativos e uma análise detalhada de como essas transformações afetam os sistemas físicos, consulte (BELICH et al., 2007).

Dessa forma, quando se pensa em uma VL, ela é geralmente tratada no contexto das transformações de Lorentz ativas. Como mencionado anteriormente, a presença de um campo de fundo altera fundamentalmente a situação, fazendo com que as duas transformações não descrevam mais uma situação física equivalente. Um exemplo adicional citado por (BELICH et al., 2007) é o movimento balístico de um elétron em presença de um campo de fundo eletrostático uniforme. Quando se aplica a transformação de observador, o comportamento do campo elétrico se mostra covariante, o que garante que a simetria de Lorentz seja preservada. Em energias baixas, ambos os observadores inerciais concordam sobre o movimento parabólico do elétron, como seria esperado na teoria clássica. No entanto, durante a transformação de partícula, o campo de fundo permanece inalterado, mas o elétron experimenta um *boost* instantâneo, o que resulta em uma redução no seu alcance. Esse efeito reflete uma modificação no comportamento do elétron devido à sua interação com o campo de fundo, e é um exemplo claro de como um campo escalar pode violar a simetria de Lorentz, uma vez que a transformação ativa da partícula altera a descrição do sistema físico sem modificar o campo de fundo. Esse comportamento revela como as VL podem se manifestar de forma sutil, mas ainda assim observar uma mudança significativa nas propriedades físicas de um sistema.

2.2 O espaço-tempo

Como visto anteriormente, o espaço e o tempo agora são unificados. Matematicamente, o espaço-tempo é descrito por uma variedade quadridimensional, onde cada ponto é representado por quatro coordenadas: três espaciais ($x_1 = \mathbf{x}, x_2 = \mathbf{y}, x_3 = \mathbf{z}$) e uma temporal $(ct)^2$. E a métrica do espaço-tempo, Eq. (2.1), é que define a distância entre dois pontos, neste caso chamado de intervalo infinitesimal. Aqui definiremos variedade como um espaço topológico que, localmente, em torno de cada ponto, apresenta uma estrutura semelhante à de um espaço euclidiano. De forma mais precisa, para uma variedade de dimensão n , cada ponto possui uma vizinhança que é homeomorfa ao espaço euclidiano de dimensão n (SPIVAK, 2018). Todo fenômeno físico acontecerá em um determinado ponto do espaço-tempo, estes pontos $x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, com $x^0 = ct$, do espaço-tempo são chamados de eventos. Um ponto de notação: vetores de posição no espaço tridimensional são indicados por letras com uma seta \vec{x} ou em negrito \mathbf{x} , enquanto um ponto no espaço-tempo é representado por letras simples x .

2.2.1 O cone de luz

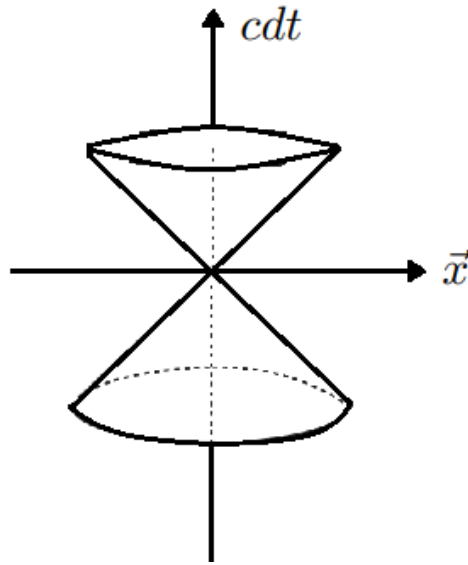
Tomemos como exemplo, um feixe de luz que é criado na origem, chamaremos este evento de O . A figura 6 é a representação diagramática da evolução desse feixe de luz,

² Nesta seção retomaremos as unidades no SI.

uma vez que uma representação gráfica de um fenômeno quadridimensional é extremamente difícil, se propagando com velocidade c .

O cone de luz nos ajuda a entender e classificar todos os outros eventos que possam acontecer. Todos os eventos que podem ser atingidos por O formam o cone de luz futuro, enquanto aqueles eventos que podem ter enviados O para a origem formam o cone de luz passado.

Figura 6 – Representação diagramática de um evento na origem.



Fonte: Autor, 2025.

Outros eventos que acontecem dentro do cone de luz são ditos do tipo tempo, enquanto que eventos que acontecem fora do cone de luz são ditos do tipo espaço e os eventos que acontecem na superfície do cone são ditos do tipo luz.

2.2.2 Causalidade

Partículas com velocidades $v < c$ permanecem dentro do cone. Como nenhuma perturbação pode viajar mais rápido que c , qualquer perturbação no vértice do cone afetará apenas eventos dentro da metade superior do cone (cone do futuro). Por outro lado, o evento no vértice só pode ser afetado por incidentes que ocorrem dentro do cone inferior (cone do passado). Esse é o papel principal da métrica de Lorentz: fornecer uma formulação precisa da causalidade na Relatividade Especial.

Se um determinado evento H está dentro do cone de luz (futuro) do evento O , então H está no cone de luz (passado) de O . Os eventos H e O estão causalmente relacionados.

No entanto, uma perturbação em H não afetará O . Em termos matemáticos, a relação passado-futuro é uma ordenação parcial, “parcial” porque nem todos os dois pontos estão nos cones um do outro. A linha horizontal na figura 6 representa o espaço tridimensional presente. Seus pontos estão fora do cone e não podem ser afetados por qualquer coisa que aconteça no vértice. A razão é a de que leva tempo para que uma perturbação atinja qualquer outro ponto. Apenas pontos no futuro podem ser afetados. A Mecânica Clássica deve ser obtida no limite $c \rightarrow \infty$. Aproximamo-nos cada vez mais da visão clássica ao abrir o ângulo sólido do cone. Se abrirmos o cone progressivamente para nos aproximarmos do caso clássico, o número de pontos tridimensionais no futuro possível (e no passado possível) aumenta cada vez mais. No limite, o presente é incluído no futuro e no passado: a comunicação instantânea torna-se possível.

2.2.3 O tempo próprio

Voltando ao intervalo Eq. (2.1) que separa dois eventos próximos. Suponha dois eventos na mesma posição no espaço tridimensional, de modo que $d\vec{l}^2 = d\vec{x} = 0$. Eles representam o mesmo ponto no espaço tridimensional em tempos diferentes, e seu intervalo se reduz a

$$ds^2 = c^2 dt^2. \quad (2.4)$$

Um observador fixo no espaço tridimensional terá esse intervalo, que corresponde ao tempo coordenado puro. Ele será um “relógio puro”. Esse tempo medido por um observador fixo é o seu tempo próprio. O tempo próprio infinitesimal é simplesmente ds . Se atribuirmos agora atribuir coordenadas x^0 a esse relógio em seu próprio referencial, de modo que $ds = c dt'$, e comparar com o que é observado por um observador próximo, em relação ao qual o relógio estará em movimento e terá coordenadas x (incluindo um relógio). A invariância do intervalo nos dará

$$dt' = dt \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.5)$$

com a velocidade $v = \frac{d\vec{x}}{dt}$. Ao integrar essa expressão, juntamente com a suposição de que ambos os observadores são inerciais, ou seja, v é constante. Podemos obter a relação entre um intervalo de tempo finito medido pelo relógio fixo e o mesmo intervalo medido pelo relógio em movimento, dado por

$$\Delta t' = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \Delta t, \quad (2.6)$$

nos fornecendo a relação já apresentada em Eq. (1.3) e sua respectiva interpretação também já foi apresentada.

Todas essas implicações são oriundas de um espaço-tempo invariante de Lorentz. No próximo capítulo iremos apresentar um modelo específico que é composto por termos

de correção ao modelo padrão de física de partículas que não são invariantes do ponto de vista das transformações de partícula, criam uma anisotropia no espaço-tempo. E a partir desse ponto, deduziremos o modelo de trabalho desta tese, a QED_{ex} .

Capítulo 3

Eletrodinâmica quântica estendida

3.1 O modelo geral

Neste capítulo, será apresentada a estrutura geral do modelo, acompanhada das simplificações e adaptações essenciais que foram aplicadas ao longo deste trabalho. O modelo da QED_{ex} foi inicialmente proposto em 1998 pelos físicos Don Colladay e Alan Kostelecký, no contexto de investigações sobre a quebra de simetria de Lorentz. A exposição aqui seguirá de perto a descrição detalhada fornecida no trabalho de referência (COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1998), onde os autores delineiam os fundamentos do modelo e suas implicações no contexto da quebra de simetria de Lorentz.

Assim, uma versão ampliada da QED, que incorpora termos responsáveis pela quebra de simetria de Lorentz, pode ser formulada a partir de uma extensão apropriada do modelo padrão. Da mesma forma que a QED convencional pode ser derivada do modelo padrão tradicional, essa versão expandida surge naturalmente no contexto da teoria estendida. Esse ponto se torna especialmente importante considerando os testes de precisão extrema aos quais a QED tem sido submetida em uma ampla variedade de experimentos. Alguns desses experimentos não apenas validam a teoria com grande exatidão, mas também podem impor limites rigorosos aos coeficientes de acoplamento dos possíveis termos de violação da simetria de Lorentz, restringindo a forma que tais extensões podem assumir.

Seja l_A a notação para os campos leptônicos padrão de quatro componentes, e m_A suas respectivas massas, onde o índice $A = 1, 2, 3$ representa o elétron, o múon e o tau, respectivamente. Com essa definição, a Lagrangiana que descreve a QED convencional, envolvendo léptons e fótons, pode ser expressa como

$$\mathcal{L}_{lepton-fóton}^{QED} = \frac{1}{2} \bar{l}_A \gamma^\mu \overleftrightarrow{\Pi}_\mu l_A - m_A \bar{l}_A l_A - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

em que $\Pi_\mu = i\partial_\mu - eA_\mu$ é a derivada covariante, $A \overleftrightarrow{\Pi}_\mu B = A\Pi_\mu B - (\Pi_\mu A)B$ representa o operador diferencial simétrico entre os campos A e B e $\mathcal{F}^{\alpha\beta}$ denota o tensor eletromagnético. A Lagrangiana apresentada na Eq. (3.1) é derivada a partir de uma redução do modelo padrão estendido discutido em (COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1998). Essa redução é realizada eliminando os campos de gluon G_μ , os bósons fracos W_μ^\pm e Z_μ^0 , e o campo físico de Higgs, mas preservando o valor esperado do dubleto de Higgs, que é crucial para a geração das massas dos férmions. Dentre os bósons, o único que permanece na teoria é o fóton, responsável por mediar as interações eletromagnéticas. Como os neutrinos não possuem carga elétrica, eles desacoplam-se naturalmente e podem ser ignorados neste contexto. A teoria que resulta dessa simplificação é uma versão estendida da QED, projetada para descrever as interações eletromagnéticas envolvendo quarks e léptons carregados, com possíveis termos de violação de Lorentz.

A extensão do modelo padrão gera termos adicionais que violam a simetria de Lorentz. Esses termos adicionais podem ser classificados de acordo com a forma como se comportam sob as transformações de simetria CPT. Em particular, os termos CPT-par que envolvem interações com os campos de léptons são representados por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{lepton}^{CPT-par} = & -\frac{1}{2} (H_l)_{\mu\nu AB} \bar{l}_A \sigma^{\mu\nu} l_B + \frac{1}{2} i (c_l)_{\mu\nu AB} \bar{l}_A \gamma^\mu \overleftrightarrow{\Pi}^\nu l_B \\ & + \frac{1}{2} i (d_l)_{\mu\nu AB} \bar{l}_A \gamma_5 \gamma^\mu \overleftrightarrow{\Pi}^\nu l_B. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Aqui, $\sigma^{\mu\nu}$ e γ_5 representam combinações específicas das matrizes de Dirac, cuja definição detalhada pode ser encontrada no Apêndice A. Na Eq. (3.2), os coeficientes de acoplamento $(H_l)_{\mu\nu AB}$ são antissimétricos em relação aos índices do espaço-tempo e possuem dimensões de massa, surgindo naturalmente após a quebra da simetria de calibre. Os acoplamentos hermitianos adimensionais $(c_l)_{\mu\nu AB}$ e $(d_l)_{\mu\nu AB}$, por sua vez, podem apresentar componentes simétricos e antissimétricos em relação ao espaço-tempo, embora seja conveniente, e muitas vezes possível, considerá-los de traço nulo para simplificar o formalismo.

Os termos que violam a simetria CPT e que estão associados aos campos de léptons podem ser expressos como

$$\mathcal{L}_{lepton}^{CPT-impar} = - (a_l)_{\mu AB} \bar{l}_A \gamma^\mu l_B - (b_l)_{\mu AB} \bar{l}_A \gamma_5 \gamma^\mu l_B, \quad (3.3)$$

onde os acoplamentos $(a_l)_{\mu AB}$ e $(b_l)_{\mu AB}$ são hermitianos e têm dimensões de massa.

No setor de fótons, encontram-se termos adicionais que violam a simetria de Lorentz: um desses termos é CPT-par, enquanto o outro apresenta violação de simetria CPT-ímpar, contribuindo de formas distintas para o comportamento das interações. Esses termos são

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{fótons}^{CPT-par} &= -\frac{1}{4} \kappa_{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{F}^{\mu\nu} \mathcal{F}^{\alpha\beta} \\ \mathcal{L}_{fótons}^{CPT-impar} &= -\frac{1}{4} \kappa_F^\mu \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} A^\nu \mathcal{F}^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

É importante ressaltar que o termo CPT-ímpar enfrenta algumas dificuldades teóricas significativas, principalmente devido às possíveis contribuições negativas para a energia, o que sugere que, na prática, ele provavelmente estará ausente ou será descartado para manter a consistência da teoria (COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1998). Além disso, este termo tem uma relação direta com o acoplamento $(b_l)_{\mu AB}$ apresentado na Eq. (3.3). A conexão entre esses termos será discutida de forma mais detalhada adiante, quando a última redução do modelo for realizada e as implicações para a teoria estendida forem avaliadas.

O limite de QED obtido a partir da extensão do modelo padrão também inclui um setor de quarks, que segue uma estrutura semelhante à do setor de léptons, conforme apresentado nas equações Eq. (3.2), Eq. (3.1) e Eq. (3.3). A principal diferença é que, no setor de quarks, seis campos de quarks substituem os três campos de léptons, o que resulta no dobro de acoplamentos que violam a simetria de Lorentz, ampliando assim as possibilidades de interação. É importante destacar que, embora os setores de léptons e quarks compartilhem uma estrutura semelhante, eles estão conectados exclusivamente através do fóton, já que a invariância de calibre da extensão do modelo padrão impede a existência de acoplamentos diretos que misturem léptons e quarks. Essa limitação é fundamental para a consistência da teoria e foi amplamente discutida em (COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1998), onde são estabelecidas as restrições sobre essas interações.

Por fim, será considerado aqui o último limite da teoria, que resulta na QED contendo exclusivamente elétrons, pósitrons e fótons. Neste contexto, o campo de elétrons de quatro componentes será denotado por ψ , e sua massa será representada por m . A Lagrangiana usual da QED para as interações entre elétrons e fótons pode ser expressa da seguinte forma

$$\mathcal{L}_{el\acute{e}tron}^{QED} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + \bar{\psi}\gamma^\mu\Pi_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (3.5)$$

Adentrando um pouco mais nos modelos de VL dentro da QED contendo exclusivamente elétrons, é relevante comentar de forma mais detalhada sobre a proposta de CFJ, que foi mencionada anteriormente. Nessa proposta, um termo topológico que quebra a simetria de Lorentz foi introduzido no modelo padrão, conforme discutido no trabalho de Carroll, Field e Jackiw (CARROLL; FIELD; JACKIW, 1990). No referido trabalho, os autores propõem o seguinte termo

$$\mathcal{L}_{CFJ} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}v^\mu A^\nu F^{\alpha\beta}, \quad (3.6)$$

, que se insere na Lagrangiana do modelo, afetando diretamente as interações eletromagnéticas. Onde A^ν é o quadri-potencial vetor, $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ é o pseudo-tensor de Levi-Civita, e v^μ representa um campo de fundo que estabelece uma direção espaço-temporal privilegiada.

Esse campo v^μ , como discutido na seção 2.1, quebra a simetria de Lorentz, pois introduz uma anisotropia que favorece uma direção específica no espaço-tempo. Assim como em outros modelos que investigam a VL, o modelo de CFJ utiliza dados astrofísicos para estimar a escala das componentes da anisotropia representadas por v^μ , que são responsáveis pela violação de simetria (KOSTELECKÝ; RUSSELL, 2011). O modelo de CFJ também exibe comportamento CPT-ímpar, o que significa que ele é invariante sob conjugação de carga, inversão de paridade e reversão temporal, com exceção da mudança de sinais nas equações do modelo, refletindo uma violação de simetria fundamental. Contudo, ele mantém a simetria de calibre, o que é crucial para sua consistência, conferindo uma massa topológica ao campo de calibre (CASANA; FERREIRA JR.; RODRIGUES, 2008). Essa característica resulta em uma modificação significativa na taxa de espalhamento do fóton no vácuo, afetando o comportamento das partículas em condições específicas (CARROLL; FIELD; JACKIW, 1990). O termo introduzido no modelo é análogo ao termo de Chern-Simons que aparece em espaços-tempos com dimensão ímpar, e é responsável pela geração de um termo de massa para o fóton. Este termo, que tem origem topológica, também leva a uma quebra de paridade na teoria tridimensional, tornando o modelo capaz de descrever efeitos físicos que seriam impossíveis em teorias convencionais de QED (DITTRICH; GIES, 2000).

Agora, ao abordar o modelo proposto nos estudos de D. Colladay e V. A. Kostelecký, que será o foco central de análise e investigação nesta tese, o enfoque principal será dado ao modelo da QED_{ex} , uma extensão da teoria da QED, como já mencionado. A Lagrangiana geral associada a esse modelo, que incorpora efeitos de VL e outras modificações, é expressa da seguinte forma

$$\mathcal{L}_{QED_{ex}} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}v^\mu A^\nu F^{\alpha\beta} + \frac{1}{4}\kappa^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} + \bar{\psi}(\Gamma_\mu\Pi^\mu - M)\psi, \quad (3.7)$$

onde

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu &\equiv \gamma_\mu + c_{\nu\mu}\gamma^\nu + d_{\nu\mu}\gamma^5\gamma^\nu + e^\mu + if_\mu\gamma^5 + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta\mu}\sigma^{\alpha\beta}, \\ M &\equiv m + im_5\gamma_5 + a^\mu\gamma_\mu + b^\mu\gamma_5\gamma_\mu + \frac{1}{2}h^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

A derivada covariante é definida como $\Pi^\mu = i\partial^\mu - eA^\mu$, onde A^μ é o potencial eletromagnético e ψ é o campo fermiônico. Os índices gregos variam de 0 a 3, representando as componentes do espaço-tempo. O primeiro termo na Eq. 4.1 corresponde ao termo cinético usual de Maxwell, que descreve as interações do campo eletromagnético com as partículas carregadas. O segundo termo refere-se ao já discutido termo de CFJ, que introduz a VL por meio de um campo de fundo. O terceiro termo representa o termo cinético modificado com VL, que reflete as interações eletromagnéticas com as alterações introduzidas pela simetria quebrada. Por fim, o quarto termo é o setor fermiônico da QED_{ex} , que descreve a dinâmica dos férmions sob a presença da VL. O comportamento dos campos VL do setor fermiônico em relação as transformações CPT é dado pela tabela 1.

Tabela 1 – Comportamento dos campos do setor fermiônico frente às transformações CPT.

Campos	C	P	T
(b_0, b_i)	$(+, +)$	$(-, +)$	$(-, +)$
(m_5)	$(+)$	$(-)$	$(-)$
$(c_{00}, c_{ij}, c_{0i}, c_{i0})$	$(+, +, +, +)$	$(+, +, -, -)$	$(+, +, -, -)$
$(g_{i0j}, g_{ij0}, g_{i00}, g_{ijk})$	$(+, +, -, -)$	$(-, -, +, +)$	$(+, +, -, -)$
(e_0, e_i)	$(-, -)$	$(+, -)$	$(+, -)$
(f_0, f_i)	$(-, -)$	$(-, +)$	$(-, +)$
(h_{ij}, h_{0i})	$(-, -)$	$(+, -)$	$(-, +)$
$(d_{00}, d_{ij}, d_{0i}, d_{i0})$	$(-, -, -, -)$	$(-, -, +, +)$	$(+, +, -, -)$
(a_0, a_i)	$(-, -)$	$(+, -)$	$(+, -)$

Fonte: Autor, 2025.

O tensor $\kappa^{\mu\nu\alpha\beta}$ é real, adimensional e compõe um termo CPT-par, o que significa que ele preserva a simetria sob conjugação de carga, inversão de paridade e reversão temporal. Ele desempenha, assim como todos os termos associados à VL, o papel de introduzir uma anisotropia espaço-temporal. Sem perda de generalidade, podemos considerá-lo como duplamente sem traço, já que qualquer componente de traço não teria efeito físico, servindo apenas para redefinir o termo cinético e, conseqüentemente, realizando uma simples renormalização de campo (COLLADAY; KOSTELECKÝ, 1998). Além disso, é interessante notar que o tensor $\kappa^{\mu\nu\alpha\beta}$ obedece às mesmas propriedades geométricas do tensor de Riemann, o que implica que ele compartilha simetrias e comportamentos semelhantes aos observados na curvatura do espaço-tempo. Essas propriedades são

$$\begin{aligned}
\kappa_{\mu\nu\alpha\beta} &= \kappa_{\alpha\beta\mu\nu} = -\kappa_{\beta\alpha\mu\nu} \\
\kappa_{\alpha\beta\mu\nu} + \kappa_{\alpha\mu\nu\beta} + \kappa_{\alpha\nu\beta\mu} &= 0 \\
\kappa^{\mu\nu}_{\mu\nu} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Dessa forma, para o setor fotônico da QED_{ex}, dois termos são considerados: um que é CPT-par e outro que é CPT-ímpar, ambos com implicações distintas nas simetrias da teoria.

No setor de matéria, uma ampla gama de termos pode ser introduzida, refletindo as diversas formas de violação de Lorentz possíveis. Os campos tensoriais na primeira linha de (3.8) não possuem dimensão de massa, enquanto na segunda linha esses campos possuem dimensão de massa igual a 1. É importante destacar que campos tensoriais com um número ímpar de índices não preservam a simetria CPT, enquanto aqueles com um número par de índices a preservam, o que impacta diretamente as propriedades das interações no modelo. Além disso, para as matrizes γ , elas são definidas a partir da álgebra de Clifford $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu}$. O campo tensorial $h_{\mu\nu}$ é antissimétrico, o que implica que suas componentes trocam de sinal quando seus índices são permutados, enquanto o

campo $g_{\alpha\beta\mu}$ é antissimétrico apenas nos dois primeiros índices, o que implica em restrições específicas às suas interações.

Comentando um pouco mais sobre alguns dos termos presentes na Eq.(3.7), esses termos constituem todas as possíveis contribuições que podem ser introduzidas no modelo para violar a simetria de Lorentz. Como os termos VL geralmente envolvem campos ou tensores que introduzem direções preferenciais no espaço-tempo, as simetrias fundamentais da teoria são alteradas. Um exemplo comum disso é o acoplamento de um vetor de fundo fixo b_μ ao campo de Dirac ψ . Neste termo, b_μ representa um vetor que, se não for nulo, estabelece uma direção específica no espaço-tempo e, conseqüentemente como visto na seção 2.1, acaba violando assim a simetria de Lorentz. A presença desse vetor implica que as propriedades físicas do sistema poderiam depender da orientação espacial e temporal em relação a b_μ , quebrando a invariância sob transformações de Lorentz. Além disso, ainda sobre o campo b_μ , alguns trabalhos sugerem que ele pode gerar o termo CPT-ímpar do setor de fótons, expresso na Eq. (3.4), através de correções radiativas, estabelecendo uma relação do tipo $\kappa_F^\mu = Cb_\mu$, onde C é um coeficiente arbitrário. No entanto, existe uma certa ambiguidade em relação ao valor desse coeficiente, pois ele pode ser nulo dependendo do método ou do tipo de cálculo utilizado (JACKIW; KOSTELECKY, 1999; CHEN, 1999; CHUNG, 1999; PÉREZ-VICTORIA, 1999; CHAN, 1999; CHAICHIAN; CHEN; FELIPE, 2001). Por essas razões, o campo b_μ tem sido o termo mais estudado ao longo do tempo, dado seu impacto significativo nas modificações das simetrias e na estrutura do modelo.

O campo $d_{\mu\nu}$, que também será investigado nesta tese no contexto de um gás quântico fermiônico, é um coeficiente simétrico que se acopla ao termo axial γ_5 na Lagrangiana, especificamente no setor fermiônico. Esse acoplamento implica em uma interação que depende tanto da direção quanto da quiralidade do férmion, o que significa que ele distingue entre os estados de helicidade direita e esquerda de maneira dependente da orientação no espaço-tempo. Em outras palavras, o campo $d_{\mu\nu}$ pode afetar as propriedades dos férmions de acordo com a sua direção e a quiralidade, resultando em efeitos que quebram a simetria de Lorentz de forma mais sutil. Um efeito interessante e notável que este campo gera é a indução de fases geométricas no sistema, além de correntes de spin persistentes em funções de ondas confinadas em anéis unidimensionais, o que pode ter implicações significativas para o estudo de sistemas condensados e fenômenos quânticos não triviais, como demonstrado em estudos como (CASANA et al., 2015).

Outro termo específico presente na Eq.(3.8) que merece um comentário especial é o termo pseudo-escalar, m_5 . Este termo compõe a Eq.(3.7), juntamente ao termo de massa do férmion, e é denominado pseudo-escalar justamente porque muda de sinal sob transformação de paridade. Essa característica faz com que o termo m_5 introduza uma diferença de massa efetiva entre as componentes de helicidade direita e esquerda de um

férmion, levando a uma quebra da simetria de paridade. Isso significa que partículas com diferentes helicidades podem ter diferentes massas, o que pode resultar em fenômenos exóticos, como oscilações quiralidade-helicidade ou a separação quiral em determinados contextos físicos, como em experimentos com neutrinos ou em sistemas de alta energia (KOSTELECKÝ; MEWES, 2012). Uma outra característica relevante sobre o campo m_5 , que será importante no decorrer desta tese, é o fato de que ele pode ser absorvido nos outros coeficientes do modelo por meio de uma redefinição particular do campo fermiônico, por exemplo

$$\psi' = e^{-\frac{i}{2}\gamma_5 \tan^{-1}\left(\frac{m_5}{m}\right)}\psi, \quad (3.10)$$

Esse tipo de redefinição de campo já era conhecido antes da introdução da extensão do modelo padrão. Outras redefinições, semelhantes a esta, são discutidas em detalhe no trabalho de (COLLADAY; MCDONALD, 2002), embora o estudo seja restrito à análise até a primeira ordem. Isso nos leva à questão de saber se, em ordens superiores, esse e outros campos poderiam, de fato, contribuir para efeitos físicos específicos, o que abre a possibilidade de novos fenômenos não previstos em ordens mais baixas. No caso particular do campo m_5 , será apresentado na seção 4 um exemplo de efeito físico, no qual sua contribuição só se torna significativa a partir da segunda ordem, conforme mencionado anteriormente, o que pode ter implicações importantes para a compreensão de certos efeitos de VL em modelos de interação de alta energia.

Outro campo que apresenta uma característica análoga à do campo m_5 , no sentido de que sua contribuição também pode ser tratada a partir de uma redefinição do campo fermiônico, é o campo f_μ . O coeficiente f pode ser removido da teoria por meio de uma redefinição de campo independente do espaço-tempo, o que substitui um termo puro de f por um termo de c , desde que a condição $f^2 < 1$ seja satisfeita. No entanto, apenas valores pequenos de f^2 são realmente interessantes para os efeitos físicos, tanto porque representam o único regime físico admissível quanto porque, caso f^2 seja comparável à unidade, surgem violações de causalidade em uma escala inaceitavelmente baixa. Para valores pequenos de f , o coeficiente f_μ é equivalente ao termo $c_{\mu\nu} \approx -\frac{1}{2}f_\mu f_\nu$, conforme discutido em (ALTSCHUL, 2006; KARKI; ALTSCHUL, 2022). Em particular, no caso de um gás de férmions na presença desses campos VL, será analisada a contribuição do termo f^2 em comparação com o termo c , e veremos que, de fato, ambas as contribuições são equivalentes. Este exemplo é fundamental para entender o papel das interações de VL em sistemas quânticos, e sua análise contribuirá para aprofundar a compreensão de como essas violações afetam a física de partículas e a estrutura do vácuo.

3.2 Ação efetiva

O estudo dos efeitos quânticos dentro da QED usual pode ser realizado com a utilização do formalismo da Ação Efetiva (DITTRICH; REUTER, 1985a), que fornece uma descrição precisa e poderosa das interações quânticas. A ação efetiva na QED é uma ferramenta matemática fundamental, pois permite entender e calcular de maneira sistemática os efeitos das interações quânticas, incluindo as contribuições de *loop* e correções perturbativas. Ela é uma função que encapsula todas as informações sobre as interações de um sistema físico, permitindo derivar não apenas as equações de movimento, mas também as propriedades físicas do sistema, como suas correções de energia e os efeitos de auto-interação. Na QED, a ação efetiva é essencial para descrever como os campos e partículas interagem de maneira perturbativa, considerando tanto os efeitos de ordem baixa, que dominam em regimes de baixa energia, quanto os efeitos de ordem mais alta das interações, que se tornam significativos em escalas de energia mais elevadas. Essa abordagem é particularmente útil para estudar efeitos quânticos que não podem ser descritos por teorias clássicas ou perturbativas simples, fornecendo uma base para a análise de processos como o espalhamento de partículas, a radiação de partículas e as correções de massa (PESKIN; SCHROEDER, 2018).

A introdução da ação efetiva na QED envolve a construção do funcional gerador, que é a integral de caminho sobre todas as possíveis configurações de campos e partículas, ponderadas pela exponencial da ação clássica, levando em consideração também as contribuições de todas as flutuações quânticas que ocorrem em torno da configuração clássica,

$$Z[J] = e^{iW[J]} = \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi, J]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}}, \quad (3.11)$$

onde o termo $Z[J]$ em Eq. (3.11) é responsável por gerar todas as funções de n -pontos da teoria (GREINER; REINHARDT, 2013), fornecendo as informações necessárias sobre as correlações entre os campos quânticos. Em Eq. (3.11), ϕ representa os campos quânticos da teoria, nos quais se está interessado em contabilizar seus efeitos em diferentes processos e interações. J representa uma fonte externa, que pode ser algum campo externo específico, e a escolha de J permite analisar como a dinâmica do campo ϕ é modificada pela influência dos efeitos quânticos advindos dos campos. $W[J]$ é o funcional gerador das funções conexas, definida como a integral no espaço-tempo da densidade Lagrangiana, que encapsula as interações quânticas do sistema. $S[\phi, J]$ é a ação funcional. Vale ressaltar que $Z[J]$ é a amplitude de transição vácuo-vácuo, também conhecida como funcional gerador, e é definida de tal maneira que, na ausência de fontes de campos externos, temos $Z[0] = 1$. Através da quantização de campos e da aplicação de técnicas perturbativas, é possível

calcular as correções à ação clássica, que resultam na ação efetiva. Essas correções consideram os efeitos de criação e aniquilação de partículas virtuais, que são cruciais para uma descrição precisa das interações quânticas. A ação efetiva é então definida a partir do funcional, que é a transformada de Legendre da ação funcional $W[J]$,

$$\Gamma[\Phi_c] = W[J] - \int d^4x J(x) \Phi_c(x), \quad (3.12)$$

permitindo expressar de maneira concisa os efeitos quânticos no sistema, em que Φ_c é uma nova variável definida como a derivada funcional da $W[J]$ com respeito à fonte $J(x)$

$$\Phi_c(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}. \quad (3.13)$$

Esta nova variável vai ser o campo no qual se está interessado em analisar sua dinâmica.

A ação efetiva pode também ser obtida através de uma série perturbativa, chamada de série de Volterra

$$\Gamma[\Phi_c] = \sum_{n=0}^{\infty} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n \frac{1}{n!} \Gamma(x_1 \cdots x_n) \Phi_c(x_1) \cdots \Phi_c(x_n), \quad (3.14)$$

cujo os coeficientes da série são as funções de n -pontos Irredutíveis de uma Partícula (1PI)¹

$$\Gamma(x_1 \cdots x_n) = \left. \frac{\delta \Gamma[\Phi_c]}{\delta \Phi_c(x_1) \cdots \delta \Phi_c(x_n)} \right|_{\Phi_c=0}, \quad (3.15)$$

também chamadas de funções de vértice. Nos casos abordados neste trabalho a ação efetiva é calculada e expressa em termos dos campos eletromagnético e VL, mesmo o modelo geral contendo também o campo fermiônico. Existem alguns métodos específicos para a determinação destas ações efetivas além de Eq. (3.12), em particular neste trabalho na Seção 3.2.1 será mostrado um deles.

Existem pouquíssimos exemplos em que a ação efetiva pode ser calculada exatamente, por exemplo nas teorias de campo bidimensionais, modelos de Thirring e de Schwinger (HAGEN, 1967; JAYEWARDENA, 1988). Em geral, como será mostrado adiante, a ação efetiva pode ser calculada a níveis de *loop* apresentando correções perturbativas ordem a ordem. Em resumo, a ação efetiva na QED é uma poderosa ferramenta que permite descrever e calcular de forma precisa as interações eletromagnéticas a nível quântico.

3.2.1 Método do tempo próprio

Para o caso estudado neste trabalho, no qual serão utilizados como fontes externas os campos eletromagnético e VL, enquanto os férmions são tratados como campos quânticos,

¹ Estas funções possuem este nome pois elas geram diagramas de Feynman que não podem ser divididos em outras partes mais fundamentais a partir do “corte” de uma linha de seus diagramas.

o funcional gerador generalizado pode ser expresso da seguinte forma

$$Z[J] = e^{iW[J]} = \frac{\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{iS[\psi, \bar{\psi}, J]}}{\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{iS[\psi, \bar{\psi}]}}. \quad (3.16)$$

Podemos ainda considerar uma forma perturbativa em série do funcional $iW[J]$

$$iW[J] = iW^{(0)}[J] + iW^{(1)}[J] + \dots, \quad (3.17)$$

onde $iW^{(0)}[J]$ é a parte livre, sem interação, da teoria e $iW^{(1)}[J]$ é a correção a 1-loop contendo a interação com o campo fermiônico.

No caso da Lagrangiana fornecida pela Eq. (3.5) e utilizando o resultado para a integral gaussiana no contexto de férmions, dado pela Eq. (B.8) no Apêndice B, o funcional gerador apresentado na Eq. (3.16) pode ser reescrito de forma mais detalhada como

$$Z[J] = e^{iW^{(0)}[J]} \frac{\det(\gamma^\mu \Pi_\mu - m)}{\det(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)}. \quad (3.18)$$

Utilizando então a definição Eq. (3.17), a ação efetiva a 1-loop pode ser representada por

$$iW^{(1)}[J] = \frac{\ln \det(\gamma^\mu \Pi_\mu - m)}{\ln \det(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)}, \quad (3.19)$$

ou seja, o cálculo da ação efetiva a 1-loop agora se resume em encontrar os determinantes acima.

Neste ponto, o método de tempo próprio se mostra fundamental. Desenvolvido inicialmente por Fock em 1937 ao abordar a equação de Dirac (FOCK, 1937a), o método de tempo próprio tem sido aprimorado ao longo de mais de oitenta anos, tornando-se uma ferramenta indispensável na física teórica e matemática. Esse método só foi plenamente incorporado cerca de quinze anos após a formulação inicial da teoria quântica de campos em sua forma covariante. Ele se destacou especialmente nos trabalhos de Nambu (NAMBU, 1950b), que o aplicou para construir a função de Green da equação de Dirac, e de Schwinger (SCHWINGER, 1951), que explorou o método no contexto da invariância de calibre e o utilizou para calcular efeitos de polarização do vácuo em campos eletromagnéticos intensos.

Após os estudos pioneiros de Fock, Nambu e Schwinger, um avanço crucial no aprimoramento e consolidação do método de tempo próprio ocorreu com a introdução de correções quânticas em espaços-tempos curvos. Este desenvolvimento foi amplamente abordado por De Witt em sua série de trabalhos sobre teoria quântica em espaços-tempos dinâmicos e curvatura (DEWITT, 1965; DEWITT, 1967a; DEWITT, 1967b; DEWITT, 1967c; DEWITT, 1975). Outros pesquisadores deram contribuições significativas ao método: Seeley, com suas análises em problemas de valores de contorno (SEELEY, 1966; SEELEY, 1967; SEELEY, 1969), e Gilkey, com suas investigações em geometria espectral

(GILKEY, 1975). Esse método encontrou aplicação em uma ampla gama de áreas da física teórica, incluindo o efeito Casimir (SCHWINGER, 1975; BORDAG; MOHIDEEN; MOSTEPANENKO, 2001), estudos de anomalias em teorias de calibre quirais (BALL, 1989), a avaliação da primeira correção quântica na entropia de buracos negros (CALLAN; WILCZEK, 1994) e a renormalização em teorias de Yang–Mills utilizando o formalismo de campo de fundo para cálculos em dois e três *loops* (JACK; OSBORN, 1982; BÖRNSSEN; VEN, 2003). Esses avanços estabeleceram o método de tempo próprio como uma ferramenta robusta para explorar fenômenos quânticos complexos em variados contextos físicos.

O conceito essencial por trás do método do tempo próprio consiste em parametrizar a evolução temporal de sistemas físicos, proporcionando uma poderosa simplificação para cálculos que, de outra forma, seriam muito complexos. Esse método é amplamente utilizado para a construção de funções de Green e na análise detalhada de efeitos quânticos em uma variedade de cenários teóricos. O “tempo próprio” refere-se a um parâmetro fundamental que mede o “tempo interno” de uma partícula ao longo de sua trajetória no espaço-tempo, de modo independente do sistema de coordenadas empregado. Ao introduzir o tempo próprio s como variável auxiliar, as equações de movimento de uma partícula relativística podem ser significativamente simplificadas, permitindo uma reparametrização da evolução temporal do sistema. Utilizando s , as coordenadas e o momento da partícula são expressos como funções desse parâmetro, o que facilita o estudo de sua dinâmica e interações com o espaço-tempo. Essa abordagem será discutida em maior profundidade na seção 4, onde serão exemplificados os métodos de simplificação associados ao tempo próprio e suas aplicações em cenários de teoria quântica de campos e relatividade.

Em termos matemáticos, o método do tempo próprio é caracterizado pelo uso da representação de operadores por meio de integrais envolvendo o tempo próprio. Esse formalismo permite reescrever o propagador de uma partícula relativística livre, por exemplo, na forma de uma integral sobre o tempo próprio. Desta forma,

$$G(x, x') = \int_0^\infty ds \langle x | e^{-isH} | x' \rangle . \quad (3.20)$$

Nessa formulação, H representa o Hamiltoniano do sistema, enquanto $G(x, x')$ é a função de Green que descreve a propagação da partícula entre os pontos x' e x . A introdução da integral sobre o parâmetro s simplifica o problema, tornando os cálculos mais manejáveis, especialmente ao trabalhar com teorias de campos em contextos de espaços-tempos curvos ou em presença de campos externos. No caso da equação de Dirac, o uso do tempo próprio facilita a solução da equação diferencial associada ao propagador de Feynman, permitindo expressar este propagador como uma integral no tempo próprio, o que simplifica os cálculos das funções de Green e o estudo das interações de partículas com campos externos (FOCK, 1937a). Desse modo, o método do tempo próprio se configura como uma técnica eficaz e amplamente utilizada, fornecendo uma abordagem matemática e física que simplifica de

maneira significativa a resolução de problemas complexos na física teórica e matemática, especialmente em estudos de alta energia e relatividade.

3.2.2 Método da função zeta

Uma alternativa para calcular o determinante na Eq. (3.18) é pelo uso do método da função Zeta de Riemann. Ao longo dos séculos XIX e XX, funções especiais têm aparecido de maneira sistemática e indispensável na física matemática e teórica. Essas funções, como as de Dirac, Legendre, Bessel e Hankel, são amplamente estudadas e documentadas na maioria dos livros de física teórica moderna, pois são fundamentais para a resolução de problemas complexos. Entre essas funções, destaca-se a função gama, além das soluções para equações diferenciais que modelam diversos sistemas físicos. Assim como as funções mencionadas, a função Zeta de Riemann pertence ao conjunto das chamadas funções especiais, e sua aplicação é de grande relevância para a física moderna, especialmente em áreas que envolvem cálculos de regularização, renormalização e métodos de análise espectral.

O uso da função Zeta para calcular determinantes funcionais gerados pelo formalismo de integrais de caminho é amplamente conhecido como o método de regularização via função Zeta, ou ZFR (do inglês, Zeta Function Regularization). Esta técnica é essencial para evitar divergências em somas e integrais que surgem naturalmente em teorias quânticas de campos e outros contextos de física teórica. Artigos pioneiros de S. Hawking ([HAWKING, 1975](#)), S. Elizalde, S. Odintsov e A. Romeo ([ELIZALDE, 1994](#)), publicados no último quarto do século XX, mostraram como a regularização zeta permite atribuir valores finitos a somas e integrais que, de outra forma, seriam superficialmente divergentes. Esse método se tornou uma ferramenta fundamental, possibilitando a análise rigorosa de sistemas onde divergências aparecem naturalmente, como em cálculos de efeitos de vácuo, correções quânticas, e na renormalização em espaços-tempos curvos.

A função zeta de Riemann ou função zeta de Euler-Riemann, denotada pela letra grega ζ , é uma função matemática de uma variável complexa definida como

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (3.21)$$

para $\text{Re}(s) > 1$, e sua continuação analítica em outros lugares ([SILVERMAN et al., 1972](#); [STEUDING; SURIAJAYA, 2020](#)).

Introduzida e explorada inicialmente por Leonhard Euler no domínio dos números reais na primeira metade do século XVIII, a função zeta de Riemann tem um papel fundamental na teoria analítica dos números, estendendo-se amplamente em sua aplicação

para diversas áreas, incluindo a física, a teoria das probabilidades, a estatística aplicada, e até a análise de sistemas dinâmicos.

Em 1859, Bernhard Riemann, em seu famoso artigo intitulado “On the Number of Primes Less Than a Given Magnitude” (DITTRICH, 2016), ampliou a definição de Euler para o domínio dos números complexos. Nesse trabalho, ele demonstrou a continuação meromorfa da função zeta e formulou sua equação funcional, além de estabelecer uma conexão entre os zeros da função e a distribuição dos números primos. Riemann também apresentou a famosa hipótese de Riemann, uma conjectura profunda sobre a localização dos zeros complexos da função zeta, considerada por muitos matemáticos como o problema mais desafiador e fundamental ainda não resolvido na matemática pura (BOMBIERI, 2000), com implicações significativas em várias áreas da teoria dos números.

Para os cálculos de um gás quântico fermiônico apresentados na seção 5, torna-se interessante definir a função Zeta de Riemann da seguinte forma,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}, \quad (3.22)$$

onde $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} dx x^{s-1} e^{-x}$ é a função gamma (SILVERMAN et al., 1972; GRADSHTEYN; RYZHIK, 2014). A função *zeta* é definida para outros valores complexos por meio da continuação analítica da função definida para $\sigma > 1$. Ademais, a função $\zeta(s)$ é uma função de uma variável complexa $s = \sigma + it$, onde σ e t são números reais, sendo que σ é a parte real e t é a parte imaginária de s . Quando a parte real de s , ou seja, $\text{Re}(s) = \sigma > 1$, a função Zeta pode ser expressa de maneira convergente como uma soma infinita ou, alternativamente, como uma integral, dependendo do contexto do problema. Essa definição é útil para estudar as propriedades analíticas da função em diferentes regiões do plano complexo, especialmente quando se lida com regularizações e cálculos em teorias de campos.

Dessa forma, na seção 5, iremos utilizar as definições apresentadas nas equações Eq. (5.29) e Eq. (3.22), bem como outras importantes relações entre as funções Zeta e Gamma e suas conexões com outras funções especiais, para calcular os determinantes necessários. Estes determinantes são essenciais para derivar os efeitos de um gás quântico fermiônico a uma temperatura finita, considerando as correções que surgem devido à interação e à dinâmica do sistema com relação a sua termodinâmica.

Capítulo 4

Efeito Schwinger a 1-*loop* com violação de Lorentz

Inicia-se a partir desta seção, a descrição e apresentação das contribuições geradas nos trabalhos realizados nesta tese ([COSTA; SOBREIRO, 2022](#); [COSTA; SOBREIRO, 2024](#)).

No início da década de 1930, Heisenberg e Euler ([HEISENBERG; EULER, 1936](#))¹ propuseram uma correção (quântica) às equações de Maxwell do eletromagnetismo clássico, que levava em conta os efeitos quânticos da polarização do vácuo, a Lagrangiana efetiva de Euler-Heisenberg. Este mesmo resultado foi posteriormente encontrado por Weisskopf ([WEISSKOPF, 1936](#)) e por Schwinger ([SCHWINGER, 1951](#)). Na época sabia-se das limitações apresentadas pela teoria de Maxwell em nível quântico e algumas propostas foram feitas com o intuito de se obter generalizações da mesma, com maior destaque para os trabalhos de Heisenberg e Schwinger. É possível mostrar que esses efeitos não-lineares estão estritamente relacionados com a probabilidade de criação de pares de partícula-antipartícula, no nosso caso pares E-P. Basicamente podemos entender que a presença de um campo eletromagnético externo excita o vácuo, e assim propicia a criação desses pares. Entretanto, devido à limitação tecnológica da época não era possível fazer observações experimentais sobre esses fenômenos quânticos da flutuação do vácuo nas equações do eletromagnetismo de Maxwell.

Os efeitos não-lineares do vácuo da QED excitados por um campo eletromagnético externo não estão restritos somente a pares de E-P, podendo haver efeitos análogos a este com diferentes tipos de partículas que acoplem com o fóton, gerando também correções à teoria de Maxwell ([GIES, 2009](#)). Ademais, é interessante notar que recentemente ([GIES; TORGRIMSSON, 2016](#)) foi identificadas características universais na produção de pares

¹ A versão em inglês pode ser encontrada em ([HEISENBERG; EULER, 2006](#)).

próximos ao ponto crítico da transição da fase virtual para a fase real destes pares (para dada configuração de campo), utilizando como parâmetro de ordem a parte imaginária da ação efetiva, que está diretamente relacionada com a probabilidade de criação de pares, como será visto adiante. O conceito de universalidade é muito interessante na física, pois significa a independência das propriedades macroscópicas do sistema físico com suas propriedades microscópicas. Outra aplicação da Lagrangiana de Euler-Heisenberg se encontra no estudo de fusão e espalhamento de fótons submersos em um campo eletromagnético não homogêneo de fundo. Este processo foi primeiramente investigado por Adler ([ADLER, 1971](#)) sobre a influência de um campo puramente magnético externo.

Um exemplo de efeito não linear da QED é a polarização do vácuo devido à sua instabilidade provocada por oscilações de criação de pares de partícula e antipartícula quando submetido a um campo eletromagnético externo ([GIES; KARBSTEIN; SEEGER, 2016](#)). De acordo com a relação $\Delta E \Delta t \sim \hbar$, para atingir o limiar da energia necessária para criação dos pares, o intervalo de tempo em que eles existem é muito pequeno, ou seja a dificuldade experimental reside na medição dos fenômenos físicos neste intervalo de tempo Δt ínfimo. A produção de pares de E-P devido a instabilidade do vácuo é sem dúvida uma das predições mais estimulantes da QED. Com os recentes avanços nas instalações de lasers, é possível agora atingir a intensidade necessária de campo elétrico para que se faça observações mais diretas da produção de pares em instalações ópticas de laser de alta intensidade, tais como Vulcan, Extreme Light Infrastructure (ELI) ou em X-ray Free Electron Laser (XFEL) ². A observação e constatação do fenômeno de criação de pares representa um significativo avanço no entendimento de outros fenômenos relacionados a efeitos não perturbativos em uma Teoria de Campos como o efeito Unruh e a radiação Hawking ([HEBENSTREIT et al., 2009](#)). O mecanismo de produção de pares de partícula e antipartícula também é utilizado para se estudar outros fenômenos, como por exemplo em saturação em colisões de íons pesados ([KHARZEEV; LEVIN; TUCHIN, 2007](#)).

Dessa forma, esta seção será dedicada a apresentar o cálculo desse efeito, adicionando como campos externos, para além do campo elétrico, os termos de violação de Lorentz no setor fermiônico.

4.1 As contribuições m_5 e b_μ

Novamente abordaremos aqui a extensão da QED apresentada na seção 3, que inclui exclusivamente termos de violação de simetria de Lorentz no setor fermiônico. A

² Para mais informações sobre os projetos ELI e XFEL veja eli-laser.eu e xfel.eu, respectivamente.

Eq. (3.7) pode ser simplificada para

$$\mathcal{L}_{QED_{ex}} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + \bar{\psi}(\Gamma_\mu\Pi^\mu - M)\psi. \quad (4.1)$$

É relevante enfatizar que todos os campos que violam a simetria de Lorentz, assim como o campo de calibre A_μ , são considerados neste contexto como campos externos de fundo e, portanto, não quânticos. Desta forma, o campo fermiônico se apresenta como o único campo quântico em Eq. (4.1). A fim de simplificar a análise, restringimos nossa consideração a um caso específico de Eq. (3.8), em que definimos $\Gamma_\mu = \gamma_\mu$ e $M = m + im_5\gamma_5 + b^\mu\gamma_5\gamma_\mu$. Além disso, especificamos o vetor b^μ como um vetor puramente temporal, dado por $b_\mu = (b, 0, 0, 0)$. O campo m_5 é incluído para examinar potenciais contribuições para o efeito Schwinger, embora, em princípio, ele possa ser removido por uma transformação quiral, conforme discutido em (KOSTELECKÝ; MEWES, 2013).

Visto que o principal objetivo desta seção é determinar a taxa de criação de pares E-P, precisamos calcular a ação efetiva do sistema. Essa tarefa pode ser realizada por meio da integração do campo fermiônico em questão. Para isso, podemos iniciar então com a escrita do funcional gerador

$$Z[A, b, m_5] = e^{iW^{(0)}[A]} \frac{\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{i\int d^4x \{\bar{\psi}(\gamma^\mu\Pi_\mu - W)\psi\}}}{\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{i\int d^4x [\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi]}}. \quad (4.2)$$

onde $W = \gamma_5(im_5 + b\gamma_0) - m$ e $W^{(0)}[A] = -\frac{1}{4}\int d^4x (\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu})$. Utilizando a fórmula convencional para a integral gaussiana aplicada ao campo fermiônico, Eq. (B.8), obtemos a expressão a seguir

$$Z[A, b, m_5] = e^{iW^{(0)}[A]} \frac{\det(\gamma^\mu\Pi_\mu - W)}{\det(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)}, \quad (4.3)$$

de onde podemos derivar a Lagrangiana efetiva a 1-loop,

$$\mathcal{L}^{(1)} = -i \ln \det(\gamma^\mu\Pi_\mu - W) + i \ln \det(i\gamma^\mu\partial_\mu - m). \quad (4.4)$$

Explorando o fato de que o determinante de um operador Ξ permanece invariante sob uma transformação de similaridade S , o que nos permite escrever $\text{Det}[\Xi] = \text{Det}[S\Xi S^{-1}] = \text{Det}[\Xi S\Xi S^{-1}]^{\frac{1}{2}}$, temos a liberdade de escolher S , podendo ser, por exemplo, a conjugação de carga. Assim, segue que

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\frac{i}{2} \ln \det \mathcal{H} + \frac{i}{2} \ln \det \mathcal{H}_0, \quad (4.5)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= [\gamma^\mu\Pi_\mu - \gamma_5(im_5 + b\gamma_0) + m][-\gamma^\nu\Pi_\nu - \gamma_5(im_5 - b\gamma_0) + m], \\ \mathcal{H}_0 &= (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)(-i\gamma^\mu\partial_\mu - m). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Além disso, foi utilizado o fato de que $C\gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^\mu$, $Cb^\mu C^{-1} = b^\mu$ e $Cm_5 C^{-1} = m_5$, conforme mostrado em (SANTOS; SOBREIRO, 2016b). Seguindo a abordagem desenvolvida por Schwinger (SCHWINGER, 1951) para este tipo de cálculo, aplicamos a seguinte identidade fundamental

$$\ln O = - \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-iOs}, \quad (4.7)$$

em Eq. (4.5) para obter

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{i}{2} \text{tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} (e^{-i\mathcal{H}s} - e^{-i\mathcal{H}_0 s}). \quad (4.8)$$

Conforme discutido detalhadamente na seção 3.2.1, o parâmetro s é identificado como o tempo próprio do sistema. Dessa forma, podemos interpretar as exponenciais em Eq. (4.8) como operadores de evolução temporal que, ao serem aplicados, promovem as transformações necessárias ao sistema. Esses operadores são responsáveis por implementar as seguintes transformações dinâmicas no espaço-tempo, conforme mostrado a seguir

$$\begin{aligned} B(s) &= e^{i\mathcal{H}s} B(0) e^{-i\mathcal{H}s}, \\ |x'(s)\rangle &= e^{-iHs} |x'(0)\rangle. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Também é definido

$$\begin{aligned} x'(s) |x'(s)\rangle &= x' |x'(s)\rangle, \\ x(0) |x\rangle &= x |x\rangle. \end{aligned} \quad (4.10)$$

A Lagrangiana efetiva a 1-loop é então mais apropriadamente escrita como

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{tr} [U(x', x, s) - U_0(x', x, s)], \quad (4.11)$$

onde temos $U(x', x, s) = e^{-i\mathcal{H}s}$ e $U_0(x', x, s) = e^{-i\mathcal{H}_0 s}$. Dessa forma, o problema reduz-se agora a avaliar esses operadores de evolução temporal, que desempenham um papel fundamental no contexto quântico. O operador $U(x', x, s)$ pode ser interpretado como o operador que descreve a evolução de um sistema quântico regido pelo 'Hamiltoniano' \mathcal{H} ao longo do 'tempo' s . Na mecânica clássica, o operador de evolução temporal é responsável por induzir as transformações sobre as coordenadas e os momentos, expressas por $x_\mu(s) = x_\mu(x(0), p(0), s)$ e $p_\mu(s) = p_\mu(x(0), p(0), s)$, que são obtidas ao resolver as equações de Hamilton-Jacobi (GOLDSTEIN, 1950). No contexto quântico que estamos considerando, as equações análogas às equações de Hamilton-Jacobi são as que regem a evolução do sistema, dadas por (DIRAC, 1958; FOCK, 1937b; NAMBU, 1950a)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}U(x'(s), x(0), s) &= i \frac{\partial}{\partial s} U(x'(s), x(0), s), \\ \Pi^\mu(0) U(x'(s), x(0), s) &= (-i\partial^\mu - eA^\mu(x)) U(x'(s), x(0), s), \\ \Pi^\mu(s) U(x'(s), x(0), s) &= (i\partial'^\mu - eA^\mu(x')) U(x'(s), x(0), s), \end{aligned} \quad (4.12)$$

as quais descrevem o comportamento dinâmico dos operadores quânticos com a condição inicial

$$\lim_{s \rightarrow 0} U(x', x, s) = \delta(x' - x) . \quad (4.13)$$

Assim, para determinar $U(x', x, s)$, é essencial resolver o sistema de equações diferenciais em Eq.(4.12), respeitando a condição inicial fornecida em Eq.(4.13). Esse procedimento deve ser realizado em conjunto com as equações de movimento de Heisenberg, as quais descrevem a evolução temporal dos operadores quânticos e são fundamentais para capturar a dinâmica completa do sistema ao longo do 'tempo' s . As equações de Heisenberg são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{dx_\mu(s)}{ds} &= -i [x_\mu(s), \mathcal{H}] , \\ \frac{d\Pi_\mu(s)}{ds} &= -i [\Pi_\mu(s), \mathcal{H}] . \end{aligned} \quad (4.14)$$

Esta tarefa só pode ser alcançada se os campos forem conhecidos.

Aplicando o procedimento descrito anteriormente, podemos então considerar o caso específico em que os campos $\mathcal{F}^{\mu\sigma}$, b e m_5 são constantes tanto no espaço quanto no tempo. Dessa forma, ao assumir essas condições, o primeiro Hamiltoniano presente em Eq. (4.6) se simplifica e torna-se uma expressão que depende exclusivamente das variáveis relevantes para o sistema em questão, sem a complexidade introduzida pelas flutuações desses campos, dado por

$$\mathcal{H} = \Pi^2 + N^\nu \Pi_\nu + \mathcal{M} \quad (4.15)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= -\frac{e}{2} \sigma_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} + (b^2 - m_5^2) - 2ibm_5\gamma_0 - 2imm_5\gamma_5 + m^2 , \\ N^\nu &= (2im_5\gamma_5\gamma^\nu - 2ib\gamma_5\sigma_0^\nu) . \end{aligned} \quad (4.16)$$

No caso em que os campos são considerados constantes no espaço e no tempo, as equações de movimento de Heisenberg, apresentadas em Eq. (4.14), simplificam-se significativamente. Sob essas condições, as equações tornam-se mais tratáveis, uma vez que as dependências espaciais e temporais dos campos desaparecem, resultando em uma forma mais direta e explícita das equações de movimento para os operadores quânticos, dadas por

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_\mu(s)}{ds} &= e\mathcal{F}_{\mu\nu} (2\Pi^\nu(s) + N^\nu) , \\ \frac{dx_\mu(s)}{ds} &= 2\Pi_\mu(s) + N_\mu . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Essas equações podem ser resolvidas para $\Pi_\mu(s)$ e $\Pi_\mu(0)$ em termos de $x_\mu(s)$ e $x_\mu(0)$,

$$\begin{aligned}\Pi_\mu(s) &= \frac{1}{2}e^{e\mathcal{F}_\mu^\alpha s} \left(\frac{e\mathcal{F}}{\sinh(e\mathcal{F}s)} \right)_\alpha^\beta [x_\beta(s) - x_\beta(0)] + \\ &\quad - \frac{1}{2}N_\mu, \\ \Pi_\mu(0) &= \left(\frac{e\mathcal{F}}{e^{2e\mathcal{F}s} - 1} \right)_\mu^\beta [x_\beta(s) - x_\beta(0)] - \frac{1}{2}N_\mu.\end{aligned}\quad (4.18)$$

Voltando para Eq. (4.15), obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= [x_\beta(s) - x_\beta(0)] K^{\beta\gamma} [x_\gamma(s) - x_\gamma(0)] - \frac{i}{2}tr \left[\frac{e\mathcal{F}}{\tanh(e\mathcal{F}s)} \right] - \\ &\quad - \frac{1}{4}N^\mu N_\mu + \mathcal{M},\end{aligned}\quad (4.19)$$

com $K^{\beta\gamma} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{e\mathcal{F}}{\sinh(e\mathcal{F}s)} \right)^2 \right]^{\beta\gamma}$. Agora, a primeira equação em Eq. (4.12) pode ser resolvida usando Eq. (4.19). Assim,

$$U(x', x, s) = \frac{C(x', x)}{s^2} e^{\frac{i}{4s}[x^\mu(s) - x^\mu(0)] \left[\frac{e\mathcal{F}s}{\tanh(e\mathcal{F}s)} \right]_{\mu\nu} [x^\nu(s) - x^\nu(0)]} e^{-\frac{1}{2}tr \ln \frac{\sinh(e\mathcal{F}s)}{e\mathcal{F}s}} e^{-i\mathcal{Q}s}, \quad (4.20)$$

onde $\mathcal{Q} = -\frac{1}{4}N^\mu N_\mu + \mathcal{M}$ representa uma quantidade que depende dos campos do sistema. O termo $C(x', x)$ é uma constante de integração que surge durante o processo de resolução das equações diferenciais, e, por esse motivo, não apresenta dependência explícita do parâmetro s . Utilizando as equações restantes presentes em Eq.(4.12) e Eq.(4.18), podemos determinar uma expressão para a constante de integração $C(x', x)$, levando em conta as condições de contorno e as relações entre os campos, dada por

$$C(x', x) = C_0 e^{-i \int_x^{x'} (eA^\mu - \frac{1}{2}N^\mu - \frac{1}{2}e\mathcal{F}^{\mu\beta} [y_\beta(s) - y_\beta(0)]) dy}, \quad (4.21)$$

onde C_0 é uma constante que é determinada a partir da aplicação da condição inicial apresentada em Eq. (4.13). Esta condição inicial fornece os valores de referência necessários para resolver completamente as equações diferenciais envolvidas, permitindo assim calcular a constante C_0 de maneira consistente com as condições do sistema no momento inicial. A constante C_0 é, portanto, determinada e dada pela seguinte expressão

$$C_0 = -\frac{i}{(4\pi)^2}. \quad (4.22)$$

Portanto,

$$U(x', x, s) = -\frac{i}{(4\pi s)^2} e^{\frac{i}{4s}[x^\mu(s) - x^\mu(0)] \left[\frac{e\mathcal{F}s}{\tanh(e\mathcal{F}s)} \right]_{\mu\nu} [x^\nu(s) - x^\nu(0)]} e^{-\frac{1}{2}tr \ln \frac{\sinh(e\mathcal{F}s)}{e\mathcal{F}s}} e^{-i\mathcal{Q}s}. \quad (4.23)$$

Para obter uma expressão para $U_0(x, x, s)$, podemos simplificar o processo definindo os campos $\mathcal{F}_{\mu\nu}$, b e m_5 como zero na equação Eq. (4.23). Ao fazer isso, obtemos uma

forma mais simples para o operador de evolução temporal, que resulta na expressão a seguir, onde as contribuições desses campos de fundo são desconsideradas,

$$U_0(x', x, s) = -\frac{i}{(4\pi s)^2} e^{-im^2 s}. \quad (4.24)$$

Agora, como o nosso objetivo é calcular a amplitude de transição vácuo-vácuo, é necessário considerar o limite em que as coordenadas de ponto de início e fim coincidam, ou seja, tomamos $x' = x$. Nesse contexto, ao aplicarmos esse limite, as equações Eq.(4.23) e Eq.(4.24) se simplificam e tornam-se mais adequadas para o cálculo da amplitude desejada, uma vez que as condições iniciais e finais agora coincidem. Assim, temos

$$\begin{aligned} U(x, x, s) &= -\frac{i}{(4\pi s)^2} e^{-im^2 s} e^{-\frac{1}{2}tr \ln \frac{\sinh(e\mathcal{F}s)}{e\mathcal{F}s}} e^{-i\mathcal{Q}'s}, \\ U_0(x, x, s) &= -\frac{i}{(4\pi s)^2} e^{-im^2 s}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

com

$$\mathcal{Q}' = -\frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + (4b^2 - 3m_5^2) + 4ibm_5\gamma_0 - 2imm_5\gamma_5. \quad (4.26)$$

A Lagrangiana efetiva é então reescrita como

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-im^2 s} \left[e^{-\frac{1}{2}tr \ln \frac{\sinh(e\mathcal{F}s)}{e\mathcal{F}s}} tr \left(e^{-i\mathcal{Q}'s} \right) - 4 \right]. \quad (4.27)$$

O problema de calcular a Lagrangiana efetiva é, portanto, simplificado e reduzido a uma questão fundamental: encontrar os autovalores de $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ e \mathcal{Q}' . O primeiro desses autovalores já foi cuidadosamente calculado por (SCHWINGER, 1951), o cálculo também está contido no Apêndice C e a expressão para ele é dada por

$$\exp \left[-\frac{1}{2}tr \ln \frac{\sinh(e\mathcal{F}s)}{e\mathcal{F}s} \right] = \left[\frac{(es)^2 ap}{\sinh(eps) \sin(eas)} \right], \quad (4.28)$$

onde

$$a = \left(\sqrt{\mathcal{Y}^2 + \mathcal{R}^2} + \mathcal{Y} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad p = \left(\sqrt{\mathcal{Y}^2 + \mathcal{R}^2} - \mathcal{Y} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.29)$$

com $\mathcal{R} = \frac{1}{4}\mathcal{F}^{\mu\sigma}\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\sigma} = \mathcal{E} \cdot \mathcal{B}$, que representa a forma de Pontryagin, caracterizando a interação entre os campos elétrico (\mathcal{E}) e magnético (\mathcal{B}). Por outro lado, $\mathcal{Y} = \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\lambda\sigma}\mathcal{F}^{\lambda\sigma} = \frac{1}{2}(\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2)$ corresponde à forma de Maxwell, descrevendo a densidade de energia associada aos campos elétrico e magnético no contexto de eletromagnetismo clássico.

Como o objetivo final deste estudo é calcular a probabilidade de criação de pares E-P, damos continuidade ao processo com mais uma simplificação crucial: a aproximação do campo elétrico puro. Além disso, conforme discutido por (SCHWINGER, 1951; DITTRICH; TSAI; ZIMMERMANN, 1979; VALLURI; LAMM; MIELNICZUK, 1982),

a probabilidade de criação de pares, no contexto de campos de fundo constantes, só se manifesta de forma significativa quando o campo é exclusivamente elétrico. Essa situação pode ser relacionada à eletrodinâmica clássica, na qual o campo magnético, embora presente, não realiza trabalho direto sobre as partículas carregadas, sendo o campo elétrico o único responsável por transferir energia para as partículas e, assim, permitir o processo de aceleração. Assim, ao expressarmos \mathcal{Q}' de maneira explícita na forma matricial e considerando o limite em que o campo é puramente elétrico, podemos determinar os autovalores correspondentes, que são fundamentais para o cálculo da probabilidade de criação de pares no cenário estudado. Os autovalores são dados então por

$$(\mathcal{Q}')^{EV} = \alpha \pm \sqrt{(4ibm_5)^2 - (e\mathcal{E} \pm 2mm_5)^2}. \quad (4.30)$$

onde definimos $\alpha = (4b^2 - 3m_5^2)$, uma expressão que caracteriza a contribuição dos parâmetros envolvidos no sistema. Utilizando as equações fornecidas em Eq. (4.28) e Eq. (4.30), podemos derivar a seguinte expressão para a Lagrangiana efetiva, que descreve o comportamento do sistema no contexto de um campo elétrico puro,

$$\mathcal{L}_{(\mathcal{E})}^{(1)} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-im^2 s} \left\{ e^{is\alpha} e\mathcal{E} s \frac{\cosh \left[\frac{1}{2}s \left(a_+^{(\mathcal{E})} + a_-^{(\mathcal{E})} \right) \right] \cosh \left[\frac{1}{2}s \left(a_+^{(\mathcal{E})} - a_-^{(\mathcal{E})} \right) \right]}{\sinh(e\mathcal{E}s)} - 1 \right\}, \quad (4.31)$$

com

$$\begin{aligned} a_+^{(\mathcal{E})} &= \sqrt{\beta^2 + (e\mathcal{E} - i\delta)^2}, \\ a_-^{(\mathcal{E})} &= \sqrt{\beta^2 + (e\mathcal{E} + i\delta)^2}, \\ \beta &= 4bm_5, \\ \delta &= 2mm_5. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Para complementar a análise da Lagrangiana efetiva apresentada na Eq.(4.31), é necessário investigar se ela contém termos divergentes quando o parâmetro s se aproxima de zero. Para realizar essa verificação, começamos expandindo o primeiro termo dentro dos colchetes da Eq.(4.31) em uma série de potências de s . Através dessa expansão, identificamos os termos divergentes que surgem quando $s \rightarrow 0$. Estes termos divergentes são então subtraídos por meio do processo de renormalização, de modo a garantir que a Lagrangiana resultante seja finita e bem comportada. A parte divergente associada ao campo elétrico é combinada com a parte livre, dada por Eq. (4.1), conforme foi mostrado por Schwinger em (SCHWINGER, 1951). A contribuição que viola a invariância de Lorentz é tratada de forma semelhante ao que foi feito por (SITENKO; RULIK, 2003), sendo absorvida de maneira apropriada. Após esses ajustes, obtemos a forma final da Lagrangiana efetiva,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(\mathcal{E})} &= \frac{1}{2}\mathcal{E}^2 + \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-im^2 s} \left(e^{is\alpha} e\mathcal{E} s \frac{\cosh \left[\frac{1}{2}s \left(a_+^{(\mathcal{E})} + a_-^{(\mathcal{E})} \right) \right] \cosh \left[\frac{1}{2}s \left(a_+^{(\mathcal{E})} - a_-^{(\mathcal{E})} \right) \right]}{\sinh(e\mathcal{E}s)} + \right. \\ &\quad \left. - is\alpha + \frac{1}{12}s^2 \left[6(\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2) - 4(e\mathcal{E})^2 \right] - 1 \right), \end{aligned} \quad (4.33)$$

totalmente renormalizada, que descreve o comportamento do sistema no limite de um campo elétrico puro, levando em consideração todas as correções necessárias para garantir a consistência teórica. É simples verificar que, no limite em que os campos que violam a invariância de Lorentz tendem a zero na Eq. (4.33), o resultado clássico e bem conhecido obtido por Schwinger em (SCHWINGER, 1951) é recuperado. Esse resultado corresponde à expressão tradicional para a Lagrangiana efetiva no caso de um campo elétrico puro, sem a presença de termos adicionais que quebrem a simetria de Lorentz, como esperado dentro do contexto físico estabelecido.

Além disso, é interessante e útil realizar a expansão da Eq. (4.33) até a primeira ordem na interação entre os campos, uma vez que isso nos permite analisar de forma mais detalhada as correções induzidas pela interação. Ao fazer essa expansão, obtemos uma expressão que descreve o comportamento do sistema de maneira aproximada, levando em conta os efeitos de primeira ordem, que são cruciais para entender as contribuições adicionais dos campos envolvidos na dinâmica do sistema. Neste caso, obtemos

$$\mathcal{L}_{(\mathcal{E})}^{(1)} = \frac{e^2 \mathcal{E}^2}{6m^2 \pi^2} \left(b^2 - \frac{3}{4} m_5^2 \right). \quad (4.34)$$

É possível observar facilmente que, ao realizar essa expansão, um termo que é invariável sob a simetria CPT é gerado. Esse resultado é consistente com aqueles previamente encontrados em estudos anteriores, como os de (FERRARI et al., 2021; GOMES et al., 2010; SCARPELLI et al., 2013), que também identificaram a geração de termos semelhantes em contextos de interações entre campos com violações da simetria de Lorentz e considerações sobre a simetria CPT.

4.2 Análise de criação de pares E-P

Agora, avançando para o cálculo final da probabilidade de criação de um par E-P devido à interação com o campo externo (VL e elétrico), o que é comumente conhecido como o efeito Schwinger, é importante observar que essa probabilidade pode ser expressa de forma precisa por meio de uma relação específica. A probabilidade de criar um par E-P, levando em consideração o impacto do campo externo sobre o sistema quântico, é dada pela seguinte relação, conforme foi derivado e discutido em (DITTRICH; REUTER, 1985b),

$$P = 1 - \left| \langle 0|0 \rangle_{A,b,m_5} \right|^2 = 1 - e^{-2ImW[A,b,m_5]}, \quad (4.35)$$

onde $W[A] = \int d^4x \mathcal{L}$ é a que representa a ação do sistema, e $\langle 0|0 \rangle_A$ corresponde à amplitude de probabilidade associada ao campo permanecer no estado de vácuo, sem que haja transições para outros estados. Se, por acaso, $\langle 0|0 \rangle_{A,b,m_5} = 1$, ou seja, quando o estado de vácuo inicial permanece inalterado ao longo do processo, isso implica que não houve a criação de um par E-P. No entanto, ao considerar valores pequenos para $W[A,b,m_5]$, podemos utilizar uma aproximação para a probabilidade, que é dada pela relação proposta em (DITTRICH; REUTER, 1985b),

$$P = 2 \int d^4x Im\mathcal{L}. \quad (4.36)$$

Portanto, a densidade de probabilidade de criar pares E-P é simplesmente $\mathcal{P} = 2\text{Im}\mathcal{L}$. Portanto, para obter a probabilidade de criação de pares E-P, precisamos apenas da parte imaginária da Lagrangiana efetiva. Aproveitando o fato de que a parte imaginária da seguinte relação

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad (4.37)$$

é uma função ímpar e a parte real é par, a parte imaginária da Lagrangiana efetiva é dada por

$$\begin{aligned} \text{Im}\mathcal{L}_{(\mathcal{E})}^{(1)} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} \left[\left(\sin[s(\alpha - m^2)] e\mathcal{E}s \frac{\cosh\left[\frac{1}{2}s(a_+^{(\mathcal{E})} + a_-^{(\mathcal{E})})\right] \cosh\left[\frac{1}{2}s(a_+^{(\mathcal{E})} - a_-^{(\mathcal{E})})\right]}{\sinh(e\mathcal{E}s)} \right) \right. \\ \left. - s\alpha \cos(m^2s) - \sin(m^2s) \left(\frac{1}{12}s^2 [6(\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2) - 4(e\mathcal{E})^2] - 1 \right) \right], \end{aligned} \quad (4.38)$$

e então, reorganizando os termos usando o fato de que

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}), \\ \cos x &= \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}), \end{aligned} \quad (4.39)$$

a parte imaginária de Eq. (4.33) resulta em

$$\begin{aligned} \text{Im}\mathcal{L}_{(\mathcal{E})}^{(1)} = \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-im^2s} \left\{ e^{is\alpha} e\mathcal{E}s \frac{\cosh\left[\frac{1}{2}s(a_+^{(\mathcal{E})} + a_-^{(\mathcal{E})})\right] \cosh\left[\frac{1}{2}s(a_+^{(\mathcal{E})} - a_-^{(\mathcal{E})})\right]}{\sinh(e\mathcal{E}s)} \right. \\ \left. - is\alpha + \frac{1}{12}s^2 [6(\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2) - 4(e\mathcal{E})^2] - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Em comparação com a Eq.(4.38), os limites da integral foram modificados, e agora podemos continuar com a resolução da equação Eq.(4.40) aplicando o método do resíduo. Os polos, que surgem devido à presença da função \sinh no denominador, são localizados em $s_n = -\frac{in\pi}{e\mathcal{E}}$. Para garantir uma taxa de criação de pares com decaimento exponencial decrescente, fechamos o contorno da integral por um semicírculo no semiplano inferior. Ao computar os resíduos dos polos simples, podemos utilizar a série de Laurent da função $\frac{1}{\sinh(e\mathcal{E}s)}$. Isso nos permite calcular a contribuição dos polos para a integral, resultando na seguinte expressão,

$$\begin{aligned} \text{Im}\mathcal{L}_R^{(1)}(\mathcal{E}) = \frac{(e\mathcal{E})^2}{8\pi^3} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} \cosh\left[\frac{1}{2}\frac{in\pi}{e\mathcal{E}} \left(\sqrt{(4bm_5)^2 + (e\mathcal{E} + 2mm_5)^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{(4bm_5)^2 + (e\mathcal{E} - 2mm_5)^2} \right)\right] \cosh\left[\frac{1}{2}\frac{in\pi}{e\mathcal{E}} \left(\sqrt{(4bm_5)^2 + (e\mathcal{E} + 2mm_5)^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{(4bm_5)^2 + (e\mathcal{E} - 2mm_5)^2} \right)\right] e^{-\frac{n\pi}{e\mathcal{E}}(m^2 - 4b^2 + 3m_5^2)}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Como os campos que violam a invariância de Lorentz são considerados muito pequenos em comparação com outros efeitos, podemos expandir a Eq. (4.41) até a segunda ordem nos parâmetros que violam essa invariância. Isso nos permite obter uma aproximação mais precisa para os efeitos de primeira e segunda ordem induzidos por esses campos. Com base nisso, podemos reescrever a expressão considerando apenas os termos relevantes para essas ordens,

resultando em uma forma que descreve adequadamente o impacto dos campos violadores da invariância de Lorentz sobre o sistema. Assim, temos

$$Im\mathcal{L}_R^{(1)}(\mathcal{E}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e\mathcal{E})^2}{8n^2\pi^3} e^{-\frac{m^2 n\pi}{e\mathcal{E}}} \left[1 - \left(\frac{2mm_5 n\pi}{e\mathcal{E}} \right)^2 - \frac{3m_5^2 n\pi}{e\mathcal{E}} + \frac{4n\pi b^2}{e\mathcal{E}} \right], \quad (4.42)$$

Concluimos esta seção observando que as contribuições dos campos de fundo que violam a invariância de Lorentz para a taxa de criação de pares E-P são extremamente pequenas, devido ao fato de que esses campos VL estão na ordem de $10^{-14} GeV$ (KOSTELECKY; RUSSELL, 2011). No entanto, apesar dessa magnitude diminuta, pode ser teoricamente possível medir essas contribuições em experimentos de alta precisão, como o experimento Laser Und European X-ray Free Elec- tron (XFEL) Experiment (LUXE), que investiga as interações de campos fortes com alta sensibilidade. A próxima seção será dedicada a discutir a viabilidade de observar tais efeitos em experimentos experimentais recentes e seus potenciais impactos. Além disso, vale a pena observar que a massa pseudo-escalar m_5 de fato contribui para o efeito Schwinger, mas de maneira não-linear, uma vez que a contribuição é proporcional ao quadrado de m_5 . Isso pode ser explicado pelo argumento de que a rotação quiral só é válida até a primeira ordem em m_5 , e ordens superiores poderiam, em princípio, surgir, embora sejam muito pequenas e dificilmente detectáveis nos experimentos atuais.

4.3 Fenomenologia

Embora o efeito Schwinger calculado anteriormente seja válido para o caso de um campo elétrico constante, na prática, é extremamente desafiador gerar experimentalmente um campo elétrico com essas condições ideais (RINGWALD, 2001). Diante dessa limitação, diversas pesquisas foram realizadas com o objetivo de explorar se lasers de alta intensidade, que produzem um campo elétrico alternante, poderiam ser utilizados para investigar o efeito Schwinger (BUNKIN; TUGOV, 1969; BREZIN; ITZYKSON, 1970; POPOV, 1971b; POPOV, 1971a; POPOV, 1973; MARINOV; POPOV, 1977; SCHUTZHOLD; GIES; DUNNE, 2008). Em resposta a esse desafio, uma série de experimentos foi proposta para sondar o fenômeno, utilizando lasers de alta intensidade. Entre esses experimentos, destacamos o SLAC-E144 (o primeiro a tentar explorar o efeito Schwinger por meio de espalhamento Compton não linear e do processo de Breit-Wheeler (ALTARELLI et al., 2019)), além do XFEL, ELI, Station of Extreme Light (SEL) e LUXE. Do ponto de vista experimental, é muito mais viável alcançar as intensidades necessárias para campos eletromagnéticos utilizando lasers de alta potência. Assim, esta seção é dedicada a discutir como é possível correlacionar os resultados obtidos para o campo elétrico constante com uma situação mais próxima da realidade experimental, explorando se esse cenário pode ser utilizado para investigar a violação da invariância de Lorentz a partir dos resultados da Eq. (4.42). O nosso foco principal recai sobre o experimento LUXE (JACOBS, 2021), que representa uma das iniciativas mais promissoras para explorar esses efeitos em condições experimentais modernas.

Do ponto de vista experimental, existem dois parâmetros fundamentais para descrever os

processos não lineares na QED: o parâmetro de adiabaticidade, definido como $\gamma = \frac{e\mathcal{E}}{m\omega}$, onde ω é a frequência do laser, e o parâmetro quântico $\xi = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_{cr}}$, que quantifica a relação entre a intensidade do campo de fundo e o campo crítico de Schwinger. O termo “parâmetro de adiabaticidade” é empregado devido à sua analogia com a produção de pares no vácuo e o fenômeno de ionização atômica, sendo utilizado também para distinguir o regime não perturbativo do regime perturbativo na probabilidade de ionização (DUNNE, 2009). Em particular, quando $\gamma \gg 1$, estamos no regime não perturbativo, cujo comportamento é proporcional ao resultado obtido por Schwinger (SCHWINGER, 1951; HARTIN; RINGWALD; TAPIA, 2019). Nesse contexto, podemos tratar nossos resultados como um caso em que $\gamma \gg 1$, aproximando o sistema a um regime onde a produção de pares é dominada por efeitos não lineares. Com isso, pretendemos comparar essas previsões teóricas com os resultados que se espera obter no experimento LUXE (JACOBS, 2021), avaliando a possibilidade de verificar experimentalmente os efeitos da violação da simetria de Lorentz em campos extremamente intensos. Essa comparação poderá fornecer insights valiosos sobre a validade de nossos modelos teóricos em condições extremas e explorar potenciais desvios do comportamento previsto pelo modelo padrão.

No experimento LUXE, o processo de Breit-Wheeler será explorado como uma ferramenta para investigar a transição entre os regimes perturbativo e não perturbativo na criação de pares de partículas (ABRAMOWICZ et al., 2021). O processo de Breit-Wheeler refere-se à produção de pares E-P a partir da colisão de dois fótons, um fenômeno que é particularmente relevante em condições de campos eletromagnéticos extremamente intensos. Para uma descrição detalhada da configuração experimental, incluindo os arranjos específicos e os desafios técnicos envolvidos, recomendamos consultar (ABRAMOWICZ et al., 2021) e as referências complementares ali indicadas. Como discutido anteriormente, quando o parâmetro de adiabaticidade $\gamma \gg 1$, podemos considerar que o sistema opera em um regime não perturbativo. Nesse caso, é possível aproximar a probabilidade de criação de pares ao resultado obtido para um campo elétrico constante (RINGWALD, 2001), permitindo que nossos cálculos teóricos sejam aplicados para prever os resultados esperados em LUXE.

$$Im\mathcal{L}_R^{(1)}(\mathcal{E}) = \frac{(e\mathcal{E})^2}{8\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{n\pi m^2}{e\mathcal{E}}}. \quad (4.43)$$

A ideia central é que, se o experimento LUXE for capaz de medir a transição entre os regimes perturbativo e não perturbativo, ele poderá servir como um ambiente experimental útil para testar o resultado apresentado na Eq.(4.42). Isso poderia, ao menos, fornecer novos limites sobre os parâmetros associados à violação da invariância de Lorentz. No entanto, durante os estudos preliminares planejados para a fase 1, onde essa transição deverá ser observada, o número mínimo de pósitrons produzidos por criação de pares E-P ainda estará abaixo da faixa necessária para que os efeitos de violação de Lorentz se tornem detectáveis. Ao analisarmos a Eq.(4.42), observamos que, dado que os valores para os campos que violam a invariância de Lorentz são extremamente baixos devido às restrições experimentais atuais, a precisão estimada para o experimento LUXE não será suficiente para detectá-los diretamente.

O significado físico da Eq. (4.42) reside na sua interpretação como a probabilidade de que um par E-P seja gerado por unidade de tempo e volume unitário (RINGWALD, 2001). Considerando o volume característico de um espaço-tempo de Compton, que é da ordem de $\simeq 10^{-59} \text{ m}^3 \text{ s}$, essa probabilidade deveria se aproximar do valor previsto para um campo elétrico no limite invariante de Lorentz. Para que esse fenômeno seja observável, a intensidade do campo elétrico precisaria estar na escala de aproximadamente $10^{21} \mathcal{E}_{cr}$.³ Esse valor é extremamente elevado, representando um desafio significativo mesmo para os experimentos de ponta mais avançados atualmente. Portanto, futuras melhorias tecnológicas e aumentos na intensidade dos campos laser serão essenciais para a exploração dessas previsões teóricas.

Outra análise interessante que pode ser realizada é observar os dois últimos termos presentes na Eq. (4.42). Dependendo dos valores numéricos dos campos de fundo b e m_5 , podemos notar um impacto distinto na probabilidade de criação de pares: especificamente, se $b > m_5$, há um pequeno aumento nessa probabilidade, enquanto que, se $b < m_5$, ocorre uma diminuição. Embora esses efeitos sejam extremamente sutis, eles indicam a influência dos campos que violam a invariância de Lorentz.

Além disso, é possível observar que, no caso específico em que $b = \frac{3}{4}m_5$, as contribuições dos campos VL se anulam completamente, resultando em um cenário em que a violação aparente desaparece. Portanto, se os experimentos futuros, como os conduzidos no LUXE, não forem capazes de detectar essas pequenas contribuições, isso poderá impor uma nova restrição sobre os valores possíveis para os campos b e m_5 . Essa possibilidade poderia, assim, fornecer uma ferramenta indireta para limitar esses parâmetros, mesmo que a precisão experimental atual ainda não permita uma observação direta. Em última análise, isso abre uma janela para testar a consistência teórica dos modelos que preveem tais violações de simetria, refinando nossas previsões para a física além do modelo padrão.

³ Embora tenhamos utilizado unidades naturais ao longo dos cálculos, para obter essa estimativa do campo elétrico foi necessário converter para o SI, restaurando as unidades apropriadas no resultado da Eq. (4.42).

Capítulo 5

Gás quântico fermiônico a temperatura finita com violação de Lorentz

Nesta seção, a conexão entre os termos que violam a invariância de Lorentz no setor fermiônico e a distribuição de Fermi-Dirac será explorada, e os efeitos da violação da simetria de Lorentz na distribuição de férmions com temperatura finita serão examinados. Além disso, as possíveis implicações dessas descobertas para o desenvolvimento de nova física além do Modelo Padrão serão discutidas. O cálculo da distribuição de Fermi-Dirac que apresentaremos aqui é, também, interessante pois nos dirá qual é a energia livre do sistema em questão. Esta que é conhecida por fornecer importantes informações de várias áreas da física, como nucleossíntese primordial, física de plasma, interior solar e em vários outros contextos ([SANTOS et al., 2010](#)).

Para introduzir os efeitos da temperatura, o formalismo de Matsubara será utilizado ([MATSUBARA, 1955](#); [KAPUSTA](#); [GALE, 2011](#)). Este formalismo é uma técnica poderosa na mecânica estatística e na teoria quântica de campos para descrever as propriedades termodinâmicas dos sistemas. Nomeado em homenagem ao físico Tomonaga Matsubara, que introduziu o método em 1955 ([MATSUBARA, 1955](#)), o formalismo de Matsubara fornece um *framework* para calcular médias térmicas e funções de resposta em sistemas de muitos corpos. Envolvendo uma complexificação da variável de tempo e uma transformada discreta de Fourier, este formalismo permite que as funções de correlação de tempo imaginário do sistema sejam relacionadas com suas observáveis físicas a temperatura finita. Isso tem muitas aplicações na física da matéria condensada e na física de altas energias, entre outros campos ([LITVINOVA](#); [SCHUCK, 2021](#); [MENA et al., 2020](#); [HOTTA, 2019](#); [LITVINOVA](#); [WIBOWO, 2019](#)).

Além disso, a interação dos campos quânticos de Dirac com um campo eletromagnético externo é considerada para derivar os efeitos da temperatura em um gás quântico fermiônico com um fundo que viola a invariância de Lorentz, permitindo o uso do formalismo da ação efetiva. Como mencionado anteriormente, a ação efetiva é uma ferramenta útil para derivar e

investigar efeitos físicos na teoria quântica de campos, veja, por exemplo, (GOMES; NEVES, 2023; ALTSCHUL et al., 2023; FERRARI et al., 2021; COSTA; SOBREIRO, 2022) no qual foi aplicada dentro do contexto de VL, e referências ali contidas. De fato, a teoria de Dirac-Maxwell é considerada, complementada com termos que violam a invariância de Lorentz no setor fermiônico. Eventualmente, o campo eletromagnético será tomado zero para rastrear os efeitos da temperatura e dos termos VL.

Retornando ao formalismo dos Integrais de Caminho, a ação efetiva pode ser obtida diretamente a partir do gerador funcional apropriado para o sistema em questão. Dessa forma, temos

$$Z[A, n] = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x \mathcal{L}[A, n]}. \quad (5.1)$$

Aqui, $\mathcal{L}[A, n]$ representa a Lagrangiana da teoria, que depende tanto do potencial eletromagnético externo, denotado por (A_μ) , quanto do conjunto de campos de fundo que violam a invariância de Lorentz, indicados por (n) . Novamente os campos ψ e $\bar{\psi}$ representam, respectivamente, os espinores de Dirac e seus correspondentes conjugados, que descrevem as partículas fermiônicas do sistema. É importante notar que o fator de normalização usual na Eq. (5.1) é assumido implicitamente.

Mais uma vez, consideramos uma extensão da QED que inclui exclusivamente termos responsáveis pela violação da invariância de Lorentz no setor fermiônico, Eq (4.1). Reiteramos, novamente, na Eq. (4.1), o campo fermiônico é o único tratado como campo quântico, enquanto todos os demais campos, incluindo aqueles que violam a invariância de Lorentz e o campo de calibre A_μ , são aqui considerados como campos externos de fundo, sem dinâmica quântica associada. Essa distinção permite focar nas modificações introduzidas pela presença desses campos externos no comportamento quântico do sistema fermiônico em questão.

Aplicando a fórmula da integral gaussiana padrão para o campo fermiônico, apresentada no Apêndice B, Eq. (B.8), obtemos

$$Z[A, n] = \det(\Gamma^\mu \Pi_\mu - M) = \det G[A, n] \quad (5.2)$$

Para calcular o determinante em Eq. (5.2), empregaremos o método de regularização via função Zeta, conforme descrito em (HAWKING, 1977a) e também discutido na seção 3.2.1. Entretanto, a definição comum do determinante de um operador arbitrário

$$\Xi$$

, que é dada pelo produto de seus autovalores, revela-se ineficiente aqui, pois esse produto diverge no presente caso. Para resolver esse problema, adotaremos uma definição generalizada para o determinante, estabelecendo algumas condições especiais. Primeiramente, consideramos o operador Ξ com autovalores discretos, tal que $\Xi \Psi(x)_n = \xi_n \Psi(x)_n$. Em seguida, definimos a função ζ associada a esse operador para controlar a divergência dos autovalores e permitir a obtenção de um valor finito. Dessa forma, temos

$$\zeta_\Xi(s) \equiv \sum_n \xi_n^{-s} = \sum_n e^{\ln \xi_n^{-s}} = \sum_n e^{-s \ln \xi_n} \quad (5.3)$$

derivando com relação a s e depois fazendo $s = 0$ temos

$$\begin{aligned}\partial_{(s)}\zeta_{\Xi}(0) &= \left| \partial_{(s)} \sum_n e^{-s \ln \xi_n} \right|_{s=0} = \left| \sum_n \partial_{(s)} e^{-s \ln \xi_n} \right|_{s=0} \\ &= \left| - \sum_n \ln \xi_n e^{-s \ln \xi_n} \right|_{s=0} = - \sum_n \ln \xi_n \\ &= - \ln \prod_n \xi_n\end{aligned}\tag{5.4}$$

, portando para um operador arbitrário Ξ , o determinante associado a ele pode ser calculado como

$$\det \Xi = e^{-\partial_{(s)}\zeta_{\Xi}(0)}.\tag{5.5}$$

Neste caso, $\zeta_{\Xi}(s)$ representa a função Zeta associada ao operador Ξ . A principal vantagem em adotar essa definição para o determinante é que a derivada $\partial_{(s)}\zeta_{\Xi}(0)$ não apresenta singularidades para a maioria dos operadores que são relevantes em problemas físicos. Essa abordagem permite regularizar o determinante de forma mais robusta e aplicável em diversos contextos onde métodos usuais falham devido a divergências.

Assim, ao formular a expressão para a ação efetiva no nível de 1-loop, denotada por $iW[A]^{(1)}$, obtemos a seguinte forma geral,

$$iW[A]^{(1)} = \ln \det G[A, n].\tag{5.6}$$

Mais uma vez, aproveitando o fato de que o determinante de um operador permanece invariável sob uma transformação de similaridade, podemos reformular a Eq. (5.6) de modo alternativo, obtendo assim a seguinte expressão

$$iW[A]^{(1)} = \frac{1}{2} \ln \det \left\{ G[A, n] G^{(S)}[A, n] \right\},\tag{5.7}$$

onde definimos $G^{(S)}[A, n] = S G[A, n] S^{-1}$. Essa formulação é particularmente útil para simplificar o cálculo das funções Zeta associadas aos operadores que investigamos neste trabalho. A partir dessa expressão, prosseguiremos com a análise de casos específicos na Eq. (3.8), considerando diferentes configurações de campos de fundo que violam a invariância de Lorentz.

5.1 A contribuição $d^{\mu\nu}$

A investigação começa levando em consideração, inicialmente, apenas a contribuição do campo $d^{\mu\nu}$. A partir daí, a ação efetiva é calculada utilizando a expressão dada por Eq. (5.7), onde escolhemos a matriz de conjugação de carga C como a transformação de similaridade. Dessa forma, para o campo $d^{\mu\nu}$, podemos expressar a ação efetiva da seguinte forma

$$iW[A, d]^{(1)} = \ln \det \left\{ G[A, d] G^{(C)}[A, d] \right\}^{\frac{1}{2}},\tag{5.8}$$

com $G[A, d] = \Gamma^\mu \Pi_\mu - m$, e

$$\begin{aligned} G[A, d] &= \Gamma^\mu \Pi_\mu - m, \\ \Gamma^\mu &= \gamma^\mu + d^{\beta\mu} \gamma^5 \gamma_\beta, \\ M &= m. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Em particular, para simplificar a análise, escolhemos o campo $d^{\mu\nu}$ como sendo temporal, definindo-o como $d^{\mu\nu} = \text{diag}(d, 0, 0, 0)$. Com essa escolha, ao aplicar a fórmula usual para o determinante, $\ln \det \Xi = \text{Tr} \ln \Xi$, obtemos a expressão resultante. Essa abordagem facilita a avaliação do determinante do operador envolvido, permitindo uma análise mais direta das contribuições associadas ao campo $d^{\mu\nu}$ na ação efetiva. Assim, obtemos

$$iW[A, d]^{(1)} = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln [(\Gamma^\mu \Pi_\mu - m)(-\Gamma^\mu \Pi_\mu - m)]. \quad (5.10)$$

Agora, desenvolvendo um pouco mais a Eq. (5.10), chegamos a

$$\begin{aligned} iW[A, d]^{(1)} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \ln [-\Pi^2 + \frac{e}{2} \sigma_{\mu\xi} \mathcal{F}^{\mu\xi} + id\gamma^5 \sigma_0^1 \Pi_0 \Pi_1 + id\gamma^5 \sigma_0^2 \Pi_0 \Pi_2 + id\gamma^5 \sigma_0^3 \Pi_0 \Pi_3 + \\ &\quad + id\gamma^5 \sigma_0^1 \Pi_1 \Pi_0 + id\gamma^5 \sigma_0^2 \Pi_2 \Pi_0 + id\gamma^5 \sigma_0^3 \Pi_3 \Pi_0 - d^2 \Pi_0 \Pi_0 + m^2]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Neste ponto da análise, é conveniente considerar o limite em que o campo eletromagnético é nulo, ou seja, impondo $\mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$. Dessa forma, simplificamos a expressão, o que nos permite estudar as contribuições provenientes apenas dos outros termos presentes no modelo, sem a interferência do campo eletromagnético neste trabalho. Portanto,

$$iW[A, d]^{(1)} = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln K, \quad (5.12)$$

onde

$$\begin{aligned} K &= \begin{pmatrix} \alpha & i\beta + \gamma & i\kappa & 0 \\ i\beta - \gamma & \alpha & 0 & -i\kappa \\ i\kappa & 0 & \alpha & i\beta + \gamma \\ 0 & -i\kappa & i\beta - \gamma & \alpha \end{pmatrix}, \\ \alpha &= \partial_0^2 - \partial_{(3)}^2 - d^2 \partial_0^2 + m^2, \\ \beta &= 2d\partial_1 \partial_0, \\ \gamma &= 2d\partial_2 \partial_0, \\ \kappa &= 2d\partial_3 \partial_0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Diagonalizando a matriz K e realizando a transformação para o espaço dos momentos, onde substituímos $\partial_\mu \rightarrow -ik_\mu$, obtemos uma nova forma para K , que pode ser reescrita como

$$K_{(diag)} = \begin{pmatrix} \alpha - \mathcal{P}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - \mathcal{P}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + \mathcal{P}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + \mathcal{P}^* \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

com $\mathcal{P}^* = -2dk_0k$. Portanto, expressão Eq. (5.12) produz

$$iW[A, d]^{(1)} = \text{tr}_x \ln [\mu^{-2}(\alpha - \mathcal{P}^*)] + \text{tr}_x \ln [\mu^{-2}(\alpha + \mathcal{P}^*)] , \quad (5.15)$$

Em que tr_x indica que o traço está sendo calculado no espaço de coordenadas. Para garantir que a ação permaneça adimensional, introduzimos o parâmetro de massa arbitrário μ , por definição. Com essa convenção e aplicando as definições das Eq. (5.2) e Eq. (5.5), obtemos a seguinte expressão

$$iW[A, d]^{(1)} = -\partial_{(s)} \zeta_2(0) . \quad (5.16)$$

Neste caso, $\zeta_2(s)$ é definida como $\zeta_2(s) = \zeta_{\mu^{-2}(\alpha - \mathcal{P})} + \zeta_{\mu^{-2}(\alpha + \mathcal{P})}$. Considerando-se que os campos estão normalizados em um volume $\Omega = L^4$ no espaço euclidiano de quatro dimensões, é realizada uma rotação de Wick, transformando $\partial_0 \rightarrow i\partial_0$. Assim, $(-\partial_{(t)}^2 - \partial_{(3)}^2)$ pode ser aproximado por uma representação de ondas planas com autovalores da forma $(k_0^2 + k_3^2)$. Com essas condições, a função $\zeta_2(s)$ pode finalmente ser expressa na seguinte forma

$$\zeta_2(s) = \mu^{2s} \Omega [I_+ + I_-] , \quad (5.17)$$

onde

$$\begin{aligned} I_+ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[(k_0^2 + k^2 + d^2k_0^2 + m^2 + 2dk_0k)^{-s} \right] \\ I_- &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[(k_0^2 + k^2 + d^2k_0^2 + m^2 - 2dk_0k)^{-s} \right] , \end{aligned} \quad (5.18)$$

com $k = k_{(3)}$ sendo o momento tridimensional.

Para incorporar os efeitos de temperatura na função $\zeta_2(s)$ associada a um gás quântico de partículas fermiônicas, substituímos a função de k_0 por uma função dependente da temperatura, ajustada para satisfazer condições de antiperiodicidade. Este procedimento é comumente referido como a prescrição de Matsubara, permitindo que os modos de frequência sejam discretizados, com cada termo associado a uma frequência de Matsubara definida. Tal formalismo, detalhado em (KAPUSTA; GALE, 2011), é essencial para o estudo da dinâmica térmica de sistemas fermiônicos, uma vez que permite uma análise precisa das contribuições térmicas no limite de altas e baixas temperaturas. Basicamente se compactifica a direção temporal, no formalismo de integrais de caminho, identificando-se o inverso da temperatura com o raio da dimensão temporal. A substituição é dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} f(k_0^2) \rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} f\left(\frac{\pi^2}{\beta^2} [2l+1]^2\right) , \quad (5.19)$$

com $\beta = \frac{1}{T}$. Assim, as integrais Eq. (5.18) tornam-se

$$\begin{aligned} I_+ &= \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi}{(2\pi)^3} (k_0^2 + k^2 + d^2k_0^2 + m^2 + 2dk_0k)^{-s} , \\ I_- &= \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi}{(2\pi)^3} (k_0^2 + k^2 + d^2k_0^2 + m^2 - 2dk_0k)^{-s} , \end{aligned} \quad (5.20)$$

onde foram utilizadas coordenadas esféricas, com $d^3k = k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi$, o que facilita a integração em relação às variáveis angulares ao explorar a simetria esférica do sistema.

O cálculo de I_+ será abordado primeiramente. A expressão pode ser reescrita da seguinte forma,

$$I_+ = \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi}{(2\pi)^3} \left\{ \Delta + \left[\sigma \left(l + \frac{1}{2} \right) d + k \right]^2 \right\}^{-s}, \quad (5.21)$$

onde $\sigma = \frac{2\pi}{\beta}$ e $\Delta = \sigma^2 \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 + m^2$. Dessa forma, após realizar as integrações sobre θ e ϕ , obtemos a seguinte expressão

$$I_+ = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \sum_{l=0}^{\infty} \Delta^{-s} \int_0^{\infty} k^2 dk \left\{ 1 + \left[\frac{\sigma \left(l + \frac{1}{2} \right) d + k}{\Delta^{\frac{1}{2}}} \right]^2 \right\}^{-s}. \quad (5.22)$$

Neste ponto, ao introduzirmos a seguinte mudança de variáveis,

$$x = \frac{k + \sigma \left(l + \frac{1}{2} \right) d}{\Delta^{\frac{1}{2}}}, \quad (5.23)$$

simplicamos a expressão para prosseguir com o cálculo. De forma que, Eq. (5.22) torna-se

$$I_+ = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \sum_{l=0}^{\infty} \Delta^{\frac{3}{2}-s} \int_0^{\infty} (x - \kappa_l)^2 (1 + x^2)^{-s} dx, \quad (5.24)$$

Neste caso, temos que $\kappa_l = \frac{\sigma(l+\frac{1}{2})d}{\Delta^{\frac{1}{2}}}$. A integral dada em Eq. (5.24) pode ser resolvida utilizando o software Mathematica ([INC.](#)), e o resultado final obtido é

$$I_+ = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta^{1-s} \sigma(l+\frac{1}{2})d}{(1-s)} + \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \left\{ \Delta^{\frac{3}{2}-s} + (-3+2s)\Delta^{\frac{1}{2}-s} \sigma^2 \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 d^2 \right\} \Gamma(-\frac{3}{2}+s)}{4\Gamma(s)} \right\}, \quad (5.25)$$

com $\Gamma(s)$ representando a função Gama, agora, considerando que d é pequeno, podemos expandir a Eq. (5.25) em uma série para encontrar uma aproximação que nos permita obter

$$I_+ = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta^{\frac{3}{2}-s} \Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(-\frac{3}{2}+s)}{2\Gamma(s)} + \frac{\Delta^{1-s} \sigma(l+\frac{1}{2})d}{(1-s)} + \frac{\pi^{\frac{1}{2}} (-3+2s) \Delta^{\frac{1}{2}-s} \sigma^2 \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 d^2 \Gamma(-\frac{3}{2}+s)}{4\Gamma(s)} + \mathcal{O}(d^3) \right\}. \quad (5.26)$$

Nesta etapa, embora seja uma limitação para o nosso sistema específico, é prático adotar o limite de massa zero, pois ele nos permite derivar uma expressão consolidada para as somas presentes na Eq. (5.26). Este limite é frequentemente considerado em estudos envolvendo gases ultra-relativísticos, como evidenciado em várias fontes da literatura ([CHEN; SPIEGEL, 2011](#); [BORGHERO; DEMONTIS; PENNISI, 2013](#); [FELIX; MOREIRA JR., 2023](#)). Além disso, alguns sistemas da física da matéria condensada também fazem uso de teorias de QED sem massa, conforme discutido em trabalhos como ([NOVOSELOV et al., 2005](#)). Uma outra aplicação relevante é explorar teorias adicionais de QED, onde o limite de massa zero também pode ser adotado para simplificar a análise, como visto em ([TEBER, 2012](#); [KOTIKOV; TEBER, 2013](#); [TEBER, 2014](#); [JAMES; KOTIKOV; TEBER, 2020](#)). Adicionalmente, existe uma expectativa crescente de que as violações de Lorentz se manifestem em energias muito altas, e, por isso, assumir esse limite é de fato coerente com o objetivo de nossa pesquisa, pois se alinha diretamente

ao estudo dos efeitos dessas violações em contextos de altas energias. Assim,

$$I_+ = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \frac{[\sigma^2(l+\frac{1}{2})^2]^{\frac{3}{2}-s} \Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(-\frac{3}{2}+s)}{2\Gamma(s)} + \frac{[\sigma^2(l+\frac{1}{2})^2]^{1-s} \sigma(l+\frac{1}{2})d}{(1-s)} + \right. \\ \left. + \frac{(-3+2s)[\sigma^2(l+\frac{1}{2})^2]^{\frac{1}{2}-s} \sigma^2(l+\frac{1}{2})^2 d^2 \Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(-\frac{3}{2}+s)}{2\Gamma(s)} \right\}. \quad (5.27)$$

Para o cálculo de I_- , o procedimento seguido é essencialmente o mesmo, com a única diferença sendo a troca de sinal no termo de κ_l . Isso leva à modificação do resultado, que agora se expressa da seguinte forma

$$I_- = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \frac{[\sigma^2(l+\frac{1}{2})^2]^{\frac{3}{2}-s} \Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(-\frac{3}{2}+s)}{2\Gamma(s)} - \frac{[\sigma^2(l+\frac{1}{2})^2]^{1-s} \sigma(l+\frac{1}{2})d}{(1-s)} + \right. \\ \left. + \frac{(-3+2s)[\sigma^2(l+\frac{1}{2})^2]^{\frac{1}{2}-s} \sigma^2(l+\frac{1}{2})^2 d^2 \Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(-\frac{3}{2}+s)}{2\Gamma(s)} \right\}. \quad (5.28)$$

É possível observar que a única diferença entre as expressões das Eq.(5.27) e Eq.(5.28) reside em um sinal negativo nos termos de primeira ordem em d . Como resultado, a contribuição mais significativa na expansão em d ocorre na segunda ordem, refletindo a natureza dos termos presentes. Com base na definição da função Zeta de dois argumentos,

$$\zeta(z, p) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+p)^{-z}, \quad (5.29)$$

podemos agora proceder para o próximo passo da análise. A forma final de Eq. (4.34) pode ser escrita como

$$\zeta_2(s) = \mu^{2s} \Omega \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(-\frac{3}{2}+s) \sigma^{3-2s} \zeta(2s-3, \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} [1 + (-3+2s)d^2]. \quad (5.30)$$

Agora, finalmente, avançamos para o cálculo da Lagrangiana efetiva. Sua conexão com a ação efetiva é expressa pela seguinte relação,

$$iW[A]^{(1)} = \int d^4x \mathcal{L}(\beta, d)^{(1)} = \Omega_{(3)} \beta \mathcal{L}(\beta, d)^{(1)}. \quad (5.31)$$

Comparando esta expressão com a expressão Eq. (5.16), inferimos

$$\mathcal{L}^{(1)}(\beta, d) = -\Omega_{(3)}^{-1} \beta^{-1} \partial_{(s)} \zeta_2^\beta(0). \quad (5.32)$$

Portanto, ao realizar a derivada em relação a s e então tomar o limite $s \rightarrow 0$, obtemos

$$\mathcal{L}^{(1)}(\beta, d) = -\beta^{-1} \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) \sigma^3 \zeta\left(-3, \frac{1}{2}\right) (1-3d^2). \quad (5.33)$$

A partir de

$$\zeta(-n, q) = -\frac{\partial_{(q)} B_{n+2}(q)}{(n+1)(n+2)}, \quad (5.34)$$

onde $B_{n+2}(q)$ são os polinômios de Bernoulli, sendo os primeiros

$$\begin{aligned} B_0(q) &= 1, \\ B_1(q) &= q - \frac{1}{2}, \\ B_2(q) &= q^2 - q + \frac{1}{6}, \\ B_3(q) &= q^3 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{1}{2}q, \\ B_4(q) &= q^4 - 2q^3 + q^2 - \frac{1}{30}, \\ B_5(q) &= q^5 - \frac{5}{2}q^4 + \frac{5}{3}q^3 - \frac{1}{6}q, \end{aligned} \quad (5.35)$$

podemos chegar na seguinte expressão para a Lagrangiana efetiva

$$\mathcal{L}^{(1)}(\beta, d) = \pi^2 \frac{8}{3} \frac{\partial_{(q)} B_5(q)}{20} \Big|_{q=\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\beta} \right)^4 (1 - 3d^2). \quad (5.36)$$

Além disso, ao empregar a relação conveniente que envolve a derivada dos polinômios de Bernoulli,

$$\partial_{(q)} B_n(q) = n B_{n-1}(q), \quad (5.37)$$

finalmente temos

$$\mathcal{L}^{(1)}(\beta, d) = \frac{7}{180} \frac{\pi^2}{\beta^4} (1 - 3d^2). \quad (5.38)$$

Aqui, o resultado foi multiplicado por um fator 2 para considerar adequadamente as duas projeções de spin do gás de elétrons e pósitrons, uma vez que cada partícula possui dois estados de spin possíveis, o que contribui para a multiplicidade da solução. A expressão apresentada na Eq. (5.38) também pode ser reescrita de maneira alternativa,

$$\mathcal{L}^{(1)}(\beta, d) = \frac{2}{3\pi^2} (1 - 3d^2) \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} + 1}, \quad (5.39)$$

onde a identidade

$$\int_0^\infty \frac{\epsilon^{2n-1} d\epsilon}{e^{p\epsilon} + 1} = (1 - 2^{1-2n}) \left(\frac{2\pi}{p} \right)^{2n} \frac{|B_{2n}|}{4n}, \quad (5.40)$$

foi utilizada. Comparando com a definição apresentada em (1.14), podemos identificar o resultado obtido na Eq. (5.39) como a energia livre do sistema. Esta energia livre é expressa em função da distribuição de Fermi-Dirac, que foi corrigida pelo termo de fundo que viola a invariância de Lorentz, levando em consideração a interação entre os campos quânticos. Essa expressão é válida para o caso específico em que o potencial químico é nulo, o que simplifica a análise do comportamento termodinâmico do sistema sob tais condições.

5.2 A contribuição b^μ

Como segundo exemplo, vamos estudar a contribuição de b^μ para o gás quântico fermiônico. Especificamente, para simplificação, consideramos a contribuição do tipo temporal, em que

$b^\mu = (b, 0, 0, 0)$, o que reduz a complexidade do problema. A estrutura do cálculo segue a mesma abordagem que utilizamos anteriormente para o caso do campo $d_{\mu\nu}$. Dada a semelhança com o exemplo anterior, os detalhes dos cálculos serão abordados de forma resumida aqui, sem repetição dos passos já conhecidos. Começamos, então, com a ação efetiva associada, que é expressa por

$$iW[A, b]^{(1)} = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln (\Pi^2 - 2ib\gamma_5\sigma_{01}\Pi_1 - 2ib\gamma_5\sigma_{02}\Pi_2 - 2ib\gamma_5\sigma_{03}\Pi_3 - e\sigma^3\mathcal{B}_z + b^2 + m^2) . \quad (5.41)$$

Novamente, o processo de construção da função Zeta segue um procedimento análogo ao que foi discutido anteriormente para o campo $d_{\mu\nu}$. A partir daqui, consideramos o limite no qual o campo eletromagnético se anula, e procedemos com a transição para o espaço euclidiano de quatro dimensões. Este movimento para o espaço euclidiano nos permite facilitar a manipulação das integrais e resolver a equação diferencial de maneira mais eficiente. A função Zeta, no contexto deste campo b^μ , é então formulada da seguinte maneira,

$$\zeta_2^{(b)}(s) = \mu^{2s} \Omega(I_- + I_+) , \quad (5.42)$$

com

$$\begin{aligned} I_-^{(b)} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(m^2 + b^2 + k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - 2b\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} \right)^{-s} , \\ I_+^{(b)} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(m^2 + b^2 + k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + 2b\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} \right)^{-s} . \end{aligned} \quad (5.43)$$

Usando novamente a prescrição de Matsubara Eq. (5.19), obtemos para $I_-^{(b)}$

$$I_-^{(b)} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk k^2 \left[\Delta + (k - b)^2 \right]^{-s} . \quad (5.44)$$

Para resolver a equação dada em (5.44), realizamos a substituição $x = \frac{(k-b)}{\Delta^{\frac{1}{2}}}$, o que transforma a equação (5.44) na seguinte forma,

$$I_- = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \sum_{l=0}^{\infty} \Delta^{\frac{3}{2}-s} \int_0^{\infty} dx (x + \kappa_l)^2 (1 + x^2)^{-s} , \quad (5.45)$$

facilitando o processo de resolução subsequente. Neste caso, temos agora que $\kappa_l = \frac{b}{\Delta^{\frac{1}{2}}}$. A equação resultante pode ser resolvida, mais uma vez, com o auxílio do software Mathematica (INC.,). O resultado final obtido é, já considerando o limite de massa nula e aplicando a equação dada em (5.29),

$$\begin{aligned} I_-^{(b)} &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{3-2s} \left\{ \zeta \left(2s - 3, \frac{1}{2} \right) \frac{b}{(s-1)\Delta^{\frac{1}{2}}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \left[\zeta \left(2s - 3, \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{-2} \zeta \left(2s - 1, \frac{1}{2} \right) b^2 (2s - 3) \right] \Gamma \left(s - \frac{3}{2} \right)}{4\Gamma(s)} \right\} . \end{aligned} \quad (5.46)$$

Para $I_+^{(b)}$ o processo é análogo e o resultado é

$$\begin{aligned} I_+ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{3-2s} \left\{ -\zeta \left(2s - 3, \frac{1}{2} \right) \frac{b}{(s-1)\Delta^{\frac{1}{2}}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \left[\zeta \left(2s - 3, \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{-2} \zeta \left(2s - 1, \frac{1}{2} \right) b^2 (2s - 3) \right] \Gamma \left(s - \frac{3}{2} \right)}{4\Gamma(s)} \right\} . \end{aligned} \quad (5.47)$$

Combinando todos esses resultados na equação apresentada em (5.42), ao realizar a derivada em relação à variável s e, em seguida, ao tomar o limite quando $s \rightarrow 0$, obtemos, finalmente, o seguinte resultado

$$\partial_{(s)} \zeta_2^\beta(0) = \frac{2}{3} \Omega (2\pi)^2 \left(\frac{1}{\beta}\right)^3 \left[\zeta\left(-3, \frac{1}{2}\right) - 3 \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{-2} \zeta\left(-1, \frac{1}{2}\right) b^2 \right]. \quad (5.48)$$

Finalmente, usando as relações Eq. (5.34), Eq. (5.35) e Eq. (5.37) juntamente com Eq. (5.32), chegamos a

$$\mathcal{L}^{(1)}(\beta, b) = \frac{7}{180} \frac{\pi^2}{\beta^4} \left(1 - \frac{5\beta^2 b^2}{21\pi^2}\right), \quad (5.49)$$

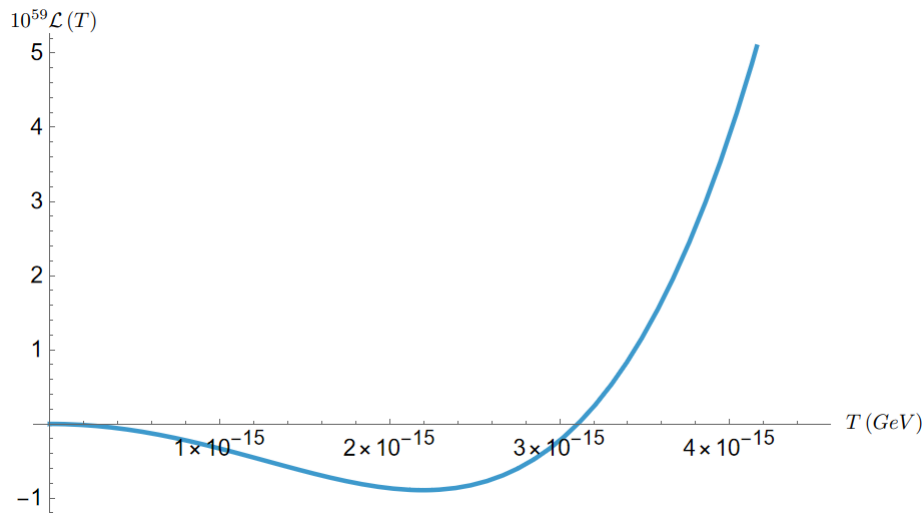
Onde novamente foi multiplicado por um fator 2 para levar em conta as duas projeções de spin de elétrons e pósitrons.

Podemos observar na Eq. (5.49) que o campo b introduz uma contribuição à energia livre que está diretamente acoplada à temperatura. Esse efeito revela um adendo, ainda que pequeno, representado por um termo quadrático na temperatura, em contraste com o caso invariante, onde tal dependência não está presente. Essa diferença destaca a influência do campo b na termodinâmica do sistema. Por exemplo, podemos realizar a seguinte análise: no caso em que

$$T = b \sqrt{\frac{5}{21\pi^2}}, \quad (5.50)$$

observamos que a energia livre do sistema se anula. Esse resultado, de certa forma, era esperado, já que o campo b é considerado muito pequeno, o que faz com que a temperatura necessária para que isso ocorra esteja próxima do zero absoluto, região onde a energia também se torna nula. Nesse cenário, com a violação de Lorentz, seria possível atingir esse limite um pouco antes, ou seja, em uma temperatura ligeiramente superior ao zero absoluto. Outro ponto interessante é que a medida que o campo b aumenta e ultrapassa o valor da temperatura, temos uma região onde os valores da energia se tornam negativos.

Figura 7 – Gráfico da energia livre em função da temperatura para $b = 2.10^{-14} \text{ GeV}$.



Fonte: Autor, 2025.

Esses resultados ficam mais evidentes quando analisamos o gráfico da figura 7, no qual foi feito o “plot” da Eq. (5.49), normalizada de tal forma que fosse possível utilizar o valor $b = 2.10^{-14} \text{ GeV}$.

5.3 As contribuições $c^{\mu\nu}$ e f^μ

Como exemplo final, consideramos as contribuições dos campos $c^{\mu\nu}$ e f^μ para o gás quântico fermiônico, analisando suas implicações no contexto físico. Uma relação bastante interessante é compartilhada por esses campos de fundo, que permite uma conexão entre eles. De fato, é possível, por meio de uma transformação apropriada nos campos fermiônicos, transitar de uma teoria que contém o campo f^μ para uma teoria que contém exclusivamente o campo $c^{\mu\nu}$, como foi demonstrado em (ALTSCHUL, 2006; KARKI; ALTSCHUL, 2022). Essa equivalência sugere que ambos os campos, apesar de suas diferenças formais, devem gerar os mesmos efeitos físicos em qualquer configuração do sistema. A partir dessa equivalência, podemos concluir que os efeitos gerados por $c^{\mu\nu}$ e f^μ são fisicamente indistinguíveis, o que é confirmado pela análise detalhada da relação entre eles, que pode ser expressa de forma matemática como

$$c^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} f^\mu f^\nu. \quad (5.51)$$

Na presente discussão, apenas campos do tipo temporal na forma $c^{\mu\nu} = \text{diag}(c, 0, 0, 0)$ e $f^\mu = (f, 0, 0, 0)$ são considerados. Assim,

$$c = -\frac{1}{2} f^2. \quad (5.52)$$

Começando com o campo f^μ , a ação efetiva associada a este caso específico é dada pela seguinte expressão,

$$iW[A, f]^{(1)} = \ln \det G[A, f], \quad (5.53)$$

onde $G[A, f] = (-\partial^2 + f^2 \partial_0^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$. Ao passar para o espaço dos momenta e avaliar o traço, a função Zeta pode ser escrita como

$$\zeta_2(s) = \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \mu^{2s} \Omega \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{\infty} k^2 dk (\Delta_f + k^2)^{-s}, \quad (5.54)$$

com $\Delta_f = (1 - f^2) \sigma^2 (l + \frac{1}{2})^2 + m^2$. Mais uma vez, fazendo uso da mudança de variável $x = \frac{k}{\Delta_f^{\frac{1}{2}}}$, e substituindo na expressão Eq. (5.54), chegamos a

$$\zeta_2(s) = \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \mu^{2s} \Omega \sum_{l=0}^{\infty} \Delta_f^{\frac{3}{2}-s} \int_0^{\infty} x^2 (1 + x^2)^{-s} dx. \quad (5.55)$$

A solução da integral acima é lida em (GRADSHTEYN; RYZHIK, 1943)

$$\int_0^{\infty} dx x^{\mu-1} (1 + x^2)^{\nu-1} = \frac{1}{2} B\left(\frac{\mu}{2}, 1 - \nu - \frac{\mu}{2}\right), \quad (5.56)$$

Onde $B\left(\frac{\mu}{2}, 1 - \nu - \frac{\mu}{2}\right)$ é a função beta de Euler, uma função especial amplamente utilizada em várias áreas da matemática e da física, que também pode ser representada de forma alternativa

por outras expressões equivalentes, dependendo do contexto em que é aplicada. Para o nosso caso podemos fazer uso da seguinte representação

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (5.57)$$

Tomando novamente o limite $m = 0$ para obter uma forma fechada para a soma, a expressão Eq. (5.55) simplifica para

$$\zeta_2(s) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \mu^{2s} \Omega [(1-f^2) \sigma^2]^{\frac{3}{2}-s} \zeta\left(2s-3, \frac{1}{2}\right) \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(s-\frac{3}{2})}{\Gamma(s)}. \quad (5.58)$$

Usando as relações Eq. (5.34), Eq. (5.35) e Eq. (5.37) juntamente com Eq. (5.32), aplicando a derivada em relação a s e tomando o limite $s \rightarrow 0$, finalmente obtemos

$$\mathcal{L}^{(1)}(\beta, f) = \frac{7}{180} \frac{\pi^2}{\beta^4} (1-f^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (5.59)$$

Para o campo c , o cálculo segue a mesma abordagem e estrutura utilizados para o campo anterior, com as devidas adaptações necessárias. Dessa forma, após realizar as etapas pertinentes, partimos para o resultado final, que pode ser expresso como segue

$$\mathcal{L}^{(1)}(\beta, c) = \frac{7}{180} \frac{\pi^2}{\beta^4} (1+2c+c^2)^{\frac{3}{2}}, \quad (5.60)$$

o que concorda com Eq. (5.59) na primeira ordem em c , de acordo com Eq. (5.51) e Eq. (5.52).

5.4 Fenomenologia

Discutindo de forma mais qualitativa a fenomenologia dos resultados obtidos acima, podemos fazer algumas observações importantes. Em primeiro lugar, é possível notar que ambos os campos VL adicionam uma contribuição extremamente pequena, como era de se esperar, dada a natureza inerentemente diminuta desses campos, conforme demonstrado por vários estudos teóricos e experimentais sobre o assunto ([KOSTELECKÝ; RUSSELL, 2011](#)). Por exemplo, o valor atribuído ao campo b em um experimento de espectroscopia com átomos de Cs deve ser inferior a 10^{-14} GeV ([ROBERTS et al., 2014a](#); [ROBERTS et al., 2014b](#)), enquanto para o campo c , em um sistema combinado, o valor também é esperado ser na ordem de 10^{-14} GeV ([CRIVELLIN; KIRK; SCHRECK, 2022](#)). Referindo-se à equação (5.52), podemos inferir que o valor de f^2 deve ser praticamente idêntico ao valor de c , dado que ambos compartilham propriedades e magnitudes similares nas condições experimentais descritas. Além disso, outras percepções podem ser obtidas a partir dos resultados analíticos alcançados, proporcionando uma visão mais aprofundada dos efeitos da violação de Lorentz em diferentes contextos físicos e experimentais, ampliando as possibilidades de futuras investigações nesse campo.

Também, como foi comentado anteriormente, podemos observar que o campo b introduz uma contribuição à energia livre que está diretamente acoplada à temperatura. Esse efeito revela um adendo, ainda que pequeno, representado por um termo quadrático na temperatura, em contraste com o caso invariante, onde tal dependência não está presente. Essa diferença

destaca a influência do campo b na termodinâmica do sistema. E um caso interessante que surge é o caso em Eq. (5.50), no qual observamos que a energia livre do sistema se anula para este valor específico de temperatura, criando um vínculo com o campo b . Esse resultado, de certa maneira, já era antecipado, uma vez que o campo b é extremamente pequeno, o que implica que a temperatura requerida para tal condição se aproxime do zero absoluto, região na qual a energia também se anula. Nesse contexto, considerando a violação de Lorentz, seria viável alcançar esse limite um pouco antes, ou seja, em uma temperatura um pouco mais alta que o zero absoluto.

No caso dos campos f^μ e $c^{\mu\nu}$, esse comportamento já era amplamente esperado devido à equivalência entre eles, conforme demonstrado em trabalhos anteriores (ALTSCHUL, 2006; KARKI; ALTSCHUL, 2022). Essa equivalência sugere que, apesar das diferenças formais entre os campos, seus efeitos físicos devem ser idênticos quando aplicados ao mesmo sistema, especialmente no que diz respeito aos efeitos térmicos. De fato, podemos observar que esses campos atuam de maneira muito semelhante no comportamento térmico de um gás quântico fermiônico, com a contribuição de cada um influenciando de forma quase indistinguível as propriedades termodinâmicas do sistema. Isso é particularmente válido quando nos referimos aos seus componentes temporais, que são os principais responsáveis pelas alterações no comportamento térmico observado.

Por fim, é importante notar que, embora os campos que violam a simetria de Lorentz exibam comportamentos notavelmente semelhantes entre si na distribuição de Fermi-Dirac, suas contribuições são extremamente pequenas, o que torna qualquer tentativa de análise experimental uma tarefa bastante desafiadora. Mesmo em diferentes regimes de temperatura, não se observam efeitos significativos atribuíveis a esses campos, o que reforça a dificuldade em detectar tais efeitos nas condições usuais de experimento. Quando examinamos os resultados das equações (5.39), (5.49), (5.59) e (5.60), fica claro que ambos os efeitos dos campos de violação de Lorentz apresentam magnitudes muito inferiores a 1, ou seja, são da ordem de grandeza $\ll 1$, observando também os resultados em (KOSTELECKÝ; RUSSELL, 2011). Esse fato implica que as influências desses campos sobre as propriedades do sistema físico são tão sutis e de tal natureza que se tornam praticamente indetectáveis nas condições experimentais típicas. Esses efeitos só poderiam, a priori, serem observados em experimentos extremamente sensíveis e cuidadosamente controlados, capazes de detectar variações mínimas que normalmente passariam despercebidas.

Capítulo 6

Considerações finais

Com o objetivo de sintetizar os principais pontos e análises abordados ao longo desta tese, dedicaremos uma seção à reflexão sobre o impacto dos resultados obtidos e suas implicações para o campo de estudo em questão. Esta reflexão visa destacar de forma clara como os objetivos estabelecidos no início do trabalho foram atingidos, considerando as metodologias e os resultados alcançados. Além disso, discutiremos as possíveis direções para futuras pesquisas, sugerindo caminhos que podem ampliar o entendimento sobre os tópicos tratados, explorar novas abordagens experimentais e teóricas, e, assim, contribuir para o avanço contínuo da área.

Como ponto de partida para esta tese, buscamos compreender de que maneira e em quais contextos os efeitos da violação da simetria de Lorentz poderiam ser investigados dentro da estrutura da QED. Como foi abordado anteriormente, os efeitos de uma possível violação da simetria de Lorentz poderiam se manifestar em escalas de energias inferiores à escala de Planck, e em dois cenários distintos: em situações que envolvem efeitos cumulativos ou por meio de efeitos que exigem medições de alta precisão. A QED se destaca nesse contexto, pois é uma teoria que já possui uma vasta gama de experimentos com grande precisão. Contudo, nosso objetivo foi identificar algum efeito dentro da QED que pudesse ser observado em um regime de altas energias, condizente com a escala de energias da própria teoria. Dessa forma, a análise foi direcionada para investigar como a violação de Lorentz poderia se manifestar no efeito Schwinger, uma vez que este efeito surge na QED invariante de Lorentz como um fenômeno relacionado a altas energias ([SCHWINGER, 1951](#)). Em particular, esperamos que o efeito Schwinger se manifestasse para intensidades de campo elétrico da ordem de $\mathcal{E} = 10^{14}$, V/cm , onde fenômenos de alta energia podem emergir com maior clareza.

Como próximo passo na evolução da tese, introduzimos os campos de violação da simetria de Lorentz. Para isso, selecionamos dois campos de fundo dentro do conjunto de variedades descritas na Eq. (3.8), que são o campo b_μ e a massa pseudo-escalar m_5 . O campo b_μ foi escolhido por ser um dos campos mais amplamente estudados no contexto do modelo padrão estendido, o que nos permitiu verificar e comparar alguns resultados durante os cálculos, garantindo uma maior confiabilidade no processo de análise. Além disso, o campo b_μ apresenta resultados dentro

do cálculo de ações efetivas que, embora possuam certa ambiguidade, poderiam nos fornecer pistas para futuras investigações, embora não tenhamos avançado significativamente na resolução dessa questão. Por outro lado, a massa pseudo-escalar m_5 foi escolhida por ser um componente presente na Eq. (3.8) que já é conhecido por poder ser removido da teoria por meio de uma transformação quiral do campo fermiônico, conforme mostrado na Eq. (3.10). Contudo, é importante destacar que essa transformação é válida apenas até a primeira ordem, o que nos levou a esperar que, em ordens superiores, a massa pseudo-escalar pudesse contribuir de maneira significativa para o efeito Schwinger, além de outros possíveis efeitos quânticos que ainda precisariam ser analisados com maior profundidade.

Utilizando o formalismo de ação efetiva, avançamos para a obtenção da probabilidade de criação de pares no vácuo sob a influência de um campo elétrico de fundo, conhecido como efeito Schwinger, com a inclusão dos campos VL de fundo, b_μ e m_5 . Para o cálculo da ação efetiva, também foi empregado o método de tempo próprio, conforme descrito na seção 3.2.1. Ao realizar os cálculos, verificamos que ambos os campos de fundo contribuem para uma leve ampliação do efeito Schwinger, embora essa contribuição seja extremamente pequena. Além disso, conforme esperado, a massa pseudo-escalar aparece no resultado final, dado na equação (4.42), apenas na segunda ordem de magnitude, confirmando que, de fato, não há contribuição significativa de primeira ordem para o efeito Schwinger. Esse comportamento é consistente com a expectativa teórica de que a contribuição da massa pseudo-escalar só se torna relevante a ordens superiores, corroborando a ideia de que os efeitos de violação de Lorentz são sutis e se manifestam em escalas mais altas de energia.

Analisando agora do ponto de vista experimental, com base nos novos experimentos mencionados anteriormente, como LUXE, XFEL, SEL, entre outros, que visam realizar medições mais precisas e fornecer evidências mais robustas sobre a criação de pares, é possível perceber que estamos em um momento de grandes avanços nesse campo. Em particular, o experimento LUXE destacamos como o mais adequado para buscar resultados que se aproximem do efeito Schwinger puro, ou seja, a criação de pares no vácuo devido à presença de um campo elétrico de fundo constante. Embora ainda em estágios iniciais, os experimentos estão em busca de medições que possam corroborar a evidência do efeito Schwinger sob a simetria de Lorentz, com as intensidades de campo que estão sendo estudadas ainda abaixo do limite crítico de campo de $\mathcal{E} = 10^{14}$, V/cm. Como discutido na seção 4, para que ocorra uma produção de pares correspondente ao efeito Schwinger invariante de Lorentz, ou seja, no volume espaço-tempo de Compton, $\simeq 10^{-59} m^3 s$, considerando a presença dos campos de fundo de violação de Lorentz, seria necessário que os campos elétricos atingissem intensidades da ordem de $10^{21} \mathcal{E}_{cr}$. Esse fato evidencia o desafio técnico e experimental que ainda existe para alcançar condições adequadas para observar tais efeitos em experimentos práticos.

Ainda em relação ao efeito Schwinger, uma análise adicional que podemos realizar é observar os dois últimos termos na equação (4.42). Nela, podemos perceber que, dependendo dos valores numéricos dos campos b e m_5 , a probabilidade de criação de pares pode sofrer um pequeno aumento ($b > m_5$) ou uma diminuição ($b < m_5$). Embora essa variação seja extremamente

pequena, ela sugere uma influência sutil dos campos de fundo que violam a simetria de Lorentz sobre o processo de criação de pares. Além disso, podemos notar que, quando $b = \frac{3}{4}m_5$, a contribuição dos campos VL desaparece completamente, implicando que, nesse caso, não haveria efeito adicional provocado pela violação de simetria. Dessa forma, se experimentos futuros não conseguirem medir essas contribuições, seria possível estabelecer uma restrição entre os valores dos campos b e m_5 . Isso poderia fornecer uma ferramenta importante para testar teorias envolvendo violação da simetria de Lorentz, limitando os valores possíveis para esses campos.

Partindo agora para as considerações finais da segunda parte da tese, buscamos analisar os efeitos de temperatura finita em um fundo sujeito à violação da simetria de Lorentz. Para isso, nossa abordagem consistiu em derivar a energia livre de um gás de férmions sob a influência de campos específicos de violação de Lorentz presentes no fundo. Este estudo foi desenvolvido na seção 5, onde exploramos as implicações da temperatura finita sobre as propriedades do sistema. A análise buscou compreender como a presença desses campos VL pode modificar o comportamento do gás de férmions em diferentes regimes de temperatura, fornecendo uma visão mais profunda sobre as interações quânticas e os efeitos da violação de simetria de Lorentz em condições não nulas de temperatura.

Novamente, escolhemos trabalhar com os campos b_μ e m_5 , baseados nos mesmos argumentos utilizados para o efeito Schwinger. No entanto, neste caso, buscamos estender nossa análise para incluir uma gama mais ampla de campos de VL, considerando também os campos $d_{\mu\nu}$, $c_{\mu\nu}$ e f_μ . Os dois últimos, em particular, são de grande interesse devido à relação entre eles, conforme descrita na Eq. (5.51), o que abre novas possibilidades de investigação. De fato, os resultados obtidos para o efeito físico final corroboram as afirmações feitas em trabalhos anteriores, como (ALTSCHUL, 2006; ALTSCHUL et al., 2023). Essa extensão da análise não só amplia a compreensão dos efeitos da violação de Lorentz, mas também fornece insights valiosos sobre as interações entre os diferentes campos de fundo no contexto de temperaturas finitas.

Como era esperado, ambas as contribuições de VL para a energia livre de um gás de férmions são relativamente pequenas, porém bastante interessantes. Um exemplo disso é o termo gerado pelo acoplamento do campo b com a temperatura, que introduz uma contribuição quártica à energia livre. Essa análise demonstra que, embora as contribuições dos campos VL possam parecer sutis à primeira vista, suas interações têm o potencial de influenciar de maneira significativa o comportamento do sistema. Isso evidencia a complexidade dos efeitos que essas violações podem produzir.

6.1 Perspectivas futuras

Como perspectivas futuras desta tese, nosso objetivo é investigar maneiras de aumentar a produção de pares de modo que os efeitos de VL possam ser explorados com maior profundidade. Uma abordagem já discutida na literatura para alcançar esse objetivo é a utilização de campos elétricos oscilantes, conforme apresentado em trabalhos como (BREZIN; ITZYKSON, 1970;

SCHUTZHOLD; GIES; DUNNE, 2008). A presença desses campos oscilantes pode levar a uma redução no valor do campo crítico, o que facilitaria a observação de efeitos mais próximos dos resultados experimentais. Esse fenômeno é conhecido como “efeito Schwinger dinamicamente assistido”, e oferece uma possível via para intensificar os efeitos quânticos no processo de criação de pares. A exploração dessa abordagem pode abrir novas perspectivas para realizar experimentos mais sensíveis, onde as contribuições da violação de Lorentz poderiam ser observadas de maneira mais clara e precisa.

Outra possibilidade a ser considerada seria a inclusão de um campo magnético no cálculo final da probabilidade de criação de pares. Com essa abordagem, seria possível explorar fontes astrofísicas como estrelas de nêutrons, que possuem campos magnéticos extremamente intensos (DUNCAN, 2000), além de buracos negros (PUTTEN, 2000), que também apresentam fortes campos magnéticos nas suas proximidades. A presença desses campos magnéticos poderia alterar significativamente as condições para a criação de pares, permitindo a investigação de efeitos quânticos em regimes de campos intensos, onde as interações se tornam muito mais fortes. Essas fontes astrofísicas, com suas condições extremas de campo, oferecem um ambiente ideal para estudar a violação da simetria de Lorentz e outras manifestações de efeitos quânticos em campos de grande intensidade.

Por fim, no que diz respeito à parte do gás quântico, seria de grande interesse prosseguir com a análise termodinâmica do sistema, investigando como os efeitos termodinâmicos influenciam o comportamento dos campos e do gás de férmions sob a presença de violação da simetria de Lorentz, como por exemplo o caso b_μ com outras possíveis configurações. Este estudo aprofundado abriria possibilidades para novos insights sobre a violação de Lorentz, além de proporcionar uma compreensão mais completa dos efeitos quânticos e suas interações em diferentes arranjos.

Referências

- ABRAMOWICZ, H. et al. Conceptual design report for the LUXE experiment. *Eur. Phys. J. ST*, v. 230, n. 11, p. 2445–2560, 2021.
- ADLER, S. L. Photon splitting and photon dispersion in a strong magnetic field. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 67, n. 2, p. 599–647, 1971.
- ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J. Classical fields. *São Paulo*, 2004.
- ALEXANDER, S.; MAGUEIJO, J. Noncommutative geometry as a realization of varying speed of light cosmology. In: *13th Rencontres de Blois on Frontiers of the Universe*. [S.l.: s.n.], 2004. p. 281–297.
- ALTARELLI, M. et al. *Summary of strong-field QED Workshop*. [S.l.: s.n.], 2019.
- ALTSCHUL, B. Eliminating the CPT-odd f coefficient from the Lorentz-violating standard model extension. *J. Phys. A*, v. 39, p. 13757–13766, 2006.
- ALTSCHUL, B. et al. Three- and four-point functions in CPT-even Lorentz-violating scalar QED. *Phys. Rev. D*, v. 107, n. 4, p. 045005, 2023.
- BALL, R. D. Chiral gauge theory. *Physics Reports*, Elsevier, v. 182, n. 1-2, p. 1–186, 1989.
- BARGMANN, V. Irreducible unitary representations of the Lorentz group. *Annals Math.*, v. 48, p. 568–640, 1947.
- BARGMANN, V.; WIGNER, E. P. Group Theoretical Discussion of Relativistic Wave Equations. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, v. 34, p. 211, 1948.
- BELICH, H. et al. Non-minimal coupling to a Lorentz-violating background and quantum-mechanical implications. *Eur. Phys. J. C*, v. 41, p. 421–426, 2005.
- BELICH, H. et al. Violação da simetria de lorentz. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 29, p. 57–64, 2007.
- BERNOULLI, D. Hydrodynamica. *Dulsecker. Consultable en ligne <http://imgbase-scd-ulp.u-strasbg.fr/displayimage.php>*, v. 1738, 1968.
- BLACKMORE, J. T. *Ludwig Boltzmann: His Later Life and Philosophy, 1900-1906: Book Two: The Philosopher*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1995. v. 174.
- BOLTZMANN, L. *Vorlesungen über gastheorie*. [S.l.]: JA Barth (A. Meiner), 1910. v. 1.

- BOMBIERI, E. Problems of the millennium: The riemann hypothesis. *Clay Mathematics Institute*, 2000.
- BORDAG, M.; MOHIDEEN, U.; MOSTEPANENKO, V. M. New developments in the casimir effect. *Physics reports*, Elsevier, v. 353, n. 1-3, p. 1–205, 2001.
- BORGHERO, F.; DEMONTIS, F.; PENNISI, S. Wave speeds in the macroscopic extended model for ultrarelativistic gases. *Journal of Mathematical Physics*, v. 54, n. 11, 2013.
- BÖRNSSEN, J.-P.; VEN, A. E. van de. Three-loop yang–mills β -function via the covariant background field method. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 657, p. 257–303, 2003.
- BOYLE, R. New experiments physico-mechanicall, touching the spring of the air, and its effect. H. Hall, 1967.
- BOYLE, R. New experiments physico-mechanical, touching the air: whereunto is added a defence of the authors explication of the experiments, against the objections of franciscus linus, and thomas hobbes. (*No Title*), 1974.
- BREZIN, E.; ITZYKSON, C. Pair production in vacuum by an alternating field. *Phys. Rev. D*, v. 2, p. 1191–1199, 1970.
- BUNKIN, F. V.; TUGOV, I. I. The possibility of electron-positron pair production in vacuum when laser radiation is focussed. *Dokl. Akad. Nauk Ser. Fiz.*, v. 187, p. 541–544, 1969.
- CALLAN, C.; WILCZEK, F. On geometric entropy. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 333, n. 1-2, p. 55–61, 1994.
- CAMEL, T. d. O.; FILGUEIRAS, C. A. L. A importância da lei de gay-lussac para a classificação dos compostos orgânicos. *Química Nova*, SciELO Brasil, v. 36, p. 738–747, 2013.
- CARROLL, S. M.; FIELD, G. B.; JACKIW, R. Limits on a Lorentz and Parity Violating Modification of Electrodynamics. *Phys. Rev. D*, v. 41, p. 1231, 1990.
- CASANA, R.; FERREIRA JR., M. M.; RODRIGUES, J. S. Lorentz-violating contributions of the Carroll-Field-Jackiw model to the CMB anisotropy. *Phys. Rev. D*, v. 78, p. 125013, 2008.
- CASANA, R. et al. Generation of geometrical phases and persistent spin currents in 1-dimensional rings by lorentz-violating terms. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 746, p. 171–177, 2015.
- CASANA, R.; SILVA, K. A. da. Lorentz-violating effects in the bose–einstein condensation of an ideal bosonic gas. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 30, n. 07, p. 1550037, 2015.
- CASIMIR, H. B. On the attraction between two perfectly conducting plates. In: *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.* [S.l.: s.n.], 1948. v. 51, p. 793.
- CASTELLANOS, E.; CAMACHO, A. Critical points in a relativistic bosonic gas induced by the quantum structure of spacetime. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 41, p. 2677–2685, 2009.
- CASTELLANOS, E.; LÄMMERZAHN, C. Ideal-modified bosonic gas trapped in an arbitrary three-dimensional power-law potential. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 27, n. 31, p. 1250181, 2012.
- CHAICHIAN, M.; CHEN, W. F.; FELIPE, R. G. Radiatively induced Lorentz and CPT violation in Schwinger constant field approximation. *Phys. Lett. B*, v. 503, p. 215–222, 2001.

- CHAN, L.-H. Induced lorentz-violating chern-simons term in qed and anomalous contributions to effective action expansions. *arXiv preprint hep-ph/9907349*, 1999.
- CHEN, W. F. Understanding radiatively induced Lorentz CPT violation in differential regularization. *Phys. Rev. D*, v. 60, p. 085007, 1999.
- CHEN, X.; SPIEGEL, E. A. Causal Relativistic Fluid Dynamics. *Class. Quant. Grav.*, v. 28, p. 175003, 2011.
- CHUNG, J. M. Radiatively induced Lorentz and CPT violating Chern-Simons term in QED. *Phys. Lett. B*, v. 461, p. 138–141, 1999.
- COLLADAY, D.; KOSTELECKY, V. A. CPT violation and the standard model. *Phys. Rev. D*, v. 55, p. 6760–6774, 1997.
- COLLADAY, D.; KOSTELECKY, V. A. Lorentz violating extension of the standard model. *Phys. Rev. D*, v. 58, p. 116002, 1998.
- COLLADAY, D.; KOSTELECKY, V. A. Lorentz-violating extension of the standard model. *Physical Review D*, APS, v. 58, n. 11, p. 116002, 1998.
- COLLADAY, D.; MCDONALD, P. Redefining spinors in lorentz-violating quantum electrodynamics. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing, v. 43, n. 7, p. 3554–3564, 2002.
- COLLADAY, D.; MCDONALD, P. Statistical mechanics and lorentz violation. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, APS, v. 70, n. 12, p. 125007, 2004.
- COLLADAY, D.; MCDONALD, P. Bose-einstein condensates as a probe for lorentz violation. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, APS, v. 73, n. 10, p. 105006, 2006.
- COSTA, R. L.; SOBREIRO, R. F. One-loop schwinger effect in the presence of lorentz-violating background fields. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 82, n. 8, p. 677, 2022.
- COSTA, R. L.; SOBREIRO, R. F. Fermionic quantum gas at finite temperature within a lorentz-violating background. *Europhysics Letters*, IOP Publishing, v. 145, n. 4, p. 44001, 2024.
- CRIVELLIN, A.; KIRK, F.; SCHRECK, M. Impact of Lorentz violation on anomalous magnetic moments of charged leptons. *JHEP*, v. 11, p. 109, 2022.
- DEWITT, B. S. *Dynamical theory of groups and fields*. [S.l.]: Gordon and Breach, 1965.
- DEWITT, B. S. Quantum theory of gravity. i. the canonical theory. *Physical Review*, APS, v. 160, n. 5, p. 1113, 1967.
- DEWITT, B. S. Quantum theory of gravity. ii. the manifestly covariant theory. *Physical Review*, APS, v. 162, n. 5, p. 1195, 1967.
- DEWITT, B. S. Quantum theory of gravity. iii. applications of the covariant theory. *Physical Review*, APS, v. 162, n. 5, p. 1239, 1967.
- DEWITT, B. S. Quantum field theory in curved spacetime. *Physics Reports*, Elsevier, v. 19, n. 6, p. 295–357, 1975.
- DIAZ, J. S.; KOSTELECKY, A. Lorentz- and CPT-violating models for neutrino oscillations. *Phys. Rev. D*, v. 85, p. 016013, 2012.

- DIRAC, P. *The principles of quantum mechanics, 4th edn. Clarendon.* [S.l.]: Oxford, 1958.
- DIRAC, P. A. M. On the theory of quantum mechanics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, The Royal Society London, v. 112, n. 762, p. 661–677, 1926.
- DITTRICH, W. On riemann's paper, "on the number of primes less than a given magnitude". *arXiv preprint arXiv:1609.02301*, 2016.
- DITTRICH, W.; GIES, H. *Probing the quantum vacuum: perturbative effective action approach in quantum electrodynamics and its application.* [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2000. v. 166.
- DITTRICH, W.; REUTER, M. *EFFECTIVE LAGRANGIANS IN QUANTUM ELECTRODYNAMICS.* [S.l.: s.n.], 1985. v. 220.
- DITTRICH, W.; REUTER, M. Effective lagrangians in quantum electrodynamics springer lect. *Notes Phys*, v. 220, p. 245 p., 1985.
- DITTRICH, W.; TSAI, W.-y.; ZIMMERMANN, K.-H. On the Evaluation of the Effective Potential in Quantum Electrodynamics. *Phys. Rev. D*, v. 19, p. 2929, 1979.
- DUNCAN, R. C. Physics in ultra-strong magnetic fields. In: AMERICAN INSTITUTE OF PHYSICS. *AIP conference proceedings.* [S.l.], 2000. v. 526, n. 1, p. 830–841.
- DUNNE, G. V. New Strong-Field QED Effects at ELI: Nonperturbative Vacuum Pair Production. *Eur. Phys. J. D*, v. 55, p. 327–340, 2009.
- EINSTEIN, A. *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt.* [S.l.]: Albert Einstein-Gesellschaft, 1905.
- EINSTEIN, A. Zur elektrodynamik bewegter körper. *Annalen der physik*, v. 4, 1905.
- EISBERG, R.; RESNICK, R. Quantum physics of atoms, molecules. solids. *Nuclei and Particles*,, p. 466, 1986.
- EISBERG, R. Y. L. *LS; Física, vol. 1 y 2.* [S.l.]: McGraw-Hill, 1984.
- ELIZALDE, E. *Zeta regularization techniques with applications.* [S.l.]: World scientific, 1994.
- FELIX, C. P.; MOREIRA JR., E. S. Thermodynamics of a charged relativistic ideal Boltzmann gas. *Physica A*, v. 618, p. 128702, 2023.
- FERMI, E. Sulla quantizzazione del gas perfetto monoatomico. *Rendiconti Lincei*, v. 145, 1926.
- FERRARI, A. F. et al. One-loop calculations in Lorentz-breaking theories and proper-time method. *EPL*, v. 136, n. 2, p. 21002, 2021.
- FERREIRA, M. M. et al. Unitarity in Stückelberg electrodynamics modified by a Carroll-Field-Jackiw term. *Phys. Lett. B*, v. 804, p. 135379, 2020.
- FILHO, A. A. A.; PETROV, A. Y. Higher-derivative Lorentz-breaking dispersion relations: a thermal description. *Eur. Phys. J. C*, v. 81, n. 9, p. 843, 2021.
- FITZGERALD, G. F. The ether and the earth's atmosphere. *Science*, American Association for the Advancement of Science, n. 328, p. 390–390, 1889.
- FOCK, V. Proper time in classical and quantum mechanics. *Phys. Z. Sowjetunion*, v. 12, p. 404, 1937.

- FOCK, V. Proper time in classical and quantum mechanics. *Phys. Z. Sowjetunion*, v. 12, p. 404–425, 1937.
- FRADKIN, E.; TSEYTLIN, A. A. Non-linear electrodynamics from quantized strings. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 163, n. 1-4, p. 123–130, 1985.
- GIES, H. Strong laser fields as a probe for fundamental physics. *The European Physical Journal D*, Springer, v. 55, n. 2, p. 311–317, 2009.
- GIES, H.; KARBSTEIN, F.; SEEGER, N. Photon merging and splitting in electromagnetic field inhomogeneities. *Physical Review D*, APS, v. 93, n. 8, p. 085034, 2016.
- GIES, H.; TORGRIMSSON, G. Critical schwinger pair production. *Physical Review Letters*, APS, v. 116, n. 9, p. 090406, 2016.
- GILKEY, P. B. The spectral geometry of a riemannian manifold. *Journal of Differential Geometry*, Lehigh University, v. 10, n. 4, p. 601–618, 1975.
- GOLDSTEIN, H. Classical mechanics 2nd ed. *Reading: Addison-Wesley*, p. 241 p., 1950.
- GOMES, M. et al. On the aether-like Lorentz-breaking actions. *Phys. Rev. D*, v. 81, p. 045018, 2010.
- GOMES, Y. M. P.; HELAYEL-NETO, J. A. Limits on non-minimal Lorentz violating parameters through FCNC and LFV processes. *Eur. Phys. J. C*, v. 80, n. 3, p. 287, 2020.
- GOMES, Y. M. P.; NEVES, M. J. A Lorentz-violating low-energy model for the bilayer graphene. *Eur. Phys. J. Plus*, v. 138, n. 6, p. 543, 2023.
- GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. *Table of Integrals, Series, and Products*. [S.l.: s.n.], 1943. ISBN 978-0-12-294757-5, 978-0-12-294757-5.
- GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. *Table of Integrals, series, and products*. [S.l.]: Academic press, 2014.
- GREINER, W. et al. *Relativistic quantum mechanics*. [S.l.]: Springer, 2000. v. 2.
- GREINER, W.; REINHARDT, J. *Field quantization*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- HAGEN, C. New solutions of the thirring model. *Il Nuovo Cimento B (1965-1970)*, Springer, v. 51, n. 1, p. 169–186, 1967.
- HARSCH, V. Otto von guericke (1602–1686) and his pioneering vacuum experiments. *Aviation, space, and environmental medicine*, Aerospace Medical Association, v. 78, n. 11, p. 1075–1077, 2007.
- HARTIN, A.; RINGWALD, A.; TAPIA, N. Measuring the Boiling Point of the Vacuum of Quantum Electrodynamics. *Phys. Rev. D*, v. 99, n. 3, p. 036008, 2019.
- HASHIMOTO, K. Lorentz violation and vacuum structure in string theories. In: WORLD SCIENTIFIC. *International Journal of Modern Physics: Conference Series*. [S.l.], 2014. v. 30, p. 1460274.
- HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. *Communications in mathematical physics*, Springer, v. 43, n. 3, p. 199–220, 1975.
- HAWKING, S. W. Zeta Function Regularization of Path Integrals in Curved Space-Time. *Commun. Math. Phys.*, v. 55, p. 133, 1977.

- HAWKING, S. W. Zeta function regularization of path integrals in curved spacetime. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 55, n. 2, p. 133–148, 1977.
- HEBENSTREIT, F. et al. Momentum signatures for schwinger pair production in short laser pulses with a subcycle structure. *Physical Review Letters*, APS, v. 102, n. 15, p. 150404, 2009.
- HEISENBERG, W.; EULER, H. Folgerungen aus der diracschen theorie des positrons. *Zeitschrift für Physik*, Springer, v. 98, n. 11-12, p. 714–732, 1936.
- HEISENBERG, W.; EULER, H. Consequences of dirac theory of the positron. *arXiv preprint physics/0605038*, 2006.
- HOTTA, K. Brane-Antibrane at Finite Temperature in the Framework of Thermo Field Dynamics. 3 2019.
- INC., W. R. *Mathematica, Version 13.2*. Champaign, IL, 2022. Disponível em: <<https://www.wolfram.com/mathematica>>.
- JACK, I.; OSBORN, H. Two-loop background field calculations for arbitrary background fields. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 207, n. 3, p. 474–504, 1982.
- JACKIW, R.; KOSTELECKY, V. A. Radiatively induced Lorentz and CPT violation in electrodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, v. 82, p. 3572–3575, 1999.
- JACOBS, R. LUXE: A new experiment to study non-perturbative QED in e^- -laser and γ -laser collisions. In: *28th International Workshop on Deep Inelastic Scattering and Related Subjects*. [S.l.: s.n.], 2021.
- JAMES, A.; KOTIKOV, A. V.; TEBER, S. Landau-Khalatnikov-Fradkin transformation of the fermion propagator in massless reduced QED. *Phys. Rev. D*, v. 101, n. 4, p. 045011, 2020.
- JAYEWARDENA, C. SCHWINGER MODEL ON $S(2)$. *Helv. Phys. Acta*, v. 61, p. 636–711, 1988.
- JR, W. E. L.; RETHERFORD, R. C. Fine structure of the hydrogen atom by a microwave method. *Physical Review*, APS, v. 72, n. 3, p. 241, 1947.
- KAPUSTA, J. I.; GALE, C. *Finite-temperature field theory: Principles and applications*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 978-0-521-17322-3, 978-0-521-82082-0, 978-0-511-22280-1.
- KARKI, S.; ALTSCHUL, B. Aspects of the Equivalence between the $f\mu$ and $c\nu\mu$ Terms in Lorentz-Violating Quantum Field Theory. *Symmetry*, v. 14, n. 11, p. 2326, 2022.
- KHARZEEV, D.; LEVIN, E.; TUCHIN, K. Multiparticle production and thermalization in high-energy qcd. *Physical Review C*, APS, v. 75, n. 4, p. 044903, 2007.
- KOSTELECKÝ, A.; MEWES, M. Fermions with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension. *Phys. Rev. D*, v. 88, n. 9, p. 096006, 2013.
- KOSTELECKY, V. A. Gravity, Lorentz violation, and the standard model. *Phys. Rev. D*, v. 69, p. 105009, 2004.
- KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. Neutrinos with lorentz-violating operators of arbitrary dimension. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, APS, v. 85, n. 9, p. 096005, 2012.

- KOSTELECKY, V. A.; POTTING, R. Gravity from local Lorentz violation. *Gen. Rel. Grav.*, v. 37, p. 1675–1679, 2005.
- KOSTELECKÝ, V. A.; RUSSELL, N. Data tables for lorentz and c p t violation. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 83, n. 1, p. 11, 2011.
- KOSTELECKY, V. A.; RUSSELL, N. Data Tables for Lorentz and CPT Violation. *Rev. Mod. Phys.*, v. 83, p. 11–31, 2011.
- KOSTELECKY, V. A.; SAMUEL, S. Gravitational Phenomenology in Higher Dimensional Theories and Strings. *Phys. Rev. D*, v. 40, p. 1886–1903, 1989.
- KOSTELECKY, V. A.; SAMUEL, S. Spontaneous Breaking of Lorentz Symmetry in String Theory. *Phys. Rev. D*, v. 39, p. 683, 1989.
- KOTIKOV, A. V.; TEBER, S. Note on an application of the method of uniqueness to reduced quantum electrodynamics. *Phys. Rev. D*, v. 87, n. 8, p. 087701, 2013.
- LAND, K.; MAGUELJO, J. The Axis of evil. *Phys. Rev. Lett.*, v. 95, p. 071301, 2005.
- LITVINOVA, E.; SCHUCK, P. Nuclear superfluidity at finite temperature. *Phys. Rev. C*, v. 104, n. 4, p. 044330, 2021.
- LITVINOVA, E.; WIBOWO, H. Nuclear response in a finite-temperature relativistic framework. *Eur. Phys. J. A*, v. 55, n. 12, p. 223, 2019.
- LORENTZ. The relative motion of the earth and the aether. *Zittingsverlag Akad. V. Wet*, v. 1, p. 74–79, 1892.
- LORENTZ. *Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light*. 1904. 809 p.
- MAGGIORE, M. A generalized uncertainty principle in quantum gravity. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 304, n. 1-2, p. 65–69, 1993.
- MARINOV, M. S.; POPOV, V. S. Electron-Positron Pair Creation from Vacuum Induced by Variable Electric Field. *Fortsch. Phys.*, v. 25, p. 373–400, 1977.
- MARIZ, T. et al. On perturbative aspects of a nonminimal Lorentz-violating QED with CPT-odd dimension-5 terms. *Eur. Phys. J. C*, v. 81, p. 974, 2021.
- MARIZ, T. et al. A Remark on Lorentz violation at finite temperature. *JHEP*, v. 10, p. 019, 2005.
- MARIZ, T.; NASCIMENTO, J. R.; PETROV, A. *Lorentz Symmetry Breaking—Classical and Quantum Aspects*. [S.l.]: Springer Nature, 2023.
- MATSUBARA, T. A New approach to quantum statistical mechanics. *Prog. Theor. Phys.*, v. 14, p. 351–378, 1955.
- MAXWELL, J. Illustrations of the dynamical theory of gases. *Philos Mag*, v. 19, p. 19–32, 1867.
- MAXWELL, J. C. Ii. illustrations of the dynamical theory of gases. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Taylor & Francis, v. 20, n. 130, p. 21–37, 1860.
- MAXWELL, J. C. Iv. on the dynamical theory of gases. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, The Royal Society London, n. 157, p. 49–88, 1867.

- MAXWELL, J. C. *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell...* [S.l.]: University Press, 1890. v. 2.
- MELO, J. P. da S.; HELAYËL-NETO, J. A. Do éter questionado por dirac ao modelo-padrão: a diacronia da violação da simetria de lorentz. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 45, p. e20220211, 2023.
- MENA, M. et al. Thermal control of spin excitations in the coupled ising-chain material rbcocl 3. *Physical review letters*, APS, v. 124, n. 25, p. 257201, 2020.
- MICHELSON, A. A.; MORLEY, E. W. On the relative motion of the earth and the luminiferous ether. *American journal of science*, American Journal of Science, v. 3, n. 203, p. 333–345, 1887.
- NAMBU, Y. The use of the Proper Time in Quantum Electrodynamics. *Prog. Theor. Phys.*, v. 5, p. 82–94, 1950.
- NAMBU, Y. The use of the proper time in quantum electrodynamics i. *Progress of Theoretical Physics*, v. 5, n. 1, p. 82–94, 1950.
- NOVOSELOV, K. S. et al. Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene. *Nature*, v. 438, p. 197, 2005.
- NUSSENZVEIG, H. M. Curso de fisica básica vol 3-eletromagnetismo. *São Paulo: Editora Blucher*, 1997.
- OSSIANDER, M. et al. Attosecond correlation dynamics. *Nature Physics*, Nature Publishing Group UK London, v. 13, n. 3, p. 280–285, 2017.
- PAULI, W. Über den zusammenhang des abschlusses der elektronengruppen im atom mit der komplexstruktur der spektren. *Zeitschrift für Physik*, Springer Science and Business Media LLC, v. 31, n. 1, p. 765–783, 1925.
- PÉREZ-VICTORIA, M. Exact calculation of the radiatively induced lorentz and cpt violation in qed. *Physical Review Letters*, APS, v. 83, n. 13, p. 2518, 1999.
- PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An introduction to quantum field theory*. [S.l.]: CRC Press, 2018.
- PLANCK, M. On the law of distribution of energy in the normal spectrum. *Annalen der physik*, v. 4, n. 553, p. 1, 1901.
- POLCHINSKI, J. *String theory, vol. 1, 2*. [S.l.: s.n.], 1998. v. 402.
- POPOV, V. S. Pair production in a variable external field (quasiclassical approximation). *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, v. 61, p. 1334–1351, 1971.
- POPOV, V. S. Production of e+e- Pairs in an Alternating External Field. *JETP Lett.*, v. 13, p. 185–187, 1971.
- POPOV, V. S. Resonance pair production in strong electric fields. *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, v. 18, p. 435–439, 1973.
- PUTTEN, M. H. van. Electron-positron outflow from black holes. *Physical Review Letters*, APS, v. 84, n. 17, p. 3752, 2000.
- RINGWALD, A. Pair production from vacuum at the focus of an X-ray free electron laser. *Phys. Lett. B*, v. 510, p. 107–116, 2001.

- ROBERTS, B. M. et al. Limiting P-odd interactions of cosmic fields with electrons, protons and neutrons. *Phys. Rev. Lett.*, v. 113, p. 081601, 2014.
- ROBERTS, B. M. et al. Parity-violating interactions of cosmic fields with atoms, molecules, and nuclei: Concepts and calculations for laboratory searches and extracting limits. *Phys. Rev. D*, v. 90, n. 9, p. 096005, 2014.
- ROSA, F. S. d. S. d. O efeito casimir e a ação efetiva em teorias de campo deformadas. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, UFRJ/IF, 2006.
- SANTOS, A. F. d. et al. Violação de lorentz e teoria de gravitação modificada. Universidade Federal da Paraíba, 2010.
- SANTOS, T. R. S.; SOBREIRO, R. F. Gauge anomalies in Lorentz-violating QED. *Phys. Rev. D*, v. 94, n. 12, p. 125020, 2016.
- SANTOS, T. R. S.; SOBREIRO, R. F. Remarks on the renormalization properties of Lorentz and CPT violating quantum electrodynamics. *Braz. J. Phys.*, v. 46, n. 4, p. 437–452, 2016.
- SCARPELLI, A. P. B. et al. Four-dimensional aether-like Lorentz-breaking QED revisited and problem of ambiguities. *Eur. Phys. J. C*, v. 73, p. 2526, 2013.
- SCHRECK, M. Vacuum cherenkov radiation for lorentz-violating fermions. *Physical Review D*, APS, v. 96, n. 9, p. 095026, 2017.
- SCHUTZHOLD, R.; GIES, H.; DUNNE, G. Dynamically assisted Schwinger mechanism. *Phys. Rev. Lett.*, v. 101, p. 130404, 2008.
- SCHWINGER, J. On gauge invariance and vacuum polarization. *Physical Review*, APS, v. 82, n. 5, p. 664, 1951.
- SCHWINGER, J. Casimir effect in source theory. *Letters in Mathematical Physics*, Springer, v. 1, n. 1, p. 43–47, 1975.
- SCHWINGER, J. S. On gauge invariance and vacuum polarization. *Phys. Rev.*, v. 82, p. 664–679, 1951.
- SEELEY, R. The resolvent of an elliptic boundary problem. *American Journal of Mathematics*, JSTOR, v. 91, n. 4, p. 889–920, 1969.
- SEELEY, R. T. Singular integrals and boundary value problems. *American Journal of Mathematics*, JSTOR, v. 88, n. 4, p. 781–809, 1966.
- SEELEY, R. T. Complex powers of an elliptic operator. In: AMER. MATH. SOC. *Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math.* [S.l.], 1967. v. 10, p. 288–307.
- SEIBERG, N.; WITTEN, E. String theory and noncommutative geometry. *Journal of High Energy Physics*, IOP Publishing, v. 1999, n. 09, p. 032, 1999.
- SILVERMAN, R. A. et al. *Special functions and their applications*. [S.l.]: Courier Corporation, 1972.
- SITENKO, Y. A.; RULIK, K. Y. On the effective Lagrangian in spinor electrodynamics with added violation of Lorentz and CPT symmetries. *Eur. Phys. J. C*, v. 28, p. 405–414, 2003.
- SPIVAK, M. *Calculus on manifolds: a modern approach to classical theorems of advanced calculus*. [S.l.]: CRC press, 2018.

- STEUDING, J.; SURIAJAYA, A. I. Value-distribution of the riemann zeta-function along its julia lines. *Computational Methods and Function Theory*, Springer, v. 20, n. 3, p. 389–401, 2020.
- TEBER, S. Electromagnetic current correlations in reduced quantum electrodynamics. *Phys. Rev. D*, v. 86, p. 025005, 2012.
- TEBER, S. Two-loop fermion self-energy and propagator in reduced QED_{3,2}. *Phys. Rev. D*, v. 89, n. 6, p. 067702, 2014.
- VALLURI, S. R.; LAMM, D.; MIELNICZUK, W. J. Comments on the evaluation of the effective potential in quantum electrodynamics. *Phys. Rev. D*, v. 25, p. 2729–2735, 1982.
- WEISSKOPF, V. On the electrodynamics of the vacuum on the basis of the quantum theory of the electron. *Kgl. Dan. Vid. Selsk., Mat-fys. Medd.*, v. 24, p. 3–39, 1936.

APÊNDICE A

Matrizes γ^μ e suas Propriedades

A métrica utilizada é:

$$1. \quad \eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matriz γ e suas relações:

2. $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu};$
3. $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$
4. $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$ onde σ^i são as matrizes de Pauli;
5. $\gamma_\mu \gamma^\mu = 4;$
6. $\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\gamma^\nu;$
7. $\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu = -4\eta^{\alpha\beta};$
8. $\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\zeta \gamma^\mu = 2\gamma^\zeta \gamma^\beta \gamma^\alpha;$
9. $\gamma_5 = -\frac{i}{4!} \epsilon^{\mu\nu\sigma\beta} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\beta;$
10. $i\epsilon_{\mu\nu\sigma\beta} \gamma_5 = -\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\beta;$
11. $\gamma_\sigma \gamma_\kappa \gamma_\lambda = \eta_{\sigma\kappa} \gamma_\lambda + \eta_{\kappa\lambda} \gamma_\sigma - \eta_{\lambda\sigma} \gamma_\kappa - i\epsilon_{\sigma\kappa\lambda\nu} \gamma^\nu \gamma_5.$

Definindo uma nova matriz:

12. $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu];$
13. $[\sigma_{\mu\nu}, \gamma_\zeta] = 2i\epsilon_{\zeta\mu\nu} \gamma_5;$

$$14. \sigma_{\mu\nu\gamma} = i\epsilon_{\mu\nu\gamma\zeta}\gamma_5\gamma^\zeta;$$

$$15. [\sigma^{\nu\lambda}, \gamma^\mu] = 2i(\eta^{\mu\nu}\gamma^\lambda - \eta^{\mu\lambda}\gamma^\nu);$$

$$16. \sigma^{ij} = \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix};$$

$$17. \sigma^{12} = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma^3;$$

$$18. \sigma^{0i} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}.$$

O produto escalar é dado como:

$$19. \gamma_\mu a^\mu = \eta_{\mu\beta}\gamma^\beta a^\mu = \gamma \cdot a = -\gamma^0 a^0 + \gamma^i a^i.$$

Propriedades de traço:

$$20. \text{tr}(\gamma_1 a^1 \gamma_2 a^2) = -4a_1 \cdot a_2;$$

$$21. \text{tr}(\gamma_1 a^1 \gamma_2 a^2 \gamma_3 a^3 \gamma_4 a^4) = 4[(a_1 \cdot a_2)(a_3 \cdot a_4) - (a_1 \cdot a_3)(a_2 \cdot a_4) + (a_1 \cdot a_4)(a_2 \cdot a_3)];$$

$$22. \text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = -4\eta_{\mu\nu};$$

$$23. \text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta) = 4[\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} - \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}].$$

Mais algumas propriedades:

$$24. \gamma^\mu \gamma_\mu = -4;$$

$$25. \gamma_\mu (\gamma \cdot a) \gamma^\mu = 2\gamma \cdot a;$$

$$26. \gamma_\mu (\gamma \cdot a) (\gamma \cdot b) \gamma^\mu = 4a \cdot b;$$

$$27. \gamma_\mu (\gamma \cdot a) (\gamma \cdot b) (\gamma \cdot c) \gamma^\mu = 2(\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b)(\gamma \cdot c).$$

APÊNDICE B

Integrais Gaussianas

Aqui será apresentado alguns resultados de integrais gaussianas que foram utilizadas no trabalho. Primeiro conhecemos o resultado para a integral gaussiana ordinária:

$$\int dx e^{-ax^2} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.1})$$

Sendo x um vetor D -dimensional e A uma matriz simétrica podendo ser diagonalizada através de uma transformação de similaridade por uma matriz \mathcal{U} unitária:

$$A_{\text{Diag}} = \mathcal{U} A \mathcal{U}^{-1}. \quad (\text{B.2})$$

Então uma mudança na variável $x' \rightarrow \mathcal{U}x$ não altera o elemento de volume. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \int dx'^D e^{-x'^T A x'} &= \int dx^D e^{-x^T \mathcal{U} A \mathcal{U}^{-1} x} = \int dx^D e^{-x^T A_{\text{Diag}} x} \\ &= \prod_{i=1}^D \int dx_i e^{-\alpha_i x_i^2} = \prod_{i=1}^D \left(\frac{\pi}{\alpha_i}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[D]{\pi} (\det A)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Outro resultado interessante é da seguinte integral:

$$\int dx^D e^{-\frac{1}{2} x^T A x + \rho x}. \quad (\text{B.4})$$

Para encontrá-lo modificamos o termo da exponencial completando quadrado:

$$-\frac{1}{2} x^T A x + \rho x = -\frac{1}{2} (x - A^{-1} \rho)^T A (x - A^{-1} \rho) - \rho^T A^{-1} \rho. \quad (\text{B.5})$$

Fazendo a seguinte mudança na variável de integração $x' \rightarrow x - A^{-1} \rho$, o elemento de volume novamente não é alterado. Portanto temos

$$\int dx^D e^{-\frac{1}{2} x^T A x + \rho x} = \sqrt[D]{2\pi} (\det A)^{-\frac{1}{2}} e^{\rho^T A^{-1} \rho}. \quad (\text{B.6})$$

Para o caso de variáveis de Grassman, que durante o trabalho entendemos como férmions, o resultado acima é

$$\int d\theta_1 \dots \theta_n e^{-\frac{1}{2} \theta^T A \theta + \rho \theta} = (\det A)^{\frac{1}{2}} e^{\rho^T A^{-1} \rho}, \quad (\text{B.7})$$

onde θ_i simboliza as variáveis de Grassman.

Outro resultado interessante é o caso para variáveis de Grassman complexas, que tem como resultado

$$\int d\theta_1^* \cdots d\theta_n^* \theta_1 \cdots \theta_n e^{-\theta^T A \theta} = \det A. \quad (\text{B.8})$$

Estes são os resultados utilizados no decorrer do trabalho.

APÊNDICE

C

O cálculo da $\exp \left[-\frac{1}{2} tr \ln \frac{\sinh(e\mathcal{F}s)}{e\mathcal{F}s} \right]$

O primeiro passo é encontrar os autovalores do termo $\ln \frac{\sinh(e\mathcal{F}s)}{e\mathcal{F}s}$, que pode ser efetuado ao determinar os autovalores de $\mathcal{F}^{\mu\sigma}$. Para isto fazemos uso das seguintes identidades:

$$\begin{cases} \mathcal{F}^{\mu\lambda} \mathcal{G}_{\lambda\sigma} = -\delta^\mu_\sigma \mathcal{R} \\ \mathcal{G}_{\mu\lambda} \mathcal{G}^{\lambda\sigma} - \mathcal{F}_{\mu\lambda} \mathcal{F}^{\lambda\sigma} = 2\delta_\mu^\sigma \mathcal{Y} \end{cases} . \quad (C.1)$$

No qual $\mathcal{G}_{\mu\sigma} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\sigma\kappa\lambda} \mathcal{F}^{\kappa\lambda}$ é o dual do tensor eletromagnético.

Estas identidades podem ser verificadas fixando-se os índices espaço-temporais livres. Da primeira identidade em Eq. (C.1) pode-se tirar o autovalor do tensor dual

$$\mathcal{G}^{\mu\sigma} \Psi_\sigma = -\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{F}^{AV}} \Psi^\mu. \quad (C.2)$$

onde \mathcal{F}^{AV} é o autovalor do tensor eletromagnético

$$\mathcal{F}^{\mu\sigma} \Psi_\sigma = \mathcal{F}^{AV} \Psi^\mu. \quad (C.3)$$

Com isso, atuando a segunda identidade em Eq. (C.1) numa autofunção arbitrária encontra-se a seguinte equação do segundo grau em função do autovalor do tensor eletromagnético,

$$(\mathcal{F}^{AV})^4 + 2\mathcal{Y} (\mathcal{F}^{AV})^2 - \mathcal{R}^2 = 0. \quad (C.4)$$

As raízes que satisfazem a Eq. (C.4) são

$$\mathcal{F}^{AV} = \pm \left(-\mathcal{Y} \pm \sqrt{\mathcal{Y}^2 + \mathcal{R}^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (C.5)$$

Portanto, com o resultado (C.5) podemos proceder e calcular o $tr \left(\ln \frac{\sinh(e\mathcal{F}s)}{e\mathcal{F}s} \right)$. Utilizando também a notação dos novos invariantes a e p definidos na Eq. (4.29) o resultado para o operador em questão é

$$\exp \left[-\frac{1}{2} tr \ln \frac{\sinh(e\mathcal{F}s)}{e\mathcal{F}s} \right] = \left[\frac{(es)^2 ap}{\sinh(eps) \sin(eas)} \right], \quad (C.6)$$

onde os quatro autovalores foram somados.