

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

LUIS GUSTAVO SOARES DE OLIVEIRA

**Análise do emaranhamento e proposta
experimental para medições tipo Bell em um OPO
injetado tipo II**

NITERÓI

2023

LUIS GUSTAVO SOARES DE OLIVEIRA

**Análise do emaranhamento e proposta
experimental para medições tipo Bell em um OPO
injetado tipo II**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa
de pós-graduação em Física da Universidade
Federal Fluminense como requisito para ob-
tenção do título de doutor em Física.

Orientador:

Prof. CARLOS EDUARDO RODRIGUES DE SOUZA

NITERÓI

2023

Ficha catalográfica automática - SDC/BIF
Gerada com informações fornecidas pelo autor

048a Oliveira, Luis Gustavo Soares de
Análise do emaranhamento e proposta experimental para
medições tipo Bell em um OPO injetado tipo II / Luis Gustavo
Soares de Oliveira. - 2023.
97 f. : il.

Orientador: Carlos Eduardo Rodrigues de Souza.
Tese (doutorado)-Universidade Federal Fluminense, Instituto
de Física, Niterói, 2023.

1. Óptica quântica. 2. Equação diferencial estocástica.
3. Emaranhamento. 4. Produção intelectual. I. Souza, Carlos
Eduardo Rodrigues de, orientador. II. Universidade Federal
Fluminense. Instituto de Física. III. Título.

CDD - XXX

Luis Gustavo Soares de Oliveira

“Análise do emaranhamento e proposta experimental para medições tipo Bell em um OPO injetado tipo II”

Tese submetida ao curso de pós-graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Física.

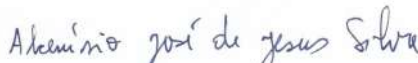
Aprovado em: 8 / 12 / 2023.

BANCA AVALIADORA

Membros titulares



Prof. Dr. Carlos Eduardo Rodrigues de Souza (Orientador) UFF



Prof. Dr. Alcenísio José de Jesus UFAL



Prof. Dr. Daniel Jost Brod UFF



Prof. Dr. Marcelo Silva Sarandy UFF



Prof. Dr. Thiago Barbosa dos Santos Guerreiro PUC-RJ



Prof. Dr. Wagner Franklin Balthazar IFRJ

Aos meus pais

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a meu orientador Carlos Eduardo Rodrigues de Souza por todo o apoio e conhecimento a mim passados ao longo de toda essa pesquisa. Agradeço também aos professores do IF-UFF, que contribuíram para a minha graduação e mestrado, em especial aos professores do grupo de Óptica Quântica, cujo o talento didático tanto em sala de aula quanto em seminários me chamaram atenção para esta área intrigante e interessante área da física. Agradeço em especial à Leonardo Justino Pereira, e aos professores Rodrigo Pereira, Gabriel Bié, José Augusto Hugenin, Antônio Zelaquett Khoury e Kaled Dechoum, que estiveram diretamente envolvidos neste trabalho e pelos conhecimentos a mim passados.

Agradeço pela companhia dos amigos do grupo de óptica Braian Pinheiro, Rafael Bellas, Rafael Ferreira, Wagner Tavares Buono, Mayanne Rodrigues, Paola Obando, a quem sempre admirei e acompanhei suas trajetórias, e com quem tive conversas incríveis, profissionais ou não. Agradeço também a amigos Ana Beatriz Lima, Henrique Emery, Milena Trindade, Antônio Felix, Bárbara Cardozo, Thiago Almeida, Daniel Jauregui e Leonardo Santoro entre outros, por toda sua parceria e bons momentos ao longo desses anos acadêmicos.

Agradeço a meus pais por todo o carinho e por apoiarem minha decisões, (algumas boas, outras nem tanto) e a toda a minha família por todo o acolhimento e cuidado sempre. Em especial a Hana, que trouxe um impacto gigante na minha forma de ver o mundo. Algumas pessoas que conheci no ultimo ano tornaram esse período mais tratável: agradeço a Poliana Abreu, Natassia Souza, Ana Beatriz Dias, Daniel Rodrigues, Jou lee Ana, Carol Lina.

Agradeço também à alguns amigos de longa data Brandina Silva, Hugo Imbassahy, Elene Imbassahy, Peter Souto e Marina Castilho.

Agradeço aos colegas e alunos do M3, que me conhecem pouco, mas que contribuíram com ânimo em dias que estive esgotado e provavelmente não fazem ideia disso.

E por fim a Beatriz Silva. Conheci a Bia a um terço do caminho de nossas vidas atrás, alguém que nunca me deixou só se me vi perdido em uma selva escura. Obrigado por todas as alegrias que compartilhamos.

Resumo

Estudaremos um oscilador paramétrico óptico tipo II sob a injeção de feixes de laser contendo momento angular orbital de primeira ordem. Descreveremos quanticamente este sistema a partir do seu hamiltoniano e desenvolveremos um conjunto de equações diferenciais estocásticas utilizando a representação de Wigner para sua matriz densidade. De forma específica, apresentamos uma discussão sobre a teoria das representações e discutimos a equivalência entre uma equação para a evolução temporal da matriz densidade e uma equação de Fokker-Planck, que é associada à evolução de uma distribuição de probabilidade para amplitudes. A seguir, a teoria é desenvolvida em torno das equações estocásticas na representação de Wigner com um estudo detalhado sobre essas equações, resolvendo-as analítica e numericamente, tanto para amplitudes quanto para quadraturas dos campos eletromagnéticos envolvidos. Estudamos suas soluções estacionárias e propomos a chamada aproximação de não-depleção, onde consideramos que o feixe de bombeamento não perde energia ao alimentar os modos convertidos. Mostramos que, quando as injeções com momento angular nos modos convertidos são muito menos intensas que o feixe de bombeio, nossa aproximação é adequada e ainda pode ser usada para evidenciar a presença de emaranhamento entre as quadraturas dos campos envolvidos. Estudamos o espectro de compressão das quadraturas e atestamos a presença desse emaranhamento através do critério de Duan-Simon e propomos um teste de Bell.

Estudamos a desigualdade de Bell em duas representações - P positiva e Wigner - e discutimos os resultados da violação em uma delas enquanto não há violação na outra. Também propomos uma esquema de montagem experimental onde será possível medir a desigualdade de Bell construída para esse problema. Este sistema gera estados que exibem hiperemaranhamento, que pode tanto ser um recurso útil para aplicações em tecnologia quântica quanto oferecer um entendimento mais profundo acerca de temas mais fundamentais de física.

Palavras-chave: Emaranhamento, Representação de Wigner, Desigualdade de Bell, OPO injetado, modos Laguerre-Gauss, Critério de Duan-Simon.

Abstract

We study an optical parametric oscillator type-II under the injections of laser beams carrying first-order angular momenta. We describe this quantum system starting from its hamiltonian and we develop a set of stochastic differential equations by means of Wigner representation for its density matrix. In a particular procedure we present a discussion about the theory of representations and we discuss the equivalence between the time evolution of a density matrix and a Fokker-Planck equation, associated to the evolution of probability distribution for amplitudes.

After, the theory is developed under stochastic equations in Wigner Representation with a detailed study about these equations, solving it both analytically and numerically, for amplitudes and for quadratures of electromagnetic fields involved. We studied stationary solutions and proposed the so-called non-depletion approximation, where we consider that the pump beam does not lose energy to the down-converted beams. We show that when the injections with angular momenta in down-converted ones are much less intense than the pumping beam, our approximation is adequate and still can be used to evidenciate the presence of entanglement through Duan-Simon criteria and propose a Bell Test.

We study the Bell Inequality in two representations - P positive and Wigner - and we discuss the results of violation in one of them, whether this doesn't happen. on the other one. We also propose an experimental scheme where it will be possible taking measures of the Bell's inequality built for this problem. These systems can generate states that exhibit hyperentanglement, and can be both a useful resource to applications in quantum technology and offer a deeper understanding towards more fundamental topics in physics.

Keywords: Entanglement, Wigner Representation, Bell's inequality, Injected OPO, Laguerre-Gauss, Duan-Simon criteria.

Lista de Figuras

| | | |
|---|---|----|
| 1 | Perfis de intensidade dos modos transversos HG e LG. | 18 |
| 2 | Esquema do OPO, exibindo feixes de bombeio a_p , sinal a_s , e complementar a_i , apresentando correspondência entre índices de polarização e modo transversal e índices numéricos. | 19 |
| 3 | Exemplos de funções de Wigner para estados de Fock | 29 |
| 4 | Exemplos de Funções de Wigner para estado coerente e estado comprimido. | 32 |
| 5 | Feixes sinal e complementar como função da fase relativa entre bombeio e injeções para $\mu_0 = 0.2$. Injeção do sinal fixada em $\mu_1 = 0.03$ e complementar variando de 0 à $\mu_0 = 0.03\mu_0$ (cores da mais clara para mais escura). Curvas mostram resultado analítico derivados da Eq. (3.21) ou equivalentemente da Eq. (3.25), enquanto símbolos mostram resultado numérico a partir da Eq. (3.12). Símbolos vazios e curvas tracejadas: intensidade do feixe complementar. Símbolos preenchidos e curvas sólidas: intensidade do sinal. | 43 |
| 6 | (a) Intensidades dos feixes convertidos apresentadas como função do parâmetro de bombeio μ_0 em cinco cenários de injeções diferentes. Curvas: soluções no regime de não-depleção (Eq. (3.37)). Símbolos: integração numérica das Eqs. (3.12). Gráfico interno: comportamento detalhado ao redor de $\mu_0 = 0$. (b) Gráfico de densidade da diferença relativa ϵ entre intensidades nas soluções numéricas e analíticas (Eq. 3.39). Curvas de nível estão espaçadas de 0.2 (apenas os três primeiros valores estão mostrados, por clareza. | 46 |
| 7 | (a) Espectro de ruído para squeezing e anti-squeezing em quadraturas quando $\mu_0 = 0.2$ e $\mu_j = 0.01\mu_0$. (B) Espectro de Duan-Simon. Pontos: simulações numéricas. Linhas: resultados analíticos com aproximação de não depleção, Eqs. (4.20). | 54 |
| 8 | Teste de Bell em dois canais para desigualdades tipo CHSH. | 59 |

| | | |
|----|---|----|
| 9 | Verificação da desigualdade CHSH através da função B da eq. (5.21), mostrada aqui como uma função da intensidade do bombeio. Os três regimes de injeção apresentado correspondem à $\mu_j = 0$, $\mu_j = 0.01\mu_0$ and $\mu_j = 0.03\mu_0$ (cores da mais clara para a mais escura). Símbolos correspondem a simulações numéricas. Curvas sólidas: Representação P positiva; Curvas tracejadas: Representação de Wigner. | 63 |
| 10 | Proposta experimental para medidas de correlações de Bell em feixes emaranhados, semeados por injeções em superposições de modos HG de primeira ordem. | 66 |
| 11 | A schematic diagram illustrating a triply resonant injected Optical Parametric Oscillator with four decay channels, based simultaneously on two orthogonal polarization states and two orthogonal first-order Hermite-Gaussian modes. | 80 |
| 12 | Normalized steady-state output signal and idler beams as a function of the relative phase between the pump and injection beams for $\mu_0 = 0.2$. The signal injection parameter is fixed as $\mu_1 = 0.03\mu_0$, while the idler's vary from 0 to $0.03\mu_0$ (lighter to darker colors). Curves depict analytical results as in Eq. (A.10), while symbols the numerical ones as in Eq. (A.8). Open symbols/dashed curves: idler intensity. Filled symbols/solid curves: signal intensity. | 83 |
| 13 | (a) The intensities of the converted beams are presented as a function of the pumping beam parameter μ_0 in five different injection scenarios. Curves: analytical solution on the non-depletion regime (Eq. A.19). Symbols: numerical integration of Eqs. (A.8). Inset: detailed enlargement of the behavior around $\mu_0 = 0$. (b) Density plot of the relative difference ϵ between intensities in the numerical and analytical solutions (Eq. A.21). Contour lines are spaced by 0.2 (only the first three values are shown, for clarity). | 86 |
| 14 | (a) Noise spectrum for squeezing and anti-squeezing quadratures when $\mu_0 = 0.2$, $\mu_j = 0.01\mu_0$ and $\phi_j = 0$. (b) Duan-Simon spectrum. Points: numerical simulations. Lines: analytical results with non-depletion approximation, Eqs. (A.30). | 91 |
| 15 | A diagram for a Bell Test. | 92 |

-
- 16 Verification of the CHSH inequality through the computation of the function B from Eq. (A.37), shown here as a function of the pump intensity. The three different injection regimes depicted correspond to $\mu_j = 0$, $\mu_j = 0.01\mu_0$ and $\mu_j = 0.03\mu_0$ (lighter to darker colors). Symbols: numerical simulations. Solid: positive P representation. Dashed: Wigner representation. 95
- 17 A experimental proposal to measure Bell correlations in entangled beams generated by an injected. 97

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 12 |
| 2 | Hamiltoniano e Representações do campo eletromagnético | 15 |
| 2.1 | Introdução à óptica paraxial | 15 |
| 2.1.1 | Equação paraxial em coordenadas cartesianas e cilíndricas | 17 |
| 2.2 | Hamiltoniano | 18 |
| 2.3 | Equação de Fokker-Planck e equações diferenciais estocásticas | 22 |
| 2.4 | Representações do Campo Eletromagnético | 25 |
| 2.4.1 | Função característica | 25 |
| 2.4.2 | Representação P de Glauber-Sudarshan | 26 |
| 2.4.3 | Função de Wigner | 28 |
| 2.4.3.1 | Função de Wigner para estados de Fock | 28 |
| 2.4.3.2 | Função de Wigner para um estado coerente | 30 |
| 2.4.3.3 | Função de Wigner para um estado comprimido | 30 |
| 2.4.4 | Representação P-positiva | 32 |
| 3 | Equações diferenciais estocásticas | 34 |
| 3.1 | Equações na representação de Wigner | 34 |
| 3.1.1 | Um exemplo simples | 36 |
| 3.2 | Reescalas: equações adimensionais | 37 |
| 3.2.1 | Equações reescaladas para amplitudes | 37 |
| 3.2.2 | Equações reescaladas para quadraturas | 38 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.3 | Soluções estacionárias | 40 |
| 3.3.1 | Resolução para amplitudes | 40 |
| 3.3.2 | Resolução para quadraturas | 41 |
| 3.4 | Intensidade no regime de não-depleção | 43 |
| 4 | Espectro de Ruído e Correlações EPR | 48 |
| 4.1 | Quadraturas a dois modos | 48 |
| 4.2 | Soluções do OPO em quadraturas a dois modos | 51 |
| 4.3 | Espectro de <i>squeezing</i> | 53 |
| 5 | Desigualdade de Bell em Variáveis contínuas e proposta experimental | 55 |
| 5.1 | Desigualdades de Bell | 55 |
| 5.2 | Desigualdade de Bell em variáveis contínuas | 58 |
| 5.3 | Proposta Experimental | 64 |
| 6 | Conclusão | 67 |
| | REFERÊNCIAS | 69 |
| | Anexo A – Entanglement analysis and experimental proposal for measuring Bell-type correlations in an injected Optical Parametric Oscillator with spin-orbit beams | 77 |
| A.1 | I. Introduction | 77 |
| A.2 | II. HAMILTONIAN AND STOCHASTIC EQUATIONS | 79 |
| A.3 | III. Steady State Solutions | 82 |
| A.4 | IV. Fields Intensities in the non-depletion regime | 84 |
| A.5 | V. EPR correlations | 87 |
| A.6 | VI. Discrete variables Bell inequality violation | 91 |
| A.7 | VII. Conclusion | 96 |

1 Introdução

As desigualdades de Bell constituem uma ferramenta para verificar que sistemas quânticos não podem ser descritos por teorias físicas que envolvem variáveis ocultas locais (BELL, 1964). A violação dessas desigualdades leva em conta subsistemas espacialmente separados de um único sistema emaranhado e, no seu cerne, demonstra que existem correlações não locais entre tais subsistemas (BRUNNER *et al.*, 2014).

A desigualdade de Bell foi violada experimentalmente na primeira vez em 1972 por Clauser e pelo doutorando Stuart Freedman (FREEDMAN; CLAUSER, 1972), efetuando medições de polarização em dois fótons gerados simultaneamente por um átomo de cálcio em estado excitado, e concordando com o que era previsto pela mecânica quântica. No início da década de 1980, Aspect *et al.* (ASPECT; DALIBARD; ROGER, 1982), (ASPECT; GRANGIER; ROGER, 1982) performaram um experimento similar ao de Clauser, mas que utilizava fontes de luz mais intensas e que podia mudar a orientação do aparato de medida, novamente mostrando violação de desigualdade de Bell. Nos anos 90, Zeilinger *et al.* também conduziram testes de Bell (WEIHS *et al.*, 1998), e desenvolveram novas fontes de luz permitindo aplicações como a demonstração do teleporte quântico (BOUWMEESTER *et al.*, 1997) e distribuição de chaves criptográficas (SCHMITT-MANDERBACH *et al.*, 2007). Tais trabalhos tornaram possível o desenvolvimento de criptografia quântica e aparatos de simulação quânticos (BENNETT; BRASSARD, 2014; SHOR, 1997; LLOYD, 1996). Atualmente, presenciamos uma nova era de tecnologia quântica. As ferramentas experimentais desenvolvidas por Alain Aspect, John Clauser e Anton Zeilinger fundamentaram um campo de intensa pesquisa atual, e suas significativas e pioneiras contribuições os tornaram laureados com o prêmio Nobel de 2022.

Em óptica quântica, as desigualdades de Bell são tradicionalmente estudadas nos domínios das variáveis discretas (VD), onde os campos ópticos são quantizados em números de fótons. Apesar da baixa eficiência de detecção à temperatura ambiente (LITA; MILLER; NAM, 2008), esses sistemas ópticos fotônicos são altamente robustos às perdas de fótons e aos ruídos. As primeiras violações de desigualdade de Bell utilizavam polarização

como grau de liberdade do campo óptico a ser medido e, ao longo dos anos, a manipulação de outros graus de liberdade fotônicos habilitaram uma miríade de experimentos ópticos baseados nestas desigualdades que demonstraram correlações tipo tempo-energia (KWIAT; STEINBERG; CHIAO, 1993), momento-posição (RARITY; TAPSTER, 1990), (HOWELL et al., 2004), distribuições espaciais (STREKALOV et al., 1995), (WALBORN et al., 2006), (YARNALL et al., 2007), e momento angular orbital (VAZIRI; WEIHS; ZEILINGER, 2002), (STÜTZ et al., 2007), (OEMRAWSINGH et al., 2005), (AIELLO et al., 2005), (LEACH et al., 2009).

Em uma outra vertente da óptica quântica, os campos ópticos são decompostos em quadraturas de amplitude e fase e descritos no domínio das variáveis contínuas (VC). Os osciladores paramétricos ópticos (OPOs) figuram como dispositivos físicos que produzem feixes lasers emaranhados e descritos no regime de VC, com potenciais aplicações na implementação de protocolos de informação quântica (BOWEN; LAM; RALPH, 2003), metrologia quântica e computação quântica (MENICUCCI, Nicolas C; FLAMMIA, Steven T; PFISTER, 2008a).

Se, por um lado, os experimentos realizados neste domínio contam com sistemas de detecção mais eficientes e geração determinística de estados, por outro, experimentos de violação das desigualdades de Bell são mais difíceis de serem realizados (HE et al., 2010). Todavia, implementando um experimento baseado na medida de correlações quânticas via detecção homodina, O. Thearly *et al.* demonstraram a violação das desigualdades de Bell em VC (THEARLE; JANOUSEK; ARMSTRONG; HOSSEINI; SCHÜNEMANN et al., 2018), abrindo novas possibilidades para o uso das variáveis contínuas em sistemas quânticos.

Esta tese tem o objetivo de verificar a violação de uma desigualdade tipo Bell utilizando como variáveis contínuas as quadraturas de um OPO tipo II injetado por feixes spin-órbita. Feixes spin-órbita são feixes Laguerre-Gaussianos (LG). Modos de LG e Hermite-Gaussianos (HG) são soluções da equação paraxial da luz, em coordenadas cilíndricas e cartesianas, respectivamente, e é possível uma transformação linear entre essas duas soluções. Modos LG carregam momento angular para luz linearmente polarizada, que é diferente daquele momento angular comumente associado com a polarizações circulares. Ambos polarização e modos transversos tem sido extensivamente utilizados em trabalhos com OPO. Especificamente em OPOs tipo II, modos spin-órbita foram teoricamente investigado para explorar Hiperemaranhamento em VC (SANTOS; DECHOUM; KHOURY, 2009), sendo experimentalmente demonstrado em (LIU et al., 2014) e mais

recentemente, foi observado experimentalmente simetria no momento angular orbital dos feixes convertidos em um OPO injetado (RODRIGUES et al., 2018), um efeito governado por condições das cavidades ópticas (MARTINELLI et al., 2004),(ALVES et al., 2018). O trabalho que compõe esta tese será apresentado a seguir. No Capítulo 2 será exposto o sistema OPO e caracterizaremos a forma dos feixes de injeção que envolveremos nele. Será discutida a teoria quântica que descreve a evolução temporal deste operadores, e o mapeamento desta evolução em equações diferenciais estocásticas para amplitudes no espaço de fase. Também introduziremos a teoria por trás de representações do campo eletromagnético, que contribuem com o entendimento físico do sistema que estudaremos via formulação estocástica. No Capítulo 3, analisaremos detalhadamente as equações estocásticas já apresentadas, utilizando como variáveis tanto amplitudes quanto quadraturas dos campos envolvidos. Estudaremos no regime estacionário, e mostraremos uma aproximação que permite a teoria receber um tratamento analítico simplificado e a região de validade desta aproximação, por meio de comparação entre os resultados aproximados e simulações numéricas. Utilizaremos as soluções destas equações aproximadas no Capítulo 4, para investigar como modos injetados afetariam *squeezing* e emaranhamento dos feixes gerados no OPO. Assegurando o emaranhamento presente nesse sistema, iremos utilizá-lo para propor um teste de Bell no Capítulo 5, onde introduziremos a teoria envolvida nas desigualdades de Bell e construiremos uma desigualdade do tipo CHSH, que envolverão correlações entre os campos apresentados anteriormente. Será proposto também um esquema experimental onde é possível medir as correlações propostas visando à violação da desigualdade pelos modos gerados neste sistema.

2 Hamiltoniano e Representações do campo eletromagnético

Começaremos este capítulo com a descrição da forma dos campos ópticos que estamos trabalhando nesta tese. Estes campos serão injetados em um meio não linear de segunda ordem, dentro de uma cavidade óptica. A forma desses feixes é de grande relevância para discussões da dinâmica dos modos envolvidos em nosso sistema.

2.1 Introdução à óptica paraxial

Das equações de Maxwell descrevendo o campo eletromagnético, podemos obter uma equação de onda, que descreve a propagação da luz que é, em sua essência, radiação eletromagnética. Em um meio homogêneo, na ausência de cargas e correntes, as equações de Maxwell são dadas por ([GRIFFITHS, 2021](#)):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.4)$$

Aplicando o rotacional em ambos lados da Eq. (2.3), e substituindo a Eq. (2.4), obtemos uma equação de onda para o campo \mathbf{E} , com velocidade de propagação $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$, que é a velocidade da luz:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.5)$$

Uma combinação de ondas planas constitui a solução padrão para esta equação de onda. Em particular, no domínio da óptica paraxial, podemos representar fisicamente feixes de laser que serão introduzidos no OPO de forma mais adequada.

Um laser emite um feixe monocromático em uma frequência ω , muito concentrado ao

longo da direção de propagação, que é o que define o chamado regime paraxial. Em um meio homogêneo, podemos escrever o campo $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e^{-i(\omega t - kz)} \psi(\mathbf{r}, t) \hat{e}_j + e^{+i(\omega t - kz)} \psi(\mathbf{r}, t) \hat{e}_j, \quad (2.6)$$

com vetor de polarização \hat{e}_j na direção j , e com a estrutura transversa do feixe descrita por $\psi(\mathbf{r}, t)$. Substituindo Eq. (2.6) em Eq. (2.5), temos:

$$\nabla^2 [\psi(\mathbf{r}) e^{ikz}] + k^2 [\psi(\mathbf{r}) e^{ikz}] = 0, \quad (2.7)$$

com $k = \omega/c$. Para uma onda plana, $\psi(\mathbf{r}, t)$ é uma constante. Mas para campos físicos de um laser, $\psi(\mathbf{r}, t)$ será uma função das coordenadas x, y, z . Buscando representar um laser podemos assumir $\psi(\mathbf{r}, t)$ é uma função lentamente variável de z (aqui, significando lenta na escala do comprimento de onda). Para o termo do laplaciano com derivada na direção longitudinal z , podemos assumir $\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \ll 2k \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial z}$, sendo possível desprezar a derivada segunda na Eq. (2.7). Com isso, obtemos a chamada equação Paraxial da luz:

$$\nabla_{\perp}^2 \psi(\mathbf{r}, t)(s, z) + 2ik \frac{\partial u(s, z)}{\partial z} = 0, \quad (2.8)$$

onde ∇_{\perp}^2 é definido como o operador laplaciano nas coordenadas transversas, e s são coordenadas transversas, podendo ser $s = (x, y)$ e $s = (r, \phi)$. Em coordenadas cartesianas, a solução mais simples possível é o modo Gaussiano:

$$\psi(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w(z)} \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} + ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} - i \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right) \right], \quad (2.9)$$

onde introduzimos alguns parâmetros:

$$R(z) = z \left(1 + \frac{z_R^2}{z^2} \right) \quad w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}} \quad z_R = \frac{\pi \omega}{\lambda}. \quad (2.10)$$

Aqui, $R(z)$ é o raio de curvatura do feixe, $w(z)$ é a cintura do feixe, com w_0 sendo o valor mínimo da cintura, definido no plano $z = 0$, e z_R é o comprimento de Rayleigh - distância ao longo da propagação, a partir da cintura w_0 , na qual a área transversal do laser dobra de tamanho.

O modo Gaussiano é também chamado modo fundamental, e é uma ótima aproximação para um feixe de laser real. Este modo pode ser obtido de duas famílias de soluções, cada uma dependendo da escolha de coordenadas em que se resolve a Eq. (2.8).

2.1.1 Equação paraxial em coordenadas cartesianas e cilíndricas

Utilizando coordenadas cartesianas, a solução para a equação paraxial possui como solução os modos Hermite-Gaussianos (HG):

$$\begin{aligned} \psi_{mn}(x, y, z) = & \frac{A_{nm}}{w(z)} H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{w(z)} \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} \right\} e^{-i\phi_{mn}(z)}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde A_{mn} é uma normalização e H_j é o polinômio de Hermite de ordem j . A ordem do modo HG é definida como a soma $n + m$ e $\phi_{nm}(z)$ é a fase de Gouy

$$\phi_{nm} = i(m + n + 1) \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right) \quad (2.12)$$

Escolhendo o modo de ordem zero ($m = n = 0$), podemos ver que Eq. (2.11) recai na Eq. (2.9), com $A_{00} = \sqrt{(2/\pi)}$. Utilizando coordenadas cilíndricas, a solução para a equação paraxial possui como solução os modos Laguerre-Gaussianos (LG):

$$\begin{aligned} \psi_l^p(r, \phi, z) = & \frac{A_p^l}{w(z)} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right)^{|l|} L_p^l \left[\frac{2r^2}{w^2(z)} \right] \exp \left\{ -\frac{r^2}{w(z)} \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ ik \frac{r^2}{2R(z)} \right\} e^{(il\phi - i\phi_p l(z))}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde o índice inteiro $p \geq 0$ é o índice radial, o inteiro l é o índice azimutal e A_l^p é um fator de normalização. Aqui, temos os chamados polinômios de Laguerre generalizados $L_p^{|l|}$. A ordem do modo Laguerre é definida por $2p + |l|$, e a fase de Gouy é dada por

$$\phi_{pl}(z) = (2p + |l| + 1) \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right). \quad (2.14)$$

Para $l \neq 0$, os modos LG apresentam uma fase que depende da coordenada azimutal por causa do fator $e^{il\phi}$. Isso faz com que os modos apresentem sua frente de onda com uma forma helicoidal em torno do eixo z : estes feixes carregam momento angular proporcional a l . Na fig. 1, mostramos o perfil de intensidade transversa de modos HG e LG, de ordem 0 a 2.

Nesta tese, trabalhamos com injeções no OPO com modos LG de primeira ordem. Há uma correspondência entre os dois sistemas de coordenadas:

$$\psi_{LG_1^0} = \psi_{HG01} + i\psi_{HG10} \quad \psi_{LG_1^0} = \psi_{HG01} - i\psi_{HG10}. \quad (2.15)$$

Onde aqui modificamos a notação com a finalidade de explicitar em qual sistema de

coordenadas estarão os feixes envolvidos.

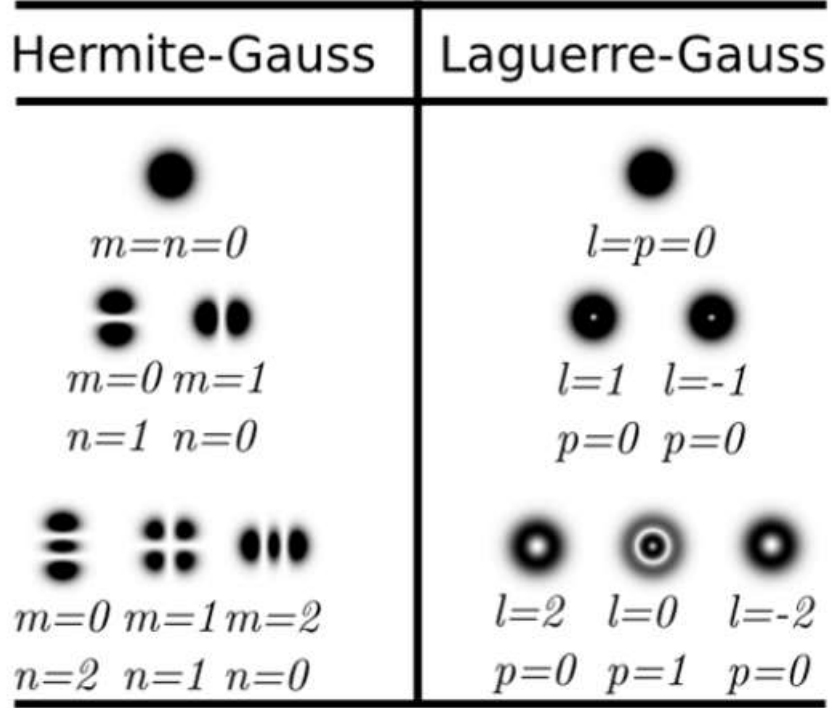


Figura 1: Perfis de intensidade dos modos transversos HG e LG.

2.2 Hamiltoniano

Consideremos um sistema de cinco modos do campo eletromagnético acoplados em um OPO: um feixe de bombeamento no modo fundamental ψ_{00} com frequência ω_p , e uma superposição coerente de modos de primeira ordem ψ_{HG10} e ψ_{HG01} . O modo fundamental tem frequência ω_p . Os feixes que constituem a superposição do feixe sinal, tem frequência ω_s e os que formam a superposição do complementar, tem frequência ω_p . Por conservação de energia do processo de conversão paramétrica, temos que a frequência do feixe de bombeio é a soma das frequências dos feixes convertidos: $\omega_p = \omega_s + \omega_p$. O sistema considerado é um OPO tipo II, significando que a polarização dos feixes convertidos são ortogonais. Usaremos o feixe sinal com polarização horizontal, e o feixe complementar com polarização vertical.

Os campos incidentes são descritos como:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_p &= \mathcal{E}_0 \psi_{00} \hat{e}_H \\
 \vec{E}_s &= e^{i\phi_1} \mathcal{E}_1 \psi_{HG10} \hat{e}_H + e^{i\phi_2} \mathcal{E}_2 \psi_{HG01} \hat{e}_H \\
 \vec{E}_i &= e^{i\phi_3} \mathcal{E}_3 \psi_{HG10} \hat{e}_V + e^{i\phi_4} \mathcal{E}_4 \psi_{HG01} \hat{e}_V,
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

onde \hat{e}_H e \hat{e}_V representam os estados de polarização horizontal e vertical. Um esquema do OPO é apresentado na Fig. 2.

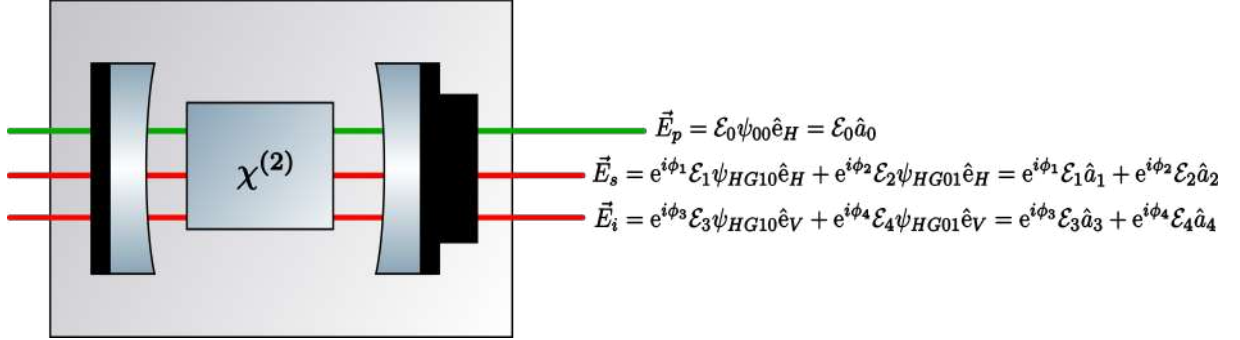


Figura 2: Esquema do OPO, exibindo feixes de bombeio a_p , sinal a_s , e complementar a_i , apresentando correspondência entre índices de polarização e modo transversal e índices numéricos.

No domínio quântico, quando um fóton do feixe de bombeamento é aniquilado no processo de conversão paramétrica no cristal não linear, os dois fótons gêmeos gerados podem seguir dois canais de decaimento equiprováveis: (a) ambos feixes sinal e complementar emitidos no modo transversal ψ_{HG10} ou (b) ambos feixes sinal e complementar emitidos no modo transversal ψ_{HG01} .

Matematicamente, para um tratamento quântico, os campos no OPO são descritos por operadores bosônicos \hat{a}_i , $i=0\dots4$, com a seguinte correspondência:

$$\begin{aligned}
 \psi_{00}\hat{e}_H &\rightarrow a_0 \\
 \psi_{HG10}\hat{e}_H &\rightarrow a_1 \\
 \psi_{HG01}\hat{e}_H &\rightarrow a_2 \\
 \psi_{HG10}\hat{e}_V &\rightarrow a_3 \\
 \psi_{HG01}\hat{e}_V &\rightarrow a_4.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Para o Hamiltoniano completo desse sistema, precisamos considerar os modos acoplados na cavidade óptica, a interação entre eles causada pelo cristal, os modos injetados que geram oscilações forçadas, e também os operadores de um banho térmico, que descrevem as perdas para os modos envolvidos. Inicialmente, temos:

$$H = H_S + H_{int} + H_{inj} + H_R \tag{2.18}$$

Cada um desses termos será tratado detalhadamente à seguir: H_S basicamente des-

creve a energia em cada modo ω_j , através do operador número. Uma interação linear (equivalente ao oscilado harmônico) entre os modos que se acoplam à cavidade óptica:

$$H_S = \sum_{j=0}^4 \hbar \omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j, \quad (2.19)$$

onde o índice $j = 0$ rotula o bombeio, e $j = 1, \dots, 4$ rotula os feixes convertidos.

H_{int} é um termo que descreve a interação entre os feixes sinal e complementar com o feixe de bombeamento:

$$H_{int} = i\hbar\chi \sum_{j=1}^2 (\hat{a}_0 \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j+2}^\dagger + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_j \hat{a}_{j+2}), \quad (2.20)$$

envolvendo as transições possíveis pela não linearidade de segunda ordem, descrita pela constante de acoplamento χ . Estas transições são aniquilação de um fóton do modo 0 para criar dois fótons nos modos 1 e 3 (e também 2 e 4), e vice versa.

H_{inj} denota as injeções. Para os modos $j = 1, \dots, 4$, esse tipo de injeção é também chamada *feixes sementes*. Estes campos são injetados em intensidades muito baixas quando comparados ao bombeio \mathcal{E}_0 , pois seu papel é apenas de guiar ("semear") o processo de conversão para os modos desejados, selecionando assim o decaimento dos fótons do bombeio para popular os modos dessas respectivas injeções, amplificando-as.

$$H_{inj} = i\hbar \sum_{j=0}^4 (\mathcal{E}_j \hat{a}_k e^{-i\omega_j t} - \mathcal{E}_j^* \hat{a}_j^\dagger e^{i\omega_j t}) \quad (2.21)$$

O termo H_R descreve a interação do OPO com o ambiente (análogo ao reservatório térmico num tradicional sistema termodinâmico). Aqui, o reservatório é um grande conjunto de osciladores harmônicos do campo eletromagnético livre ou mesmo fônons de um sólido, que podem ser populados por um fóton aniquilado do sistema, numa mesma frequência. Estes osciladores serão descritos pelos operadores bosônicos Γ_j , e o seu hamiltiano é:

$$H_R = \sum_j (a_j^\dagger \Gamma_j + a_j \Gamma_j^\dagger) \quad (2.22)$$

Então, o Hamiltoniano deste sistema descrito pela eq.(2.18), na representação de Heisenberg mostra-se como (REID, 1989; GRAHAM; HAKEN, 1968):

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{j=0}^{n=4} \hbar \omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + i\hbar\chi \sum_{j=1}^2 (\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j+2}^\dagger \hat{a}_0 - \hat{a}_j \hat{a}_{j+2} \hat{a}_0^\dagger) \\ & + i\hbar \sum_{j=0}^4 (\mathcal{E}_j \hat{a}_k e^{-i\omega_j t} - \mathcal{E}_j^* \hat{a}_j^\dagger e^{i\omega_j t}) + \sum_{i=0}^4 (\hat{a}_j \Gamma_j^\dagger + a_j^\dagger \Gamma_j). \end{aligned} \quad (2.23)$$

O OPO injetado é um sistema aberto, no qual o número de partículas varia, uma vez que fótons dos feixes podem ser trocados com o reservatório térmico. A dinâmica de sistemas quânticos abertos como este deve ser tratada pela matriz densidade, cuja evolução temporal é obtida através de uma equação diferencial, adequada a sistemas fora do equilíbrio. Essas equações são chamadas *equações mestras* (NIELSEN; CHUANG, 2002). Uma das formas mais gerais destas equações para o operador densidade é a equação mestra na forma de Lindblad (NIELSEN; CHUANG, 2002), dada por:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{-i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] + \sum_{k=0}^4 \gamma_k (2\hat{a}_k \hat{\rho} \hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k), \quad (2.24)$$

Aqui, temos que as taxas que quantificam perdas γ são positivas, para que tenhamos esta forma de equação de Lindblad. Especificamente para o sistema OPO, é possível obter esta mesma equação ao escrever a equação de Von Neumann, eliminando os reservatórios através de uma operação de traço parcial e usando teoria de perturbação, uma vez que é assumida uma interação fraca do sistema com o reservatório. Tais técnicas são bem conhecidas na literatura, e podem ser consultadas em detalhes em (WALLS; MILBURN, 2007).

A equação (2.24) apresenta não linearidade nos operadores e embora equações de movimento na representação de Heisenberg possam ser obtidas, seu tratamento matemático é extremamente difícil. Por outro lado, uma maneira equivalente de abordar esse sistema, é através da teoria de processos estocásticos, onde sua dinâmica será descrita por equações diferenciais estocásticas de Langevin para amplitudes, ao invés de operadores quânticos. Para obter estas equações, partimos da eq. (2.24) para o operador densidade, e seguimos alguns passos intermediários, em conjunto com uma escolha de uma *representação* para a matriz densidade. Escolher uma representação é equivalente a escolher uma base em problemas de mecânica quântica. Uma escolha possível seria expandir o operador densidade em termos de estados de Fock, uma vez que constituem um conjunto completo:

$$\rho = \sum C_{nm} |n\rangle \langle m| \quad (2.25)$$

Há infinitos coeficientes C_{nm} complexos para cada modo do campo eletromagnético, limitando sua utilidade. Para problemas específicos onde estamos interessados apenas no número de fótons, podemos utilizar os estados de Fock

$$\rho = \sum P_n |n\rangle \langle n|, \quad (2.26)$$

onde a descrição do operador ρ é totalmetente determinada conhecendo P_n , que é uma

distribuição de probabilidade de se ter n fótons em um modo. Uma outra possibilidade de escolha para base é expandir o operador densidade em termos dos estados coerentes, tornando possível representações como P de Glauber-Sudarshan, Q de Husimi, R, função de Wigner, e P Positiva (WALLS; MILBURN, 2007), (GARDINER; ZOLLER; ZOLLER, 2004).

Na seção 2.3, faremos o mapeamento da equação mestra para nosso sistema em um conjunto de equações estocásticas, que foram trabalhadas ao longo desta tese. Omitiremos alguns detalhes acerca da teoria das representações neste momento e depois aprofundaremos uma discussão sobre algumas de suas propriedades fundamentais na seção 2.4 por que podem trazer intuição física do sistema na descrição estocástica, baseado no que conhecemos da teoria quântica desses sistemas.

2.3 Equação de Fokker-Planck e equações diferenciais estocásticas

Por simplicidade, consideraremos um referencial girante, a evolução temporal do campo livre H_s é removida, e a equação mestra é dada por:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{-i}{\hbar} [\hat{H}_{int} + \hat{H}_{inj}, \hat{\rho}] + \sum_{k=0}^4 \gamma_k (2\hat{a}_k \hat{\rho} \hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k) \quad (2.27)$$

Há correspondências entre operadores quânticos e amplitudes no espaço de fase, que são diferentes dependendo da representação escolhida. Para mapear a equação mestra em equações diferenciais estocásticas, usaremos a representação de Wigner. A correspondência entre operadores e amplitudes nesta representação se dá por:

$$\begin{aligned} \hat{a}\hat{\rho} &\longleftrightarrow \left(\alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*}\right) W(\alpha, \alpha^*) & \hat{\rho}\hat{a} &\longleftrightarrow \left(\alpha - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*}\right) W(\alpha, \alpha^*) \\ \hat{a}^\dagger \hat{\rho} &\longleftrightarrow \left(\alpha^* - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) W(\alpha, \alpha^*) & \hat{\rho}\hat{a}^\dagger &\longleftrightarrow \left(\alpha - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) W(\alpha, \alpha^*). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Isto é, substituímos \hat{a} e \hat{a}^\dagger de forma diferente conforme estes operadores estejam atuando à esquerda ou à direita de $\hat{\rho}$. Não será apresentado neste trabalho uma dedução formal destas ferramentas matemáticas. Mais detalhes quanto a esta e correspondências adequadas a outras representações, podem ser encontrados em (GARDINER; ZOLLER; ZOLLER, 2004).

Usando as correspondências explicitadas nas Eq. (2.28) na Eq. (2.27), obtem-se uma equação diferencial equivalente na distribuição de Wigner $W(\{\alpha_k, \alpha_k^*\})$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W = & \sum_{k=1}^2 \chi \left(\alpha_k \alpha_{k+2} \frac{\partial}{\partial \alpha_0} + \alpha_k^* \alpha_{k+2}^* \frac{\partial}{\partial \alpha_0^*} \right) W \\ & - \sum_{k=1}^4 \chi \left(\alpha_k^* \alpha_0 \frac{\partial}{\partial \alpha_{k+2}} + \alpha_k^* \alpha_0 \frac{\partial}{\partial \alpha_{k+2}^*} \right) W - \sum_{k=0}^4 \epsilon_k \left(\frac{\partial}{\partial \alpha^*} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) W \\ & + \frac{\chi}{4} \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial \alpha_k \partial \alpha_{k+2} \partial \alpha_0^*} + \frac{\partial^3}{\partial \alpha_k^* \partial \alpha_{k+2}^* \partial \alpha_0} \right) W \\ & + \sum_{k=0}^4 \gamma_k \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_k^*} \alpha_k^* + \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \alpha_k \right) W + \sum_{k=0}^4 \gamma_k \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_k \partial \alpha_k^*} \right) W, \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde o vetor $W(\{\alpha_k, \alpha_k^*\})$ inclui todos os cinco campos ($k = 0, \dots, 4$) do sistema. Nesta equação, podemos facilmente identificar os termos que surgem da interação não-linear, relacionados ao fator χ , além das contribuições das injeções, com o fator ϵ_k e na ultima linha, temos um fator γ , identificando um termo que não depende da forma do Hamiltoniano: é uma contribuição geral presente na equação mestra. Os índices dos somatórios novamente usam a notação $5 \rightarrow 1$ e $6 \rightarrow 2$. Importante mencionar que a parte de interação, termos envolvendo o bombeio (com a derivada $\frac{\partial}{\partial \alpha_{k=0}}$) foram escritos separadamente, com a soma de $k = 1$ a $k = 2$, enquanto os quatro feixes convertidos com a soma correndo de $k = 1$ a $k = 4$. Embora esta forma seja adequada para uma identificação mais direta com o Hamiltoniano, reorganizaremos a Eq. (2.29) em índices em comum, facilitando visualização do desenvolvimento da teoria. Reescrevemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W = & \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_0} (\gamma_0 \alpha_0 + \chi \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_4 - E_0) + \frac{\partial}{\partial \alpha_0^*} (\gamma_0 \alpha_0^* + \chi \alpha_1^* \alpha_3^* + \alpha_2^* \alpha_4^* - E_0) \right. \\ & + \sum_{k=1}^4 \frac{\partial}{\partial \alpha_k} (\gamma_k \alpha_k + \chi \alpha_{k+2}^* \alpha_0 - E_k) + \frac{\partial}{\partial \alpha_k^*} (\gamma_k \alpha_k^* + \chi \alpha_{k+2} \alpha_0^* - E_k^*) \\ & \left. + \sum_{k=0}^4 \gamma_k \frac{\partial^2}{\partial \alpha_k \partial \alpha_k^*} + \frac{\chi}{4} \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial \alpha_k \partial \alpha_{k+2} \partial \alpha_0^*} + \frac{\partial^3}{\partial \alpha_k^* \partial \alpha_{k+2}^* \partial \alpha_0} \right) \right] W. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Exceto pelo termo de derivada de terceira ordem, esta equação assume a forma de uma equação do tipo Fokker-Planck:

$$\frac{d}{dt}W = - \sum_{k=0}^4 \frac{\partial}{\partial \alpha_k} A_k W + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k^*} (\mathbf{B} \mathbf{B}^T) W \quad (2.31)$$

Onde o vetor de componentes A_j é chamado vetor de arrasto e o produto de matrizes $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$ é chamado matriz de difusão. O termo da derivada terceira de fato pode ser descartado quando estamos trabalhando com as amplitudes obedecendo uma estatística Gaussiana,

resultando na correspondência citada para a equação de Fokker-Planck. Contudo, alguns detalhes devem ser apontados. Em situações de poucos fótons, ao descartar o termo de derivada terceira e mantendo a presença do acoplamento χ , não é possível obter o valor da média para o estado de vácuo $\langle \alpha_j^* \alpha_j \rangle = 1/2$, mesmo quando há apenas vácuo sendo injetado no sistema, uma situação não física. Esta média pode ser obtida se descartamos o acoplamento χ . A teoria completa para Wigner não encontra este problema para reproduzir o estado de vácuo, porém não gera uma equação de Fokker-Planck que possua equivalência com um conjunto de equações estocásticas.

A equação de Fokker-Planck surgiu no contexto do movimento browniano, descrevendo a variação da densidade de probabilidade para a velocidade de uma partícula, ao longo do tempo, quando ela sofria forças aleatórias num processo de difusão em um meio, e sujeita a uma força de arrasto neste meio. Temos como exemplo uma gota de tinta caindo em um recipiente com água, pode ser decomposta em duas partes: uma difusão de suas moléculas de forma aleatoria, sujeitas a colisões com moléculas de água; e uma tendência a serem levadas para o fundo pela força da gravidade, sofrendo uma força de arrasto em oposição a este movimento, ao deslocar-se naquele meio.

Equações de Fokker-Planck como a Eq. (2.31) possuem, por sua vez, uma correspondência a um conjunto de equações diferenciais estocásticas de Langevin, dadas por

$$\frac{d\alpha_k}{dt} = A_k + B_{j,k}dw_k \quad (2.32)$$

com o incremento de Wiener dw_k definido por

$$\langle dw_j(t)dw_k(t') \rangle = \delta_{j,k}\delta(t-t') \quad (2.33)$$

Comparando com a Eq. de Fokker-Planck para nossa dinâmica para os cinco modos do OPO Eq. (2.30), temos as seguintes equações diferenciais estocásticas, para amplitudes de cada um dos modos:

$$\begin{aligned} d\alpha_0 &= (E_0 e^{i\phi_0} - \gamma_0 \alpha_0 - \chi(\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_4))dt + \sqrt{\gamma_0}dw_0 \\ d\alpha_1 &= (E_1 e^{i\phi_1} - \gamma_1 \alpha_1 + \chi \alpha_0 \alpha_3^*)dt + \sqrt{\gamma}dw_1 \\ d\alpha_2 &= (E_2 e^{i\phi_2} - \gamma_2 \alpha_2 + \chi \alpha_0 \alpha_4^*)dt + \sqrt{\gamma}dw_2 \\ d\alpha_3 &= (E_3 e^{i\phi_3} - \gamma_3 \alpha_3 + \chi \alpha_0 \alpha_1^*)dt + \sqrt{\gamma}dw_3 \\ d\alpha_4 &= (E_4 e^{i\phi_4} - \gamma_4 \alpha_4 + \chi \alpha_0 \alpha_2^*)dt + \sqrt{\gamma}dw_4. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Este grupo de equações diferenciais será estudado no cap. 3, onde estudaremos seus momentos estatísticos e aproximações, do ponto de vista das amplitudes e das quadraturas dos campos.

2.4 Representações do Campo Eletromagnético

Na seção anterior, utilizamos uma correspondência entre operadores e amplitudes em uma representação. Porém, não discutimos formalmente o que são representações, e interpretações físicas que elas trazem, dependendo de qual escolhemos trabalhar. Nesta seção, definiremos algumas delas, explicaremos sua relação com quantidades estatísticas como médias e variâncias no espaço de fase, e como informações acerca do ordenamento de operadores quânticos aparecem na descrição no espaço de fase. Ao se fazer construir uma equação de Fokker-Planck a partir da equação mestra, nem sempre é possível interpretá-la como uma evolução de distribuição de probabilidade. Isto também será discutido nesta seção.

2.4.1 Função característica

Inicialmente, introduziremos a função característica, originária da teoria de probabilidade e estatística. A função característica determina completamente a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória associada a ela. Dada uma variável aleatória α , sua função característica $\chi_\alpha(\eta)$ é definida por:

$$\chi(\eta) = e^{i\eta\alpha} \quad (2.35)$$

É possível obter os momentos de ordem n de sua distribuição de probabilidade através do valor esperado de n -ésima derivada de χ :

$$\mu(n) = \langle \chi^n \rangle = \frac{1}{i^n} \left. \frac{d^n \chi(\eta)}{d\eta^n} \right|_{\eta=0}. \quad (2.36)$$

Existe também a chamada função geradora de momentos, definida com uma exponencial real na eq. (2.35), onde os momentos da distribuição também são dados por um processo similar envolvendo suas derivadas. Algumas variáveis aleatórias não possuem uma função geradora de momentos bem definida, porém sua função característica sempre existe, apresentando uma importante vantagem quanto a sua utilidade. Especificamente em problemas quânticos, lidamos com funções análogas a distribuições de probabilidades,

mas que estranhamente podem exibir valores negativos. Ainda sim, a função característica existe e pode ser computada para estudar esses sistemas. A função característica desempenhará um papel importante em definições de teoria de representações a seguir.

Aqui, veremos alguns detalhes a cerca da representação P, e iremos utilizá-la para definir as representações de Wigner e P-positiva, que foram usadas neste trabalho.

2.4.2 Representação P de Glauber-Sudarshan

Similar a expansão para a matriz densidade ρ em termos dos estados de Fock (eq. 2.25), usaremos estados coerentes:

$$\rho = \sum P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha, \quad (2.37)$$

com $d^2\alpha = d(\text{Re}\{\alpha\})d(\text{Im}\{\alpha\})$. Esta representação foi apresentada de forma independente em 1963 por Glauber e Sudarshan, ambos trabalhando em descrições estatísticas no espaço de fase para feixes ópticos (GLAUBER, 1963),(SUDARSHAN, 1963).

Inicialmente, interpretaríamos a função das amplitudes $P(\alpha)$ como uma densidade de probabilidade, mas isso não é verdade. Para alguns estados quânticos, $P(\alpha)$ pode apresentar singularidades e/ou valores negativos, e a interpretação de uma distribuição de probabilidade clássica não é possível. Embora a teoria se comunique com o clássico, particularidades como $P(\alpha) < 0$ são assinaturas quânticas dos campos envolvidos. Na literatura, é comum atribuir o termo quasiprobabilidade para essas distribuições. Quantidades estatísticas de interesse, como médias, variâncias (ou simplesmente correlações), envolvem produtos de operadores, onde o ordenamento dos mesmos deve ser tratado cuidadosamente. Por exemplo, a representação P reproduz o cálculo do valor esperado de produtos de operadores em ordenamento normal,

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^{\dagger m} \hat{a}^n \rangle &= \text{Tr}\{\rho \hat{a}^{\dagger m} \hat{a}^n\} \\ &= \int P(\alpha) \alpha^{*m} \alpha^n d^2\alpha, \end{aligned} \quad (2.38)$$

substituindo as médias dadas em termos de operadores da MQ por médias computadas classicamente. Podemos também avaliar a função P através de uma função característica. A definição da eq. (2.35), rescrita na notação de operadores quânticos é dada por:

$$\chi_S(\eta) = \text{Tr}\{\rho e^{\eta \hat{a}^\dagger - \eta^* \hat{a}}\}, \quad (2.39)$$

Adicionalmente pode ser definida de ainda de outras maneiras, no que diz respeito ao ordenamento. Na teoria quântica, a ordem de produtos de operadores criação e aniquilação

é relevante. Um valor esperado é dito em ordenamento normal quando todos os operadores de criação estão à esquerda dos operadores de aniquilação. Ordenamento anti-normal é definido de maneira oposta, com todos os operadores de aniquilação à esquerda dos de criação. Ordenamento simétrico pode ser entendido como uma média aritmética do cálculo nos dois ordenamentos. Aqui, utilizamos o índice S para identificar esta definição com o ordenamento simétrico. Para ordenamento normal e antinormal, definimos:

$$\chi_N(\eta) = Tr\{\rho e^{\eta\hat{a}^\dagger} e^{-\eta^*\hat{a}}\}, \quad (2.40)$$

$$\chi_A(\eta) = Tr\{\rho e^{-\eta^*\hat{a}} e^{\eta\hat{a}^\dagger}\}. \quad (2.41)$$

O ordenamento nestas funções características pode ser trocado se utilizando a fórmula

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2}, \quad (2.42)$$

válida quando $[A,B] = c$, com c sendo um número complexo.¹ Por exemplo, entre ordenamento simétrico e normal, temos:

$$\chi_S(\eta) = \chi_N(\eta) \exp\left(-\frac{1}{2}|\eta|^2\right). \quad (2.43)$$

Uma vez que a função P se relaciona com médias em ordenamento normal, faremos expansão de $\chi_N(\eta)$ como

$$\begin{aligned} \chi_N(\eta) &= \int P(\alpha) \langle \alpha | e^{\eta\hat{a}^\dagger} e^{-\eta^*\hat{a}} | \alpha \rangle d^2\alpha \\ &= \int P(\alpha) e^{\eta\alpha^* - \eta^*\alpha} d^2\alpha. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Temos que χ_N é uma transformada de Fourier bidimensional de $P(\alpha)$. Isto fica explicitado ao se escrever as variáveis em suas partes real e imaginária:

$$\eta = \frac{\eta_x - i\eta_y}{\sqrt{2}}, \quad \alpha = \frac{x + iy}{\sqrt{2}},$$

obtendo

$$\chi_N(\eta) = \frac{1}{2} \int P(\alpha) e^{-i\eta_y x} e^{-i\eta_x y} dx dy. \quad (2.45)$$

Utilizando-se a transformada de Fourier inversa, a solução para $P(\alpha)$ é:

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= 2 * \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{+i\eta_y x} e^{+i\eta_x y} d\eta_x d\eta_y \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int e^{\eta^*\alpha - \eta\alpha^*} \chi_N(\eta) d^2\eta. \end{aligned} \quad (2.46)$$

¹Consequência da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff:
 $e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = \text{Exp}\{\hat{A} + \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}]/2 + \frac{[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] - [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]]}{12} + \dots\}$

Assim, existe uma representação P se existir uma transformada de Fourier para a função característica em ordenamento normal $\chi_N(\eta)$. Assim, definimos a função P, relacionada com a função característica em ordenamento normal. À seguir, veremos as representações de Wigner e P-positiva.

2.4.3 Função de Wigner

A primeira distribuição de quasi-probabilidade foi introduzida por Wigner, em 1932 (WIGNER, 1932), num contexto diferente da ótica, como os trabalhos envolvendo a representação P. O interesse de Wigner eram correções quânticas em mecânica estatística clássica. Dada uma função de onda, Wigner construiu uma distribuição de probabilidade para posição e momento relacionada a ela. Na época, Wigner apontou que distribuição pode assumir valores negativos, não podendo ser interpretada como uma distribuição de probabilidade real (hoje chamada quasi-probabilidade). Ainda sim, essa função auxiliar previa corretamente o valor esperado de funções de coordenadas e momentos de um sistema.

A função de Wigner se relaciona com médias em ordenamento simétrico. Podemos defini-la como a transformada de Fourier da função característica em ordenamento simétrico $\chi_S(\eta)$, de forma similar a como foi desenvolvida a função $P(\alpha)$ na eq. (2.46).

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int e^{\eta^* \alpha - \eta \alpha^*} \chi_S(\eta) d^2 \eta \quad (2.47)$$

A seguir, veremos exemplos para função de Wigner para alguns estados da luz descritos quanticamente: estados de Fock, estados coerentes e estados comprimidos.

2.4.3.1 Função de Wigner para estados de Fock

Para estados de Fock, temos a matriz densidade $\rho = |n\rangle \langle n|$. A função característica ficará

$$\begin{aligned} \chi_S(\eta) &= \text{Tr} [|n\rangle \langle n| e^{\eta \hat{a}^\dagger - \eta^* \hat{a}}] = e^{-\frac{|\eta|^2}{2}} \langle n| e^{\hat{a}^\dagger} e^{-\eta^* \hat{a}} |n\rangle = \\ &= e^{-\frac{|\eta|^2}{2}} \sum_k (-|\eta|^2)^k \langle n| \frac{(\hat{a}^\dagger)^k}{k!} \frac{(\hat{a})^k}{k!} |n\rangle. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Aqui, foi usada a relação de Baker-Campbell-Hausdorff para separar a soma de operadores na exponencial, antes da expansão em séries. O operador aniquilação só poderá atuar em

$|n\rangle$ no máximo $(n - k)$ vezes,

$$a^k |n\rangle = \sqrt{n(n-1)\dots(n-k)} |n-k\rangle = \sqrt{\frac{n!}{(n-k)!}} |n-k\rangle, \quad (2.49)$$

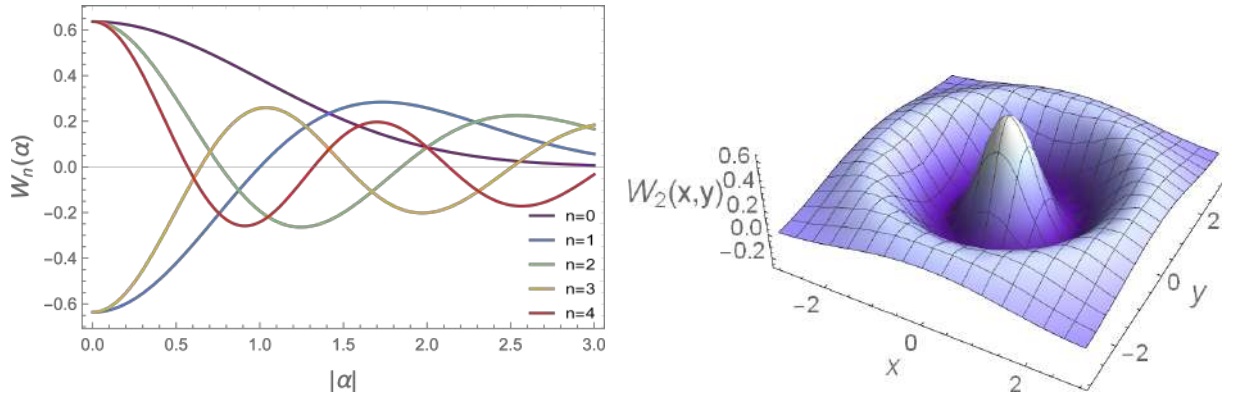
e segue-se que:

$$\chi_S(\eta) = e^{-\frac{|\eta|^2}{2}} \sum_{k=0}^n \frac{(-|\eta|^2)^k}{k!} \binom{n}{k} = e^{-\frac{|\eta|^2}{2}} L_n(|\eta|^2). \quad (2.50)$$

Onde a função $L_n(\eta^2)$ é o polinômio de Laguerre de ordem n . A função de Wigner será a transformada de Fourier desse resultado. Ao calculá-la, obtemos também um polinômio de Laguerre de mesma ordem, e seu resultado é:

$$W_n(\alpha) = \frac{2}{\pi} (-1)^n e^{-2|\alpha|^2} L_n(4|\alpha|^2). \quad (2.51)$$

A Fig. 3a, mostra exemplos de função de Wigner para estados de Fock de 0 a 4 fótons, evidenciando valores negativos para $n > 0$. Isso é uma consequência de $W_n(\alpha)$ apresentar em sua forma funcional polinômios de Laguerre, que de fato assumem valores negativos para qualquer $n > 0$, exemplificando a situação de não ser possível uma interpretação como uma distribuição de probabilidade. Fig. 3b mostra a função de Wigner para $n = 2$, no espaço de fase, em função $x = \text{Re}(\alpha)/2$ e $y = \text{Im}(\alpha)/2$. Esta superfície pode ser obtida através da rotação da curva $W_2(\alpha)$ em torno do eixo vertical.



(a) Funções de Wigner para estados de Fock com $n = 0, \dots, 4$ fótons em função de α

(b) Função de Wigner para um estado de Fock com $n = 2$ no espaço de fase

Figura 3: Exemplos de funções de Wigner para estados de Fock

2.4.3.2 Função de Wigner para um estado coerente

Para o estado coerente, usaremos a matrix densidade $\rho = |\alpha_0\rangle \langle \alpha_0|$:

$$\begin{aligned}\chi_S(\eta) &= \text{Tr} \left[|\alpha_0\rangle \langle \alpha_0| e^{\eta \hat{a}^\dagger - \eta^* \hat{a}} \right] \\ &= \langle \alpha_0 | e^{\eta \hat{a}^\dagger - \eta^* \hat{a}} | \alpha_0 \rangle.\end{aligned}\quad (2.52)$$

Uma vez que o estado coerente é autoestado do operador de aniquilação $\hat{a} |\alpha_0\rangle = \alpha_0 |\alpha_0\rangle$, o cálculo da função característica $\chi_S(\eta)$ segue de forma bastante direta.

$$\chi_S(\eta) = e^{-\frac{|\eta|^2}{2}} e^{\eta \alpha_0^*} e^{-\eta^* \alpha_0} \quad (2.53)$$

Por fim, nosso resultado será:

$$\begin{aligned}W(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \int e^{(\alpha - \alpha_0) \eta^*} e^{(\alpha_0^* - \alpha_0^*) \eta^*} e^{-\frac{|\eta|^2}{2}} d^2 \eta \\ &= \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha - \alpha_0|^2}.\end{aligned}\quad (2.54)$$

Utilizando-se quadraturas, $\alpha = (x + iy)/2$ (e $\alpha_0 = (x_0 + iy_0)/2$), é possível rescrever esta expressão como:

$$W_{coe}(x, y) = \frac{2}{\pi} e^{-[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]/2}, \quad (2.55)$$

que representa a função de Wigner para o estado coerente, uma função positiva, que pode ser entendida como uma distribuição gaussiana no espaço de fase para quadraturas x e y , centrada em α_0 com uma área de incerteza delimitada por um círculo de raio unitário, relacionado ao desvio padrão exibido no argumento dessa função gaussiana.

2.4.3.3 Função de Wigner para um estado comprimido

Para o estado de vácuo comprimido $|r\rangle = S(r) |0\rangle$, temos para a função característica:

$$\chi_S(\eta) = \langle 0 | S^\dagger(r) e^{\eta \hat{a}^\dagger - \eta^* \hat{a}} S(r) | 0 \rangle \quad (2.56)$$

onde $S(r)$ é o operador de squeezing, dado por:

$$S(r) = e^{r \hat{a}^{\dagger 2} + r^* \hat{a}^2} \quad (2.57)$$

Este cálculo é um pouco mais complicado. Primeiro, expandimos a exponencial na eq. (2.56) em séries:

$$\chi_S(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle 0 | S^\dagger(r) \frac{(\eta \hat{a}^\dagger - \eta^* \hat{a})^k}{k!} S(r) | 0 \rangle \quad (2.58)$$

O operador de squeezing é unitário, i.e. $S(r)S(r)^\dagger = I$. Assim, podemos inserir a identidade I entre produto de operador na expressão acima.

$$\chi_S(\eta) = \quad (2.59)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle 0|S^\dagger(r)[\eta\hat{a}^\dagger - \eta^*\hat{a}]S(r)S^\dagger(r)[\eta\hat{a}^\dagger - \eta^*\hat{a}]S(r)S^\dagger(r)[\eta\hat{a}^\dagger - \eta^*\hat{a}]^{(k-2)}S(r)|0\rangle}{k!} \\ = \langle 0|\exp\{[\eta S^\dagger(r)\hat{a}^\dagger S(r) + \eta^* S^\dagger(r)\hat{a} S(r)]\}|0\rangle. \quad (2.60)$$

Os operadores bosônicos são transformados pelo operador de squeezing segundo

$$S^\dagger(r)\hat{a}^\dagger S(r) = \hat{a}^\dagger \cosh r - \hat{a} e^{-2i\phi} \sinh r \\ S^\dagger(r)\hat{a} S(r) = \hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger e^{2i\phi} \sinh r, \quad (2.61)$$

sendo possível escrever a função característica como

$$\chi_S(\eta) = \langle 0|e^{(\eta \cosh r + \eta^* e^{2i\phi} \sinh r)\hat{a}^\dagger - (\eta^* \cosh r + \eta e^{-2i\phi} \sinh r)\hat{a}}|0\rangle \\ = e^{-|\eta \cosh r + \eta^* e^{2i\phi} \sinh r|^2/2} \quad (2.62)$$

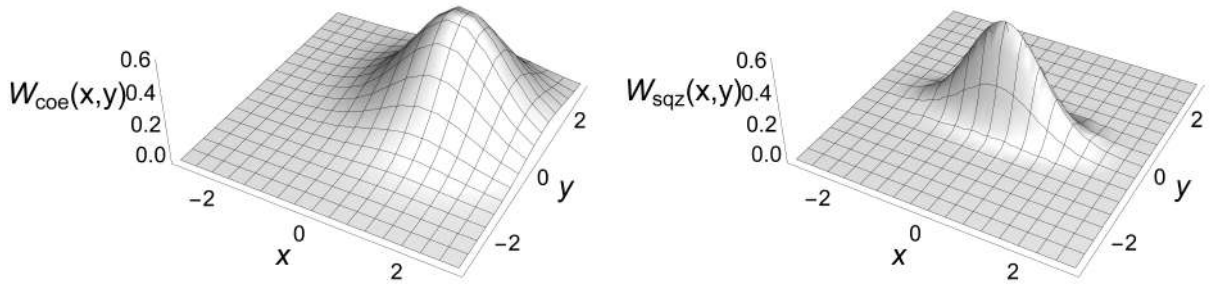
Por fim, a função de Wigner para estados comprimidos ficará:

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int d^2\eta e^{\alpha\eta^*} e^{\alpha^*\eta} e^{-|\eta \cosh r + \eta^* e^{2i\phi} \sinh r|^2/2}, \quad (2.63)$$

onde a integral será calculada de modo análogo à função de Wigner para o estado coerente (eq. (2.54)), novamente utilizando parte real e imaginária de η . Aqui, devemos considerar $\alpha = (x + iy)e^{i\phi}$, incluindo a fase gerada pelos operadores de squeezing. Porém, a fase ϕ simplesmente indica uma rotação do par de quadraturas que apresentam seu ruído modificado, e pode ser considerada $\phi = 0$ sem perda de generalidade para a integração em eq. (2.63). Finalmente, temos:

$$W_{sqz}(x,y) = \frac{2}{\pi} \exp\left\{-2\left(\frac{x^2}{e^{2r}} + \frac{y^2}{e^{-2r}}\right)\right\}. \quad (2.64)$$

A função de Wigner para o estado de vácuo comprimido é uma também uma distribuição gaussiana no espaço de fase, para quadraturas x e y . Diferente do estado coerente, esta função está centrada na origem e sua área de incerteza será delimitada por uma elipse cujos eixo menor e maior são dados por $2e^{2r}$ e $2e^{-2r}$, respectivamente. Na Fig. 4a exemplifica a comparação entre a forma de duas funções de Wigner no espaço de fase. A Fig. 4a, mostra um exemplo de função de Wigner para um estado coerente, uma distribuição gaussiana centrada em (1,1). A Fig. 4b, mostra um função de Wigner de estado comprimido, com uma distribuição gaussiana centrada na origem mas apresentado uma



(a) Função de Wigner para estado coerente com $\alpha_0 = 1 + i$

(b) Função de Wigner para um estado comprimido com $r = 0.5$

Figura 4: Exemplos de Funções de Wigner para estado coerente e estado comprimido.

compressão na variável x enquanto há uma extensão na variável y .

2.4.4 Representação P-positiva

Até o presente momento, trabalhamos com um espaço de fase real, utilizando como variáveis a parte real e imaginária de uma amplitude α . Contudo, é possível definir generalizações dessas representações utilizando um espaço de fase complexo, ao invés de um espaço de fase real (clássico).

Os operadores densidade podem ser representados univocamente por meio de uma função de duas variáveis complexas, α^* e β , sendo analítica ao longo dos respectivos planos α^* e β . É possível generalizações da representação P, utilizando projetores não-diagonais em estados coerentes. Podemos definir

$$\rho = \int_D \Lambda(\alpha, \beta) P(\alpha, \beta) d\mu(\alpha, \beta) \quad (2.65)$$

com o operador de projeção

$$\Lambda(\alpha, \beta) = \frac{|\alpha\rangle \langle \beta^*|}{\langle \beta^* | \alpha \rangle \langle \beta^* | \alpha \rangle} \quad (2.66)$$

é analítico em α e β , D é o domínio de integração e a diferencial $d\mu(\alpha, \beta)$ pode ser escolhido de forma a definir diferentes representações. Por exemplo, escolhendo como definição

$$d\mu(\alpha, \beta) = \delta^2(\alpha^* - \beta) d^2\alpha d^2\beta, \quad (2.67)$$

recuperamos a representação $P(\alpha)$, que usa termos diagonais, como definido na eq. (2.37).

Na representação P -positiva, definimos $d\mu$ como

$$d\mu(\alpha, \beta) = d^2\alpha d^2\beta. \quad (2.68)$$

Comparando com a representação P , há o dobro de variáveis para esta descrição: α e β podem variar de maneira independente sobre todo o plano complexo. Embora seja necessário mais parâmetros, Drummond e Gardiner (DRUMMOND; GARDINER, 1980) mostraram que esta representação sempre existe para um operador densidade físico e também é possível escolher $P(\alpha, \beta)$ positivo, justificando sua nomeação e além de que admite uma interpretação como densidade de probabilidade genuína. Esta representação também apresenta propriedades importantes para equações de Fokker-Planck e equações diferenciais estocásticas: outras representações podem levar a Fokker-Planck com matriz de difusão ($\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ na Eq. 2.31) não positiva. Drummond e Gardiner também mostraram que se existir uma equação de Fokker-Planck para evolução temporal na representação de Glauber-Sudarshan, então existe uma equação de Fokker-Planck correspondente com coeficiente de difusão positivo semidefinido na representação P positiva, e existe então uma correspondência direta com a teoria de equações diferenciais estocásticas. Essas características desejáveis garantem grande utilidade a representação P -positiva.

3 Equações diferenciais estocásticas

3.1 Equações na representação de Wigner

No cap 2, apresentamos equação mestra e um desenvolvimento teórico que a leva para um conjunto de equações estocásticas do OPO, apresentadas nas Eqs. (2.34). Neste capítulo, será apresentado um estudo detalhado sobre elas. Estas equações podem ser escritas de forma mais compacta adotando um índice j , com $j = 1, 2$. Evidenciamos que nessa notação, a não linearidade aparece acoplando modos de mesma paridade. Também adotamos que $\alpha_5 = \alpha_1$, $\alpha_6 = \alpha_2$, de maneira cíclica. Sem perda de generalidade, é possível escolher um dos campos real, e todos os outros com sua fase definida em relação a ele. Assumindo o feixe de bombeamento real ($\phi_0 = 0$), podemos manipular as equações Eqs. (2.34) de forma a obter:

$$\begin{aligned} d\alpha_0 &= (E_0 - \gamma_0\alpha_0 - \chi \sum_{j=1}^2 (\alpha_j\alpha_{j+2}))dt + \sqrt{\gamma_0}dw_0 , \\ d\alpha_j &= (E_j e^{i\phi_j} - \gamma\alpha_j + \chi(\alpha_0\alpha_{j+2}^*))dt + \sqrt{\gamma}dw_j , \\ d\alpha_{j+2} &= (E_{j+2} e^{i\phi_{j+2}} - \gamma\alpha_{j+2} + \chi(\alpha_0\alpha_j^*))dt + \sqrt{\gamma}dw_{j+2} , \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde γ_0 e γ são as perdas da cavidade para as frequências dos feixes de bombeamento e dos feixes convertidos *signal* e *idler*. Os termos de ruído Gaussiano dw_j são definidos tal que

$$\begin{aligned} \langle dw_j(t) \rangle &= \langle dw_{j+2}(t) \rangle = 0, \\ \langle dw_j dw_j^* \rangle &= \langle dw_{j+2} dw_{j+2}^* \rangle = dt , \end{aligned} \tag{3.2}$$

caracterizando a estatística do processo estocástico envolvido. Faremos algumas considerações a cerca do ruído apresentado nesta formulação. Aqui dw_{x_j} e dw_{y_j} são incrementos de Wiener: são temporalmente independentes, e seguem uma distribuição normal. Estes incrementos não são diferenciáveis, e para um tratamento analítico dessas equações,

eles serão redefinidos através de uma amplitude $\Phi_j(t)$, diferenciável. $\Phi(t)$ é comumente chamado de ruído branco. Definimos Φ_j como:

$$\frac{dw_{x_j}}{dt} = \sqrt{2}\Phi_j(t), \quad (3.3)$$

e sua interpretação física é de uma amplitude complexa que corresponde ao ruído de vácuo quântico, na representação de Wigner. Sua média é zero e é um ruído delta-correlacionado:

$$\langle \Phi_j(t)\Phi_j^*(t') \rangle = \frac{\delta(t-t')}{2} \quad (3.4)$$

O nome ruído branco designa sinais aleatórios cujo a densidade espectral de energia é uniforme nas frequências que o compõe. Seu nome tem origem na luz branca, cor resultante para uma combinação de emissões de igual intensidade em toda a banda de frequências da luz visível. Há uma distinção entre o que é definido como ruído branco, ou como ruído gaussiano. Ruído branco refere-se a forma como um sinal está distribuído sobre as frequências que o constituem, enquanto o termo gaussiano (como apresentado anteriormente) refere-se a estatística do ruído, a sua probabilidade de ser encontrado em um intervalo de valores. Particularmente, se cada frequência de um sinal aleatório possuir uma distribuição de probabilidade gaussiana independente, com média nula, o sinal é chamado ruído branco gaussiano aditivo, que é o tipo de sinal de nosso modelo. O ruído branco Φ_j pode ser interpretado também como uma generalização para o uma interpolação entre frequências de um processo de Wiener (sendo por construção diferenciável e permitindo decomposição espectral via análise de Fourier).

Utilizando a Eq. (3.3), podemos reescrever o processo dado pelas eq. (3.1) como

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_0}{dt} &= E_0 - \gamma_0\alpha_0 - \chi \sum_{j=1}^2 (\alpha_j\alpha_{j+2}) + \sqrt{2}\Phi_0 \\ \frac{d\alpha_j}{dt} &= E_j e^{i\phi_j} - \gamma\alpha_j + \chi(\alpha_0\alpha_{j+2}^*) + \sqrt{2}\Phi_j \\ \frac{d\alpha_{j+2}}{dt} &= E_{j+2} e^{i\phi_{j+2}} - \gamma\alpha_{j+2} + \chi(\alpha_0\alpha_j^*) + \sqrt{2}\Phi_{j+2} , \end{aligned} \quad (3.5)$$

Estas são as equações para a dinâmica dos cinco modos envolvidos no OPO injetado. A partir deles, estudaremos os estados estacionários e as quadraturas dos campos produzidos no OPO. Trataremos algumas de suas propriedades, estudaremos estados estacionários e possíveis aproximações, e também desenvolveremos o tratamento teórico para suas quadraturas. É conhecido que um OPO gera estados de luz comprimidos, com uma de suas

quadraturas apresentando supressão de ruído, aumentando o ruído na outra. É de nosso interesse estudar as quadraturas desse sistema para o entendimento do espectro de ruído e verificar emaranhamento entre elas, cujo a existência torna este OPO à cinco modos um candidato para um experimento que verifique uma desigualdade do tipo Bell. Todo nosso estudo, seja do ponto de vista de amplitudes ou de quadraturas, será sempre coberto por simulações numéricas envolvendo as equações completas eq. (3.1) (ou equivalentemente eq. (3.5)), que guiará a validade de nossa teoria.

3.1.1 Um exemplo simples

Verificaremos as eq. (3.1) na ausência de acoplamento ($\chi = 0$) e na ausência de injeções ($E_j = 0$ para qualquer j). Tem-se que:

$$\begin{aligned} d\alpha_0 &= -\gamma_0 a_0 dt + \sqrt{\gamma_0} dw_0 \\ d\alpha_j &= -\gamma \alpha_j dt + \sqrt{\gamma} dw_j \\ d\alpha_{j+2} &= -\gamma \alpha_{j+2} dt + \sqrt{\gamma} dw_{j+2} . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Nessa forma, essas equações são do tipo

$$dx = \theta(\mu - x)dt + \sigma dw, \tag{3.7}$$

que descrevem um processo de Ornstein-Uhlenbeck (incluindo arrasto dado pelo parâmetro θ), cuja a solução estacionária apresenta resultados analíticos: média $\langle x(t) \rangle = \mu$ e covariância $\langle x(t)x(s) \rangle = \frac{\sigma^2}{2\theta} e^{-\theta|t-s|}$. Utilizando esses resultados, as Eqs. (3.6) fornecem, para qualquer valor j ,

$$\begin{aligned} \langle \alpha_j(t) \rangle &= 0 \\ \langle \alpha_j(t)^* \alpha_j(t) \rangle &= \frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

levando ao mesmo resultado obtido para a energia do vácuo em ordenamento simétrico $\langle n_j \rangle = \langle \hat{\alpha}_j(t)^\dagger \hat{\alpha}_j(t) \rangle = 1/2$, como esperado pela representação de Wigner, como discutido no cap. 2. Assim, é possível interpretar os termos de ruídos dw_j como uma contabilização das flutuações do vácuo. No entanto, mesmo considerando $E_j = 0$ - que os únicos campos envolvidos estejam no estado de vácuo - se estivermos na presença de acoplamento não linear χ , estas equações não reproduzem um estado de vácuo, um resultado que não é físico. O motivo disso está em como foi feita a construção dessas equações estocásticas. É necessário que a equação de Fokker-Planck Eq. (2.31) seja positiva definida para que haja um conjunto de equações estocásticas equivalentes. Como discutimos na seção 2.3,

a formulação estocástica foi possível porque descartamos derivadas de terceira ordem nas amplitudes na equação de Fokker-Planck. Levá-las em conta removeria essa limitação para representar o vácuo, mas implicaria numa equação que não é mais positiva definida e não seria possível um conjunto de equações estocásticas equivalente.

3.2 Reescalas: equações adimensionais

3.2.1 Equações reescaladas para amplitudes

Desenvolveremos nossa teoria pela introdução dos parâmetros de reescala g e tempo adimensional $d\tau$:

$$g = \frac{\chi}{\gamma} \sqrt{2\gamma_r} \quad d\tau = \gamma dt. \quad (3.9)$$

As amplitudes nas eqs. (3.5) são modificadas de forma ligeiramente diferente

$$a_0 = g\sqrt{2\gamma_r}\alpha_0, \quad a_j = g\alpha_0, \quad (3.10)$$

por conta de como os modos aparecem acoplados nas equações. Há uma simetria entre as equações para $j = 1, \dots, 4$, porem a não linearidade na equação de $j = 0$ acopla modos de uma forma diferente, levando a necessidade de uma reescala diferente. Também há uma diferença quanto às perdas, modeladas por $\gamma_0 \neq \gamma$. enquanto o ruído não se transforma de maneira trivial, como podemos ver explicitando sua dependência temporal. Nas eq. (3.5), $\Phi_j(t)$ foi definido tal que sua variância (Eq. (3.4)) seja proporcional à $\delta(t - t')$. Ao fazer a transformação $t \rightarrow \gamma t$, a função delta deverá se transformar segundo a propriedade $\delta(\gamma t) = \frac{1}{|\gamma|}\delta(t)$. Portanto, $\Phi_j(\tau) \equiv \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\Phi_j(t)$, mantendo sua média inalterada e garantindo que sua variância mantenha a forma desejada:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_j(\tau) \rangle &= \langle \Phi_j(t) \rangle = 0 \\ \langle \Phi_j(\tau)\Phi_j(\tau') \rangle &= \frac{1}{|\gamma|} \frac{\delta(t - t')}{2} = \frac{\delta(\tau - \tau')}{2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Nessas novas variáveis, as equações para amplitudes a são:

$$\begin{aligned}\frac{da_0}{d\tau} &= \mu_0 - a_0 - \sum_{j=1}^2 (a_j a_{j+2}) + 2g\Phi_0 \\ \frac{da_j}{dt} &= \mu_j e^{i\phi_j} - a_j + (a_0 a_{j+2}^*) + g\sqrt{2}\Phi_j \\ \frac{da_{j+2}}{dt} &= \mu_{j+2} e^{i\phi_{j+2}} - a_{j+2} + (a_0 a_j^*) + g\sqrt{2}\Phi_{j+2} ,\end{aligned}\tag{3.12}$$

Na ausência de injeções, há um ponto crítico quando o parâmetro $\mu_0 = 1$, indicando o funcionamento do OPO no limiar de oscilação. Acima deste valor, os campos sinal e complementar crescem linearmente com a intensidade do bombeio. Na presença de injeções, embora não exista mais um limiar verdadeiro, estenderemos essa terminologia para designar situações envolvendo o feixe de bombeamento abaixo ($\mu_0 < 1$) ou acima ($\mu_0 > 1$) do que seria o limiar na situação a qual o termo tem seu uso adequado. Durante este trabalho, também descreveremos os feixes de injeção μ_j ($j = 1, \dots, 4$) como frações da intensidade μ_0 , sempre utilizando uma medida relativa de quão intenso um feixe é comparado ao bombeamento, por sua vez comparado ao limiar.

As eq. (3.12) constituem um sistema de dez equações diferenciais estocásticas acopladas, descrevendo completamente o comportamento do sistema, mas apresentam grande dificuldade de resolução, exceto por método numérico. Mas algumas aproximações podem fornecer expressões analíticas que auxiliam na compreensão deste sistema, e sua validade será avaliada comparando com simulações numéricas. Trataremos a chamada aproximação de não-depleção na seção 3.4.

3.2.2 Equações reescaladas para quadraturas

Temos como objetivo estudar o espectro de squeezing das quadraturas dos campos envolvidos neste sistema. Para isso, definiremos as quadraturas de um campo α_j como:

$$X_j = \alpha_j^* + \alpha_j, \quad Y_j = -i(\alpha_j^* - \alpha_j).\tag{3.13}$$

Assim, de maneira direta, definimos quadraturas de um campo a_j como:

$$\begin{aligned}a_0 &= g\sqrt{2\gamma_r}(\alpha_j^* + \alpha_j), \quad y_j = -ig\sqrt{2\gamma_r}(\alpha_j^* - \alpha_j) , \\ a_j &= g(\alpha_j^* + \alpha_j), \quad y_j = -ig(\alpha_j^* - \alpha_j) .\end{aligned}\tag{3.14}$$

Ou, mais explicitamente, temos:

$$\begin{aligned} x_0 &= g\sqrt{2\gamma_r}X_0, & y_0 &= g\sqrt{2\gamma_r}Y_0, \\ x_j &= gX_j, & y_j &= gY_j. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Nessas novas variáveis, as equações para quadraturas são

$$\begin{aligned} dx_0 &= \gamma_r(2\mu_0 - x_0 - \sum_{j=1}^2(x_jx_{j+2} - y_jy_{j+2}))d\tau + 2g\gamma_r\Phi_{x0} \\ dy_0 &= \gamma_r(-y_0 - \sum_{j=1}^2(x_jy_{j+2} + y_jy_{j+2}))d\tau + 2g\gamma_r\Phi_{y0} \\ dx_j &= (2\mu_j \cos \phi_j - x_j + \frac{1}{2}(x_0x_{j+2} + y_0y_{j+2}))d\tau + g\sqrt{2}\Phi_{xj} \\ dy_j &= (2\mu_j \sin \phi_j - y_j + \frac{1}{2}(x_0y_{j+2} - y_0x_{j+2}))d\tau + g\sqrt{2}\Phi_{yj} \\ dx_{j+2} &= (2\mu_{j+2} \cos \phi_{j+2} - x_{j+2} + \frac{1}{2}(x_0x_j + y_0y_j))d\tau + g\sqrt{2}\Phi_{xj+2} \\ dy_{j+2} &= (2\mu_{j+2} \sin \phi_{j+2} - y_{j+2} + \frac{1}{2}(x_0y_j - y_0x_j))d\tau + g\sqrt{2}\Phi_{yj+2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

como o ruído também adequadamente reescrito em quadraturas,

$$\Phi_{x_j} = \Phi_j + \Phi_j^*, \quad \Phi_{y_j} = -i(\Phi_j + \Phi_j^*), \quad (3.17)$$

sua média e variância determinadas por

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{x_j}(\tau) \rangle &= \langle \Phi_{y_j}(\tau') \rangle = 0, \\ \langle \Phi_{x_i}^*(\tau)\Phi_{x_j}(\tau') \rangle &= \langle \Phi_{y_i}^*(\tau)\Phi_{y_j}(\tau') \rangle = \delta_{ij}\delta(\tau - \tau'). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Os campos injetados na cavidade ótica também ficam denotados por novos parâmetro sem dimensão, redefinidos por:

$$\mu_0 \equiv \frac{\chi E_0}{\gamma\gamma_0}, \quad \mu_j \equiv \frac{\chi E_j}{\gamma\sqrt{2}\gamma\gamma_0}. \quad (3.19)$$

Esse tipo de reescala é uma ferramenta muito útil para adequar as equações à um teoria de perturbação, envolvendo potências de g .

$$x_j = \sum g^n x_j^{(n)}, \quad y_j = \sum g^n x_j^{(n)} \quad (3.20)$$

O termo de ordem zero corresponde ao estado estacionário, um campo clássico que pode ser calculado extraindo a média nas equações, e de ordem linear em g na expansão se comunica com as flutuações quânticas, da ordem de g nas eqs. (3.16). Potências de ordem

superior correspondem a correlações quânticas, que serão de ordem superior em g .

O conjunto de dez equações estocásticas não-lineares acopladas nas eqs.(3.16) descrevem completamente o comportamento do sistema, mas sua resolução ainda é bastante complicada, e será usada simulações numéricas. Inicialmente, estudaremos a solução estacionária, e algumas propriedades que poderiam ser obtidas classicamente, e embora não tenhamos seguido com a teoria de perturbação exemplificada aqui, introduziremos uma aproximação que permite resoluções analíticas. A validade dessas aproximações será discutida sempre comparando com a simulação numérica do problema completo, e fornece algumas informações físicas interessantes deste sistema, desde que estejamos em sua região de validade.

3.3 Soluções estacionárias

3.3.1 Resolução para amplitudes

Nessa seção, estudaremos a dinâmica clássica do sistema, buscando as soluções de estado estacionário. Para isso, assumimos que não há mais variação temporal nas eqs. (3.5), i.e. $da/d\tau = 0$, e eliminando os ruídos. Para amplitudes, as referidas equações tornam o sistema

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_0 - a_0 - 2 \sum_{j=1}^2 a_j a_{j+2} \\ 0 &= \mu_j e^{\phi_j} - a_j + a_0 a_{j+2} \\ 0 &= \mu_{j+2} e^{\phi_{j+2}} - a_{j+2} + a_0 a_j. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Manipulando eqs. (3.21), obtemos os modos convertidos a_j e a_{j+2} em função de a_0 ,

$$a_j = \frac{\mu_j e^{\phi_j} + a_0 \mu_{j+2} e^{\phi_{j+2}}}{1 - a_0^2} \tag{3.22}$$

$$a_{j+2} = \frac{\mu_{j+2} e^{\phi_{j+2}} + a_0 \mu_j e^{\phi_j}}{1 - a_0^2} \tag{3.23}$$

e substituindo-as na primeira equação das (3.21) a_0 será dado pela solução de um polinômio de grau 5

$$(a_0 - \mu_0)(1 - a_0^2)^2 = 2 \sum_{j=1}^2 (\mu_j + a_0 \mu_{j+2})(\mu_{j+2} + a_0 \mu_j), \tag{3.24}$$

que pode ser resolvido numericamente. No caso limite em que apenas o feixe de bombeamento μ_0 presente, é simples verificar que as eqs. (3.21) e (3.24) levam ao conhecido resultado $a_j = 0$ enquanto a_0 admite as soluções $a_0 = \mu_0$ e $a_0 = \pm 1$, e é possível mostrar

que a primeira delas vale na região abaixo do limiar, enquanto a segunda corresponde para a região acima do limiar. Essas situações foram tratadas matematicamente para quadraturas em (COUTINHO DOS SANTOS et al., 2005), e será discutida novamente na próxima seção.

3.3.2 Resolução para quadraturas

Também tratamos o estado estacionário através das quadraturas. Seguindo o mesmo procedimento, eliminamos a derivada temporal e ruídos nas eq. (3.16) e precisaremos resolver simultaneamente o sistema

$$\begin{aligned}
2\mu_0 - x_0 - \sum_{j=1}^2 (x_j x_{j+2} - y_j y_{j+2}) &= 0 \\
y_0 + \sum_{j=1}^2 (x_j y_{j+2} + y_j y_{j+2}) &= 0 \\
2\mu_j \cos \phi_j - x_j + \frac{1}{2}(x_0 x_{j+2} + y_0 y_{j+2}) &= 0 \\
\mu_j \sin \phi_j - y_j + \frac{1}{2}(x_0 y_{j+2} - y_0 x_{j+2}) &= 0 \\
\mu_{j+2} \cos \phi_{j+2} - x_{j+2} + \frac{1}{2}(x_0 x_j + y_0 y_j) &= 0 \\
\mu_{j+2} \sin \phi_{j+2} - y_{j+2} + \frac{1}{2}(x_0 y_j - y_0 x_j) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Como consideramos a amplitude do bombeio como real, é uma suposição razoável considerar $y_0 = 0$ durante todo o processo. Formalmente, deveríamos resolver a equação para y_0 , mas a solução numérica mostrou que não há diferença de considerar y_0 como nulo. Isso permite prosseguir analiticamente de maneira mais simples, fornecendo as quadraturas dos feixes convertidos em função de x_0 :

$$\begin{aligned}
x_j &= \frac{8\mu_j \cos \phi_j + 4\mu_{j+2} x_0 \cos \phi_{j+2}}{4 - x_0^2} \\
x_{j+2} &= \frac{8\mu_{(j+2)} \cos \phi_{j+2} + 4\mu_j x_0 \cos \phi_j}{4 - x_0^2} \\
y_j &= \frac{8\mu_j \sin \phi_j - 4\mu_{j+2} x_0 \sin \phi_{j+2}}{4 - x_0^2} \\
y_{j+2} &= \frac{8\mu_{(j+2)} \sin \phi_{j+2} - 4\mu_j x_0 \sin \phi_j}{4 - x_0^2}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Substituindo-as na primeira equação de (3.25), podemos escrever uma expressão para x_0 dentro da cavidade. Assim como a amplitude a_0 , temos também um polinômio de grau

5 a ser resolvido numericamente.

$$(2\mu_0 - x_0)(4 - x_0^2)^2 = \sum_{j=1}^2 16 \left[2x_0(\mu_j^2 + \mu_{j+2}^2) + (4 + x_0^2)\mu_j\mu_{j+2} \cos(\phi_1 + \phi_3) \right] \quad (3.27)$$

Novamente, é possível verificar o caso onde há somente uma injeção real no modo μ_1 . Quadraturas $y_j = 0$ para $j = 1, \dots, 4$. Injetar apenas no modo 1 estimula a conversão paramétrica de acontecer somente entre feixes 1 e 3, anulando a o canal 2 e 4. Para as quadraturas x_1 e x_3 , reproduzimos o resultado de (COUTINHO DOS SANTOS et al., 2005) Caso o único modo injetado fosse um dos modos de índices pares, ocorreria a conversão somente nesses modos, não envolvendo participação dos modos 1 e 3.

$$x_1 = \frac{8\mu_1}{4 - x_0^2}, \quad x_3 = \frac{4\mu_1 x_0}{4 - x_0^2}. \quad (3.28)$$

Por fim, é possível determinar a intensidade fora da cavidade óptica diretamente das amplitudes, ou usando a relação

$$I_j = \langle a_j^* a_j \rangle = \frac{\langle x_j^2 \rangle + \langle y_j^2 \rangle}{4}. \quad (3.29)$$

Um outro caso limite é a ausência total de injeções, mantendo apenas o bombeio. Nesse caso, o lado direito da eq. (3.27) se anula e as soluções são $x_0 = 2\mu_0$ e $x_0 = \pm 2$. Ambas foram tratadas em (COUTINHO DOS SANTOS et al., 2005), com a primeira delas valendo na região abaixo do limiar. É interpretada como se toda a energia injetada na quadratura x_0 continuasse nela, sem ser utilizada para gerar fótons os outros modos, reproduzindo o resultado $a_0 = \mu_0$ (uma solução da Eq. (3.24)) com o uso da eq. (3.29). No referido trabalho foi mostrado também que o x_0 estacionário aproxima-se assintoticamente de $x_0 = 2$, quando o sistema OPO opera acima do limiar.

Na Fig. 5 temos ambos resultados analítico e numérico para a intensidade do estado estacionário para feixes sinal e complementar quando $\mu_0 = 0.2$. Estes perfis de intensidade são mostrados em função da fase relativa $\phi = \phi_1 + \phi_3$, que representa a diferença de fase combinada entre o bombeamento e a semente injetada. Podemos notar que amplitudes dos feixes sinal e complementar podem variar. Quando injeções nos feixes sinal e complementar possuem igual intensidade, a resposta observada é otimizada, denotando máxima conversão. Nesse cenário, os feixes convertidos sinal e complementar exibem intensidades idênticas e são sensíveis à fase, dependendo da fase relativa ϕ . Contudo, se a injeção do modo sinal for caracterizada por um fator de proporcionalidade $\mu_1 = 0.03\mu_0$ enquanto o complementar recebe $\mu_3 = 0.01\mu_0$, o modo correspondente ao sinal torna-se mais intenso

que o complementar. Ainda observamos o fenômeno de sensibilidade à fase, porém com o sinal mais intenso que o complementar convertido. Na ausência de um dos feixes, (no exemplo, o complementar) o sistema exibe um comportamento distinto. Especificamente, nós observamos uma geração de um complementar de intensidade relativamente baixa, enquanto o sinal se mostra significativamente mais forte. Nessa configuração, como esperado, não há dependência com a fase em um dos feixes. Este estudo de amplificação sensível à fase com diferentes intensidades dos feixes injetados foi realizado seguindo o trabalho desenvolvido em (WANG; LI, 2016).

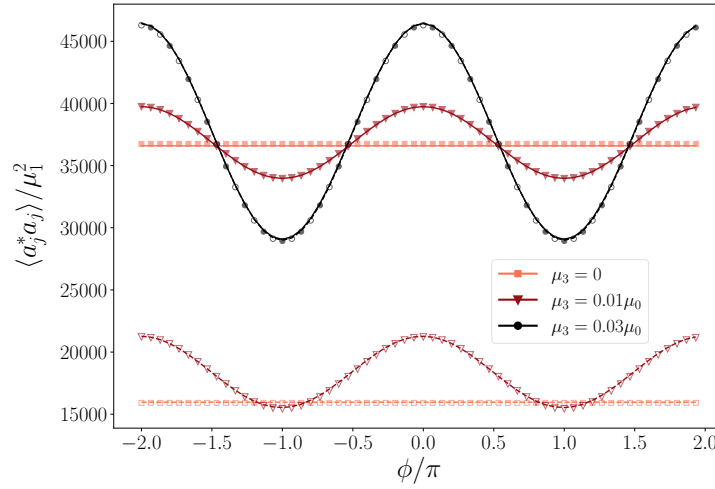


Figura 5: Feixes sinal e complementar como função da fase relativa entre bombeio e injeções para $\mu_0 = 0.2$. Injeção do sinal fixada em $\mu_1 = 0.03$ e complementar variando de 0 à $\mu_0 = 0.03\mu_0$ (cores da mais clara para mais escura). Curvas mostram resultado analítico derivados da Eq. (3.21) ou equivalentemente da Eq. (3.25), enquanto símbolos mostram resultado numérico a partir da Eq. (3.12). Símbolos vazios e curvas tracejadas: intensidade do feixe complementar. Símbolos preenchidos e curvas sólidas: intensidade do sinal.

3.4 Intensidade no regime de não-depleção

Retornaremos ao conjunto de equações estocásticas para amplitudes, eq. (3.12). Embora possam ser resolvidas numericamente, desenvolvemos a teoria utilizando uma aproximação. Nosso sistema envolve feixes de injeção com intensidade muito menor que a intensidade do bombeio, e que por sua vez é um feixe cuja intensidade está abaixo do limiar de oscilação do OPO. Nessas condições, faremos a chamada aproximação de não depleção: assumimos que a energia do feixe de bombeio varia muito pouco na criação de fótons dos modos convertidos e assim assumiremos regime estacionário para a_0 . Isso elimina uma das equações, mantendo a_0 constante e restando quatro equações acopladas

para os modos convertidos $j = 1, \dots, 4$,

$$\begin{aligned} a_0 &= \mu_0, \\ \frac{da_j}{d\tau} &= \mu_j e^{i\phi_j} - a_j + a_0 a_{j+2}^* + g\sqrt{2}\Phi_j^{in}(\tau). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Essa aproximação elimina o termo não linear nas equações de índice j , uma vez que $a_0 a_{j+2} \rightarrow \mu_0 a_{j+2}$ e o sistema pode ser analiticamente resolvido, que será feito transformando amplitude e ruído para o domínio de frequência via transformada de Fourier, definida na forma:

$$\tilde{f}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\Omega\tau} f(\tau). \quad (3.31)$$

Aplicando a transformada em (3.30), obtemos

$$\begin{aligned} i\Omega \tilde{a}_j(\Omega) &= \sqrt{2\pi} \mu_j e^{i\phi_j} \delta(\Omega) - \tilde{a}_j(\Omega) + \mu_0 \tilde{a}_{j+2}^*(-\Omega) + g\sqrt{2} \tilde{\Phi}_j^{in}(\Omega), \\ i\Omega \tilde{a}_{j+2}(\Omega) &= \sqrt{2\pi} \mu_{j+2} e^{i\phi_{j+2}} \delta(\Omega) - \tilde{a}_{j+2}(\Omega) + \mu_0 \tilde{a}_j^*(-\Omega) + g\sqrt{2} \tilde{\Phi}_{j+2}^{in}(\Omega), \end{aligned} \quad (3.32)$$

que pode ser resolvido para os campos intracavidade, levando à

$$\tilde{a}_j(\Omega) = g\sqrt{2} \frac{(1 + i\Omega) \tilde{\Phi}_j^{in}(\Omega) + \mu_0 \tilde{\Phi}_{j+2}^{in}(-\Omega)}{(1 + i\Omega)^2 - \mu_0^2} + \sqrt{2\pi} \delta(\Omega) \frac{\mu_j e^{i\phi_j} + \mu_{j+2}^* e^{-i\phi_j}}{(1 + i\Omega)^2 - \mu_0^2}. \quad (3.33)$$

Retornando as variáveis de amplitudes originais, denotadas como $\alpha_j = a_j/g$, podemos determinar o campo fora da cavidade através de relações input-output (WALLS; MILBURN, 2007),

$$\tilde{\alpha}_j^{out}(\Omega) = \sqrt{2\gamma} \tilde{\alpha}_j(\Omega) - \sqrt{\gamma} \tilde{\Phi}_j^{in}(\Omega). \quad (3.34)$$

Então substituindo a Eq. (3.33) in Eq. (3.34) podemos construir correlações de amplitude, e através de um processo de média obter:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\alpha}_j^{*out}(\Omega) \tilde{\alpha}_k^{out}(\Omega') \rangle &= \delta_{jk} \delta(\Omega + \Omega') \left[\frac{1}{2} + \frac{4\gamma\mu_0^2}{(1 - \Omega^2 - \mu_0^2)^2 + 4\Omega^2} \right] \\ &+ \frac{4\gamma\pi(\mu_j^* + \mu_0\mu_{j+2})(\mu_k + \mu_0\mu_{k+2}^*)\delta(-\Omega)\delta(\Omega')}{g^2((1 - \Omega^2 - \mu_0^2)^2 + 4\Omega^2)} \end{aligned} \quad (3.35)$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\alpha}_j^{*out}(\Omega) \tilde{\alpha}_k^{*out}(\Omega') \rangle &= \langle \tilde{\alpha}_j^{out}(\Omega) \tilde{\alpha}_k^{out}(\Omega') \rangle \\
&= \gamma \left[\frac{\mu_0(1 + \Omega^2 + \mu_0^2)(\delta_{j,k+2} + \delta_{j+2,k})\delta(\Omega + \Omega')}{(1 - \Omega^2 - \mu_0^2)^2 + 4\Omega^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{4\gamma\pi(\mu_j + \mu_0\mu_{j+2}^*)(\mu_k + \mu_0\mu_{k+2}^*)\delta(\Omega)\delta(\Omega')}{g^2((1 - \Omega^2 - \mu_0^2)^2 + 4\Omega^2)} \right].
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Tomando a transformada inversa de fourier, obtemos as correlações no domínio temporal

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_j^{*out}(t) \alpha_k^{out}(t) \rangle &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu_0^2}{1 - \mu_0^2} \right) \delta_{jk} + \frac{2\gamma(\mu_j^* + \mu_0\mu_{j+2})(\mu_k^* + \mu_0\mu_{k+2})}{g^2(1 - \mu_0^2)^2}, \\
\langle \alpha_j^{*out}(t) \alpha_k^{*out}(t) \rangle &= \frac{\mu}{2(1 - \mu_0^2)} (\delta_{j,k+2} + \delta_{j+2,k}) + \frac{2\gamma(\mu_j^* + \mu_0\mu_{j+2})(\mu_k^* + \mu_0\mu_{k+2})}{g^2(1 - \mu_0^2)^2}, \\
\langle \alpha_j^{out}(t) \alpha_k^{out}(t) \rangle &= \frac{\mu}{2(1 - \mu_0^2)} (\delta_{j,k+2} + \delta_{j+2,k}) + \frac{2\gamma(\mu_j^* + \mu_0\mu_{j+2})(\mu_k^* + \mu_0\mu_{k+2})}{g^2(1 - \mu_0^2)^2}.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Esses correlações terão um papel muito importante no capítulo 5, uma vez que serão utilizadas para compor a desigualdade de Bell estudada neste trabalho.

A intensidade referente a cada modo é obtida da eq. (3.37) escolhendo índices $j = k$. Uma característica importante desses resultados, é como a injeção desempenha seu papel nos mesmos. Ao se fazer $\mu_j = \mu_{j+2} = 0$ tanto na solução para amplitudes (eq. (3.33)), correlações no espaço de frequência (eq. (3.35)) ou no espaço temporal (eq. (3.37)), vemos que o último termo dessas equações se anula. Isto é, na ausência de injeções e considerando o bombeio estacionário, há apenas vácuo nos modos disponíveis para conversão, e sua contribuição já aparece em todas as soluções aqui discutidas. A presença das injeções altera os resultados somente por meio de um termo aditivo em suas equações.

Por fim, direcionaremos nossa atenção para a solução para intensidade quando há apenas vácuo. Essa expressão apresenta contribuições de dois termos:

$$\langle \alpha_j^{*out}(t) \alpha_j^{out}(t) \rangle^{VAC} = \frac{1}{2} + \frac{\mu_0^2}{1 - \mu_0^2}. \tag{3.38}$$

Aqui, esses dois termos são identificados como contribuições de energia de ponto zero 1/2 e do feixe de bombeamento para a energia de um modo convertido j , no regime de não-depleção.

A seguir, estudaremos situações onde essa aproximação pode ser utilizada. Iremos comparar as intensidades obtidas pelo cálculo analítico apresentado nesta seção, na primeira equação das eqs. (3.37), com simulações numéricas dadas pelas eqs. (3.12), apresentadas na seção (3.2.1).

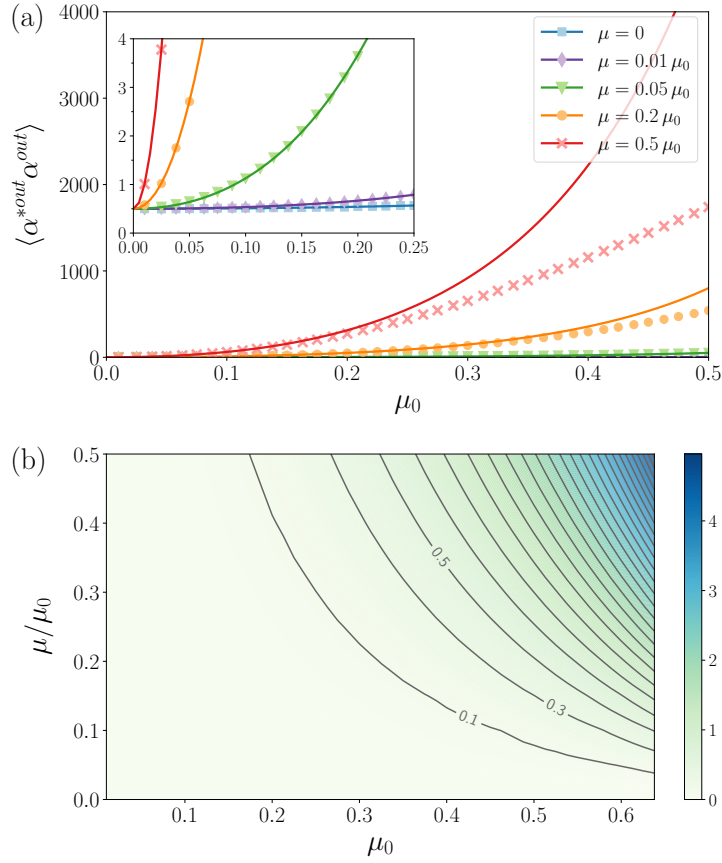


Figura 6: (a) Intensidades dos feixes convertidos apresentadas como função do parâmetro de bombeio μ_0 em cinco cenários de injeções diferentes. Curvas: soluções no regime de não-depleção (Eq. (3.37)). Símbolos: integração numérica das Eqs. (3.12). Gráfico interno: comportamento detalhado ao redor de $\mu_0 = 0$. (b) Gráfico de densidade da diferença relativa ϵ entre intensidades nas soluções numéricas e analíticas (Eq. 3.39). Curvas de nível estão espaçadas de 0.2 (apenas os três primeiros valores estão mostrados, por clareza).

A Fig. 6(a) exibe a intensidade de um campo transmitido pelo OPO para um modo α_j , mostrando sua dependência com os parâmetros de bombeio e injeção μ_0 e μ_j . Em todas as situações analisadas, consideramos $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 \equiv \mu$ e $\phi_2 = \phi_3 = \phi_1 = \phi_4 = 0$ tal que todos os modos apresentem o mesmo comportamento estatístico. Além disso, escolhemos $g = 0.01$ e por simplicidade, $\gamma = 1$. Curvas sólidas representam resultados analíticos como nas eqs. (3.37), enquanto símbolos representam soluções numéricas do sistema eq.(3.12), se referindo à solução completa do conjunto de equações. Integrações numéricas das eqs. (3.12) foram feitas com um método preditor-corretor de segunda ordem (KLOEDEN; PLATEN, 1992), e ambas médias temporais e de ensemble são consideradas após um tempo transiente adequado.

Neste ponto, é importante destacar a forte concordância entre curvas analíticas e numéricas, particularmente em regimes onde $\mu_0 < 0.3$ e $\mu_j < 0.2\mu_0$, onde elas exibem

uma superposição quase perfeita. A curva azul (quadrados) refere-se ao caso de injeção nula. O gráfico interno fornece uma ampliação na região onde o parâmetro do bombeio é menor que 15% do limiar do OPO, no qual mostra que nessa região a aproximação de não-depleção concorda muito bem com a solução numérica. Como esperado, em todos os resultados a intensidade transmitida para $\mu_0 = 0$ é em torno de $\frac{1}{2}$, levando em conta que todo o arcabouço matemático se desenvolveu através da representação de Wigner, onde esse valor representa a energia do estado de vácuo (WALLS; MILBURN, 2007). Fig. 6(b) mostra um gráfico de densidade onde a intensidade de cores representam a distância relativa entre intensidades do campo de saída do OPO nas soluções numéricas e analíticas, especificamente

$$\epsilon \equiv \frac{|\langle \alpha_j^{* \text{ out}} \alpha_j^{\text{out}} \rangle_{\text{num}} - \langle \alpha_j^{* \text{ out}} \alpha_j^{\text{out}} \rangle_{\text{ana}}|}{\langle \alpha_j^{* \text{ out}} \alpha_j^{\text{out}} \rangle_{\text{num}}}. \quad (3.39)$$

Na região predominantemente verde, abaixo da curva de nível 0.1, encontra-se os valores típicos de μ_0 and μ nos quais a aproximação de não-depleção concorda muito bem com a solução numérica.

4 Espectro de Ruído e Correlações EPR

Emaranhamento é definido por correlações não clássicas entre dois subsistemas quânticos cuja matriz densidade não pode ser escrita como uma soma convexa de produtos dos subsistemas. As quadraturas (variáveis contínuas) dos modos presentes neste OPO injetado apresentam emaranhamento, que será caracterizado através do critério de Duan-Simon ([DUAN et al., 2000](#)). Este critério leva em conta a não-separabilidade do sistema avaliado. Inicialmente, será apresentado mais detalhadamente as quadraturas de amplitude e fase, sendo discutido estados comprimidos a dois modos (que são os estados gerados pelo OPO). Verificaremos correlações entre os modos produzidos, e trataremos do espectro de ruído, relacionado ao emaranhamento e das correlações tipo Einstein-Podolsky-Rosen (EPR). Estados emaranhados podem ser utilizados para propostas que visem medição e violação de desigualdades do tipo Bell. No próximo capítulo, seguiremos o que foi desenvolvido aqui para uma proposta experimental onde será possível obter violação da desigualdade de Bell, dentro do regime de validade da aproximação de não-depleção apresentadas no Cap. 3.

4.1 Quadraturas a dois modos

Os fótons nos modos de saída do nosso OPO injetado são criados ou destruídos em pares. Os dois modos gerados apresentam ruídos correlacionados, com suas quadraturas carregando uma quantidade diferente desse ruído. Um formalismo para tratar estes sistemas ópticos a dois fótons foi introduzido em dois artigos em 1985, onde foi apresentado descrições de quadraturas de amplitude e fase complexas e descrições de estados comprimidos a dois modos (*2-mode squeezed states*), onde o primeiro desses trabalhos enfatizava sua interpretação física ([CAVES; SCHUMAKER, 1985](#)) e o segundo detalhava mais suas propriedades matemáticas ([SCHUMAKER; CAVES, 1985](#)).

No cap. 3, estudamos as equações de amplitude e quadraturas para cada modo separadamente. Nesta seção, estudaremos algumas propriedades das quadraturas, e depois

revisitaremos as equações de quadratura já desenvolvidas na seção 3.2.2.

Uma definição mais geral de quadratura é

$$\hat{X}_j^\theta = e^{-i\theta} \hat{a}_j + e^{i\theta} \hat{a}_j^\dagger \quad (4.1)$$

Usando novamente relações input-output (3.34), podemos obter os momentos estatísticos para quadraturas, fora da cavidade óptica. Uma quantidade acessada experimentalmente é a covariância V_{jk}^θ de quadraturas

$$V_{jk}^\theta = \langle \Delta \hat{X}_j^\theta \Delta \hat{X}_k^\theta \rangle, \quad (4.2)$$

com a quantidade $\Delta \hat{X}_j^\theta$ sendo

$$\Delta \hat{X}_j^\theta = \hat{X}_j^\theta - \langle \hat{X}_j^\theta \rangle, \quad (4.3)$$

ou seja, no caso $j = k$, V_{jj}^θ se reduz a variância de uma quadratura que pode ser selecionada em um ângulo θ através da fase de um oscilador local em um esquema de detecção homodina, por exemplo. Escolhas de fase $\theta = 0$ ou $\theta = \pi/2$ retorna as nossas quadraturas usuais (DECHOUM et al., 2004),

$$X_j^0 = x_j \quad X_j^{\pi/2} = y_j. \quad (4.4)$$

E a relação de comutação entre elas é dada por

$$[x_j, y_j] = 2i\delta_{ij}. \quad (4.5)$$

Uma vez que o OPO gera simultaneamente dois fótons, uma descrição natural para este sistema são quadraturas complexas, de amplitude e fase, que combina dois modos diferentes A e B onde os fótons são criados e aniquilados.

$$\begin{aligned} \hat{X}_{A,B}^\theta &= e^{-i\theta} \hat{a}_A + e^{i\theta} \hat{a}_B^\dagger \\ &= \frac{1}{2} \left[(\hat{X}_A^\theta + \hat{X}_B^\theta) + i(\hat{X}_A^{\theta+\pi/2} - \hat{X}_B^{\theta+\pi/2}) \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

É possível representar esses estados a dois modos no espaço de fase, e conforme discutido em (SCHNABEL, 2017), este sistema *bi-partite* possibilita medidas em um subsistema A e medidas simultâneas em um subsistema B . É possível efetuar um número grande de medidas simultâneas em um ensemble, e obter a variância conjunta ((eq. 4.2))

$$\langle \Delta(\hat{X}^A + \hat{X}^B) \Delta(\hat{X}^A + \hat{X}^B) \rangle. \quad (4.7)$$

Um estado simetricamente compartilhado entre duas partes A e B é dito em *squeezed state* a dois modos se sua variância conjunta satisfizer a desigualdade conhecida como critério de Duan-Simon

$$\frac{\Delta^2(x^A - x^B)}{\Delta^2(x_{vac}^A - x_{vac}^B)} + \frac{\Delta^2(y^A + y^B)}{\Delta^2(y_{vac}^A + y_{vac}^B)} < 2. \quad (4.8)$$

Para variáveis gaussianas, o critério de Duan-Simon é condição necessária e suficiente para inseparabilidade para variáveis contínuas entre dois subsistemas. (DUAN et al., 2000). Seguindo este critério, o *squeezed state* a dois modos é definido como um estado não separável, onde a existência de emaranhamento é garantida. As variâncias do estado de vácuo nos denominadores são obtidas considerando apenas quadraturas para o campo de vácuo, na nossa notação descrito por Φ_x e Φ_j :

$$\begin{aligned} x_{vac}^A - x_{vac}^B &= \Phi_{x_j} - \Phi_{x_{j+2}} , \\ y_{vac}^A + y_{vac}^B &= \Phi_{y_j} + \Phi_{y_{j+2}} , \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde obtemos:

$$\Delta^2(x_{vac}^A - x_{vac}^B) = \Delta^2(y_{vac}^A + y_{vac}^B) = \delta(\Omega - \Omega') . \quad (4.10)$$

Isto é, as quadraturas de estado de vácuo possuem variância igual a 1, para a normalização que estamos utilizando. Identificando também o subsistema A como modo j e o subsistema B como modo $j+2$, o critério de Duan-Simon (eq. (4.8)) para o OPO a cinco modos torna-se:

$$\Delta^2(x_j - x_{j+2}) + \Delta^2(y_j + y_{j+2}) < 2. \quad (4.11)$$

Estados comprimidos a dois modos apresentam emaranhamento. Nesse caso, como discutido em (DECHOUM et al., 2004) eles inclusive apresentam correlações tipo EPR (Einstein-Podolsky-Rosen). O paradoxo EPR originalmente foi formulado em termos de dois sistemas que apresentavam posição e momento fortemente correlacionados. Quadraturas de amplitude e fase possuem propriedades similares a posição e momento: sua relação de comutação é $\propto i$, o que estabelece uma relação de incerteza entre elas. Assim, o paradoxo EPR foi proposto em termos de variáveis contínuas utilizando quadraturas de amplitudes e fase em 1989, (REID, 1989), num sistema de amplificação paramétrica não degenerada. Em 1992, estas correlações EPR para variáveis contínuas propostas por Reid foram demonstradas experimentalmente por (OU et al., 1992).

Na próxima seção, manteremos a identificação os subsistemas A e B entre os modos j e $j+2$ como apresentado para o critério de Duan-Simon, e veremos que os pares de quadraturas dos modos 1 e 3 apresentam squeezing e constituem um par EPR, assim

como os pares 2 e 4 compartilham estas mesmas propriedades.

4.2 Soluções do OPO em quadraturas a dois modos

Faremos um retorno às equações para quadraturas reescaladas eq. (3.16), agora estudadas com a aproximação de não depleção desenvolvida na seção 3.4. Utilizando as soluções estacionárias para quadraturas do bombeio abaixo do limiar,

$$\begin{aligned} x_0 &= 2\mu_0, \\ y_0 &= 0, \end{aligned} \tag{4.12}$$

e substituindo-as nas equações diferenciais para feixes convertidos (eq. (3.16)), obtemos:

$$\begin{aligned} dx_j &= (2\mu_j \cos \phi_j - x_j + \frac{1}{2}\mu_0 x_{j+2})d\tau + g\sqrt{2}\Phi_{x_j} \\ dy_j &= (2\mu_j \sin \phi_j - y_j + \frac{1}{2}\mu_0 y_{j+2})d\tau + g\sqrt{2}\Phi_{y_j} \\ dx_{j+2} &= (2\mu_{j+2} \cos \phi_{j+2} - x_{j+2} + \frac{1}{2}\mu_0 x_j)d\tau + g\sqrt{2}\Phi_{x_{j+2}} \\ dy_{j+2} &= (2\mu_{j+2} \sin \phi_{j+2} - y_{j+2} + \frac{1}{2}\mu_0 y_j)d\tau + g\sqrt{2}\Phi_{y_{j+2}} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Os feixes do OPO apresentam squeezing a dois modos, de forma que é conveniente tratar as eq. (4.13) utilizando as quadraturas mistas eq. (4.6) propostas na seção anterior. Definimos então novas variáveis que são somas e diferenças entre quadraturas de modos convertidos associados entre si, i.e., modos 1 e 3 e modos 2 e 4.

$$x_{j,j+2}^+ = \frac{x_j + x_{j+2}}{\sqrt{2}}, \quad x_{j,j+2}^- = \frac{x_j - x_{j+2}}{\sqrt{2}}, \tag{4.14}$$

$$y_{j,j+2}^- = \frac{y_j - y_{j+2}}{\sqrt{2}}, \quad y_{j,j+2}^+ = \frac{y_j + y_{j+2}}{\sqrt{2}}. \tag{4.15}$$

$$\tag{4.16}$$

Aqui, o fator $1/\sqrt{2}$ aparece como uma normalização, garantindo que o ruído nas quadraturas combinadas mantenha mesma variância que o ruído das quadraturas dos subsistemas

j e $j + 2$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_{j,j+2}^+}{d\tau} &= (2\mu_j \cos \phi_j + 2\mu_{j+2} \cos \phi_{j+2}) - (1 - \mu_0)x_{j,j+2}^+ + g\sqrt{2}(\Phi_{x_j} + \Phi_{x_{j+2}}), \\
\frac{dy_{j,j+2}^+}{d\tau} &= (2\mu_j \sin \phi_j + 2\mu_{j+2} \sin \phi_{j+2}) - (1 + \mu_0)y_{j,j+2}^+ + g\sqrt{2}(\Phi_{y_j} + \Phi_{y_{j+2}}), \\
\frac{dx_{j,j+2}^-}{d\tau} &= (2\mu_j \cos \phi_j - 2\mu_{j+2} \cos \phi_{j+2}) - (1 + \mu_0)x_{j,j+2}^- + g\sqrt{2}(\Phi_{x_j} - \Phi_{x_{j+2}}), \\
\frac{dy_{j,j+2}^-}{d\tau} &= (2\mu_j \sin \phi_j - 2\mu_{j+2} \sin \phi_{j+2}) - (1 - \mu_0)y_{j,j+2}^- + g\sqrt{2}(\Phi_{y_j} - \Phi_{y_{j+2}}).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Esta mudança de variáveis desacopla as equações em termos das variáveis em quadraturas a dois modos. Porém, isso não significa que nessas variáveis as equações tornaram-se independentes. Há uma combinação de ruídos do processo aparecendo em cada uma das 4.17, fazendo que correlações entre elas continuem aparecendo no sistema. Em um dos pares de quadraturas a dois modos ocorre supressão do ruído (*squeezing*) ao custo de aumentar flutuações no outro par de quadraturas (*anti-squeezing*), ainda se mantendo de acordo com o relação de Incerteza de Heisenberg entre elas. Resolveremos estas equações analiticamente de forma análoga ao que foi feito para amplitude na seção 3.4. Aplicando a transformada de Fourier nas eq. 4.17, obtemos:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{j,j+2}^+(\Omega) &= \frac{1}{1 - \mu_0 + i\Omega} [2\sqrt{\pi}\delta(\Omega)(\mu_j \cos \phi_j + \mu_{j+2} \cos \phi_{j+2}) + g\sqrt{2}(\tilde{\Phi}_{x_j}(\Omega) + \tilde{\Phi}_{x_{j+2}}(\Omega))], \\
\tilde{y}_{j,j+2}^+(\Omega) &= \frac{1}{1 + \mu_0 + i\Omega} [2\sqrt{\pi}\delta(\Omega)(\mu_j \sin \phi_j + \mu_{j+2} \sin \phi_{j+2}) + g\sqrt{2}(\tilde{\Phi}_{y_j}(\Omega) + \tilde{\Phi}_{y_{j+2}}(\Omega))], \\
\tilde{x}_{j,j+2}^-(\Omega) &= \frac{1}{1 + \mu_0 + i\Omega} [2\sqrt{\pi}\delta(\Omega)(\mu_j \cos \phi_j - \mu_{j+2} \cos \phi_{j+2}) + g\sqrt{2}(\tilde{\Phi}_{x_j}(\Omega) - \tilde{\Phi}_{x_{j+2}}(\Omega))], \\
\tilde{y}_{j,j+2}^-(\Omega) &= \frac{1}{1 - \mu_0 + i\Omega} [2\sqrt{\pi}\delta(\Omega)(\mu_j \sin \phi_j - \mu_{j+2} \sin \phi_{j+2}) + g\sqrt{2}(\tilde{\Phi}_{y_j}(\Omega) - \tilde{\Phi}_{y_{j+2}}(\Omega))],
\end{aligned} \tag{4.18}$$

onde os ruídos no espaço de Fourier devem obedecer à:

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\Phi}_{m_j}(\Omega) \rangle &= 0, \\
\langle \tilde{\Phi}_{m_j}(\Omega) \tilde{\Phi}_{m_k}(\Omega') \rangle &= \delta_{jk} \delta(\Omega + \Omega').
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Para verificar compressão e decompressão nas quadraturas, calcularemos o espectro de ruído associado a elas. Continuaremos a análise no domínio de frequência, pois do ponto de vista experimental é a quantidade facilmente acessada fora da cavidade. Novamente, faz-se necessário o uso das relações *input-output* eq. (3.34). Calculamos as seguintes

correlações:

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{y}_{j,j+2}^+ \tilde{y}_{j,j+2}^{+*} \rangle_{\text{out}} &= \delta(\Omega + \Omega') \left[1 - \frac{4\mu_0}{(1 + \mu_0)^2 + \Omega^2} \right] \\
&\quad + 8\gamma\pi\delta(\Omega)\delta(\Omega') \frac{(\mu_j \sin \phi_j + \mu_{j+2} \sin \phi_{j+2})^2}{(1 + \mu_0)^2 + \Omega^2}, \\
\langle \tilde{x}_{j,j+2}^- \tilde{x}_{j,j+2}^{-*} \rangle_{\text{out}} &= \delta(\Omega + \Omega') \left[1 - \frac{4\mu_0}{(1 + \mu_0)^2 + \Omega^2} \right] \\
&\quad + 8\gamma\pi\delta(\Omega)\delta(\Omega') \frac{(\mu_j \cos \phi_j - \mu_{j+2} \cos \phi_{j+2})^2}{(1 + \mu_0)^2 + \Omega^2}, \\
\langle \tilde{y}_{j,j+2}^- \tilde{y}_{j,j+2}^{-*} \rangle_{\text{out}} &= \delta(\Omega + \Omega') \left[1 + \frac{4\mu_0}{(1 - \mu_0)^2 + \Omega^2} \right] \\
&\quad + 8\gamma\pi\delta(\Omega)\delta(\Omega') \frac{(\mu_j \sin \phi_j - \mu_{j+2} \sin \phi_{j+2})^2}{(1 - \mu_0)^2 + \Omega^2}, \\
\langle \tilde{x}_{j,j+2}^+ \tilde{x}_{j,j+2}^{+*} \rangle_{\text{out}} &= \delta(\Omega + \Omega') \left[1 + \frac{4\mu_0}{(1 - \mu_0)^2 + \Omega^2} \right] \\
&\quad + 8\gamma\pi\delta(\Omega)\delta(\Omega') \frac{(\mu_j \cos \phi_j + \mu_{j+2} \cos \phi_{j+2})^2}{(1 - \mu_0)^2 + \Omega^2}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Similar ao que foi estudado sobre como os termos de injeção afetavam a intensidade na seção 3.4, as injeções também aparecem como termo aditivo no espectro de ruído. É notável que estes termos de injeção impactam somente a componente de frequência zero do espectro de correlação.

4.3 Espectro de *squeezing*

Definimos o espectro de *squeezing* $V_{n_{l,l+2}}^{m_{k,k+2}}(\Omega)$ como

$$V_{n_{l,l+2}}^{m_{k,k+2}}(\Omega)\delta(\Omega + \Omega') = \langle \Delta m_{k,k+2}(\Omega) \Delta n_{l,l+2}(\Omega') \rangle \tag{4.21}$$

O espectro se relaciona com a covariância de quadraturas (eq. 4.2), com índices m e n que podem ser quaisquer das combinações x^\pm ou y^\pm . Por exemplo, se calcularmos o espectro para uma mesma quadratura ($m = n = x^+$) e usando mesmo índice dos modos $k = l = 1$, podemos encontrar três situações:

$$\begin{aligned}
V_{x_{1,3}^+}(\Omega) = 1 &\Rightarrow \text{shot noise,} \\
V_{x_{1,3}^+}(\Omega) < 1 &\Rightarrow \text{squeezing,} \\
V_{x_{1,3}^+}(\Omega) > 1 &\Rightarrow \text{anti-squeezing.}
\end{aligned}$$

Pelo critério de Duan-Simon eq. (4.11), haverá emaranhamento se a desigualdade

$$V_{m_{k,k+2}}^{m_{k,k+2}}(\Omega) + V_{n_{k,k+2}}^{n_{k,k+2}}(\Omega) < 2 \quad (4.22)$$

for satisfeita. Isso acontece para escolhas de pares simultaneamente comprimidos: os pares EPR $\{x_{k,k+2}^-, y_{k,k+2}^+\}$ e $\{x_{k,k+2}^+, y_{k,k+2}^-\}$. A fig. 7 mostra uma visão geral do espectro de correlação e do critério de Duan-Simon para o sistema, com $\mu_0 = 0.2$ e $\mu_j = 0.01\mu_0$. Ambos gráficos mostram o resultado de simulações numéricas para as equações completas (eq. 3.16) (pontos), bem como soluções analíticas no regime de não depleção (linhas sólidas). Fig. 7(a) mostra ambos espectro de *squeezing* $\langle x^- x^- \rangle$ *anti-squeezing* $\langle x^+ x^+ \rangle$, enquanto a fig. 7(b) apresenta o espectro de Duan-Simon. Notavelmente, a curva para o espectro consistentemente permanece abaixo de 2 (satisfazendo assim a condição), com esse valor mínimo ocorrendo em torno de $\Omega = 0$. Devemos mencionar que os componentes da frequência zero obtidas com as soluções numéricas estão fora da escala do gráfico, como esperado pela presença de funções delta nas eqs. (4.20). Geralmente, é observado que as curvas do espectro do sistema sem injeções assemelham-se ao caso ilustrado na figura 6. Esta observação sugere que a injeção de uma semente pode efetivamente forçar as oscilações nos modos desejados, enquanto o emaranhamento é preservado.

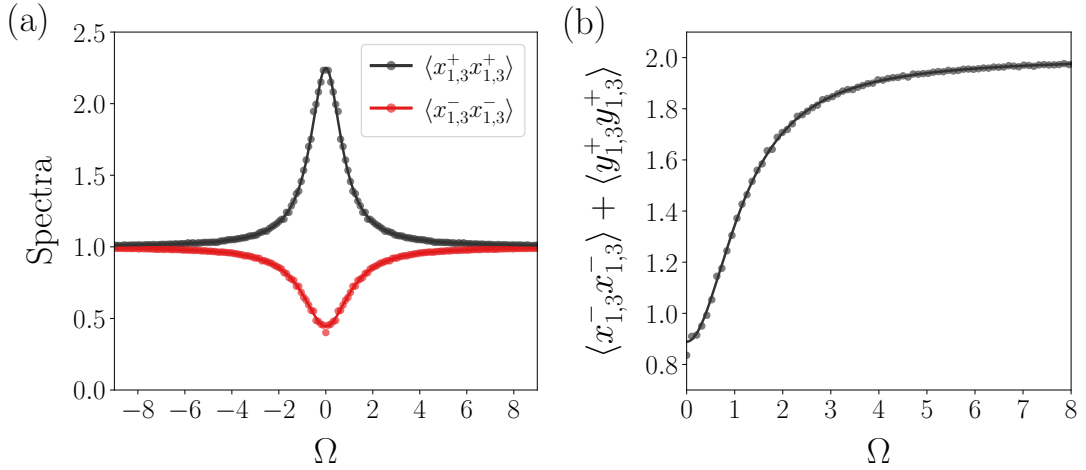


Figura 7: (a) Espectro de ruído para squeezing e anti-squeezing em quadraturas quando $\mu_0 = 0.2$ e $\mu_j = 0.01\mu_0$. (B) Espectro de Duan-Simon. Pontos: simulações numéricas. Linhas: resultados analíticos com aproximação de não depleção, Eqs. (4.20).

5 Desigualdade de Bell em Variáveis contínuas e proposta experimental

5.1 Desigualdades de Bell

Desigualdades de Bell demonstram uma característica fundamental da Mecânica Quântica: as previsões da teoria não são compatíveis com a hipótese de realismo local. No início do século 20, dois conceitos muito bem estabelecidos eram as ideias de (i)realismo: o universo se mostra real e suas propriedades independentes de como o observamos e interpretamos; e (ii) localidade: que propriedades de sistemas físicos só dependessem da sua vizinhança, sem poder ser alterados instantaneamente a distância. No entanto, o fenômeno do emaranhamento fazia com que a Mecânica Quântica desafiasse essas noções.

A ideia de emaranhamento foi introduzida em 1935, com um experimento de pensamento proposto por Einstein, Podolsky e Rosen ([EINSTEIN; PODOLSKY; ROSEN, 1935](#)), onde dois sistemas A e B que haviam interagido previamente eram separados espacialmente. Então uma medida de posição no sistema A influenciaria uma eventual medida de posição no sistema B, determinando seu resultado. Esse fenômeno ficou conhecido como paradoxo EPR. Ainda no mesmo ano, Schrödinger também acrescentou a este paradoxo, com um trabalho discutindo medidas em variáveis canonicamente conjugadas de dois sistemas espacialmente separados, e que descrevendo que este desconfortável fenômeno não era uma exceção, mas sim um caso geral em sistemas quânticos ([SCHRÖDINGER, Erwin, 1935](#)). Esse aparente defeito da teoria quântica em descrever a realidade levou os autores do paradoxo sugerirem que a mecânica quântica não estaria completa, que ainda houvessem variáveis ocultas que descrevessem a teoria, preservando a ideia do realismo local.

Em 1964, Bell apresentou um teorema mostrando que teorias de variáveis ocultas que obedeciam o princípio da localidade não eram compatíveis com as previsões da mecânica quântica([BELL, 1964](#)), mudando profundamente nossa percepção da natureza. Diversas desigualdades foram desenvolvidas acerca do estudo da não localidade e visando resulta-

dos experimentais, e.g. original de Bell, CHSH (CLAUSER et al., 1969), Leggett-Garg (LEGGETT; GARG, 1985)). Estudaremos a desigualdade de Clauser, Horne, Shimony e Holt (CHSH):

$$B = \langle a_0 b_0 \rangle + \langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_1 b_0 \rangle - \langle a_1 b_1 \rangle \leq 2 . \quad (5.1)$$

Construiremos essa desigualdade a seguir, seguindo a dedução apresentada (BRUNNER et al., 2014). Considere que dois sistemas que podem ter interagido previamente são espacialmente separados e enviados a dois observadores, Alice e Bob. Cada observador faz uma medida em seu sistema. Digamos que Alice escolha a medida x , obtendo o resultado a . Bob escolhe medir y , obtendo resultado b . Alice e Bob repetem seu experimento certo número de vezes, e eles caracterizam o experimento por meio de uma probabilidade conjunta $p(ab|xy)$. Quando este experimento é realizado com as x e y sendo direção do spin de uma partículas de spin $1/2$, no geral temos que a probabilidade

$$p(ab|xy) \neq p(a|x)p(b|y), \quad (5.2)$$

isto é, que os resultados de Alice e Bob não são estatisticamente independentes. Fisicamente, é razoável assumir que houvesse independência: que uma medida de Alice não tivesse influência sobre o sistema de Bob. Aqui poderíamos assumir que esta relação entre os resultados a e b tenha sido consequência dos sistemas terem interagido previamente, o que seria o esperado em uma teoria local. Precisamente, localidade implica em que podemos identificar um conjunto de fatores passados, descrito por alguma variável oculta λ que gere uma influência causal conjunta em ambos resultados, e que lide com essa dependência entre eles. Se levarmos em conta estas variáveis ocultas, então as probabilidades de a e b devem fatorar:

$$p(ab|xy) = \int d\lambda \, q(\lambda) p(a|x, \lambda) p(b|y, \lambda) \quad (5.3)$$

Esta condição de localidade assume que resultados a e b são probabilisticamente determinados unicamente pela medida x e da variável λ , sem nenhuma restrição a física que envolve essa relação causal. É uma condição para que eventos em uma região do espaço-tempo não tenha influência causal em eventos em regiões espacialmente separadas, segundo a relatividade restrita.

As previsões da teoria quântica para experimentos envolvendo emaranhamento não admitem uma decomposição de acordo com a eq. (5.3). Para mostrar este resultado, vamos considerar um experimento onde só existam duas possibilidades de medida x e $y \in \{0, 1\}$ para cada observador, com resultados $a, b \in \{-1, +1\}$. Seja $\langle a_x b_y \rangle = \sum_{a,b} ab \, p(ab|xy)$ é o valor

esperado para dadas medidas x e y . Consideremos a expressão

$$B = \langle a_0 b_0 \rangle + \langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_1 b_0 \rangle - \langle a_1 b_1 \rangle. \quad (5.4)$$

A eq. (5.4) é uma função das probabilidades $p(ab|xy)$. Se estas probabilidades admitirem a condição de localidade eq. (5.3), teremos a desigualdade CHSH apresentada na eq. (5.1). Para demonstrar isso, usamos a eq. (5.3) na definição do valor esperado $\langle a_x b_y \rangle$, que nos permite fatorá-lo como

$$\langle a_x b_y \rangle = \int d\lambda \, q(\lambda) \langle a_x \rangle_\lambda \langle b_y \rangle_\lambda, \quad (5.5)$$

envolvendo o produto de valores esperados locais $\langle a_x \rangle_\lambda = a \, p(a|x, \lambda)$ e $\langle b_y \rangle_\lambda = b \, p(b|y, \lambda)$, que podem ter assumir valor $\{-1, +1\}$. Substituindo na eq. (5.4), podemos escrever

$$B = \int d\lambda \, q(\lambda) S_\lambda, \quad (5.6)$$

onde definimos B_λ por

$$B_\lambda = [\langle a_0 \rangle_\lambda \langle b_0 \rangle_\lambda + \langle a_0 \rangle_\lambda \langle b_1 \rangle_\lambda + \langle a_1 \rangle_\lambda \langle b_0 \rangle_\lambda - \langle a_1 \rangle_\lambda \langle b_1 \rangle_\lambda]. \quad (5.7)$$

Como $\langle a_0 \rangle_\lambda, \langle a_1 \rangle_\lambda \in \{-1, 1\}$,

$$B_\lambda \leq |\langle b_0 \rangle_\lambda + \langle b_1 \rangle_\lambda| + |\langle b_0 \rangle_\lambda - \langle b_1 \rangle_\lambda|. \quad (5.8)$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir $\langle b_0 \rangle_\lambda \geq \langle b_1 \rangle_\lambda \geq 0$, o que nos leva à $S_\lambda \leq 2$, e por fim

$$B = \int d\lambda \, q(\lambda) B_\lambda \leq 2, \quad (5.9)$$

evidenciando o limite superior 2 na desigualdade CHSH (eq. (5.1)).

Consideremos agora previsões que da teoria quântica para um experimento em que Alice e Bob compartilham dois qbits no estado singlete.

$$|\psi\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (5.10)$$

Qbit é um sistema quântico de dois níveis, sendo análogo ao bit clássico (unidade binária clássica). Neste estado partilhado por Alice e Bob (Eq. (5.10)), $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são auto estados de σ_z com autovalores $+1$ e -1 , respectivamente e $|xy\rangle = |x\rangle \otimes |y\rangle$. Alice e Bob farão medidas de seu spin em diferentes direções, usando os projetores $\hat{X} = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$ e

$\hat{Z} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$. Eles usarão combinações destes projetores da seguinte forma:

$$\hat{a}_0 = \hat{Z}, \quad \hat{b}_0 = -\frac{(\hat{Z} + \hat{X})}{\sqrt{2}}, \quad (5.11)$$

$$\hat{a}_1 = \hat{X}, \quad \hat{b}_1 = \frac{(\hat{Z} - \hat{X})}{\sqrt{2}}. \quad (5.12)$$

Assim, obtemos os valores esperados

$$\langle \hat{a}_0, \hat{b}_0 \rangle = \langle \hat{a}_0, \hat{b}_1 \rangle = \langle \hat{a}_1, \hat{b}_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \langle \hat{a}_1, \hat{b}_1 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (5.13)$$

que ao serem substituídos na eq. (5.1) fornece

$$B = 2\sqrt{2}. \quad (5.14)$$

Esta violação da desigualdade (5.1) expõe que a mecânica quântica conflita com a ideia de realismo local. O teorema de Bell (BELL, 1964) mostra que a teoria quântica tem uma estrutura não local, e de que teorias de variáveis ocultas não reproduzem exatamente suas previsões.

Se tratando de uma violação de desigualdade, podemos questionar o quão acima do limite clássico $S = 2$ é permitido à teoria quântica. O maior valor de violação para desigualdades CHSH é $B = 2\sqrt{2}$, tal qual obtido nessa dedução. Este valor é conhecido como limite de Tsirelson (CIREL'SON, 1980).

5.2 Desigualdade de Bell em variáveis contínuas

A desigualdade CHSH apresentada em (5.1) foi discutida anteriormente com base em variáveis discretas, usando como exemplo a medida do spin de dois qbits no estado singleto.

Os campos ópticos podem ser descritos em termos de números de fótons, utilizando variáveis discretas, ou decompondo o campo em termos de quadraturas de amplitude e fase, como variáveis contínuas. Em estados número, tem seus fótons gerados em uma largura de banda muito estreita e há muitas perdas a temperatura ambiente, embora sejam robustos à ruído. Uma vantagem de se utilizar variáveis contínuas é de ser mais fácil atingir uma eficiência de detecção mais alta, em uma largura de banda maior numa mesma temperatura que os sistemas discretos, e que é possível gerar deterministicamente estes estados. Testes de Bell tipicamente são apresentados em alguma versão de esquema

de dois canais, conforme apresentado na Fig. 8.

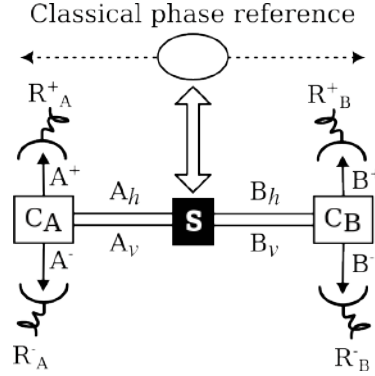


Figura 8: Teste de Bell em dois canais para desigualdades tipo CHSH.

Neste esquema, uma fonte S emite quatro modos correlacionados, que são separados de uma certa maneira. Dois modos são enviados para Alice, rotulados como A_h e A_v , e dois são enviados para Bob, B_h e B_v . Ambos podem misturar o par de modos recebido num elemento óptico descrito por C , e fazer duas medidas distintas $\{\theta_A, \theta'_A\}$ e $\{\theta_B, \theta'_B\}$. Os modos resultantes medidos são dados por A^+ e A^- ; B^+ e B^- .

O OPO injetado estudado neste trabalho é apresentado como uma fonte S na Fig. 8, e os quatro modos estimulados pelos feixes sementes são modos Hermite-Gaussianos (HG) de primeira ordem $\psi_{HG01}\hat{e}_H$, $\psi_{HG01}\hat{e}_V$, $\psi_{HG10}\hat{e}_H$ e $\psi_{HG10}\hat{e}_V$, com $\hat{e}_{H(V)}$ indexando polarização linear horizontal (vertical). Isto é, utilizando-se polarização e modo transversal, podemos compor um teste de Bell, gerando todos os modos em um mesmo cristal não-linear. A separação dos modos enviados a Alice e Bob é feita por polarização através de um divisor de feixe polarizado (PBS) após o espelho de saída do OPO. Dois modos com polarização horizontal H são enviados para Alice, e dois com polarização V são enviados para Bob. Assim, identificamos A_h e A_v como Hermite horizontal ψ_{HG01} e Hermite vertical ψ_{HG10} , respectivamente:

$$A_h = \psi_{HG10}\hat{e}_H, \quad B_h = \psi_{HG10}\hat{e}_V, \quad (5.15)$$

$$A_v = \psi_{HG01}\hat{e}_H, \quad B_v = \psi_{HG01}\hat{e}_V. \quad (5.16)$$

Alice e Bob podem misturar seus respectivos modos usando elementos ópticos C , que serão descritos posteriormente. Eles podem efetuar medidas $\{\theta_A, \theta'_A\}$ e $\{\theta_B, \theta'_B\}$ obtendo os modos \hat{A}^+ , \hat{A}^- , \hat{B}^+ e \hat{B}^- . Alice e Bob podem performar medidas de fótons resultando $R \in \{0,1\}$ em cada detector. Repetindo este procedimento um dado número de vezes, eles podem construir uma estatística de correlações entre seus resultados, dado pelo valor

esperado do produto entre eles:

$$R^{ij}(\theta_A, \theta_B) = \langle R_A^i(\theta_A) R_B^j(\theta_B) \rangle, \quad (5.17)$$

com $i, j \in \{+, -\}$. Há quatro possibilidades de combinações, e podemos construir

$$E(\theta_A, \theta_B) = \frac{M(\theta_A, \theta_B)}{N(\theta_A, \theta_B)}, \quad (5.18)$$

Onde $M(\theta_A, \theta_B)$ é

$$M(\theta_A, \theta_B) = R^{++}(\theta_A, \theta_B) + R^{--}(\theta_A, \theta_B) - R^{+-}(\theta_A, \theta_B) - R^{-+}(\theta_A, \theta_B), \quad (5.19)$$

e N é uma normalização, definida pela soma de todas as correlações para uma dada escolha de θ_A e θ_B .

$$N(\theta_A, \theta_B) = R^{++}(\theta_A, \theta_B) + R^{--}(\theta_A, \theta_B) + R^{+-}(\theta_A, \theta_B) + R^{-+}(\theta_A, \theta_B), \quad (5.20)$$

A quantidade $E(\theta_A, \theta_B)$ é feita para as quatro possibilidades de medidas, e seu valor esperado pode ser usado na construção de uma desigualdade CHSH:

$$B = |E(\theta_A, \theta_B) + E(\theta'_A, \theta'_B) + E(\theta'_A, \theta_B) - E(\theta_A, \theta'_B)| \leq 2, \quad (5.21)$$

uma desigualdade que determina a faixa de possíveis saídas de acordo com realismo local, mas que pode ser violada se aplicada a estados emaranhados. A violação máxima ocorre quando os ângulos do aparato experimental são $\theta_A = \{\pi/8, 3\pi/8\}$ and $\theta_B = \{0, \pi/4\}$. A correlação apresentada na Eq. (5.17) pode ser composta por medidas de intensidade, levando a uma correlação de quarta ordem para operadores.

$$R_N^{ij} = \langle \hat{A}_i^\dagger(\theta_A) \hat{A}_i(\theta_A) \hat{B}_j^\dagger(\theta_B) \hat{B}_j(\theta_B) \rangle. \quad (5.22)$$

Como estamos considerando medidas de intensidade, devemos levar em conta o ordenamento dos operadores. Um detector de fótons efetua medidas em ordenamento normal: aniquila um fóton que incide sobre ele e gera uma fotocorrente. Esse tipo de contagem não enxerga a energia de ponto zero de estados de vácuo. Para detecção homodina, onde se acessa diretamente quadraturas do campo, as medições ocorrem em ordenamento simétrico. Neste ordenamento, é contabilizado contribuições do estado de vácuo para a média de energia de um campo, que deve ser levada em consideração no tratamento teórico. Na Eq. (5.22) utilizamos o índice N para identificar esta correlação sendo calculada em ordenamento normal, relacionada a equações estocásticas na representação P positiva, conforme desenvolvido no Cap. 2. Entretanto, a *representação de wigner*, que utiliza

ordenamento simétrico, a Eq. (5.22) pode ser mapeada como

$$R_S^{ij} = \langle [\hat{A}_i^\dagger(\theta_A)\hat{A}_i(\theta_A) - \langle \hat{A}_i^\dagger(\theta_A)\hat{A}_i(\theta_A) \rangle] \times [\hat{B}_j^\dagger(\theta_B)\hat{B}_j(\theta_B) - \langle \hat{B}_j^\dagger(\theta_B)\hat{B}_j(\theta_B) \rangle] \rangle, \quad (5.23)$$

onde as médias de intensidades que carregam energia do vácuo (inerente ao ordenamento simétrico) devem ser subtraídas. Formalmente, a quantidade envolvida na 5.23 é um valor esperado do produto de desvios de duas variáveis, que é a definição de covariância, para as referidas variáveis. Um de nossos resultados principais será o cálculo da desigualdade CHSH em ambas representações.

Até agora, descrevemos como será feita detecção dos modos A_\pm e B_\pm , e como correlacionamos para um teste de Bell. É necessário ainda descrever os misturadores C_A e C_B , com a finalidade de escrever explicitamente os modos requeridos pela teoria, proposto em Eq. (5.22) e (5.23). O elemento óptico C pode ser implementado por um prisma de Dove orientado em um ângulo θ . A operação do prisma de Dove pode ser descrita por uma matriz análoga a matrizes de Jones (FOWLES, 1989). Matrizes de Jones descrevem transformações de elementos ópticos no subespaço de polarização. Para o prisma de Dove, utilizamos uma matriz análoga a transformação de uma lâmina de meia onda para polarização, porém atuando no subespaço de modos transversos de primeira ordem:

$$\begin{pmatrix} \psi_{HG10} \\ \psi_{HG01} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{HG10} \\ \psi_{HG01} \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

Assim, Prismas de Dove modificam modos de Alice e Bob para:

$$\begin{aligned} A_+ &= \cos(\theta_A)a_1 + \sin(\theta_A)a_2, \\ A_- &= \sin(\theta_A)a_1 - \cos(\theta_A)a_2, \\ B_+ &= \cos(\theta_B)a_3 + \sin(\theta_B)a_4, \\ B_- &= \sin(\theta_B)a_3 - \cos(\theta_B)a_4, \end{aligned} \quad (5.25)$$

Aqui, os modos apresentados na Eq. (5.16) foram escritos com índices numéricos, utilizando a correspondência apresentada inicialmente em Eq. 2.17:

$$\begin{aligned} \psi_{HG10}\hat{e}_H &\rightarrow a_1 & \psi_{HG01}\hat{e}_H &\rightarrow a_2 \\ \psi_{HG10}\hat{e}_V &\rightarrow a_3 & \psi_{HG01}\hat{e}_V &\rightarrow a_4. \end{aligned}$$

Estes são os modos amplificados pelas respectivas injeções mencionadas, e que foram trabalhados por meio de amplitudes no Cap. 3. Usando estas amplitudes, computamos a

Eq. (5.19), em ambos ordenamentos propostos. Pode ser mostrado que ambas Eqs. (5.22) e (5.23) produzem a mesma quantidade

$$M(\theta_A, \theta_B) = \cos(2\theta_A) \cos(2\theta_B) E_1 + \cos(2\theta_A) \sin(2\theta_B) E_2 + \sin(2\theta_A) \cos(2\theta_B) E_3 - \sin(2\theta_A) \sin(2\theta_B) E_4, \quad (5.26)$$

para no numerador da Eq. (5.18) mas levam a resultados diferentes quanto a normalização. Aqui, temos E_1, E_2, E_3 e E_4 definidos como:

$$\begin{aligned} E_1 &= \langle a_1^* a_1 a_3^* a_3 \rangle + \langle a_2^* a_2 a_4^* a_4 \rangle \\ &\quad - \langle a_1^* a_1 a_4^* a_4 \rangle - \langle a_2^* a_2 a_3^* a_3 \rangle \\ &\quad + (\langle a_1^* a_1 \rangle - \langle a_2^* a_2 \rangle) * (\langle a_4^* a_4 \rangle - \langle a_3^* a_3 \rangle), \\ E_2 &= \langle a_1^* a_1 a_3^* a_4 \rangle + \langle a_1^* a_1 a_4^* a_3 \rangle \\ &\quad - \langle a_2^* a_2 a_3^* a_4 \rangle - \langle a_2^* a_2 a_4^* a_3 \rangle, \\ E_3 &= \langle a_1^* a_2 a_3^* a_3 \rangle + \langle a_2^* a_1 a_3^* a_3 \rangle \\ &\quad - \langle a_1^* a_2 a_3^* a_4 \rangle - \langle a_2^* a_1 a_4^* a_4 \rangle, \\ E_4 &= \langle a_1^* a_1 a_3^* a_3 \rangle + \langle a_2^* a_2 a_4^* a_4 \rangle \\ &\quad - \langle a_1^* a_1 a_4^* a_4 \rangle - \langle a_2^* a_2 a_3^* a_3 \rangle \\ &\quad + (\langle a_3^* a_4 \rangle - \langle a_4^* a_3 \rangle) * (\langle a_1^* a_2 \rangle - \langle a_2^* a_1 \rangle). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Ao calcularmos a normalização dada pela Eq. (5.20) em ordenamento simétrico, obtemos

$$N_S = \langle a_1^* a_1 a_3^* a_3 \rangle + \langle a_1^* a_1 a_4^* a_4 \rangle + \langle a_2^* a_2 a_3^* a_3 \rangle + \langle a_2^* a_2 a_4^* a_4 \rangle, \quad (5.28)$$

enquanto em ordenamento normal seu resultado é

$$N_N = N_S - 1 - [\langle a_1^* a_1 \rangle + \langle a_2^* a_2 \rangle + \langle a_3^* a_3 \rangle + \langle a_4^* a_4 \rangle]. \quad (5.29)$$

Nestas expressões, aparecem correlações de quarta ordem. Para variáveis que possuem estatística gaussiana, é possível escrever correlações de ordem superior em termos de correlações de segunda ordem. Mais especificamente, correlações superiores se transformam em um problema de análise combinatória, transformando-se numa soma envolvendo todas as possibilidades de produtos de correlações de segunda ordem. Se a, b, c, d são variáveis gaussianas, temos:

$$\langle abcd \rangle = \langle ab \rangle \langle cd \rangle + \langle ac \rangle \langle bd \rangle + \langle ad \rangle \langle bc \rangle - 2 \langle a \rangle \langle b \rangle \langle c \rangle \langle d \rangle.$$

Esta propriedade é o chamado Teorema de Isserlis. A versão para operadores quânticos deste teorema é conhecido como Teorema de Wick. Assim, juntando todos os resultados para $M(\theta_A, \theta_B)$ na Eq. (5.27) e normalizações nas Eqs. (5.28) e (5.29), e utilizando médias para amplitudes (e/ou quadraturas) estudadas nos Cap. 3 e 4, podemos computar a desigualdade CHSH apresentada em (5.21). Adicionalmente, calcularemos esta desigualdade também numericamente, simulando as equações diferenciais estocásticas completas e comparando com os resultados analíticos aproximados.

Um gráfico para o parâmetro B da desigualdade CHSH Eq. (5.21) em função do parâmetro do bombeio é apresentado na Fig. (9)

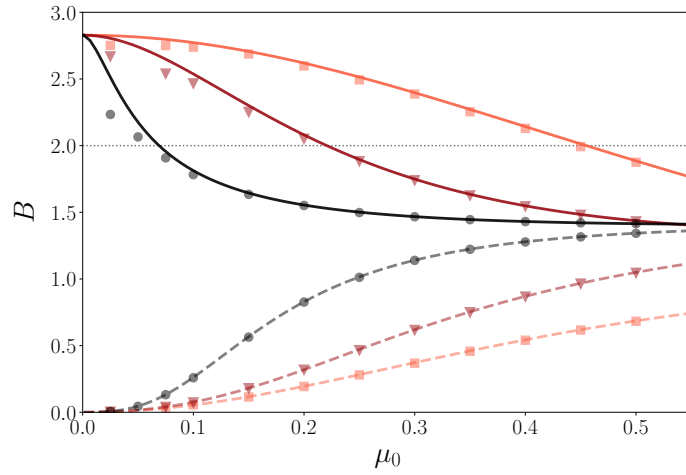


Figura 9: Verificação da desigualdade CHSH através da função B da eq. (5.21), mostrada aqui como uma função da intensidade do bombeio. Os três regimes de injeção apresentado correspondem à $\mu_j = 0$, $\mu_j = 0.01\mu_0$ and $\mu_j = 0.03\mu_0$ (cores da mais clara para a mais escura). Símbolos correspondem a simulações numéricas. Curvas sólidas: Representação P positiva; Curvas tracejadas: Representação de Wigner.

Mostramos na Fig. (9) a função B definida na Eq. (5.21) nas representações P positiva (curvas sólidas) e na representação de Wigner (curvas tracejadas) para três cenários diferentes de injeção, correspondendo à $\mu_j = 0$, $\mu_j = 0.01\mu_0$ and $\mu_j = 0.03\mu_0$, apresentados da cor mais clara para a mais escura, respectivamente. Novamente, utilizamos símbolos para representar soluções numéricas, e linhas para os resultados analíticos que utilizam a aproximação de não-depleção. Na ausência de injeções, é possível observar violação da desigualdade de Bell para até aproximadamente 40% do limiar, i.e. $\mu_0 \approx 0.4$ para a representação P positiva.

Como apresentado e discutido em (FARIA; DECHOUM; KHOURY, 2020), é importante notar que a violação da desigualdade de Bell depende do ordenamento de operadores quânticos, com sua violação ocorrendo em ordenamento normal (representação P

positiva) e não ocorrendo violação em ordenamento simétrico (representação de Wigner). Essa discussão pode ser aprofundada no domínio clássico, considerando a desigualdade de Cauchy-Schwartz (SILVA; KHOURY; DECHOUM, 2008), onde seus autores mostraram que esta desigualdade também apresentava violação somente para o ordenamento normal dos operadores.

Podemos apresentar esses resultados em dois casos: montagens experimentais baseadas em medidas diretas de intensidade podem violar desigualdades de Bell (STILLER; SEYFARTH; LEUCHS, 2014); montagens experimentais baseadas somente em detecção homodina, onde o vácuo de fundo é também medido, leva a uma não violação de desigualdades tipo Bell. É importante destacar que em (THEARLE; JANOUSEK; ARMS-TRONG; HOSSEINI; SCHÜNEMANN et al., 2018), foi obtido uma violação de desigualdade de Bell em variáveis contínuas, utilizando detecção homodina para acessar diretamente as quadraturas dos campos envolvidos. Neste trabalho, vácuo de fundo (inerente a detecção homodina) era contabilizado, mas era levado em consideração para a composição das correlações, sendo descontado durante o processamento do sinal dos detectores, contornando assim esta característica de não-violação em ordenamento simétrico.

Aqui, quando $\mu_j = 0.01\mu_0$, observa-se ainda uma violação, mas em uma região pequena, com o feixe de bombeamento indo até $\mu_0 \approx 0.2$. É também notado que ao aumentarmos a intensidade das injeções, exemplificado no caso $\mu_j = 0.03\mu_0$, temos uma região ainda menor de violação, indicando que feixes injetados degradam o emaranhamento. Observamos uma leve discordância entre resultados analíticos e numéricos para valores muito pequenos de μ_0 . Isto não acontece devido a nenhum comportamento significativamente diferente, mas somente porque há uma convergência estatística muito lenta dos resultados numéricos nesse regime, que nós observamos ao compararmos simulações com várias realizações distintas.

5.3 Proposta Experimental

Nesta seção, apresentaremos uma montagem experimental onde deve ser possível construir as correlações descritas na seção anterior, e prosseguir com um teste de Bell. Neste teste, os modos espaciais desempenham um papel crucial para a separação dos modos. Na Fig. 10 mostramos um diagrama esquemático da montagem. Inicialmente, o feixe de bombeamento é separado dos quatro modos convertidos por meio de um espelho dicróico (DM). Depois, os feixes convertidos são separados por polarização. Então, Alice

e Bob efetuam as misturas $C_{A,B}$ utilizando Prismas de Dove (DP), seguindo o esquema da Fig. 8. Neste momento, Alice possui uma mistura de dois modos HG de primeira ordem (horizontal e vertical), ambos em mesma polarização, e Bob também possui uma combinação de dois modos HG de primeira ordem, com polarização ortogonal aos modos de Alice. Então, ambos utilizarão interferômetros de Mach-Zehnder com um espelho adicional ($MZIM_{A(B)}$). Esta configuração de interferômetro funciona como um *divisor de feixes* para modos transversos (SASADA; OKAMOTO, 2003), e efetuará a separação dos modos de Alice e Bob A_+ , A_- , B_+ and B_- , que foram descritos na Eq. (5.25). Então estes quatro sinais são levados a dois conjuntos de divisores de feixes e detectores. Suportes articulados podem mover espelhos M_1 , M_2 , e M_3 para as posições M'_1 , M'_2 , and M'_3 , respectivamente, permitindo a troca dos campos A_+ and A_- para se obter todas as correlações de intensidades de interesse, através de duas situações:

1. Quando o espelho $M1$ está presente e espelhos $M2$ e $M3$ ausentes, os detectores D_1 e D_2 medem $\langle \hat{A}_-^\dagger \hat{A}_- \hat{B}_-^\dagger \hat{B}_- \rangle$ enquanto os detectores D_3 e D_4 medem $\langle \hat{A}_+^\dagger \hat{A}_+ \hat{B}_+^\dagger \hat{B}_+ \rangle$;
2. Quando o espelho $M1$ está ausente e espelhos $M2$ e $M3$ são incluídos no caminho óptico, os detectores D_1 e D_2 medem $\langle \hat{A}_+^\dagger \hat{A}_+ \hat{B}_-^\dagger \hat{B}_- \rangle$ enquanto os detectores D_3 e D_4 medem $\langle \hat{A}_-^\dagger \hat{A}_- \hat{B}_+^\dagger \hat{B}_+ \rangle$.

As fotocorrentes obtidas nos detectores são eletronicamente processadas, e uma análise de dados combinam seus resultados, construindo a desigualdade CHSH proposta.

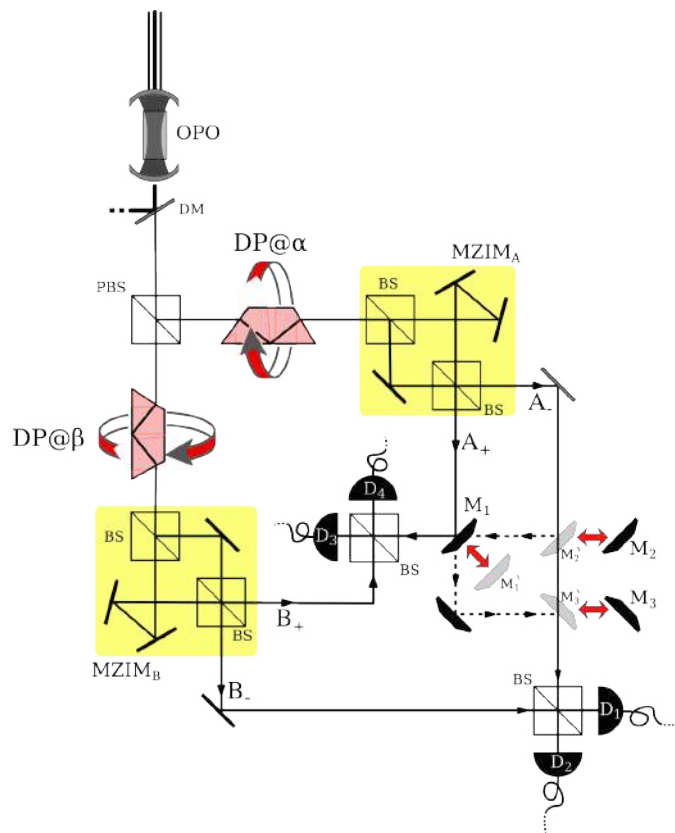


Figura 10: Proposta experimental para medidas de correlações de Bell em feixes emaranhados, semeados por injeções em superposições de modos HG de primeira ordem.

6 Conclusão

Nesta tese foi estudado a dinâmica de um OPO a partir de uma fraca injeção de combinação modos de primeira ordem, gerando estados não clássicos da luz. Nossos resultados revelam que esta técnica apresenta sucesso para amplificação dos modos de frequência mais baixa sob o conhecido limiar de oscilação enquanto preserva correlações quânticas.

Nosso trabalho desenvolveu equações diferenciais estocásticas, representando a mecânica quântica através de variáveis contínuas no espaço de fase. Estudamos uma complexa dinâmica a cinco modos em um OPO, e analisamos seus estados estacionários. Em nosso trabalho introduzimos uma aproximação para a intensidade do feixe de bombeamento, na qual foi possível desenvolver a teoria analiticamente e discutimos sua região de validade, sempre comparando com simulações numéricas das equações durante todo o processo.

Estudamos o espectro de *squeezing* das quadraturas dos quatro modos estimulados pelas injeções no OPO, e atestamos que nossa aproximação ainda mostra as características quânticas de interesse deste sistema. Construímos correlações entre quadraturas dos feixes e caracterizamos o emaranhamento por critério de Duan-Simon, atestando nosso sistema como um candidato para um teste de Bell. Desenvolvemos uma desigualdade CHSH para variáveis contínuas e a estudamos em dois ordenamentos, onde a interpretação a cerca do vácuo quântico mostra um aspecto fundamental de sua violação ou não violação. Também sugerimos uma proposta experimental onde poderia ser verificada nossa desigualdade utilizando-se medidas de *squeezing* de intensidade.

Adicionalmente, nossos resultados relacionam-se ao teste de Bell em variáveis contínuas realizado por (THEARLE; JANOUSEK; ARMSTRONG; HOSSEINI; SCHÜNMANN (MRAZ) et al., 2018), onde foi apresentado quatro modos gerados por dois OPOs diferentes e misturado com um elemento óptico. Nosso resultado gera os quatro modos necessários para o teste de Bell em um mesmo OPO, embora necessite de mais elementos ópticos no aparato de medida. No presente momento de apresentação desta tese, um

artigo correspondente a este trabalho encontra-se submetido para publicação. Uma cópia do artigo é apresentada no anexo [A](#).

Nossa proposta experimental abre uma perspectiva para outras descrições experimentais, e que talvez sejam até mais simples, onde modos transversos sejam utilizados como recurso, desempenhando um papel importante na escolha do conjunto de variáveis dicotômicas a serem estudadas, e na configuração do aparato de medida adotado entre Alice e Bob. Esses resultados enfatizam a já bem conhecida capacidade do sistema de gerar estados spin-órbita hiperemaranhados, ([SANTOS; DECHOUM; KHOURY, 2009](#)) complementando-os como um recurso valioso para aplicações em tecnologia quântica e física fundamental.

REFERÊNCIAS

AASI, J. et al. Enhanced sensitivity of the LIGO gravitational wave detector by using squeezed states of light. **Nature Photonics**, Springer Nature, v. 7, p. 613–619, 8 ago. 2013. DOI: [10.1038/nphoton.2013.177](https://doi.org/10.1038/nphoton.2013.177). Disponível em:

<<https://doi.org/10.1038/nphoton.2013.177>>.

AIELLO, A et al. Nonlocality of high-dimensional two-photon orbital angular momentum states. **Physical Review A**, APS, v. 72, n. 5, p. 052114, 2005.

ALVES, G. B. et al. Conditions for optical parametric oscillation with a structured light pump. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 98, p. 063825, 6 dez. 2018. DOI: [10.1103/PhysRevA.98.063825](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.98.063825). Disponível em:

<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.98.063825>>.

ASPECT, Alain; DALIBARD, Jean; ROGER, Gérard. Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers. **Physical review letters**, APS, v. 49, n. 25, p. 1804, 1982.

ASPECT, Alain; GRANGIER, Philippe; ROGER, Gérard. Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: a new violation of Bell's inequalities. **Physical review letters**, APS, v. 49, n. 2, p. 91, 1982.

BELL, John S. On the einstein podolsky rosen paradox. **Physics Physique Fizika**, APS, v. 1, n. 3, p. 195, 1964.

BENNETT, Charles H.; BRASSARD, Gilles. Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing. **Theoretical Computer Science**, v. 560, p. 7–11, 2014.

Theoretical Aspects of Quantum Cryptography – celebrating 30 years of BB84. ISSN 0304-3975. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2014.05.025>. Disponível em:

<<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397514004241>>.

BOUWMEESTER, Dik et al. Experimental quantum teleportation. **Nature**, Nature Publishing Group UK London, v. 390, n. 6660, p. 575–579, 1997.

BOWEN, Warwick P; LAM, Ping Koy; RALPH, Timothy Cameron. Biased EPR entanglement and its application to teleportation. **Journal of Modern Optics**, Taylor & Francis, v. 50, n. 5, p. 801–813, 2003.

- BOWEN, Warwick P.; TREPS, Nicolas et al. Experimental investigation of continuous-variable quantum teleportation. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 67, p. 032302, 3 mar. 2003. DOI: [10.1103/PhysRevA.67.032302](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.67.032302). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.67.032302>.
- BRAUNSTEIN, Samuel L.; LOOCK, Peter van. Quantum information with continuous variables. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 77, p. 513–577, 2 jun. 2005. DOI: [10.1103/RevModPhys.77.513](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.77.513). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.77.513>.
- BRUNNER, Nicolas et al. Bell nonlocality. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 86, n. 2, p. 419, 2014.
- CAVES, Carlton M.; SCHUMAKER, Bonny L. New formalism for two-photon quantum optics. I. Quadrature phases and squeezed states. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 31, p. 3068–3092, 5 mai. 1985. DOI: [10.1103/PhysRevA.31.3068](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.31.3068). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.31.3068>.
- CIREL'SON, Boris S. Quantum generalizations of Bell's inequality. **Letters in Mathematical Physics**, Springer, v. 4, p. 93–100, 1980.
- CLAUSER, John F. et al. Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 23, p. 880–884, 15 out. 1969. DOI: [10.1103/PhysRevLett.23.880](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.23.880). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.23.880>.
- COELHO, A. S. et al. Three-Color Entanglement. **Science**, v. 326, n. 5954, p. 823–826, 2009. DOI: [10.1126/science.1178683](https://doi.org/10.1126/science.1178683). eprint: www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.1178683. Disponível em: www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1178683.
- COUTINHO DOS SANTOS, B. et al. Quantum analysis of the nondegenerate optical parametric oscillator with injected signal. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 72, p. 033820, 3 set. 2005. DOI: [10.1103/PhysRevA.72.033820](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.72.033820). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.72.033820>.
- DECHOUM, K et al. Critical fluctuations and entanglement in the nondegenerate parametric oscillator. **Physical Review A**, APS, v. 70, n. 5, p. 053807, 2004.
- DRUMMOND, P D; GARDINER, C W. Generalised P-representations in quantum optics. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v. 13, n. 7, p. 2353, 1980.

DUAN, Lu-Ming et al. Inseparability criterion for continuous variable systems.

Physical Review Letters, APS, v. 84, n. 12, p. 2722, 2000.

EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 47, p. 777–780, 10 mai. 1935. DOI: [10.1103/PhysRev.47.777](https://doi.org/10.1103/PhysRev.47.777). Disponível em:

<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.47.777>>.

FARIA, H. M.; DECHOUM, K.; KHOURY, A. Z. Bell inequality violation and operator ordering in quantum theory. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 102, p. 053714, 5 nov. 2020. DOI: [10.1103/PhysRevA.102.053714](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.102.053714). Disponível em:

<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.102.053714>>.

FLAMINI, F.; SPAGNOLO, N.; SCIARRINO, F. Photonic quantum information processing: a review. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publisher, v. 82, p. 016001, nov. 2018. DOI: [10.1088/1361-6633/aad5b2](https://doi.org/10.1088/1361-6633/aad5b2). Disponível em:

<<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6633/aad5b2>>.

FOWLES, G.R. **Introduction to Modern Optics**. [S. l.]: Dover Publications, 1989. (Dover Books on Physics Series). ISBN 9780486659572. Disponível em:

<<https://books.google.com.br/books?id=SL1n9TuJ5YMC>>.

FREEDMAN, Stuart J.; CLAUSER, John F. Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 28, p. 938–941, 14 abr. 1972. DOI: [10.1103/PhysRevLett.28.938](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.28.938). Disponível em:

<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.28.938>>.

GARDINER, Crispin; ZOLLER, Peter; ZOLLER, Peter. **Quantum noise: a handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics**. [S. l.]: Springer Science & Business Media, 2004.

GLAUBER, Roy J. Coherent and Incoherent States of the Radiation Field. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 131, p. 2766–2788, 6 set. 1963. DOI:

[10.1103/PhysRev.131.2766](https://doi.org/10.1103/PhysRev.131.2766). Disponível em:

<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.131.2766>>.

GRAHAM, R.; HAKEN, H. The quantum-fluctuations of the optical parametric oscillator. I. **Zeitschrift für Physik A Hadrons and nuclei**, JOUR, v. 210, p. 0939–7922, 3 jun. 1968. DOI: [10.1007/BF01379946](https://doi.org/10.1007/BF01379946). Disponível em:

<<https://doi.org/10.1007/BF01379946>>.

GRIFFITHS, David J. **Introduction to Electrodynamics** Fourth Edition, 2021.

HE, Qiong-Yi et al. Bell inequalities for continuous-variable measurements. **Physical Review A**, APS, v. 81, n. 6, p. 062106, 2010.

HOWELL, John C et al. Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox using momentum-and position-entangled photons from spontaneous parametric down conversion. **Physical Review Letters**, APS, v. 92, n. 21, p. 210403, 2004.

HUNTINGTON, E. H.; RALPH, T. C. Continuous-variable Bell-type correlations from two bright squeezed beams. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 65, p. 012306, 1 dez. 2001. DOI: [10.1103/PhysRevA.65.012306](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.012306). Disponível em: [<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.65.012306>](https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.65.012306).

KLOEDEN, Peter E.; PLATEN, Eckhard. **Numerical Solution of Stochastic Differential Equations**. Berlin: Springer, 1992.

KWIAT, Paul G; STEINBERG, Aephraim M; CHIAO, Raymond Y. High-visibility interference in a Bell-inequality experiment for energy and time. **Physical Review A**, APS, v. 47, n. 4, p. 2472, 1993.

LANCE, Andrew M. et al. Tripartite Quantum State Sharing. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 92, p. 177903, 17 abr. 2004. DOI: [10.1103/PhysRevLett.92.177903](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.177903). Disponível em: [<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.92.177903>](https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.92.177903).

LEACH, J et al. Violation of a Bell inequality in two-dimensional orbital angular momentum state-spaces. **Optics express**, Optical Society of America, v. 17, n. 10, p. 8287–8293, 2009.

LEGGETT, A. J.; GARG, Anupam. Quantum mechanics versus macroscopic realism: Is the flux there when nobody looks? **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 54, p. 857–860, 9 mar. 1985. DOI: [10.1103/PhysRevLett.54.857](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.54.857). Disponível em: [<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.54.857>](https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.54.857).

LITA, Adriana E; MILLER, Aaron J; NAM, Sae Woo. Counting near-infrared single-photons with 95% efficiency. **Optics express**, Optical Society of America, v. 16, n. 5, p. 3032–3040, 2008.

LIU, Kui et al. Experimental Generation of Continuous-Variable Hyperentanglement in an Optical Parametric Oscillator. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 113, p. 170501, 17 out. 2014. DOI: [10.1103/PhysRevLett.113.170501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.170501). Disponível em: [<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.170501>](https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.170501).

- LLOYD, Seth. Universal Quantum Simulators. **Science**, v. 273, n. 5278, p. 1073–1078, 1996. DOI: [10.1126/science.273.5278.1073](https://doi.org/10.1126/science.273.5278.1073). eprint: <https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.273.5278.1073>. Disponível em: <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.273.5278.1073>.
- MARTINELLI, M. et al. Orbital angular momentum exchange in an optical parametric oscillator. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 70, p. 013812, 1 jul. 2004. DOI: [10.1103/PhysRevA.70.013812](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.70.013812). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.70.013812>.
- MENICUCCI, Nicolas C; FLAMMIA, Steven T; PFISTER, Olivier. One-way quantum computing in the optical frequency comb. **Physical review letters**, APS, v. 101, n. 13, p. 130501, 2008.
- _____. One-Way Quantum Computing in the Optical Frequency Comb. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 101, p. 130501, 13 set. 2008. DOI: [10.1103/PhysRevLett.101.130501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.130501). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.130501>.
- MONTAÑA GUERRERO, A. et al. Continuous Variable Entanglement in an Optical Parametric Oscillator Based on a Nondegenerate Four Wave Mixing Process in Hot Alkali Atoms. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 129, p. 163601, 16 out. 2022. DOI: [10.1103/PhysRevLett.129.163601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.129.163601). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.129.163601>.
- NIELSEN, Michael A; CHUANG, Isaac. **Quantum computation and quantum information**. [S. l.]: American Association of Physics Teachers, 2002.
- OEMRAWSINGH, SSR et al. Experimental demonstration of fractional orbital angular momentum entanglement of two photons. **Physical review letters**, APS, v. 95, n. 24, p. 240501, 2005.
- OU, Z. Y. et al. Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox for continuous variables. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 68, p. 3663–3666, 25 jun. 1992. DOI: [10.1103/PhysRevLett.68.3663](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.68.3663). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.68.3663>.
- PADGETT, M. J.; COURTIALL, J. Poincaré-sphere equivalent for light beams containing orbital angular momentum. **Opt. Lett.**, OSA, v. 24, n. 7, p. 430–432, abr. 1999. DOI: [10.1364/OL.24.000430](https://doi.org/10.1364/OL.24.000430). Disponível em: <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-24-7-430>.

RALPH, T. C.; MUNRO, W. J.; POLKINGHORNE, R. E. S. Proposal for the Measurement of Bell-Type Correlations from Continuous Variables. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 85, p. 2035–2039, 10 set. 2000. DOI:

[10.1103/PhysRevLett.85.2035](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.2035). Disponível em:

<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.85.2035>>.

RARITY, JG; TAPSTER, PR. Experimental violation of Bell's inequality based on phase and momentum. **Physical Review Letters**, APS, v. 64, n. 21, p. 2495, 1990.

REID, M. D. Demonstration of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox using nondegenerate parametric amplification. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 40, p. 913–923, 2 jul. 1989. DOI: [10.1103/PhysRevA.40.913](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.40.913). Disponível em:

<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.40.913>>.

RODRIGUES, RB et al. Orbital angular momentum symmetry in a driven optical parametric oscillator. **Optics letters**, Optical Society of America, v. 43, n. 11, p. 2486–2489, 2018.

SANTOS, B. Coutinho dos; DECHOUM, K.; KHOURY, A. Z. Continuous-Variable Hyperentanglement in a Parametric Oscillator with Orbital Angular Momentum. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 103, p. 230503, 23 dez. 2009. DOI:

[10.1103/PhysRevLett.103.230503](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.230503). Disponível em:

<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.230503>>.

SASADA, Hiroyuki; OKAMOTO, Megumi. Transverse-mode beam splitter of a light beam and its application to quantum cryptography. **Physical Review A**, APS, v. 68, n. 1, p. 012323, 2003.

SCHMITT-MANDERBACH, Tobias et al. Experimental Demonstration of Free-Space Decoy-State Quantum Key Distribution over 144 km. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 98, p. 010504, 1 jan. 2007. DOI: [10.1103/PhysRevLett.98.010504](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.010504). Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.010504>>.

SCHNABEL, Roman. Squeezed states of light and their applications in laser interferometers. **Physics Reports**, Elsevier, v. 684, p. 1–51, 2017.

SCHRÖDINGER, E. Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik. **Naturwissenschaften**, Springer, v. 23, p. 844–849, dez. 1935. DOI:

[10.1007/BF01491987](https://doi.org/10.1007/BF01491987). Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01491987>>.

SCHRÖDINGER, Erwin. Discussion of probability relations between separated systems. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 4. MATHEMATICAL Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. [S. l.: s. n.], 1935. v. 31, p. 555–563.

- SCHUMAKER, Bonny L.; CAVES, Carlton M. New formalism for two-photon quantum optics. II. Mathematical foundation and compact notation. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 31, p. 3093–3111, 5 mai. 1985. DOI: [10.1103/PhysRevA.31.3093](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.31.3093). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.31.3093>.
- SHOR, Peter W. Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer. **SIAM Journal on Computing**, v. 26, n. 5, p. 1484–1509, 1997. DOI: [10.1137/S0097539795293172](https://doi.org/10.1137/S0097539795293172). Disponível em: <https://doi.org/10.1137/S0097539795293172>.
- SILVA, Luciano Fonseca da; KHOURY, Antonio Zelaquett; DECHOUM, Kaled. Entanglement criteria and classical correlations in parametric amplifiers. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 78, p. 025803, 2 ago. 2008. DOI: [10.1103/PhysRevA.78.025803](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.78.025803). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.78.025803>.
- STILLER, Birgit; SEYFARTH, Ulrich; LEUCHS, Gerd. **Temporal and spectral properties of quantum light**. [S. l.: s. n.], 2014. arXiv: [1411.3765 \[quant-ph\]](https://arxiv.org/abs/1411.3765).
- STREKALOV, DV et al. Observation of two-photon “ghost” interference and diffraction. **Physical review letters**, APS, v. 74, n. 18, p. 3600, 1995.
- STÜTZ, Martin et al. How to create and detect N-dimensional entangled photons with an active phase hologram. **Applied physics letters**, American Institute of Physics, v. 90, n. 26, p. 261114, 2007.
- SUDARSHAN, E. C. G. Equivalence of Semiclassical and Quantum Mechanical Descriptions of Statistical Light Beams. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 10, p. 277–279, 7 abr. 1963. DOI: [10.1103/PhysRevLett.10.277](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.10.277). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.10.277>.
- TAKANASHI, Naoto et al. Generation and measurement of a squeezed vacuum up to 100 MHz at 1550 nm with a semi-monolithic optical parametric oscillator designed towards direct coupling with waveguide modules. **Opt. Express**, Optica Publishing Group, v. 27, n. 13, p. 18900–18909, jun. 2019. DOI: [10.1364/OE.27.018900](https://doi.org/10.1364/OE.27.018900). Disponível em: <https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-27-13-18900>.
- THEARLE, Oliver; JANOUSEK, Jiri; ARMSTRONG, Seiji; HOSSEINI, Sara; SCHÜNNEMANN, Melanie et al. Violation of Bell’s inequality using continuous variable measurements. **Physical review letters**, APS, v. 120, n. 4, p. 040406, 2018.

THEARLE, Oliver; JANOUSEK, Jiri; ARMSTRONG, Seiji; HOSSEINI, Sara; SCHÜNNEMANN (MRAZ), Melanie et al. Violation of Bell's Inequality Using Continuous Variable Measurements. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 120, p. 040406, 4 jan. 2018. DOI: [10.1103/PhysRevLett.120.040406](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.040406). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.120.040406>.

TREPS, Nicolas et al. A Quantum Laser Pointer. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 301, n. 5635, p. 940–943, 2003. ISSN 0036-8075. DOI: [10.1126/science.1086489](https://doi.org/10.1126/science.1086489). eprint: [science.sciencemag.org/content/301/5635/940.full.pdf](https://www.science.org/content/301/5635/940.full.pdf). Disponível em: [science.sciencemag.org/content/301/5635/940](https://www.science.org/content/301/5635/940).

VAZIRI, Alipasha; WEIHS, Gregor; ZEILINGER, Anton. Experimental two-photon, three-dimensional entanglement for quantum communication. **Physical Review Letters**, APS, v. 89, n. 24, p. 240401, 2002.

WALBORN, SP et al. **Violation of Bell's Inequality with Continuous Variables and Fractional Fourier Transforms**. [S. l.], 2006.

WALLS, Daniel F; MILBURN, Gerard J. **Quantum optics**. [S. l.]: Springer Science & Business Media, 2007.

WANG, Ning; LI, Yongmin. Quantum analysis and experimental investigation of the nondegenerate optical parametric oscillator with unequally injected signal and idler. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 93, p. 013831, 1 jan. 2016. DOI: [10.1103/PhysRevA.93.013831](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.93.013831). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.93.013831>.

WEIHS, Gregor et al. Violation of Bell's Inequality under Strict Einstein Locality Conditions. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 81, p. 5039–5043, 23 dez. 1998. DOI: [10.1103/PhysRevLett.81.5039](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.81.5039). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.5039>.

WIGNER, E. On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 40, p. 749–759, 5 jun. 1932. DOI: [10.1103/PhysRev.40.749](https://doi.org/10.1103/PhysRev.40.749). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.40.749>.

YARNALL, Timothy et al. Experimental violation of Bell's inequality in spatial-parity space. **Physical review letters**, APS, v. 99, n. 17, p. 170408, 2007.

ANEXO A – Entanglement analysis and experimental proposal for measuring Bell-type correlations in an injected Optical Parametric Oscillator with spin-orbit beams

We study a type-II optical parametric oscillator under injection of laser beams with first-order orbital angular momentum. We develop the equations describing the dynamics of this system in the Wigner representation of the density matrix. These equations are solved numerically and compared with the analytical solution in the non-depletion regime. We show that, when the injected beams are much less intense than the pumping beam, the system still exhibits quantum entanglement, which can be witnessed via Duan-Simon's criterion and Bell's Inequalities. We also propose an experimental apparatus for measuring Bell Inequalities. This system can generate spin-orbit hyperentangled states, thus a useful resource to quantum technology applications and fundamental physics.

A.1 I. Introduction

Entanglement is a useful property of quantum systems, characterized by nonclassical correlations between subsystems. It was first conceived by Schrödinger in his famous thought experiment ([SCHRÖDINGER, E., 1935](#)) involving a cat in a peculiar state of being both dead and alive, and later explored by Einstein, Podolsky, and Rosen (EPR) ([EINSTEIN; PODOLSKY; ROSEN, 1935](#)). The history of science teaches us that the problems and enigmas of entangled systems were little addressed until 1964 with the publication of the work of John S. Bell, which established a way of discriminating the results predicted by quantum mechanics with the results of classical physics, within the idea of local realism ([BELL, 1964](#)). Entanglement is the fundamental cornerstone of Quantum

Technology. Among all known quantum systems, light stands out as an exceptionally promising platform for studying and advancing quantum technologies, already proving its efficacy in long-distance communication systems and simulating complex phenomena (FLAMINI; SPAGNOLO; SCIARRINO, 2018).

In Quantum Optics, it is observed that light is a non-classical physical system which, in some situations, presents entanglement and that can be studied in two domains: the domain of Discrete Variables (DV) and the domain of Continuous Variables (CV). In the DV domain, the discrete nature of the optical field is directly evidenced in the measurement process, where the counting of single photons or coincidences are a clear manifestation of the quantum nature of the field, while in the CV approach the focus is on the quadrature operators, where homodyne measurement is used to measure quadrature correlations and, in general, their joint probability distribution, through continuous quasi-probability functions. Considered the most traditional approach, this method has been routinely employed since A. Aspect et al.'s pioneering work in experimentally determining entanglement in systems with polarized photons via Bell Inequalities (ASPECT; GRANGIER; ROGER, 1982; ASPECT; DALIBARD; ROGER, 1982). Aspect et al.'s work paved the way for the development of quantum encryption and quantum simulation devices. (BENNETT; BRASSARD, 2014; SHOR, 1997; LLOYD, 1996). In the CV domain, optical fields are decomposed into amplitude and phase quadratures. Optical Parametric Oscillators (OPOs) play a crucial role as physical devices, producing entangled laser beams in the CV domain, with significant potential applications in implementing quantum information protocols (BRAUNSTEIN; LOOCK, 2005; BOWEN; TREPS et al., 2003; LANCE et al., 2004), quantum metrology (TREPS et al., 2003; AASI et al., 2013), and quantum computing (MENICUCCI, Nicolas C.; FLAMMIA, Steven T.; PFISTER, 2008b). In addition, in recent years substantial efforts have been dedicated to the understanding and control of OPO for complex quantum tasks, which require scalability of useful degrees of freedom for quantum computing (COELHO et al., 2009; MONTAÑA GUERRERO et al., 2022; TAKANASHI et al., 2019). However, within this sphere of OPO development, both polarization and transverse modes have been extensively utilized. Specifically, the dynamics of spin-orbit modes in type-II OPOs were theoretically investigated in order to explore hyperentanglement in CV (SANTOS; DECHOUM; KHOURY, 2009), and experimentally demonstrated in (LIU et al., 2014). More recently, it was observed experimentally the Orbital Angular Momentum (OAM) symmetry of the beams converted by an injected OPO (RODRIGUES et al., 2018), an effect governed by the conditions of the optical cavities (MARTINELLI et al., 2004; ALVES et al., 2018).

Achieving the violation of Bell inequalities in CV presents a formidable challenge with far-reaching implications for quantum technology. This intricate matter was originally explored in (RALPH; MUNRO; POLKINGHORNE, 2000; HUNTINGTON; RALPH, 2001), and subsequently experimentally implemented by O. Thearly et al (THEARLE; JANOUSEK; ARMSTRONG; HOSSEINI; SCHÜNEMANN (MRAZ) et al., 2018). Their work demonstrates the actualization of Bell inequalities violation in the CV domain. This breakthrough was accomplished through the utilization of two optical parametric oscillators in conjunction with a well-suited homodyne detection configuration.

In this paper, we investigate entanglement in a type-II OPO weakly injected by beams with orbital angular momentum. Analogously to the experimental setup developed by O. Thearly et al (THEARLE; JANOUSEK; ARMSTRONG; HOSSEINI; SCHÜNEMANN (MRAZ) et al., 2018), we will show that this system generates entangled beams that can violate the Bell inequalities. We present a quantum description of the OPO injected with spin-orbit beams via the Wigner representation. We analytically calculated, in a non-depletion regime, the amplitudes of the output fields, which will be taken as the basis for all correlations calculations, and compared the results with exact numerical calculations, which support and give confidence to the analytical results. The conditions predicted by the Duan-Simon and Bell criteria are obtained to demonstrate the entanglement. Finally, we propose an experimental apparatus for measuring the Bell Inequalities in the CV domain in this system.

A.2 II. HAMILTONIAN AND STOCHASTIC EQUATIONS

As illustrated in Fig. 11, the physical system considered here consists of an injected triply resonant type II OPO for the *pumping beam* \vec{E}_p and the seed beams: *signal* \vec{E}_s and *idler* \vec{E}_i . The pumping beam is assumed to be prepared in the fundamental transverse mode ψ_{00} and the seed beams are restricted to the subspace of the first-order Hermite-Gauss modes $\{\psi_{HG10}, \psi_{HG01}\}$ (PADGETT; COURTIAL, 1999). Thus, we can write the equations describing the incident fields as

$$\begin{aligned}\vec{E}_p &= \mathcal{E}_0 \psi_{00} \hat{e}_H, \\ \vec{E}_s &= e^{i\phi_1} \mathcal{E}_1 \psi_{HG10} \hat{e}_H + e^{i\phi_2} \mathcal{E}_2 \psi_{HG01} \hat{e}_H, \\ \vec{E}_i &= e^{i\phi_3} \mathcal{E}_3 \psi_{HG10} \hat{e}_V + e^{i\phi_4} \mathcal{E}_4 \psi_{HG01} \hat{e}_V,\end{aligned}\tag{A.1}$$

where ψ_{HG01} and ψ_{HG10} are the first order Hermite-Gauss modes and \hat{e}_H and \hat{e}_V represent the linear states of horizontal and vertical polarization, respectively. The amplitudes \mathcal{E}_i

and phases ϕ_i with $i = 1...4$, are parameters that can be adjusted to simulate seed beams as different 1st order mode combinations. Note that signal and idler are assumed to be frequency degenerated, being distinguishable only through their polarization states.

In the quantum domain (as illustrated in Fig. 11), when a pumping beam photon is annihilated in the process of Parametric Down Conversion in the nonlinear crystal (NLC), two new twin photons are created in a process that basically follows two equiprobable decay channels: (a) both signal and idler photons are emitted in the transverse mode ψ_{HG10} ; (b) both signal and idler photons are emitted in the transverse mode ψ_{HG01} . The frequencies of the interacting fields satisfy $\omega_p = \omega_s + \omega_i$, with the indexes p, s and i indicating respectively pump, signal and idler beam frequencies.

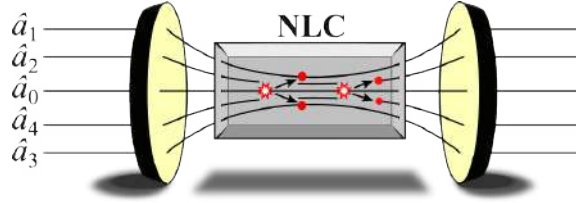


Figura 11: A schematic diagram illustrating a triply resonant injected Optical Parametric Oscillator with four decay channels, based simultaneously on two orthogonal polarization states and two orthogonal first-order Hermite-Gaussian modes.

Mathematically, the fields in the OPO are described by Bosonic operators \hat{a}_i , $i=0...4$, such that

$$\begin{aligned}
 \psi_{00} \hat{e}_H &\rightarrow \hat{a}_0, \\
 \psi_{HG10} \hat{e}_H &\rightarrow \hat{a}_1, \\
 \psi_{HG01} \hat{e}_H &\rightarrow \hat{a}_2, \\
 \psi_{HG10} \hat{e}_V &\rightarrow \hat{a}_3, \\
 \psi_{HG01} \hat{e}_V &\rightarrow \hat{a}_4.
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

The intracavity fields are damped via trasnmittance of the mirrors and their interaction with the medium outside the OPO is described through the thermal bath operators $\hat{\Gamma}_j$, $j = 0...4$. The effective second order non-linearity of the crystal is denoted by χ . Therefore, in the Heisenberg picture, the Hamiltonian that describes this system is given

by (REID, 1989; GRAHAM; HAKEN, 1968)

$$\begin{aligned}\hat{H} = & \sum_{j=0}^4 \hbar \omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + i \hbar \chi \sum_{j=1}^2 (\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j+2}^\dagger \hat{a}_0 - \hat{a}_j \hat{a}_{j+2} \hat{a}_0^\dagger) \\ & + i \hbar \sum_{j=0}^4 (\mathcal{E}_j e^{-i\omega_j t} - \mathcal{E}_j^* e^{i\omega_j t}) + \sum_{j=0}^4 (\hat{a}_j \hat{\Gamma}_j^\dagger + \hat{a}_j^\dagger \hat{\Gamma}_j). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

In this equation, the first term describes the number of photons inside the cavity for each mode. The second term describes the interaction between the pump beam and the signal and idler beams via the nonlinear crystal. The third and fourth terms describe respectively the seed fields, injected with the pumping beam, and the cavity photons losses.

The complete solution of this system consists of solving the master equations for the density operator, an extremely complicated task due to the non-linearity between the quantum operators in the Hamiltonian. Through well-known techniques in the literature to treat the thermal reservoir (WALLS; MILBURN, 2007), this problem can be mapped on a Fokker-Planck equation for the probability distribution of complex amplitudes in the phase space. This equation is equivalent to the set of stochastic differential equations, in the Wigner representation (DECHOUM et al., 2004; COUTINHO DOS SANTOS et al., 2005), as written below:

$$\begin{aligned}d\alpha_0 = & [\mathcal{E}_0 e^{i\phi_0} - \gamma_0 \alpha_0 - \chi(\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_4)]dt \\ & + \sqrt{\gamma_0} dw_0, \\ d\alpha_1 = & (\mathcal{E}_1 e^{i\phi_1} - \gamma \alpha_1 + \chi \alpha_0 \alpha_3^*)dt + \sqrt{\gamma} dw_1, \\ d\alpha_2 = & (\mathcal{E}_2 e^{i\phi_2} - \gamma \alpha_2 + \chi \alpha_0 \alpha_4^*)dt + \sqrt{\gamma} dw_2, \\ d\alpha_3 = & (\mathcal{E}_3 e^{i\phi_3} - \gamma \alpha_3 + \chi \alpha_0 \alpha_1^*)dt + \sqrt{\gamma} dw_3, \\ d\alpha_4 = & (\mathcal{E}_4 e^{i\phi_4} - \gamma \alpha_4 + \chi \alpha_0 \alpha_2^*)dt + \sqrt{\gamma} dw_4, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

where α_j , with $j = 0, 1, \dots, 4$, are complex amplitudes associated with the bosonic operators of the fields involved. The terms γ_0 and γ describe the losses in the cavity. Since modes 1, ..., 4 are degenerate in frequency, we use the same γ for the losses in all down-converted modes. The dw_j are complex Wiener processes such that

$$\langle dw_j \rangle = 0 \quad \text{and} \quad \langle dw_j dw_k^* \rangle = \delta_{jk} dt. \quad (\text{A.5})$$

In order to proceed with the calculations with a direct notation, we rewrite Eqs. (A.4)

as

$$\begin{aligned} d\alpha_0 &= [\mathcal{E}_0 - \gamma_0\alpha_0 - \chi(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4)]dt + \sqrt{\gamma_0}dw_0, \\ d\alpha_j &= (\mathcal{E}_j e^{i\phi_j} - \gamma\alpha_j + \chi\alpha_0\alpha_{j+2}^*)dt + \sqrt{\gamma}dw_j, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

where the index j takes values $j = 1 \dots 4$ (with $\alpha_5 \equiv \alpha_1$ and $\alpha_6 \equiv \alpha_2$). Furthermore, without loss of generality, we set the pumping beam field $E_p = E_p^* = \mathcal{E}_0$ as a real-valued field by choosing $\phi_0 = 0$, so that the other fields referring to the signal and idler beams (according to Eq. (A.4)) have their phases defined in relation to it.

We now proceed to write the set of stochastic equations in the so-called Langevin form, by defining complex white noises Φ_j^{in} such that (DECHOUM et al., 2004)

$$\frac{dw_j}{dt} = \sqrt{2}\Phi_j^{in}(t), \quad (\text{A.7})$$

and $\langle \Phi_j^{in}(t)\Phi_k^{in}(t') \rangle = \frac{1}{2}\delta(t-t')\delta_{jk}$. Also, we scale time as $\tau = \gamma t$ and the amplitudes as $a_0 = (\chi/\gamma)\alpha_0$ and $a_j = g\alpha_j$, with $g = \chi/\sqrt{2\gamma\gamma_0}$, to finally get the dimensionless equations

$$\begin{aligned} \frac{da_0}{d\tau} &= \gamma_r \{ \mu_0 - a_0 - 2(a_1a_3 + a_2a_4) + 2g\Phi_0(\tau) \}, \\ \frac{da_j}{d\tau} &= \mu_j e^{i\phi_j} - a_j + a_0a_{j+2}^* + g\sqrt{2}\Phi_j^{in}(\tau), \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

where $\gamma_r \equiv \gamma_0/\gamma$ and

$$\mu_0 \equiv \frac{\chi\mathcal{E}_0}{\gamma\gamma_0} \quad \text{and} \quad \mu_j \equiv \frac{\chi\mathcal{E}_j}{\gamma\sqrt{2\gamma\gamma_0}} \quad (\text{A.9})$$

are the pump and injection parameters, respectively. When no field is injected into the optical cavity, $\mu_0 = 1$ represents the OPO's threshold for oscillation.

A.3 III. Steady State Solutions

In this section, we will investigate the classical dynamics of the system by finding the steady-state solutions of the average values of the dynamical variables. This regime is useful for the experimental analysis of the system's parameters across various phase regimes (WANG; LI, 2016). Under this condition, $da_j/dt = 0$ and the noise terms are averaged out. As a result, the system transforms into

$$\begin{aligned} \mu_0 - \bar{a}_0 - 2 \sum_{j=1}^2 \bar{a}_j \bar{a}_{j+2} &= 0, \\ \mu_j e^{i\phi_j} - \bar{a}_j + \bar{a}_0 \bar{a}_{j+2}^* &= 0, \\ \mu_{j+2} e^{i\phi_{j+2}} - \bar{a}_{j+2} + \bar{a}_0 \bar{a}_j^* &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Rearranging the equations, it is possible to write the down-converted beam amplitudes as a function of a_0 and injection parameters μ_j :

$$\bar{a}_j = \frac{\mu_j e^{i\phi_j} + \bar{a}_0 \mu_{j+2} e^{i\phi_{j+2}}}{1 - \bar{a}_0^2}, \quad (\text{A.11})$$

$$\bar{a}_{j+2} = \frac{\mu_{j+2} e^{i\phi_{j+2}} + \bar{a}_0 \mu_j e^{i\phi_j}}{1 - \bar{a}_0^2}. \quad (\text{A.12})$$

Substituting these solutions into the initial equation from (A.10), one can formulate a 5th-order polynomial for a_0 , which can be addressed numerically if necessary. Finally, having these solutions, we can readily determine the intensity of the converted signal and idler beams outside the cavity.

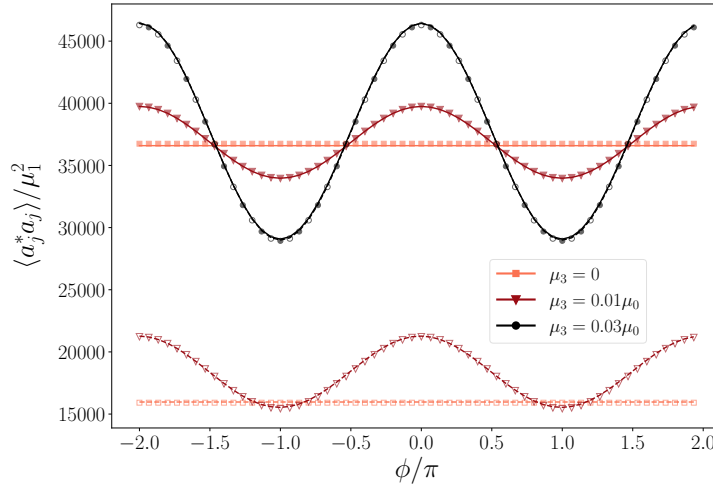


Figure 12: Normalized steady-state output signal and idler beams as a function of the relative phase between the pump and injection beams for $\mu_0 = 0.2$. The signal injection parameter is fixed as $\mu_1 = 0.03\mu_0$, while the idler's vary from 0 to $0.03\mu_0$ (lighter to darker colors). Curves depict analytical results as in Eq. (A.10), while symbols the numerical ones as in Eq. (A.8). Open symbols/dashed curves: idler intensity. Filled symbols/solid curves: signal intensity.

Fig. 12 shows both the numerical and analytical outcomes for the steady-state intensity of the signal and idler output fields when $\mu_0 = 0.2$. These intensity profiles are plotted against the phase $\phi = \phi_1 + \phi_3$, which represents the combined phase difference between the pump and the injected seed. It is worth noting that the equations (A.11) and (A.12) provide a crucial insight into the system's behavior. Specifically, these equations reveal that the amplitudes \bar{a}_1 and \bar{a}_3 remain entirely independent of both the amplitudes \bar{a}_2 and \bar{a}_4 and the phases ϕ_2 and ϕ_4 . This independence indicates that the system behaves as two separate OPOs. It should be noted that the amplitudes of the pump, signal, and idler beams can be varied. When the signal and idler injection beams have equal intensities, the response observed is optimal, denoting maximum conversion. In such a scenario, the

converted signal and idler exhibit identical intensities and are phase-sensitive, relying on the value of the relative phase ϕ . However, if the signal injection beam is characterized by a proportionality factor of $\mu_1 = 0.03\mu_0$, while the idler injection beam has $\mu_3 = 0.01\mu_0$, the signal becomes more intense than the idler injection. Consequently, we still observe the familiar phase-sensitive phenomenon, except that the converted signal is stronger than the converted idler. In the absence of the idler injection beam, the system exhibits a distinct behavior. Specifically, we observe a generation of a relatively low intensity idler beam, while the signal converted beam becomes significantly stronger. In this configuration, as expected, there is no phase dependence.

A.4 IV. Fields Intensities in the non-depletion regime

The set of stochastic equations (A.8) can be solved numerically. However, under certain conditions, these stochastic equations can be simplified and solved analytically. Here we are working with intensities of the injection beams much smaller than the intensity of the pumping beam which, in turn, is smaller than the intensity of the OPO oscillation threshold. Under these conditions, we perform the so-called non-depletion approach: we assume the pump beam amplitude is little affected due to the creation of photons in the down-converted modes and hence we assume a stationary regime for a_0 . This means eliminating the noise Φ_0 as well as the full-time dependence of a_0 in Eqs. (A.8). One then gets a_0 as constant and four remaining coupled equations for the modes $j = 1...4$,

$$\begin{aligned} a_0 &= \mu_0, \\ \frac{da_j}{d\tau} &= \mu_j e^{i\phi_j} - a_j + \mu_0 a_{j+2}^* + g\sqrt{2}\Phi_j^{in}(\tau). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

This approximation makes it possible to solve the system analytically, which will be done here by transforming the amplitude and noise fields to the frequency domain via Fourier transforms of the form

$$\tilde{f}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\Omega\tau} f(\tau). \quad (\text{A.14})$$

In summary, applying the Fourier Transform to Eqs. (A.13) and using relation (A.7),

one gets

$$\begin{aligned}
\imath\Omega\tilde{a}_j(\Omega) &= \sqrt{2\pi}\mu_j e^{i\phi_j}\delta(\Omega) - \tilde{a}_j(\Omega) \\
&\quad + \mu_0\tilde{a}_{j+2}^*(-\Omega) + g\sqrt{2}\tilde{\Phi}_j^{in}(\Omega), \\
\imath\Omega\tilde{a}_{j+2}(\Omega) &= \sqrt{2\pi}\mu_{j+2} e^{i\phi_{j+2}}\delta(\Omega) - \tilde{a}_{j+2}(\Omega) \\
&\quad + \mu_0\tilde{a}_j^*(-\Omega) + g\sqrt{2}\tilde{\Phi}_{j+2}^{in}(\Omega),
\end{aligned} \tag{A.15}$$

which can be solved in order to give the intracavity fields

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_j(\Omega) &= \frac{\sqrt{2\pi}\mu_j e^{i\phi_j}\delta(\Omega) + \sqrt{2\pi}\mu_{j+2} e^{-i\phi_{j+2}}\delta(\Omega)}{(1 + \imath\Omega)^2 - \mu_0^2} \\
&\quad + g\sqrt{2} \frac{(1 + \imath\Omega)\tilde{\Phi}_j^{in}(\Omega) + \mu_0\tilde{\Phi}_{j+2}^{*in}(-\Omega)}{(1 + \imath\Omega)^2 - \mu_0^2}.
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Therefore, in this non-depletion approach, the injection and vacuum contributions for the amplitude solutions appear as two independent terms. In particular, when there is no injection ($\mu_j = \mu_{j+2} = 0$), one gets the vacuum solution

$$\tilde{a}_j^{\text{VAC}}(\Omega) \equiv g\sqrt{2} \frac{(1 + \imath\Omega)\tilde{\Phi}_j^{in}(\Omega) + \mu_0\tilde{\Phi}_{j+2}^{*in}(-\Omega)}{(1 + \imath\Omega)^2 - \mu_0^2}. \tag{A.17}$$

Returning to the original amplitude variables, denoted as $\alpha_j = a_j/g$, we can determine the field outside the cavity through the input-output relations (WALLS; MILBURN, 2007),

$$\tilde{\alpha}_j^{\text{out}}(\Omega) = \sqrt{2\gamma}\tilde{\alpha}_j(\Omega) - \sqrt{\gamma}\tilde{\Phi}_j^{in}(\Omega). \tag{A.18}$$

Therefore, substituting the Eq. (A.16) in Eq. (A.18), and averaging over the ensemble, one can get the fields correlations in the frequency domain, viz.,

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\alpha}_j^{*out}(\Omega)\tilde{\alpha}_k^{out}(\Omega') \rangle &= \\
&\delta_{jk}\delta(\Omega + \Omega') \left[\frac{1}{2} + \frac{4\gamma\mu_0^2}{(1 - \Omega^2 - \mu_0^2)^2 + 4\Omega^2} \right] \\
&\quad + 4\gamma\pi(\mu_j e^{-i\phi_j} + \mu_0\mu_{j+2} e^{i\phi_{j+2}}) \times \\
&\quad \frac{(\mu_k e^{i\phi_k} + \mu_0\mu_{k+2} e^{-i\phi_{k+2}})\delta(-\Omega)\delta(\Omega')}{(1 - \Omega^2 - \mu_0^2)^2 + 4\Omega^2}
\end{aligned} \tag{A.19}$$

and

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\alpha}_j^{out}(\Omega) \tilde{\alpha}_k^{out}(\Omega') \rangle = & \\
 & \gamma \left[\frac{\mu_0(1 + \Omega^2 + \mu_0^2)(\delta_{j,k+2} + \delta_{j+2,k})\delta(\Omega + \Omega')}{(1 - \Omega^2 - \mu_0^2)^2 + 4\Omega^2} \right. \\
 & + 4\gamma\pi(\mu_j e^{i\phi_j} + \mu_0 \mu_{j+2} e^{-i\phi_{j+2}}) \times \\
 & \left. \frac{(\mu_k e^{-i\phi_k} + \mu_0 \mu_{k+2} e^{-i\phi_{k+2}})\delta(\Omega)\delta(\Omega')}{(1 - \Omega^2 - \mu_0^2)^2 + 4\Omega^2} \right]. \tag{A.20}
 \end{aligned}$$

The intensity in each mode is obtained from Eq. (A.19) by setting $j = k$ and then taking

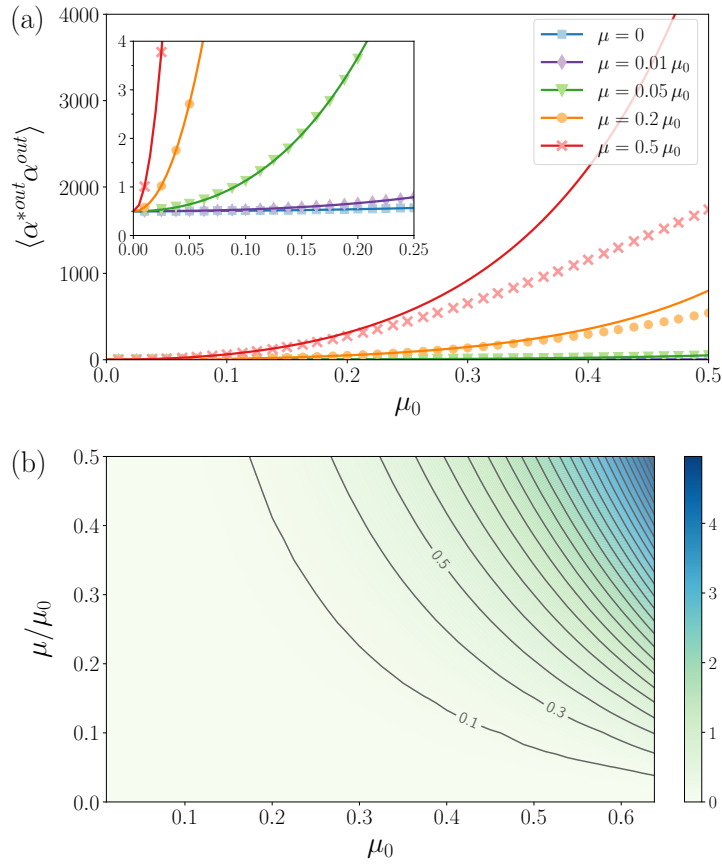


Figure 13: (a) The intensities of the converted beams are presented as a function of the pumping beam parameter μ_0 in five different injection scenarios. Curves: analytical solution on the non-depletion regime (Eq. A.19). Symbols: numerical integration of Eqs. (A.8). Inset: detailed enlargement of the behavior around $\mu_0 = 0$. (b) Density plot of the relative difference ϵ between intensities in the numerical and analytical solutions (Eq. A.21). Contour lines are spaced by 0.2 (only the first three values are shown, for clarity).

an Inverse Fourier Transform. Fig. 13(a) displays the transmitted OPO field intensity for a mode α_j , depicting its dependency on the pumping and injection parameters μ_0 and μ_j . In all analyzed situations we considered $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 \equiv \mu$ and $\phi_2 = \phi_3 = \phi_1 = \phi_4 = 0$ such that all modes exhibit the same statistical behavior. In addition, we choose $g = 0.01$. Solid

curves represent analytical results as in Eq. (A.19), while symbols show the results from numerical solutions of the system (A.8), referring to the solution of the complete set of equations without the nondepletion approximation. Numerical integrations of Eqs. (A.8) were performed with a second order predictor-corrector method (KLOEDEN; PLATEN, 1992), and both time and ensemble averages are considered after a suitable transient time.

At this point, it is important to highlight the strong agreement between the analytical and numerical curves, particularly in regimes where $\mu_0 < 0.3$ and $\mu_j < 0.2\mu_0$, as they exhibit a nearly perfect overlap. The blue curve (squares) refers to the null injection case. The inset represents a zoom in the region where the pumping parameter is less than 15% of the OPO threshold, which shows that in this regime the non-depletion approximation agrees very well with the numerical solution. As expected, in all results the intensity transmitted for $\mu_0 = 0$ is worth 0.5, bearing in mind that all mathematical developments took place in the Wigner representation where this value represents the energy of the vacuum state (WALLS; MILBURN, 2007). Fig. 13(b) shows a density plot where the color intensity represents the relative distance between output intensities in the numerical and analytical solutions, namely

$$\epsilon \equiv \frac{|\langle \alpha_j^{* out} \alpha_j^{out} \rangle_{\text{num}} - \langle \alpha_j^{* out} \alpha_j^{out} \rangle_{\text{ana}}|}{\langle \alpha_j^{* out} \alpha_j^{out} \rangle_{\text{num}}}. \quad (\text{A.21})$$

In the predominantly light green region, below the 0.1 contour line, one finds the typical values of μ_0 and μ in which the non-depletion approximation agrees very well with the numerical solution, such that $\epsilon < 0.1$.

A.5 V. EPR correlations

In a more formal context, entanglement is defined by the presence of nonclassical correlations among subsystems within a quantum system. Such correlations are marked by the impossibility of representing the system's density matrix as a convex combination of factorized density matrices. This fundamental concept of separability between subsystems forms the basis for the Duan-Simon criterion, as proposed by Duan and Simon (DUAN et al., 2000), which serves as a valuable tool for assessing entanglement in continuous variables. Here, we utilize the Duan-Simon criterion to detect the presence of entanglement within the beams generated by our injected OPO. To do so, we calculate the necessary spectral variances using a dual approach: analytical methods incorporating the non-depletion approximation (A.13), and numerical solutions for Eqs. (A.4).

The Duan-Simon criterion (DUAN et al., 2000) constitutes a mathematical inequality

based on correlations between different combinations of amplitude and phase quadratures (Einstein-Podolsky-Rosen continuous variables) of the interacting modes. Therefore, in order to implement this criterion in our system, we define the quadratures

$$X_j \equiv a_j^* + a_j \text{ and } Y_j \equiv -i(a_j^* - a_j), \quad (\text{A.22})$$

which are subsequently rescaled using the following transformations

$$\begin{aligned} x_0 &= g\sqrt{2\gamma_r}X_0, & y_0 &= gY_0, \\ x_j &= g\sqrt{2\gamma_r}X_j, & y_j &= gY_j. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

With this, Eq. (A.8) takes the form

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{d\tau} &= \gamma_r(2\mu_0 - x_0 - \sum_{j=1}^2(x_jx_{j+2} - y_jy_{j+2})) \\ &\quad + 2g\gamma_r\Phi_{x_0}, \\ \frac{dy_0}{d\tau} &= \gamma_r(-y_0 - \sum_{j=1}^2(x_jj_{j+2} + y_jy_{j+2})) \\ &\quad + 2g\gamma_r\Phi_{y_0}, \\ \frac{dx_j}{d\tau} &= 2\mu_j \cos \phi_j - x_j + \frac{1}{2}(x_0x_{j+2} + y_0y_{j+2}) \\ &\quad + g\sqrt{2}\Phi_{x_j}, \\ \frac{dy_j}{d\tau} &= 2\mu_j \sin \phi_j - y_j + \frac{1}{2}(x_0y_{j+2} - y_0x_{j+2}) \\ &\quad + g\sqrt{2}\Phi_{y_j}, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

where, analogously to Eq. (A.6), we assign $x_5 \equiv x_1$ and $x_6 \equiv x_2$ (and similarly to the y quadrature). It is worth mentioning that the Eqs. (A.24) constitute a set of coupled stochastic equations with Gaussian noise satisfying (DECHOUM et al., 2004)

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{x_i}(\tau) \rangle &= \langle \Phi_{y_i}(\tau) \rangle = 0 \\ \langle \Phi_{x_i}(\tau)\Phi_{x_j}(\tau') \rangle &= \langle \Phi_{y_i}(\tau)\Phi_{y_j}(\tau') \rangle = \delta_{ij}\delta(\tau - \tau'). \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

The occurrence of quadrature quantum correlations become evident by defining new quadratures that encompass both the *signal* and *idler* modes, namely

$$\begin{aligned} x_{j,j+2}^+ &= \frac{x_j + x_{j+2}}{\sqrt{2}}, & x_{j,j+2}^- &= \frac{x_j - x_{j+2}}{\sqrt{2}}, \\ y_{j,j+2}^- &= \frac{y_j - y_{j+2}}{\sqrt{2}}, & y_{j,j+2}^+ &= \frac{y_j + y_{j+2}}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

In these new variables, the equations with non-depletion approximation of the pump beam

read

$$\begin{aligned}
\frac{dx_{j,j+2}^+}{d\tau} &= (2\mu_j \cos \phi_j + 2\mu_{j+2} \cos \phi_{j+2}) - (1 - \mu_0)x_{j,j+2}^+ \\
&\quad + g\sqrt{2}(\Phi_{x_j} + \Phi_{x_{j+2}}), \\
\frac{dy_{j,j+2}^+}{d\tau} &= (2\mu_j \sin \phi_j + 2\mu_{j+2} \sin \phi_{j+2}) - (1 + \mu_0)y_{j,j+2}^+ \\
&\quad + g\sqrt{2}(\Phi_{y_j} + \Phi_{y_{j+2}}), \\
\frac{dx_{j,j+2}^-}{d\tau} &= (2\mu_j \cos \phi_j - 2\mu_{j+2} \cos \phi_{j+2}) - (1 + \mu_0)x_{j,j+2}^- \\
&\quad + g\sqrt{2}(\Phi_{x_j} - \Phi_{x_{j+2}}), \\
\frac{dy_{j,j+2}^-}{d\tau} &= (2\mu_j \sin \phi_j - 2\mu_{j+2} \sin \phi_{j+2}) - (1 - \mu_0)y_{j,j+2}^- \\
&\quad + g\sqrt{2}(\Phi_{y_j} - \Phi_{y_{j+2}}).
\end{aligned} \tag{A.27}$$

Interestingly, this change of variables decouples the set of equations in terms of the variables representing the combined quadratures. Nevertheless, Eqs.(A.27) still entail correlations via the noise terms that are combined in the process, causing the suppression of quantum fluctuations (squeezing) in a pair of quadratures, at the cost of increasing fluctuations (anti-squeezing) in the remaining pair, all according to the Heisenberg Uncertainty Principle.

Therefore, in order to verify the squeezing and anti-squeezing situations, we calculated the correlation spectra associated with the combinations of the four quadratures of interest. We will proceed from here with calculations in the frequency domain since from an experimental point of view it is the quantity easily accessed outside the cavity.

Applying a Fourier transform to Eqs. (A.27), we get

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{j,j+2}^+(\Omega) &= \frac{1}{1 - \mu_0 + i\Omega} [2\sqrt{\pi}\delta(\Omega)(\mu_j \cos \phi_j + \\
&\quad \mu_{j+2} \cos \phi_{j+2}) + g\sqrt{2}(\tilde{\Phi}_{x_j}(\Omega) + \tilde{\Phi}_{x_{j+2}}(\Omega))], \\
\tilde{y}_{j,j+2}^+(\Omega) &= \frac{1}{1 + \mu_0 + i\Omega} [2\sqrt{\pi}\delta(\Omega)(\mu_j \sin \phi_j + \\
&\quad \mu_{j+2} \sin \phi_{j+2}) + g\sqrt{2}(\tilde{\Phi}_{y_j}(\Omega) + \tilde{\Phi}_{y_{j+2}}(\Omega))], \\
\tilde{x}_{j,j+2}^-(\Omega) &= \frac{1}{1 + \mu_0 + i\Omega} [2\sqrt{\pi}\delta(\Omega)(\mu_j \cos \phi_j - \\
&\quad \mu_{j+2} \cos \phi_{j+2}) + g\sqrt{2}(\tilde{\Phi}_{x_j}(\Omega) - \tilde{\Phi}_{x_{j+2}}(\Omega))], \\
\tilde{y}_{j,j+2}^-(\Omega) &= \frac{1}{1 - \mu_0 + i\Omega} [2\sqrt{\pi}\delta(\Omega)(\mu_j \sin \phi_j - \\
&\quad \mu_{j+2} \sin \phi_{j+2}) + g\sqrt{2}(\tilde{\Phi}_{y_j}(\Omega) - \tilde{\Phi}_{y_{j+2}}(\Omega))],
\end{aligned} \tag{A.28}$$

where the noise terms, now in Fourier space, must obey

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\Phi}_{m_j}(\Omega) \rangle &= 0, \\ \langle \tilde{\Phi}_{m_j}(\Omega) \tilde{\Phi}_{m_k}(\Omega') \rangle &= \delta_{jk} \delta(\Omega + \Omega').\end{aligned}\tag{A.29}$$

Once more applying the input-output relation Eq. (A.18), we derive the expressions for the correlations beyond of the cavity (extra-cavity).

$$\begin{aligned}\langle \tilde{y}_{j,j+2}^+ \tilde{y}_{j,j+2}^{+*} \rangle_{\text{out}} &= \delta(\Omega + \Omega') \left[1 - \frac{4\mu_0}{(1 + \mu_0)^2 + \Omega^2} \right], \\ &+ 8\gamma\pi\delta(\Omega)\delta(\Omega') \frac{(\mu_j \sin \phi_j + \mu_{j+2} \sin \phi_{j+2})^2}{(1 + \mu_0)^2 + \Omega^2}, \\ \langle \tilde{x}_{j,j+2}^- \tilde{x}_{j,j+2}^{-*} \rangle_{\text{out}} &= \delta(\Omega + \Omega') \left[1 - \frac{4\mu_0}{(1 + \mu_0)^2 + \Omega^2} \right] \\ &+ 8\gamma\pi\delta(\Omega)\delta(\Omega') \frac{(\mu_j \cos \phi_j - \mu_{j+2} \cos \phi_{j+2})^2}{(1 + \mu_0)^2 + \Omega^2}, \\ \langle \tilde{y}_{j,j+2}^- \tilde{y}_{j,j+2}^{-*} \rangle_{\text{out}} &= \delta(\Omega + \Omega') \left[1 + \frac{4\mu_0}{(1 - \mu_0)^2 + \Omega^2} \right] \\ &+ 8\gamma\pi\delta(\Omega)\delta(\Omega') \frac{(\mu_j \sin \phi_j - \mu_{j+2} \sin \phi_{j+2})^2}{(1 - \mu_0)^2 + \Omega^2}, \\ \langle \tilde{x}_{j,j+2}^+ \tilde{x}_{j,j+2}^{+*} \rangle_{\text{out}} &= \delta(\Omega + \Omega') \left[1 + \frac{4\mu_0}{(1 - \mu_0)^2 + \Omega^2} \right] \\ &+ 8\gamma\pi\delta(\Omega)\delta(\Omega') \frac{(\mu_j \cos \phi_j + \mu_{j+2} \cos \phi_{j+2})^2}{(1 - \mu_0)^2 + \Omega^2}.\end{aligned}\tag{A.30}$$

It's noticeable that the injection terms solely impact the zero-frequency component of the correlation spectra. Away from this frequency, one may identify the light noise spectrum with the expressions of the averages of the combined quadratures provided by Eqs. (A.30) as in

$$V_{n_{l,l+2}}^{m_{k,k+2}}(\Omega)\delta(\Omega + \Omega') = \langle \Delta m_{k,k+2}(\Omega) \Delta n_{l,l+2}(\Omega') \rangle,\tag{A.31}$$

where m, n refer to any of the combined quadratures x^\pm or y^\pm and $\Delta m_{j,j+2}(\Omega) \equiv m_{j,j+2}(\Omega) - \langle m_{j,j+2}(\Omega) \rangle$. Here, $V_{n_{l,l+2}}^{m_{k,k+2}}(\Omega)$ is the extra-cavity noise spectrum of light. Formally, when $m = n$ and $k = l$, we get

$$\begin{aligned}\langle \Delta m_{k,k+2}(\Omega) \Delta m_{k,k+2}(\Omega') \rangle &= 1 \Rightarrow \text{shot noise,} \\ \langle \Delta m_{k,k+2}(\Omega) \Delta m_{k,k+2}(\Omega') \rangle &< 1 \Rightarrow \text{squeezing,} \\ \langle \Delta m_{k,k+2}(\Omega) \Delta m_{k,k+2}(\Omega') \rangle &> 1 \Rightarrow \text{anti-squeezing.}\end{aligned}$$

By the Duan-Simon criterion, there is entanglement if the inequality

$$\langle \Delta m_{k,k+2}(\Omega)^2 \rangle + \langle \Delta n_{l,l+2}(\Omega)^2 \rangle \geq 2\tag{A.32}$$

is violated, which happens when we select pairs of quadratures that are simultaneously squeezed, that is, EPR pairs like $\{x_{k,k+2}^-, y_{k,k+2}^+\}$ and $\{x_{k,k+2}^+, y_{k,k+2}^-\}$.

Fig. 14 provides an overview of the correlation spectra and the Duan-Simon criterion for the system, with $\mu_0 = 0.2$ and $\mu_j = 0.01\mu_0$. Both plots display the results of numerical simulations for the complete equations (points), as well as the analytical solutions in the non-depletion regime (solid lines). Fig. 14(a) showcases both the squeezed $\langle x_- x_- \rangle$ and the anti-squeezed $\langle x_+ x_+ \rangle$ spectra, while Fig. 14(b) presents the Duan-Simon spectrum. Notably, the spectrum curve consistently remains below 2 (thus violating the Duan-Simon condition), with its minimum value occurring around $\Omega = 0$. We should mention that the zero frequency components obtained with the numerical solutions lie outside the plot scale, as expected due to the presence of the delta functions in Eqs. (A.30).

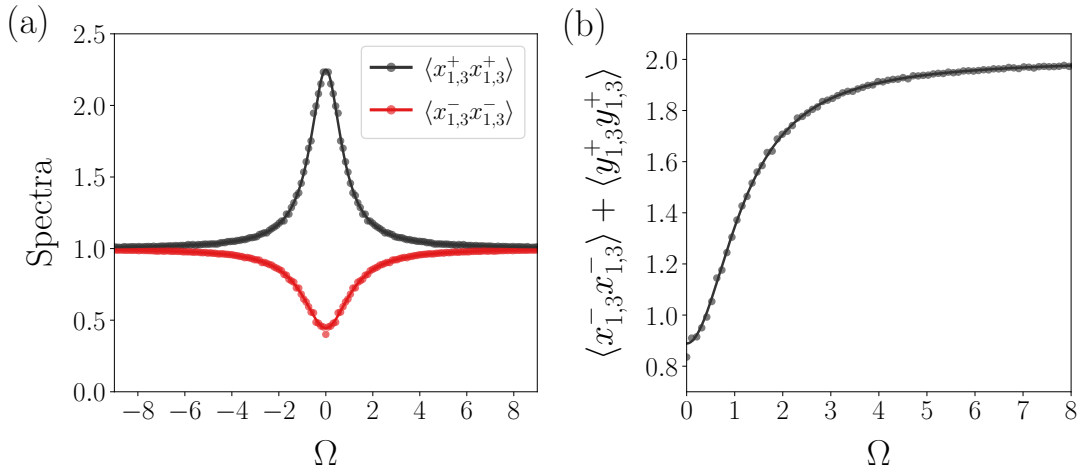


Figure 14: (a) Noise spectrum for squeezing and anti-squeezing quadratures when $\mu_0 = 0.2$, $\mu_j = 0.01\mu_0$ and $\phi_j = 0$. (b) Duan-Simon spectrum. Points: numerical simulations. Lines: analytical results with non-depletion approximation, Eqs. (A.30).

Generally, it is observed that the spectra curves of the system without seed injection closely resemble the case illustrated in Figure 14. This observation suggests that the injection of a seed can effectively drive the oscillating modes while preserving the entanglement.

A.6 VI. Discrete variables Bell inequality violation

In this section, we propose an experiment that aims to verify the violation of Bell's inequality using discrete variables instead of continuous variables obtained elsewhere (THEARLE; JANOUSEK; ARMSTRONG; HOSSEINI; SCHÜNEMANN (MRAZ) et al., 2018). The advantage here is that we do not need to use homodyne measurement on

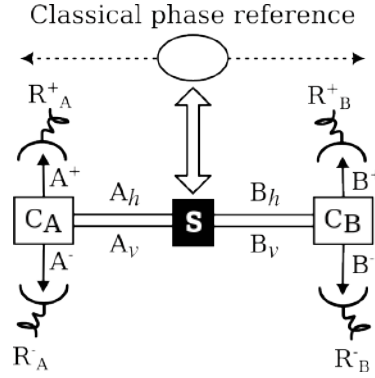


Figura 15: A diagram for a Bell Test.

the output fields, which proves to be a difficult task. In the present case, verifying the violation of Bell's inequality to test the theory of local realism seems to be more viable through the use of less sophisticated measuring devices. Specifically, Bell-type quantum correlations can be verified and quantified using the scheme illustrated in Fig. 15. In this scheme, S is a source that emits pairs of linearly polarized photons in the horizontal (H) and vertical (V) directions in the first order Hermite-Gauss modes HG_{01} and HG_{10} which are sent to two observers: Alice (A) and Bob (B). The photon with polarization H is sent to Alice while the photon with polarization V is sent to Bob. Therefore, each pair emitted by the source is described by a state of four modes: A_h, A_v, B_h, B_v , in which the indices h and v refer to the modes HG_{10} horizontal and HG_{01} vertical, respectively. Alice and Bob can mix their respective modes using appropriate optical elements C to subsequently perform measurements $\{\theta_A, \theta'_A\}$ and $\{\theta_B, \theta'_B\}$ referring to $\hat{A}^+, \hat{A}^-, \hat{B}^+$ and \hat{B}^- modes. Alice and Bob's can perform single photon measurements resulting in $R \in \{0, 1\}$ at each detector. Repeating this procedure, they can build the joint statistics of correlations between them, given by

$$R^{ij}(\theta_A, \theta_B) = \langle R_A^i(\theta_A) R_B^j(\theta_B) \rangle, \quad (\text{A.33})$$

where $i, j \in \{+, -\}$. We can construct a function based on the four possible combinations, as outlined in (THEARLE; JANOUSEK; ARMSTRONG; HOSSEINI; SCHÜNEMANN (MRAZ) et al., 2018),

$$E(\theta_A, \theta_B) = \frac{M}{N}, \quad (\text{A.34})$$

where

$$M = R^{++}(\theta_A, \theta_B) + R^{--}(\theta_A, \theta_B) - R^{+-}(\theta_A, \theta_B) - R^{-+}(\theta_A, \theta_B), \quad (\text{A.35})$$

and N is a normalization term given by

$$N = R^{++}(\theta_A, \theta_B) + R^{--}(\theta_A, \theta_B) + R^{+-}(\theta_A, \theta_B) + R^{-+}(\theta_A, \theta_B), \quad (\text{A.36})$$

that is, the sum of all possible outcomes.

The quantity $E(\theta_A, \theta_B)$ accounts for the expectation values for each set of measures. These expectation values can be used in the construction of the Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) inequality

$$B = |E(\theta_A, \theta_B) + E(\theta'_A, \theta'_B) + E(\theta'_A, \theta_B) - E(\theta_A, \theta'_B)| \leq 2, \quad (\text{A.37})$$

an inequality that determines the range of possible outcomes according to local realism but that can be violated if applied to entangled states. The maximum violation occurs when the experimental setup angles are $\theta_A = \{\pi/8, 3\pi/8\}$ and $\theta_B = \{0, \pi/4\}$.

The correlation represented in Eq. (A.33) can be constructed by continuous variables with amplitudes in *positive* P representation, based on normal ordering, as

$$R_N^{ij} = \langle \hat{A}_i^\dagger(\theta_A) \hat{A}_i(\theta_A) \hat{B}_j^\dagger(\theta_B) \hat{B}_j(\theta_B) \rangle. \quad (\text{A.38})$$

However, using the *Wigner* representation, based on symmetric ordering, Eq. (A.38) can be mapped into

$$R_S^{ij} = \left\langle \left[\hat{A}_i^\dagger(\theta_A) \hat{A}_i(\theta_A) - \langle \hat{A}_i^\dagger(\theta_A) \hat{A}_i(\theta_A) \rangle \right] \times \left[\hat{B}_j^\dagger(\theta_B) \hat{B}_j(\theta_B) - \langle \hat{B}_j^\dagger(\theta_B) \hat{B}_j(\theta_B) \rangle \right] \right\rangle, \quad (\text{A.39})$$

where the averages of the intensities were subtracted in the calculation of the correlation function. As one of our main results, we compute below the CHSH inequality in both representations.

The transformations applied by the elements C_A and C_B , which modify the modes within the Alice and Bob frames, can be expressed as follows:

$$\begin{aligned} A_+ &= \cos(\theta_A) a_1 + \sin(\theta_A) a_2, \\ A_- &= \sin(\theta_A) a_1 - \cos(\theta_A) a_2, \\ B_+ &= \cos(\theta_B) a_3 + \sin(\theta_B) a_4, \\ B_- &= \sin(\theta_B) a_3 - \cos(\theta_B) a_4, \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

where the amplitudes a_i are associated with the seeded fields from Eq. (A.2). Now, using

these amplitudes, we proceed by computing Eq. (A.34) in both normal and symmetrical orderings. It can be demonstrated that both Eqs. (A.38) and (A.39) yield identical numerators, namely:

$$M(\alpha, \beta) = \cos(2\alpha) \cos(2\beta) E_1 + \cos(2\alpha) \sin(2\beta) E_2 \\ + \sin(2\alpha) \cos(2\beta) E_3 - \sin(2\alpha) \sin(2\beta) E_4, \quad (\text{A.41})$$

with

$$E_1 = \langle a_1^* a_1 a_3^* a_3 \rangle + \langle a_2^* a_2 a_4^* a_4 \rangle \\ - \langle a_1^* a_1 a_4^* a_4 \rangle - \langle a_2^* a_2 a_3^* a_3 \rangle \\ + (\langle a_1^* a_1 \rangle - \langle a_2^* a_2 \rangle) * (\langle a_4^* a_4 \rangle - \langle a_3^* a_3 \rangle), \\ E_2 = \langle a_1^* a_1 a_3^* a_4 \rangle + \langle a_1^* a_1 a_4^* a_3 \rangle \\ - \langle a_2^* a_2 a_3^* a_4 \rangle - \langle a_2^* a_2 a_4^* a_3 \rangle, \\ E_3 = \langle a_1^* a_2 a_3^* a_3 \rangle + \langle a_2^* a_1 a_3^* a_3 \rangle \\ - \langle a_1^* a_2 a_3^* a_4 \rangle - \langle a_2^* a_1 a_4^* a_4 \rangle, \\ E_4 = \langle a_1^* a_1 a_3^* a_3 \rangle + \langle a_2^* a_2 a_4^* a_4 \rangle \\ - \langle a_1^* a_1 a_4^* a_4 \rangle - \langle a_2^* a_2 a_3^* a_3 \rangle \\ + (\langle a_3^* a_4 \rangle - \langle a_4^* a_3 \rangle) * (\langle a_1^* a_2 \rangle - \langle a_2^* a_1 \rangle). \quad (\text{A.42})$$

For further calculations, we assume we are dealing with Gaussian variables, whose higher-order correlations reduce to combinations of second-order ones, as

$$\langle abcd \rangle = \langle ab \rangle \langle cd \rangle + \langle ac \rangle \langle bd \rangle + \langle ad \rangle \langle bc \rangle - 2\langle a \rangle \langle b \rangle \langle c \rangle \langle d \rangle. \quad (\text{A.43})$$

The normalization process (Eq. A.36) produces remarkably diverse outcomes depending on the representation one employs. Specifically, in the case of symmetrical ordering, it becomes

$$N_S = \langle a_1^* a_1 a_3^* a_3 \rangle + \langle a_1^* a_1 a_4^* a_4 \rangle \\ + \langle a_2^* a_2 a_3^* a_3 \rangle + \langle a_2^* a_2 a_4^* a_4 \rangle, \quad (\text{A.44})$$

while in normal ordering

$$N_N = N_S - 1 \\ - [\langle a_1^* a_1 \rangle + \langle a_2^* a_2 \rangle + \langle a_3^* a_3 \rangle + \langle a_4^* a_4 \rangle]. \quad (\text{A.45})$$

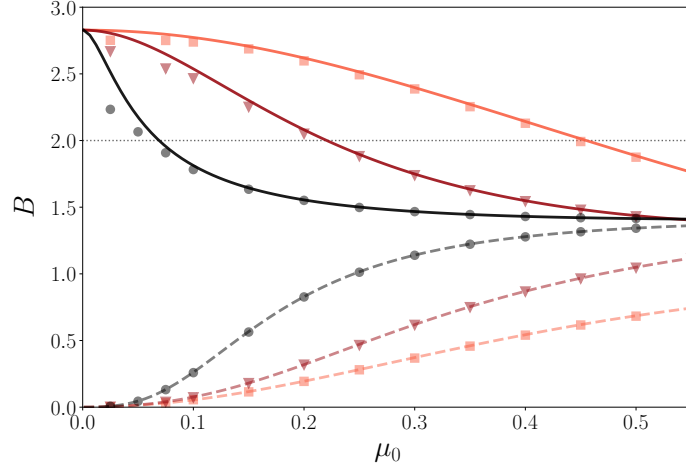


Figura 16: Verification of the CHSH inequality through the computation of the function B from Eq. (A.37), shown here as a function of the pump intensity. The three different injection regimes depicted correspond to $\mu_j = 0$, $\mu_j = 0.01\mu_0$ and $\mu_j = 0.03\mu_0$ (lighter to darker colors). Symbols: numerical simulations. Solid: positive P representation. Dashed: Wigner representation.

Incorporating all the previously obtained results into Eq. (37), we generate a graph depicting the Bell parameter B against frequency.

In summary, we show in Fig. (16) the function B defined in (A.37) on the Wigner (dashed lines) and positive P (solid lines) representations for three different injection scenarios, corresponding to $\mu_j = 0$, $\mu_j = 0.01\mu_0$ and $\mu_j = 0.03\mu_0$ (from lighter to darker colors). Once again, symbols represent numerical solutions and lines the analytical result with the non-depletion approximation. In the null injection case, one observes the Bell inequality violation up to $\mu_0 \approx 0.4$ on the positive-P case.

As envisioned and discussed in (FARIA; DECHOUM; KHOURY, 2020), it's important to note that the violation of the Bell inequality depends on the ordering of quantum operators; it can be violated under normal ordering (positive-P representation) but is not violated under symmetric ordering (Wigner representation). This discussion can be deepened in the classical domain considering the Cauchy-Schwartz inequality (SILVA; KHOURY; DECHOUM, 2008), where the authors have shown that the violation occurs only in the normal ordering of the operators. One can summarize these results in two cases: experimental setups based only on homodyne detection are described in symmetric ordering, where background vacuum is also measured, leading to no violation of Bell types inequalities; experimental setups based on direct intensity measures are described in normal ordering which can violate the Bell inequalities (STILLER; SEYFARTH; LEUCHS,

2014).

Here, when $\mu_j = 0.01\mu_0$, one observes again a violation but in a smaller region, up to $\mu_0 \approx 0.2$. It is also noted that in the case where $\mu_j = 0.03\mu_0$, one has an even smaller violation region, indicating that the injection degrades the entanglement. We observe that the slight mismatch between numerical and analytical results seen for small μ_0 is not due to any significantly different behavior, but only to a slow statistical convergence of numerical results in this regime, as we could observe by comparing many distinct realizations.

Finally, in Fig. 17 we show the schematic diagram of the experimental proposal for observing the violation of Bell inequalities in the injected OPO. In this proposal, initially, the pumping beam is separated from the converted beams by means of a dichroic mirror (DM). The converted beams are then split on a polarizing beam splitter (PBS) and distributed to Alice and Bob. Alice receives the horizontally polarized beams and Bob the vertically polarized ones. Alice and Bob have Dove prisms that perform the mixtures $C_{A,B}$, according to the Diagram depicted in Fig. 15. Two Mach-Zehnder interferometers with additional mirrors, often referred to as MZIM as introduced by (SASADA; OKAMOTO, 2003), separate the incoming fields of the Alice and Bob in A_+ , A_- , B_+ and B_- , which are mapped on Eqs. (A.40). Subsequently, these signals are mixed and detected on two arrays with Beam Splitters and Photodetectors. An articulated assemble can move the mirrors M_1 , M_2 , and M_3 to positions M'_1 , M'_2 , and M'_3 , respectively, enabling the exchange between the fields A_+ and A_- so that one can obtain all the correlations $\langle A_+ B_+ \rangle$, $\langle A_- B_+ \rangle$, $\langle A_+ B_- \rangle$, and $\langle A_- B_- \rangle$. The photocurrents generated by the photodetectors are used so as to obtain the needed correlations indicated in Eqs. (A.42).

A.7 VII. Conclusion

In summary, this study demonstrates the efficacy of injecting a signal into the lower-frequency first-order spin-orbit modes of the non-degenerate optical parametric oscillator for the generation of nonclassical states of light. Our findings reveal that this technique successfully amplifies the intensity of low-frequency modes below the standard oscillation threshold while preserving quantum correlations. We have derived and solved stochastic equations to describe the system's dynamics, both analytically and numerically, under stationary and dynamic non-depletion conditions. This analysis validates the compatibility between analytical and numerical non-depletion results. To assess entanglement, we

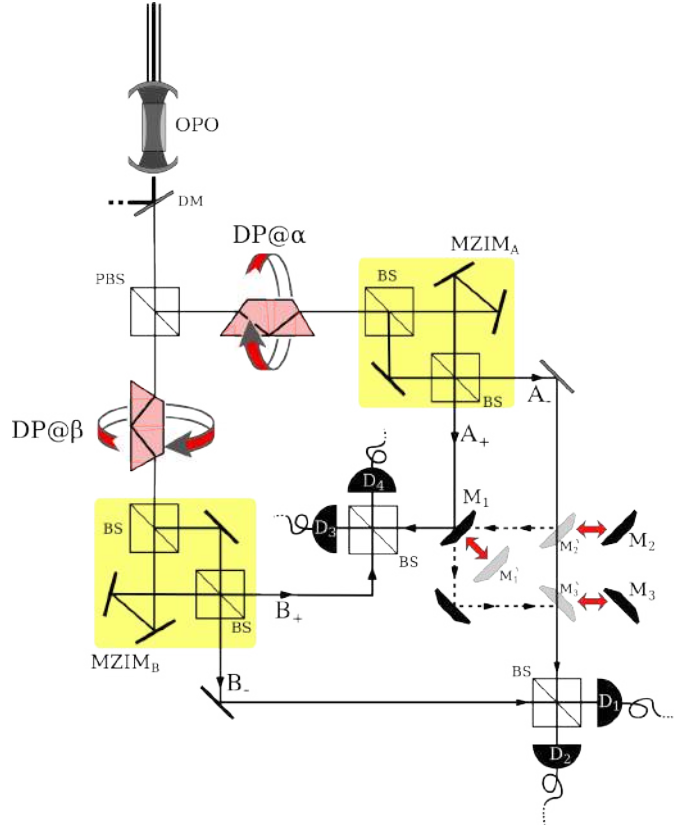


Figura 17: A experimental proposal to measure Bell correlations in entangled beams generated by an injected.

calculated quantum correlations between the beams' quadratures and employed them to construct the Duan-Simon criterion and CHSH inequalities, the latter serving as a tool to observe Bell's inequalities within the system. Conclusively, we propose an experimental setup utilizing a weakly injected OPO for Bell's inequalities measurement based on coincidences measurements. Our findings highlight that the system's capability to generate spin-orbit hyperentangled states, establishing it as a valuable resource for applications in quantum technology and fundamental physics.