

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
MESTRADO EM FÍSICA

JOÃO PEDRO VAZ E SILVA

**MODELO EFETIVO PARA O REGIME
NÃO-PERTURBATIVO DAS TEORIAS DE
YANG-MILLS COM CAMPO ESCALAR NO
CALIBRE ABELIANO MAXIMAL**



**Niterói
2025**

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

JOÃO PEDRO VAZ E SILVA

**MODELO EFETIVO PARA O REGIME
NÃO-PERTURBATIVO DAS TEORIAS DE
YANG-MILLS COM CAMPO ESCALAR NO
CALIBRE ABELIANO MAXIMAL**

NITERÓI

2025

JOÃO PEDRO VAZ E SILVA

**MODELO EFETIVO PARA O REGIME
NÃO-PERTURBATIVO DAS TEORIAS DE
YANG-MILLS COM CAMPO ESCALAR NO
CALIBRE ABELIANO MAXIMAL**

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Programa de Pós-Graduação em Física da
Universidade Federal Fluminense como re-
quisito parcial para a obtenção do Grau de
Mestre em Física.

Orientador:
ANTÔNIO DUARTE PEREIRA JUNIOR

NITERÓI

2025

Ficha catalográfica automática - SDC/BIF
Gerada com informações fornecidas pelo autor

S586m	Silva, João Pedro Vaz e Modelo Efetivo para o Regime Não-Perturbativo das Teorias de Yang-Mills com Campo Escalar no Calibre Abeliano Maximal / João Pedro Vaz e Silva. - 2025. 73 f.: il.
Orientador: Antônio Duarte Pereira Junior. Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense, Instituto de Física, Niterói, 2025.	
1. Teoria Quântica de Campos. 2. Teorias de Yang-Mills. 3. Regime Não-Perturbativo. 4. Calibre Abeliano Maximal. 5. Produção intelectual. I. Pereira Junior, Antônio Duarte, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Física. III. Título.	
CDD - XXX	

Bibliotecário responsável: Debora do Nascimento - CRB7/6368

João Pedro Vaz e Silva

**MODELO EFETIVO PARA O REGIME NÃO-PERTURBATIVO DAS
TEORIAS DE YANG-MILLS COM CAMPO ESCALAR NO CALIBRE
ABELIANO MAXIMAL**

Dissertação submetida ao curso de pós-graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Física.

Aprovado em:12/08/2025.

BANCA AVALIADORA

Membros titulares

Documento assinado digitalmente
 ANTONIO DUARTE PEREIRA JUNIOR
Data: 13/08/2025 10:54:35-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr.
Antônio Duarte Pereira Junior
IF/UFF

Documento assinado digitalmente
 RODRIGO FERREIRA SOBREIRO
Data: 13/08/2025 12:44:43-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr.
Rodrigo Ferreira Sobreiro
IF/UFF

Documento assinado digitalmente
 GUSTAVO PAZZINI DE BRITO
Data: 13/08/2025 11:08:31-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr.
Gustavo Pazzini de Brito
UNESP

Para Claudiane, meu porto seguro.

Teus braços, força oculta, guiaram-me nas incertezas.

O que hoje sou, devo a você.

Agradecimentos

Expresso minha profunda gratidão ao meu orientador, Antônio Duarte Pereira Junior, por sua incansável atenção e dedicação. À minha namorada, Claudiene, por ser meu constante apoio e por sempre me acompanhar em cada passo deste processo. Aos meus pais, pela compreensão e apoio aos meus estudos. Ao Giovani, pela inestimável ajuda e pelas discussões construtivas que enriqueceram este trabalho. Ao departamento de Física da Universidade Federal Fluminense, por prover o ambiente e a educação que tornaram esta pesquisa possível. E, finalmente, à CAPES, pelo crucial apoio financeiro através da bolsa de estudos, que me permitiu dedicar-me integralmente à realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho construímos um modelo efetivo para lidar com os efeitos não-perturbativos das teorias de Yang-Mills com acoplamento mínimo a um campo escalar que se transforma com a representação adjunta de $SU(2)$. Este se dá partindo da ação de Yang-Mills minimamente acoplada ao campo escalar no espaço euclidiano quadridimensional com calibre fixado pelo calibre abeliano maximal. Os aspectos não-perturbativos são introduzidos pela adição de termos massivos no setor de calibre, com diferentes escalas de massa para os campos abelianos e não-abelianos. Em seguida calculamos as correções quânticas em primeira ordem. A auto-energia e os fatores de renormalização são dados explicitamente. Um vínculo particular entre as massas introduzidas é explorado encontrando resultados capazes de acomodar a dominância abeliana. Este é responsável pela manutenção da simetria do termo de massa do setor escalar.

Palavras-chave: Teoria de Yang-Mills; Teoria de Campos; Regime Não-Perturbativo; Calibre Abeliano Maximal.

Abstract

In the present work we contructed a effective model to del with the non-perturbative effects of Yang-Mills theories minimally coupled to a scalar field transforming in the adjoint representation of $SU(2)$. This is done starting from the Yang-Mills action minimally coupled to a scalar field in Euclidian four dimensional space, gauge fixed in the maximal abelian gauge. The non-perturbative effects are introduced by addition of matter terms for the gauge sector, with distinct mass scales for the abelian and non-abelian fields. Next we calculate the first order quantum corrections. The self energy and renormalization facotrs are stated explicitly. A relation between the introduced masses is explored finding results capable of fitting abelian dominance. This relation is responsible for the maintenace of the simetry of the mass term of the scalar sector.

Keywords: Palavras Yang-Mills Theoory; Quantum Field Theory; Non-Perturbative Regime; Maximal Abelian Gauge.

Listas de Figuras

1	Diagramas de Feynman do propagador escalar. Fonte: Autor	18
2	Representações visuais do espaço de configurações dos campos de calibre. Imagens extraída de (Pereira, 2016)	28
3	Exemplo de fixação de calibre não ideal, imagem extraída de (Pereira, 2016)	29
4	Variáveis da rede	33
5	Relações diagramáticas obtidas das equações Dyson-Schwinger no calibre de Landau. Linhas e vértices espessos representam as contribuições completas, a todas as ordens, enquanto as demais representam a nível árvore. Imagens extraídas de (Bloch, 2003)	35
6	Região de Gribov Ω_{mag} no calibre abeliano maximal. Extraída de (Pereira, 2016)	42
7	Contribuições possíveis a 1 -laço	48
8	Contribuições não nulas a 1-loop cabíveis para o campo abeliano	49
9	Contribuições não nulas a 1-loop para o campo não-abeliano	50
10	Contribuições não nulas a 1-loop para o campo de calibre abeliano	52
11	Contribuições não nulas a 1-loop para o campo de calibre não-abeliano . .	53
12	Contribuições não nulas a 1-loop para o campo de fantasma não-abeliano .	57
13	Gráfico de $F(x)$, em vermelho, evidenciando as três regiões com pares de soluções, projetadas para o eixo de massa em azul	59

Sumário

1	Introdução	12
2	Quantização funcional das teorias de calibre	15
2.1	Integral funcional em teoria de campos	15
2.2	Teorias de calibre abelianas	19
2.3	Teoria não abeliana	21
2.4	Quantização das teorias de calibre no contínuo	24
2.5	Simetria BRST	26
2.6	O problema de Gribov	28
3	Abordagens não perturbativas	32
3.1	Teorias de Yang-Mills na rede	32
3.2	Exploração das equações de Dyson-Schwinger	34
3.3	O modelo de Curci-Ferrari	36
4	O calibre abeliano maximal	39
4.1	Termos quárticos adicionais para renormalização	43
5	Propagadores perturbativos	46
5.1	Propagadores a nível árvore	46
5.2	Propagadores dos campos escalares	48
5.3	Propagadores do setor de calibre	51
5.4	Fantasma não-abeliano	57

5.5 Explorando o termo de massa escalar	58
6 Conclusões	60
REFERÊNCIAS	62
Apêndice A - Regras de Feynman	70
Apêndice B - Integrais mestras e expansão assintótica	72

1 Introdução

As teorias de Yang-Mills formam a base do entendimento atual da física de partículas a partir do modelo padrão de física de partículas. Em (Yang; Mills, 1954) foi mostrado que, a localização consistente de uma simetria contínua implica na introdução de um novo campo responsável pela conexão de diferentes configurações, e capaz de admitir uma dinâmica própria a partir de termos invariantes na simetria contínua de calibre. Para o caso de teorias de calibre não-abelianas, o campo de conexão admite auto-interação, resultando em uma dinâmica não trivial para o campo de calibre. Porém, apesar de suas vastas aplicações e estudos de longa data, vários problemas persistem sem solução completa dentro do estudo de teorias de calibre. Um exemplo emblemático é o problema do confinamento de quarks e glúons (Greensite, 2011). Dentro da cromodinâmica quântica (QCD), foi estabelecido que as partículas nucleares já conhecidas são compostas por férmons mais fundamentais, os quarks, que se mantêm ligados através da força nuclear forte, mediada pela troca de glúons. O problema do confinamento se refere à ausência dos quarks e glúons do espectro físico observável nos experimentos. Para solucionar este problema é preciso especificar e descrever como e porque estas partículas permanecem ligadas em todas as escalas conhecidas de energia.

Ainda neste campo, outro problema é a falha da teoria de perturbação no infravermelho. A dinâmica de renormalização do acoplamento g pelo grupo de renormalização, responsável pela auto-interação dos campos de glúons, vai a zero na região do ultra-violeta (Weinberg, 1996), condição chamada de liberdade assintótica, e que diverge no infravermelho, o chamado polo de Laundau da QCD. Desta forma a teoria de perturbação, usada e bem sucedida nos experimentos com aceleradores de partículas que acessam as escalas de altas energias, deixa de ser adequada no infravermelho quando o acoplamento deixa de ser pequeno, de maneira que, para explorar a faixa de energia em que vivemos, é necessária a inclusão de métodos não-perturbativos. No entanto, considerações não perturbativas sobre teorias de Yang-Mills trazem consigo o problema de Gribov, onde configurações de calibre equivalentes permanecem na integral funcional após o procedimento de fixação de

calibre. A remoção explícita destas cópias culminou no modelo de Gribov-Zwanziger, que será abordado porteriormente.

Dentre as demais abordagens não perturbativas para teoria de campos podemos citar, as equações de Dyson-Schwinger, o grupo de renormalização funcional, quantização na rede. Utilizando estes métodos podemos obter resultados sobre o comportamento dos modelos sem a dependência em teoria de perturbação. Cálculos na rede tem mostrado resultados para o propagador dos glúons no infravermelho (Dudal; Oliveira; Vandersickel, 2010; Cucchieri *et al.*, 2012; Dudal; Oliveira; Silva, 2018), mostrando que o comportamento deste não é o mesmo daquele no ultravioleta. O modelo de Curci-Ferrari (Curci; Ferrari, 1976) ganhou novo destaque quando fora usado para reproduzir os dados da rede a partir do ajuste do parâmetro de massa (Peláez, 2015; Peláez *et al.*, 2021), assim obtendo uma maneira coerente de obter informações sobre o regime não-perturbativo a partir da teoria de perturbação. A introdução de parâmetros de massa no setor de calibre não é uma ideia nova, sendo investigada desde o modelo original de Curci-Ferrari, e tendo suas consequências para o problema do confinamento na forma de condensação de monopolos magnéticos (Hioki *et al.*, 1991). Esta condição foi refinada, mostrando que esta condição de confinamento também ocorre com uma hierarquia dinâmica de massa entre o a componente diagonal (ou abeliana) e não-diagonal. Esta condição é chamada de dominância abeliana e é uma possível abordagem para o problema do confinamento.

As massas inseridas no modelo de Curci-Ferrari se apresentam como parâmetros livres, no entanto, nos entendimento mais recente, vemos que esta pode resultar da condensação de operadores de dimensão 2 associados com glúons e fantasmas. Desta forma as massas que consideramos poderiam ser, em princípio, geradas dinamicamente a partir dos parâmetros já conhecidos da teoria.

Neste trabalho consideraremos as consequências de escalas de massa diferentes para o campo de calibre diagonal e não-diagonal. A ação de partida será a ação de Yang-Mills acoplado a um campo escalar se transformando na representação adjunta de SU(2) com auto-interação, dessa forma teremos um modelo mínimo para explorar as contribuições de diferentes escalas de massa no setor de calibre para as contribuições do setor de escalar e *vice versa*. As funções de correlação serão calculadas utilizando a integral funcional e o calibre abeliano maximal como funcional fixador. A partir do uso do calibre abeliano maximal e das diferentes escalar de massa, buscamos encontrar como as massas inseridas poderiam se relacionar com a conjectura de dominância abeliana.

O trabalho será dividido por uma revisão da quantização pela integral funcional,

no capítulo 2, uma contextualização dos resultados das abordagens não perturbativas, no capítulo 3, apresentação da fixação de calibre no calibre abeliano maximal, no capítulo 4, e os propagadores dos campos de calibre, escalares, e fantasmas, no capítulo 5, com correções quânticas a 1-loop, assim como os fatores de renormalização explícitos no esquema \overline{MS} .

2 Quantização funcional das teorias de calibre

2.1 Integral funcional em teoria de campos

Antes de avançarmos para a integral funcional em teorias de Yang-Mills, é fundamental apresentar os principais aspectos do formalismo de quantização pela integral funcional, que constitui a base metodológica deste trabalho. Existem duas maneiras principais de implementar a quantização de uma teoria de campos, a quantização canônica, que impõe relações de comutação entre os campos, os promovendo a operadores no espaço de Fock (Peskin; Schroeder, 1995), e a integral funcional, que estende o formalismo de integrais de caminho para mecânica quântica, introduzido por Feynman em (Feynman; Hibbs; Styer, 2010), em que as transições de estados de uma partícula são encontrados a partir da superposição de contribuições de todos os possíveis caminhos que a partícula poderia tomar. A integral funcional em teoria de campos funciona de maneira semelhante, superpondo todas as configurações dos campos (Rivers, 1988). Utilizando a integral funcional, voltamos nossos esforços para o cálculo de funções de correlação, que exprimem a probabilidade de transição entre dois estados de partículas livres, os estados assintóticos. Ambos os formalismos são capazes de levar às mesmas relações entre estados assintóticos quando comparamos os produtos de operadores em ordem normal, com as funções de correlação encontradas na integral funcional (Peskin; Schroeder, 1995; Weinberg, 1996). Esta será tratada no espaço-tempo euclidiano, que se relaciona com o usual espaço-tempo de Minkowski por uma rotação de Wick na variável temporal. A escolha desta geometria se dá pela praticidade teórica que resulta num tratamento tratável no tempo hábil, e pela sua necessidade na construção do problema de Gribov, que será tratado posteriormente. Nesta secção descreveremos alguns resultados elementares no âmbito da integral funcional com campos escalares que serão utilizados ao longo deste trabalho para deduções posteriores.

Por simplicidade consideraremos uma teoria escalar com auto-interação ($\lambda\phi^4$) definida

pela ação

$$S[\phi] = \int d^4x \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \right) \quad (2.1)$$

no espaço euclidiano quadridimensional. O funcional gerador é definido por

$$Z[J] = \mathcal{N} \int [\mathcal{D}\phi] e^{-S[\phi]-\phi J}, \quad (2.2)$$

onde \mathcal{N} é uma constante de normalização para que $Z[0] = 1$, e J é uma fonte externa. A inserção da fonte externa permite a construção de relações entre as funções de correlação e as derivadas do funcional gerador. De maneira geral

$$\langle \phi(x_1)\dots\phi(x_n) \rangle = \int [\mathcal{D}\phi] \phi(x_1)\dots\phi(x_n) e^{-S[\phi]} = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} \Big|_{J=0} Z[J] \quad (2.3)$$

de forma que, ao considerarmos uma interpretação probabilística da integral funcional, percebemos que as funções de correlação carregam a conotação de momentos da distribuição exponencial da ação.

A ação do campo escalar pode ser dividida em duas partes: a ação de interação (S_{int}) e a ação livre (S_0). A ação livre contém o campo apenas até ordem quadrática, enquanto a ação de interação contém as demais potências. No contexto do modelo $\lambda\phi^4$, a ação livre toma a forma de

$$S_0 = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 \right] = \int d^4x \frac{1}{2}\phi(-\partial^2 + m^2)\phi. \quad (2.4)$$

Introduzimos o operador quadrático

$$\mathcal{O}(x) = -\partial^2 + m^2, \quad (2.5)$$

tal que, o propagador é definido pela relação

$$e^{\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y J(x)\Delta(x-y)J(y)} = \mathcal{N} \int [\mathcal{D}\phi] e^{-\int d^4x \frac{1}{2}\phi(x)\mathcal{O}\phi(x)+\phi J}, \quad (2.6)$$

em que

$$\Delta(x-y) = \mathcal{O}^{-1}(x-y). \quad (2.7)$$

segue formalmente da avaliação de sucessivas integrais Gaussianas. usualmente a representação do propagador em espaço de momento é a mais utilizada em cálculos explícitos. No espaço de Fourier este operador toma a forma algébrica

$$\mathcal{O} = p^2 + m^2, \quad (2.8)$$

tal que o propagador pode ser encontrado utilizando a transformada inversa

$$\Delta(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^d} \frac{e^{ip \cdot (x-y)}}{p^2 + m^2}. \quad (2.9)$$

A série perturbativa para o funcional gerador pode ser obtida expandindo o termo com a ação de interação em série de Taylor (Peskine; Schroeder, 1995; Weinberg, 1996)

$$Z[J] = \mathcal{N} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int [\mathcal{D}\phi] S_{int}^n e^{-\int d^4 x \frac{1}{2} \phi(x) \mathcal{O}\phi(x) - \int d^4 x \phi J} \quad (2.10)$$

Usando generalizações da integral gaussiana e absorvendo fatores de normalização chegamos a

$$Z[J] = \mathcal{N} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} S_{int}^n \Big|_{\phi(x) = \delta/\delta J(x)} e^{\frac{1}{2} \int d^4 x \int d^4 y J(x) \Delta(x-y) J(y)} \quad (2.11)$$

O funcional gerador pode ser realizado em termos de diagramas de Feynman representando os termos da série perturbativa. Dentre estes podemos agrupar os diagramas em unidades de \hbar , aqui omitido por escolha de unidades, mas identificável na expansão da ação de interação, assim obtendo uma série perturbativa *quântica*. Isto é, no formalismo da integral funcional, a contribuição clássica pode ser encontrada aproximando a integral pela fase estacionária, assim impondo a condição de mínima ação. Desta forma as correções quânticas à teoria clássica se dão como flutuações na ação mínima, se organizando em potências de \hbar . Para o cálculo de uma função de correlação específica, devemos tomar derivadas funcionais adicionais, além das que utilizamos na construção perturbativa do funcional gerador. Para o propagador, por exemplo

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = \frac{\delta^2}{\delta J(x)\delta J(y)} \Big|_{J=0} Z[J] \quad (2.12)$$

Os termos a nível árvore, ou seja, provenientes somente da ação livre formam

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle_0 = \frac{\delta^2}{\delta J(x)\delta J(y)} \Big|_{J=0} e^{\frac{1}{2} \int d^4 x \int d^4 y J(x) \Delta(x-y) J(y)} = \Delta(x - y) \quad (2.13)$$

que é consistente com a definição inicial do propagador livre. Para calcular as correções quânticas ao propagador, devemos considerar as contribuições de ordem superior que aparecem dos termos com $n > 0$. Considerando o caso do modelo $\lambda\phi^4$ temos a ação de interação da forma

$$S_{int} = \int d^4 z \frac{\lambda}{4!} \phi^4(z). \quad (2.14)$$

De maneira que o primeiro termo na expansão perturbativa do funcional gerador é

$$\begin{aligned} Z[J]_1 = & -\frac{\lambda}{4!} \int d^4z [3\Delta^2(z-z) \\ & + 4\Delta(z-z) \int d^4z_1 d^4z_2 \Delta(z-z_1) J(z_1) \Delta(z-z_2) J(z_2) \\ & + \int d^4z_1 d^4z_2 d^4z_3 d^4z_4 \Delta(z-z_1) J(z_1) \Delta(z-z_2) J(z_2) \Delta(z-z_3) J(z_3) \Delta(z-z_4) J(z_4)] \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$e^{\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y J(x) \Delta(x-y) J(y)} \quad (2.16)$$

De modo que, a correção de primeira ordem do propagador se torna

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle_1 = -\frac{\lambda}{4!} \int d^4z (3\Delta^2(z-z)\Delta(x-y) + 12\Delta(z-z)\Delta(x-z)\Delta(y-z)). \quad (2.17)$$

Diagramaticamente estes termos podem ser representados pelos diagramas de Feynman, como representado na Fig. 1. O primeiro diagrama representa o produto de um propagador a nível arvore e de uma bolha de vácuo, que gera divergências a serem removidas. As bolhas de vácuo correspondem a diagramas estáticos, que associam transições do vácuo ao vácuo, sendo irrelevantes para a dinâmica da teoria, não representando nenhuma transição concreta.

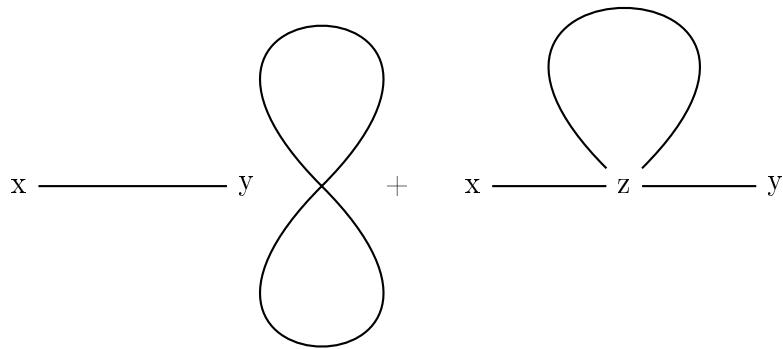


Figura 1: Diagramas de Feynman do propagador escalar. Fonte: Autor

Observa-se que, vários destes diagramas apresentam relações entre si, não sendo necessário explicitar todos para sumarizar as contribuições relevantes (Rivers, 1988; Weinberg, 1996). Portanto encontrar um conjunto menor e prático de diagramas relevantes, tomamos alguns passos intermediários, definindo novos funcionais geradores no caminho, que gerem menos redundâncias de descrição. Como a constante de normalização \mathcal{N} é associada a

$Z[0]$, podemos calculá-la explicitamente, mostrando que esta equivale a exponenciação de todas as bolhas de vácuo. Desta forma, removemos a constante de normalização, assim nos livrando das *bolhas de vácuo*. Em seguida introduzimos o funcional gerador conexo $W[J]$, que gera apenas diagramas conexos como

$$W[J] = \ln Z[J] \quad (2.18)$$

tal que os termos da série perturbativa do funcional gerador $Z[J]$ se dão como produtos de diagramas conexos. Por último definimos o funcional gerador 1PI, $\Gamma[\phi]$, por uma transformada de Legendre do funcional gerador conexo, os termos conexos, por sua vez, são dados pela convolução dos termos 1PI.

$$\Gamma[\Phi] = W[J] - \int d^4x \Phi J, \quad (2.19)$$

Onde $\Phi(x) = \delta W / \delta J(x)$ define uma bijeção entre Φ e J , de maneira que é possível realizar a substituição implicitamente. O funcional gerador 1PI também carrega a interpretação de ação quântica, vide que este carrega exatamente os termos que representam a dinâmica quântica da teoria acrescida da dinâmica clássica.

Para realização das análises deste trabalho, é suficiente considerar até este nível de abstração dos diagramas, já que todos as contribuições quânticas ao propagador a serem encontrados podem ser representados como produtos e convoluções dos diagramas 1PI.

2.2 Teorias de calibre abelianas

Como primeiro modelo capaz de ilustrar as características inerentes das teorias de calibre, como simetrias da lagrangiana, partiremos da chamada QED-escalar. Esta se refere a um modelo semelhante à eletrodinâmica quântica (QED), onde no lugar de elétrons, utilizamos um campo escalar carregado como matéria. A lagrangiana da QED-escalar é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \bar{\phi} \partial_\mu \phi + \frac{m^2}{2} \bar{\phi} \phi + \frac{\lambda}{4!} (\bar{\phi} \phi)^2. \quad (2.20)$$

Esta teoria é invariante por uma simetria global de rotação complexa

$$\bar{\phi} \rightarrow e^{-i\theta} \bar{\phi} \quad (2.21)$$

$$\phi \rightarrow e^{i\theta} \phi. \quad (2.22)$$

onde θ é um parâmetro independente da posição. dizemos que a transformação é abeliana devido à natureza comutativa das transformações

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i\theta_2}e^{i\theta_1} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \quad (2.23)$$

Quando tentamos promover esta simetria de global para local, ou seja, tomando diferentes parâmetros θ para cada ponto no espaço-tempo, efetivamente promovendo θ a uma função $\theta(x)$, percebemos que os termos contendo derivadas não são invariantes pela mesma simetria, assim ocorre que

$$\partial_\mu \bar{\phi} \rightarrow e^{-i\theta(x)} \partial_\mu \bar{\phi} - i \partial_\mu \theta(x) e^{-i\theta(x)} \bar{\phi}, \quad (2.24)$$

$$\partial_\mu \phi \rightarrow e^{i\theta(x)} \partial_\mu \phi + i \partial_\mu \theta(x) e^{i\theta(x)} \phi. \quad (2.25)$$

Entretanto, podemos restaurar a simetria original introduzindo um novo campo A_μ , chamado campo de calibre, que se transforma de maneira a cancelar as derivadas de $\theta(x)$. Desta maneira, definimos a transformação do campo de calibre como

$$A_\mu \rightarrow e^{i\theta(x)} A_\mu e^{-i\theta(x)} - ie^{-i\theta(x)} \partial_\mu (e^{i\theta(x)}) = A_\mu - \partial_\mu \theta(x) \quad (2.26)$$

$$A_\mu \bar{\phi} \rightarrow (A_\mu - i \partial_\mu \theta(x)) e^{i\theta(x)} \bar{\psi} \quad (2.27)$$

$$, A_\mu \phi \rightarrow (A_\mu - i \partial_\mu \theta(x)) e^{-i\theta(x)} \bar{\psi}, \quad (2.28)$$

Ou seja, a combinação linear de ∂_μ e A_μ que cancela a contribuição linear em θ é

$$(\partial_\mu + iA_\mu)\phi := D_\mu \phi \rightarrow e^{-i\theta(x)} D_\mu \phi, \quad (2.29)$$

e seu conjugado atuando no campo conjugado. O símbolo D_μ representa a derivada covariante, ela define a prescrição de acoplamento mínimo, introduzindo uma substituição direta da derivada parcial nos termos cinéticos dos campos escalares. Devemos introduzir também um termo cinético para o setor de calibre a partir de quantidades invariantes de calibre, ou seja, que mantenha a simetria original da teoria, porém incluindo dinâmica para o campo de calibre. Partindo do comutador das derivadas covariantes

$$[D_\mu, D_\nu]\phi \rightarrow e^{-i\theta(x)} [D_\mu, D_\nu]\phi := -ie^{-i\theta(x)} F_{\mu\nu}\phi(x) \quad (2.30)$$

O tensor $F_{\mu\nu}$ é conhecido por *tensor de intensidade de campo*, que é o equivalente à curvatura para o espaço aumentado da simetria interna (Fecko, 2006), e que, no caso da teoria abeliana, é invariante de calibre. Este é o objeto que deve ser inserido na ação para

incluir um termo cinético que trás dinâmica ao campo de calibre (Pokorski, 2000). Neste caso particular temos que

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.31)$$

Para um termo também invariante de Lorentz tomamos a contração de F^2 obtendo que a Lagrangiana completa é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \overline{(D_\mu \phi)} D_\mu \phi + \frac{m^2}{2} \bar{\phi} \phi + \frac{\lambda}{4!} (\bar{\phi} \phi)^2 \quad (2.32)$$

Este modelo é conhecido por Eletrodinâmica Escalar, tendo que os campos escalares substituem os campos espinoriais que são usualmente associados aos férmons carregados que são o setor de matéria na QED.

2.3 Teoria não abeliana

Ampliamos agora o formalismo das teorias de calibre para o contexto não abeliano, cuja estrutura matemática mais rica permite a descrição de interações fundamentais com maior diversidade, sendo o elemento fundamental deste trabalho. O caso não abeliano é análogo ao abeliano descrito anteriormente, partindo de uma transformação entre os campos,

$$\phi \rightarrow \phi' = U(\theta) \phi \quad (2.33)$$

Dizemos que $U(\theta)$ pertence a um grupo de Lie se este for contínuo. Para uma transformação em um grupo de Lie, é sempre possível construir uma transformação infinitesimal como

$$U(d\theta) = e^{-id\theta^A(x)T^A} := \mathbb{I} - id\theta^A(x)T^A, \quad (2.34)$$

onde \mathbb{I} é a matriz identidade e as matrizes T^A , chamadas de geradores da álgebra de Lie, formam uma representação do grupo de Lie escolhido para a transformação de calibre, e o índice A percorre a dimensionalidade do grupo. Estes geradores apresentam algumas propriedades importantes, por comporem uma álgebra com comutador como produto. Portanto

$$[T^A, T^B] = if^{ABC}T^C. \quad (2.35)$$

Os símbolos f^{ABC} são as constantes de estrutura do grupo de calibre na base escolhida e representam uma expansão nos geradores. Adotaremos a normalização

$$\text{Tr}(T^A T^B) = \frac{1}{2} \delta^{AB}. \quad (2.36)$$

A conexão, por sempre pertencer à álgebra de Lie, pode ser expressa com uma combinação linear dos geradores. Para o caso do grupo que escolhemos para este trabalho, o $SU(2)$

$$A_\mu = \sum_{A=1}^3 A_\mu^A T^A \quad (2.37)$$

que deve se transformar como

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = U(x) A_\mu U^{-1}(x) - i \partial_\mu U(x) U^{-1}(x) \approx A_\mu - D_\mu \theta \quad (2.38)$$

A derivada covariante no contexto não abeliano é modificada devido a não comutação dos geradores

$$D_\mu = \partial_\mu + i[A_\mu,] \quad (2.39)$$

com o comutador vazio agindo como um operador. O tensor de intensidade de campo assume uma nova forma

$$[D_\mu, D_\nu] = -i[\partial_\mu, A_\nu] + i[\partial_\nu, A_\mu] - [A_\mu, A_\nu] \quad (2.40)$$

$$= -i(\partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + f^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C) T^A \quad (2.41)$$

$$= -i F_{\mu\nu} \quad (2.42)$$

Como no caso não-abeliano, $F_{\mu\nu}$ não é invariante de calibre, é preciso utilizar o traço de $F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ para construir um termo cinético invariante de calibre

$$\mathcal{L}_{YM} = \frac{1}{2g^2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}). \quad (2.43)$$

seja o termo cinético do campo de calibre. A constante g surge devido à arbitrariedade do traço escolhido, de forma que este modela as múltiplas escolhas possíveis. Devido aos termos quadráticos em $F_{\mu\nu}$ percebemos que há auto-interação entre o campo de calibre, ao que atribuímos a uma dinâmica não trivial que justifica o interesse teórico em teorias de Yang-Mills puras, sem necessariamente um setor de matéria que dá origem à simetria da ação. Esta qualidade abre espaço para uma plethora de análises e estados assintóticos exóticos, como as *Glueballs*, estados ligados de glúons no espectro da teoria de Yang-Mills pura, com ativa busca experimental(Vandersickel, 2011; Cao *et al.*, 2024).

Devido à arbitrariedade da métrica na álgebra de Lie, podemos incluir uma constante arbitrária g no termo cinético. Sob esta escolha é comum redefinir o campo de calibre de forma que

$$A_\mu \rightarrow g A_\mu, \quad \theta(x) \rightarrow g \theta(x). \quad (2.44)$$

Dessa maneira $F_{\mu\nu}$ e D_μ se tornam

$$F_{\mu\nu} \rightarrow (\partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + g f^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C) T^A \quad (2.45)$$

$$D_\mu \rightarrow \partial_\mu \mathbb{I} + ig A_\mu^A T^A \quad (2.46)$$

Quando escolhemos que o campo escalar se transforme de acordo com a representação adjunta do grupo de Lie encontramos diversas simplificações na explicitação das componentes. Na representação adjunta, os geradores assumem a forma das constantes de estrutura como

$$(T^A)^{BC} = if^{ABC} \quad (2.47)$$

e o elemento de calibre toma a forma infinitesimal

$$(e^{-ig\theta^A(x)T^A})^{BC} \rightarrow 1\delta^{BC} - ig\theta^A(x)[if^{ABC}] \quad (2.48)$$

Explicitando a mudança em campos escalares reais na representação adjunta pertencentes à álgebra de Lie

$$\phi^A \rightarrow \phi'^A = \phi^A + g f^{ABC} \theta^B \phi^C \quad (2.49)$$

Os demais objetos nesta representação tem transformações infinitesimais denotadas por

$$(D_\mu)^{AB} = D_\mu^{AB} = \delta^{AB} \partial_\mu - g f^{ABC} A_\mu^C \quad (2.50)$$

$$A_\mu^A \rightarrow A'_\mu^A = A_\mu^A - D_\mu^{AB} \theta^B \quad (2.51)$$

E o termo com traço é respectivamente

$$\frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F_{\mu\nu}^A \quad (2.52)$$

De posse disto, podemos enunciar o modelo que será usado neste trabalho

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F_{\mu\nu}^A + \frac{1}{2} (D_\mu^{AB} \phi^B)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^A \phi^A + \frac{\lambda}{4!} (\phi^A \phi^A)^2 \quad (2.53)$$

A escolha de representar o setor de matéria com uma simetria adjunta se dá por motivos práticos. Foi demonstrado em (Capri; Fiorentini; Sorella, 2015) que este modelo é renormalizável, assim permitindo o aprofundamento em seu estudo, sendo um dos motivos da execução deste trabalho.

2.4 Quantização das teorias de calibre no contínuo

Prosseguimos agora com a quantização das teorias de calibre, ressaltando a necessidade da fixação de calibre para a definição de propagadores e introduzindo os campos fantasmas como elementos essenciais nesse processo (Rivers, 1988). Conforme visto, um dos passos necessários para construção da série perturbativa, é a definição do propagador, porém a estrutura encontrada na parte quadrática do setor do calibre trás a seguinte peculiaridade: Ao definir o operador livre

$$\int d^4x \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A)^2 = \int d^4x \frac{1}{2}A_\mu^A(\partial_\mu \partial_\nu - \partial^2 \delta_{\mu\nu})A_\nu^A, \quad (2.54)$$

observa-se que este apresenta um núcleo não trivial para todas as funções da forma

$$(\partial_\mu \partial_\nu - \partial^2 \delta_{\mu\nu})\partial_\nu \xi = 0 \quad (2.55)$$

Como o núcleo do operador não é trivial, sua inversa não existe, e um propagador não pode ser definido. Para remediar esta situação, devemos realizar uma fixação de calibre, assim abrindo mão da simetria de calibre manifesta na ação de Yang-Mills. Para isso introduzimos um conjunto de funcionais cuja solução implica numa fixação de calibre, ou seja, cada uma componente do funcional deve conter apenas uma única solução,

$$F^A[A] = 0, \quad (2.56)$$

alguns exemplos de calibres tipicamente encontrados são o calibre de Landau

$$F^A[A] = \partial_\mu A_\mu^A, \quad (2.57)$$

o calibre axial

$$F^A[A] = \vec{n} \cdot A^A, \quad (2.58)$$

e o calibre de Coulomb

$$F^A[A] = \nabla \cdot A^A, \quad (2.59)$$

onde a ultima condição envolve apenas as componentes espaciais de A_μ . Quando esta condição é respeitada, dizemos que o funcional fixador é ideal. Devemos, então procurar uma maneira de incluir $\delta(F^A[A])$ na integral funcional. Para tal, exploramos a seguinte relação:

Para uma função com um único zero x_0 tal que $f(x_0) = 0$, vale

$$\int d^4x \delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|}, \quad (2.60)$$

se $f'(x_0)$ existe é não-nulo. O que implica em

$$|f'(x_0)| \int d^4x \delta(f(x)) = 1. \quad (2.61)$$

Podemos generalizar formalmente esta relação para o funcional $F^A[A]$ da seguinte maneira

$$\int \mathcal{D}\mathcal{U} \det \left. \frac{\delta F^A[A'_\mu]}{\delta \theta^B} \right|_{\theta=0} \delta(F^A[A']) = 1 \quad (2.62)$$

onde A'_μ é uma configuração de calibre conectada a A_μ por uma transformação infinitesimal, e $A'^A_\mu = A^A_\mu - D^A_\mu \theta^B$. A medida de integração $\mathcal{D}\mathcal{U}$ equivale à integração sobre o grupo de calibre em cada ponto do espaço-tempo a partir da escolha de um $\theta(x)$. A inclusão de (2.62) como uma identidade é método descrito em [Faddeev; Popov, 1967] para fixação de calibre. $\frac{\delta F^A[A]}{\delta \theta^B}$ é conhecido como o operador de Faddeev-Popov. Podemos fazer a mudança de variável na integral funcional $A_\mu \rightarrow A'_\mu$, como a ação de partida é invariante de calibre, e a medida funcional invariante por translações, a integração em \mathcal{U} pode ser fatorada

$$Z[0] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\mathcal{U} \int \mathcal{D}A'_\mu \det \left(\frac{\delta F^A[A'_\mu]}{\delta \theta^B} \right) \delta(F^A[A']) e^{-S[A', \phi]} \quad (2.63)$$

e absorvida pelo fator de normalização.

Para o funcional delta, podemos introduzir campos auxiliares de Nakanishi-Lautrop como uma representação de Fourier funcional da função delta

$$\delta(F^A[A]) = \int \mathcal{D}b^A e^{-\int d^4x i b^A(x) F^A[A(x)]} \quad (2.64)$$

O determinante pode ser incluído introduzindo um par campos de Grassman \bar{c}, c , que anti-comutam, logo

$$\det \left(\frac{\delta F^A[A_\mu]}{\delta \theta^B} \right) = \int \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{-\bar{c}^A \mathcal{M}[A]^{AB} c^B} \quad (2.65)$$

tal que \mathcal{M} é o operador de Faddeev-Popov, e os campos Grassmanianos são chamados fantasmas de Faddeev-Popov.

A condição de um único zero, implica neste contexto em um único zero em cada órbita de calibre, o conjunto de todas as configurações relacionadas por transformações de calibre, assim dois campos de calibre no núcleo de $F[A]$ não são relacionados por transformações de calibre. Para transformações infinitesimais isto é equivalente a

$$F[A'] = 0 \Rightarrow \theta = 0 \quad (2.66)$$

porém esta suposição não é consistente para teorias de calibre não-abelianas. Neste caso, é possível verificar em geral que uma dada condição de calibre não seleciona um único representante da órbita de calibre.

2.5 Simetria BRST

Encerramos este capítulo com a apresentação da simetria de Becchi-Rouet-Stora-Tyutin (BRST) (Becchi, C.; Rouet, A.; Stora, R., [1975], [1976]; Tyutin, [2008]), uma ferramenta poderosa que preserva a consistência das teorias de calibre quantizadas e desempenha papel central na definição do espaço de estados físicos. A simetria BRST é uma forma de supersimetria que evidencia a simetria de calibre a partir dos campos introduzidos no contexto do método de Faddeev-Popov. Quando usamos os campos fantasmas \bar{c}^A, c^A e o campo auxiliar de Nakanishi-Lautrop para exponenciar os fatores funcionais após a fixação de calibre introduzimos novos termos à ação que não apresentam a simetria de calibre usual. Podemos identificar os termos inseridos pela fixação de calibre separadamente do conteúdo inicial que é invariante de calibre. É um fato já conhecido que termos exatos nesta simetria, ou seja, aqueles cuja transformação de BRST é nula, não introduzem nenhuma nova dinâmica, se tornando uma ferramenta para incluir de maneira sistemática, termos que podem auxiliar na renormalização de teorias, assim expandindo o leque de teorias que podem ser renormalizadas, e portanto, consideradas dentro das teorias de calibre.

A simetria de BRST é definida no setor de calibre e no setor escalar a partir da transformação de calibre dos campos (Capri; Fiorentini; Sorella, [2015]) a partir da substituição $\theta^A \rightarrow c^A$

$$sA_\mu^A = -D_\mu^{AB}c^B \quad (2.67)$$

$$s\phi^A = -f^{ABC}\phi^Bc^C \quad (2.68)$$

Os campos auxiliares de Nakanishi-Lautrop e os campos de fantasmas conjugados tem sua transformação vinculada formando um dbleto de BRST, que é definido pela transformação

$$s\bar{c}^A = ib^A \quad (2.69)$$

$$sb^A = 0 \quad (2.70)$$

estendendo a transformação de calibre usual com o mapeamento $\theta^A \rightarrow c^A$. As transfor-

mações dos demais campos são fixadas de forma a preservar duas propriedades

$$s^2 = 0 \quad (2.71)$$

$$s(\Phi_i \Phi_j) = s\Phi_i \Phi_j \mp \Phi_i s\Phi_j \quad (2.72)$$

onde Φ_i , representa um campo genérico dentre os presentes na teoria. O sinal \pm se dá dependendo se o campo Φ_i é Grassmaniano ou não, respectivamente. Dessa maneira a transtransformação do campo fantasma é fixada como

$$sc^A = \frac{g}{2} f^{ABC} c^B c^C \quad (2.73)$$

De posse destas transformações é possível escrever o termo de Faddeev-Popov como

$$S_{FP} = s \int d^4x (\bar{c}^A F^A[A]) \quad (2.74)$$

A simetria de BRST também é utilizada para reduzir o espectro do modelo àqueles com norma positiva de maneira a se aproximar do espectro físico real. (Peskin; Schroeder, 1995) descreve como estados assintóticos relacionados por transformações de BRST tem necessariamente norma nula, e por isso não podem ser observados. Assim dizemos que os estados físicos da teoria residem na *cohomologia* do operador de BRST, ou seja, estados que diferem por um termo BRST-exato representam o mesmo estado físico. Um exemplo típico desta cohomologia é a ausência de polarizações longitudinais no campo de calibre no espectro físico, no calibre de Landau. Tomando a equação de movimento do campo auxiliar de Nakanishi-Lautrop

$$\alpha b^A = \partial_\mu A_\mu^A \quad (2.75)$$

podemos relacionar os estados de polarização longitudinal a excitações do campo auxiliar, porém este está vinculado ao campo conjugado aos fantasmas pela equação (2.69). Portanto a construção de cohomologia nos garante que polarizações longitudinais não constam no espectro físico no calibre de Landau, o que pode ser estendido para as demais escolhas de calibre pela arbitrariedade da escolha. A negativa desta condição não é, por si só, suficiente para garantir a existência de uma partícula no espectro, mas é necessária para tal.

Em geral isto garante que termos exatos na simetria de BRST não adicionem nova dinâmica para o modelo, garantindo que somos livres para adicionar termos invariantes de BRST para renormalizar quaisquer contribuições espúrias necessárias.

2.6 O problema de Gribov

Embora o método de Faddeev-Popov permita a fixação de calibre, ele não é suficiente para realizar uma restrição ideal em teorias não-abelianas globalmente (Singer, 1978). Esta seção explora essa limitação e a consequente necessidade de restringir o espaço funcional de forma a remover as configurações espúrias. É um problema bem conhecido das teorias de calibre não-abelianas que não há um funcional local de fixação de calibre que seja ideal (Pereira, 2016). Para entendermos melhor o procedimento de fixação de calibre, iremos recorrer a ilustrações representativas. As órbitas de calibre podem ser imaginadas como na Fig. 2a. Ao procurarmos um funcional ideal para fixação de calibre, a ser utilizado

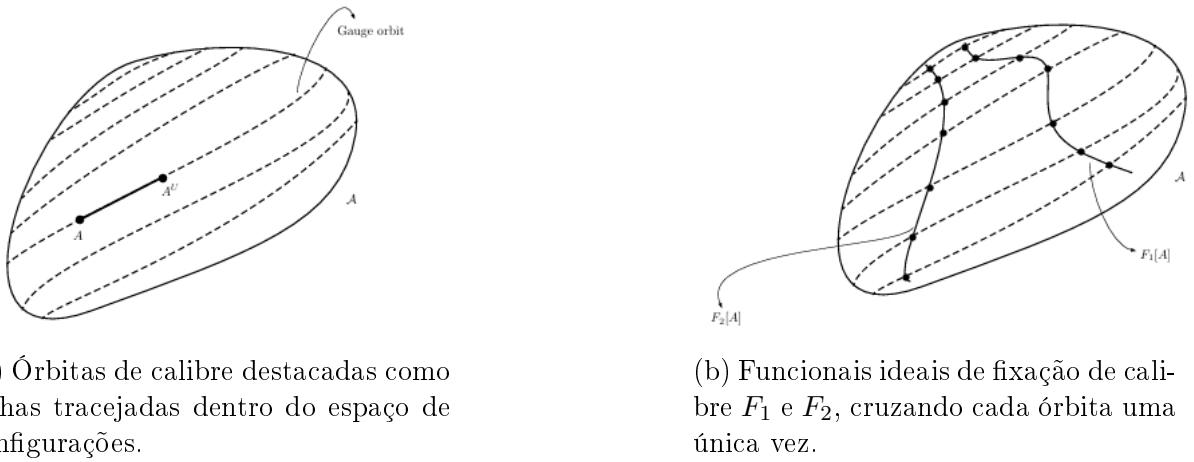


Figura 2: Representações visuais do espaço de configurações dos campos de calibre. Imagens extraída de (Pereira, 2016).

no método de Faddev-Popov, devemos encontrar um funcional que cruza cada órbita de calibre apenas uma única vez, assim descrevendo sem ambiguidade qual configuração é selecionada em cada órbita, como é o caso dos dois funcionais na Fig. 2b

Denominamos as cópias de Gribov (infinitesimais) as configurações de calibre relacionadas por transformações de calibre à aquelas fixadas pelo método de Faddev-Popov (Gribov, 1978). Em particular, elas são caracterizadas pela equação de cópias

$$\mathcal{M}^{AB}\theta^B = 0 \quad (2.76)$$

Desta forma, a existência de soluções não triviais na equação de cópias, na forma de soluções com auto-valor zero nos mostra que localmente a escolha de fixação de calibre não é ideal, como exemplificado na figura 3. De maneira a remover as cópias de Gribov infinitesimais do domínio de integração, devemos restringir o domínio da integral funcio-

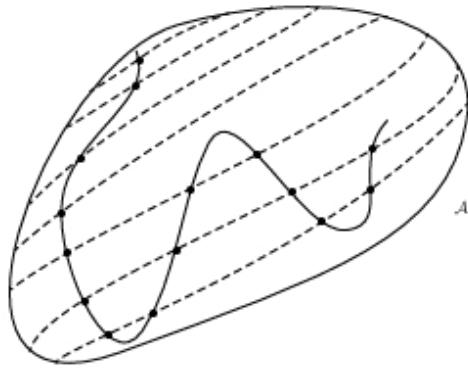


Figura 3: Exemplo de fixação de calibre não ideal, imagem extraída de (Pereira, 2016)

nal, ao que chamamos de restrição à região de Gribov. No calibre de Landau esta possui uma interpretação direta em termos do operador de Fadeev-Popov. Neste ela é definida como pelo conjunto de configurações de calibre tal que o operador de Faddeev-Popov seja estritamente positivo, e portanto inversível, sem a possibilidade de soluções não-triviais para equação de cópias (2.76). A região de Gribov ainda é dotada de cópias que seguem de transformações finitas, não infinitesimais, no campo de calibre (Baal, 1992), porém uma restrição mais refinada que também exclua estas cópias, para uma região livre de quaisquer cópias, a região modular fundamental, ainda não dispõe de um tratamento sistemático como a região de Gribov. É importante ressaltar que com a restrição à região de Gribov também asseguramos que todas as órbitas de calibre a cruzem pelo menos uma vez (Dell'Antonio; Zwanziger, 1991).

De maneira a introduzir um fator $\mathcal{V}(\Omega)$ que limite a integração funcional à região de Gribov, podemos considerar o comportamento conhecido do propagador dos fantasmas no calibre de landau. Em (Gribov, 1978) foi mostrado que, partindo do propagador dos fantasmas como

$$\langle \bar{c}^A(x)c^B(y) \rangle = \int \mathcal{D}A_\mu \det(\mathcal{M}) (M^{AB})^{-1}(x,y) e^{-S[A_\mu]} \quad (2.77)$$

quando omitimos possíveis contribuições de interações com campos de matéria, de forma que o propagador dos fantasmas no calibre de Landau está ligado diretamente. Comparando esta expressão com o resultado perturbativo,

$$\langle \bar{c}^A(k)c^B(-k) \rangle = \delta^{AB} \frac{1}{k^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{11g^2N}{48\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{k^2}\right)\right)^{\frac{9}{44}}} \quad (2.78)$$

para N a dimensão associada a $SU(N)$, e Λ a escala de renormalização. Gribov argumenta

que o polo infravermelho no propagador perturbativo se dá pela integração de modos no setor de calibre onde \mathcal{M} é pequeno, ou seja, com auto-valores pequenos, devido à contribuição da inversa do operador de Faddeev-Popov. Desta forma a restrição à região de Gribov poderia ser realizada a partir da condição de que o único polo no infravermelho fosse o polo trivial em $p^2 = 0$. Foi mostrado que, ao se considerar o campo de calibre como um campo externo, adiando a integração do campo de calibre, as contribuições para o propagador dos fantasmas poderiam ser consideradas como

$$\langle \bar{c}^A(k) c^B(-k) \rangle = \frac{\delta^{AB}}{k^2} \frac{1}{1 - \sigma(k, A_\mu)} \quad (2.79)$$

tendo que $\sigma(k, A_\mu)$ representa a contribuição efetiva a todas as ordens de um campo de calibre externo ao propagador dos fantasmas, de maneira a gerar um polo não trivial para os fantasmas. Em (Gribov, 1978), $\sigma(k, A_\mu)$ foi calculado até segunda ordem como

$$\sigma(k, A_\mu) = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \frac{Ng^2}{V(N^2 - 1)(d - 1)} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} A_\xi^A(-p) A_\xi^A(p) \frac{T_{\mu\nu}(p)}{(p - k)^2}. \quad (2.80)$$

Como foi mostrado em (Gribov, 1978; Vandersickel, 2011; Vandersickel; Zwanziger, 2012), $\sigma(k, A_\mu)$ é decrescente com o momento, logo, para região do infravermelho, é suficiente impor a condição

$$\sigma(0, A) < 1 \quad (2.81)$$

de forma que não haja polo não trivial no propagador dos fantasmas. O fator utilizado para restrição na integral funcional à região de Gribov pode ser implementado a partir de uma função theta, ou seja

$$\mathcal{V}(\Omega) = \theta(1 - \sigma(0, A_\mu)) = \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} \frac{d\beta}{2\pi i \beta} e^{\beta(1 - \sigma(0, A_\mu))} \quad (2.82)$$

Realizando a integração no parâmetro β pela aproximação da fase estacionária, e incluindo o termo subsequente na ação (Capri; Dudal *et al.*, 2016) nota-se que o propagador do glúon a nível árvore é modificado por um parâmetro de massa

$$\langle A_\mu^A(k) A_\nu^B(-k) \rangle = \delta^{AB} T_{\mu\nu}(k) \frac{k^2}{k^4 + \gamma^4}, \quad (2.83)$$

em que $T_{\mu\nu}(k)$ é o projetor transverso na direção de k . Este é o parâmetro de Gribov, que é fixado pela equação de gap

$$\frac{3Ng^2}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^4 + \gamma^4} = 1 \quad (2.84)$$

Esta nova escala de massa surge em decorrência da remoção das cópias de Gribov in-

finitesimais. Esta pode ser interpretada em termos da liberdade assintótica no limite perturbativo das teorias de Yang-Mills. No regime perturbativo a solução para equação de cópias é trivial, desta forma o parâmetro de Gribov pode também ser interpretado como a escala de significância das cópias infinitesimais. Além do parâmetro de Gribov supracitado, estudos recentes sobre o refinamento da ação de Gribov-Zwanziger introduzem outras escalas massivas, através da condensação de operadores de dimensão 2 (Capri; Du-dal *et al.*, 2016). As escalas adicionadas pelo refinamento apresentam maior semelhança formal com as massas de proca, que é o termo de massa usado no modelo de Curci-Ferrari que descreveremos posteriormente. Desta forma entendemos a inclusão de termos de massa como uma maneira natural de entender os efeitos não-perturbativos emergentes das teorias de Yang-Mills.

3 Abordagens não perturbativas

Ao procurarmos soluções para o tratamento do regime não perturbativo das teorias de Yang-Mills percebemos que as cópias de Gribov surgem como uma consequência natural da fixação de calibre no regime não perturbativo. Neste capítulo faremos uma breve revisão sobre alguns métodos de investigação do regime não perturbativo das teorias de Yang-Mills.

3.1 Teorias de Yang-Mills na rede

Uma abordagem capaz de evitar as cópias de Gribov é definindo os observáveis em termos de grandezas invariantes de calibre. A partir desta podemos encontrar como resultados funções de correlação de objetos independentes de calibre, como os loops de Wilson. Para construir uma teoria de calibre na rede devemos adaptar o formalismo para conhecer os campos apenas em pontos finitos do espaço-tempo. Para isso definimos uma rede de espaçamento constante a tal que a variável de calibre básica é a variável de link, definida por

$$\mathcal{U}_\mu(x) = e^{i \int_0^1 A_\mu(x + at\hat{\mu}) dt} \quad (3.1)$$

tendo que $\hat{\mu}$ indica a componente unitária na direção de μ . Assim podemos definir um operador de plaquetas, invariante de calibre, através de

$$\mathcal{P}_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{N} \text{ReTr}(\mathcal{U}_\mu(x)\mathcal{U}_\nu(x + a\hat{\mu})\mathcal{U}_\mu^\dagger(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu})\mathcal{U}_\nu^\dagger(x + a\hat{\nu})). \quad (3.2)$$

O conjugado da variável de link é, portanto, relacionado com a integração no sentido contrário, assim devendo ser revertido o sentido ao longo de $\hat{\mu}$. A plaqueta pode ser interpretada como a integral do loop ao redor de x como representada na Fig. 4.

A partir dos operadores de plaquetas podemos construir a ação de Wilson (Lepage,

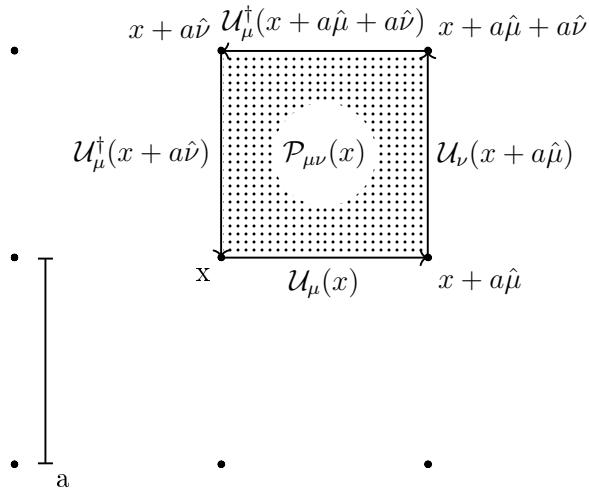


Figura 4: Variáveis da rede

(2005; Oeckl, 2005) como

$$S_{\text{Wilson}} = \sum_{x,\mu,\nu} (1 - \mathcal{P}_{\mu\nu}(x)) \approx \int d^4x \frac{1}{4} \text{Tr}(F_{\mu\nu}^2) + \mathcal{O}(a^2) \quad (3.3)$$

Desta forma podemos reproduzir aproximadamente a dinâmica do campo de calibre, obtendo a equivalência com o tratamento do contínuo no limite de separação nula $a \rightarrow 0$, a partir das variáveis de link, sorteando através de simulações numéricas configurações com peso de Boltzmann na ação de Wilson, e tomado isto como aproximação para a integral funcional (Lepage, 2005).

Para realizar a fixação de calibre no calibre de Landau, afim de realizar comparações com os resultados do contínuo, é utilizado um algoritmo de minimização do funcional

$$F[\mathcal{U}_\mu(x)] = \frac{1}{4} \sum_{x,\mu} \text{ReTr}(\mathcal{U}_\mu(x)) \quad (3.4)$$

a partir de transformações de calibre sucessivas. A minimização deste funcional corresponde à condição do calibre de Landau e, quando o método de minimização é escolhido adequadamente, converge para uma única configuração (Oeckl, 2005), assim a configuração selecionada converge para uma superposição de cópias de Gribov, diferentes algoritmos de relaxamento podem ser usados para contornar comportamentos espúrios, garantindo continuidade das variáveis de link até dependente da escala a (Lepage, 2005). Para o calibre abeliano maximal (MAG), que será apresentado adequadamente no próximo capítulo, é importante citar que este também dispõe de um funcional de minimização, que no caso

se trata de

$$F_{\text{MAG}}[\mathcal{U}_\mu(x)] = \sum_{x,\hat{\mu}} \text{Tr}(T^3 \mathcal{U}_\mu(x) T^3 \mathcal{U}_\mu^\dagger(x)) \quad (3.5)$$

A inclusão de Quarks na teoria pode ser feita de maneira imediata. Escrevendo a ação dos quarks como a forma quadrática

$$S_Q = a^4 \sum_{x,y} \bar{\psi}(x) Q(x,y) \psi(y) \quad (3.6)$$

onde $Q(x,y)$, depende do campo de calibre para um modelo com acoplamento, temos que a integração funcional no setor de quarks pode ser feita exatamente

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S_Q} = \det(Q) \quad (3.7)$$

Portanto, basta calcular este determinante para incluir termos efetivos na ação de glúons equivalentes à dinâmica dos quarks. Sendo o caso com fontes de quarks não muito diferente. Repare que, no caso de campos com auto-interação, como no nosso caso de interesse com campos escalares, a ação não é bilinear nos campos escalares e portanto o operador $Q(x,y)$ não pode ser definido. Neste caso é necessário simular dinamicamente também os graus de liberdade escalares de maneira independente.

Chamamos o limite quando Q independe dos campos de calibre o limite *quenched*. Quando a dependência nos campos de calibre é levada em consideração este é chamado *unquenched*. Simulações atuais para o comportamento do gluon, em ambos os casos *quenched* e *unquenched*, mostram um comportamento em comum: um propagador finito em momento zero para o gluon no calibre de Landau (Dudal; Oliveira; Vandersickel, 2010; Cucchieri *et al.*, 2012; Dudal; Oliveira; Silva, 2018), a interpretação deste comportamento do propagador é dito massivo ou desacoplado. Tal resultado deve emergir de contribuições dinâmicas de condensados e dos efeitos das cópias de Gribov e é incompatível com o propagador a nível árvore de do campo de calibre.

3.2 Exploração das equações de Dyson-Schwinger

Uma outra ferramenta utilizada para investigação do regime não-perturbativo são as equações de Dyson-Schwinger (Dyson, 1949; Schwinger, 1951). Que são capazes de obter relações exatas entre funções de correlação em diferentes ordens de teoria de perturbação, podendo, assim, investigar o comportamento no infra-vermelho. As relações básicas a

serem utilizadas partem da relação de que a integral funcional de uma derivada total é nula.

$$\int \mathcal{D}\Phi \frac{\delta}{d\Phi(x)} e^{-S[\Phi] + \int d^4x \Phi J} = 0 \quad (3.8)$$

Escolhendo adequadamente os campos e as fontes podemos obter relações como na Fig. 5. Nesta as linhas espessas representam os propagadores completos, com contribuições a todas as ordens, e os vértices marcados com pontos grossos representam os vértices completos. Desta forma a substituição do propagador completo pelo de ordem árvore implica numa equação diferencial funcional para o termo de primeira ordem, e assim em diante.

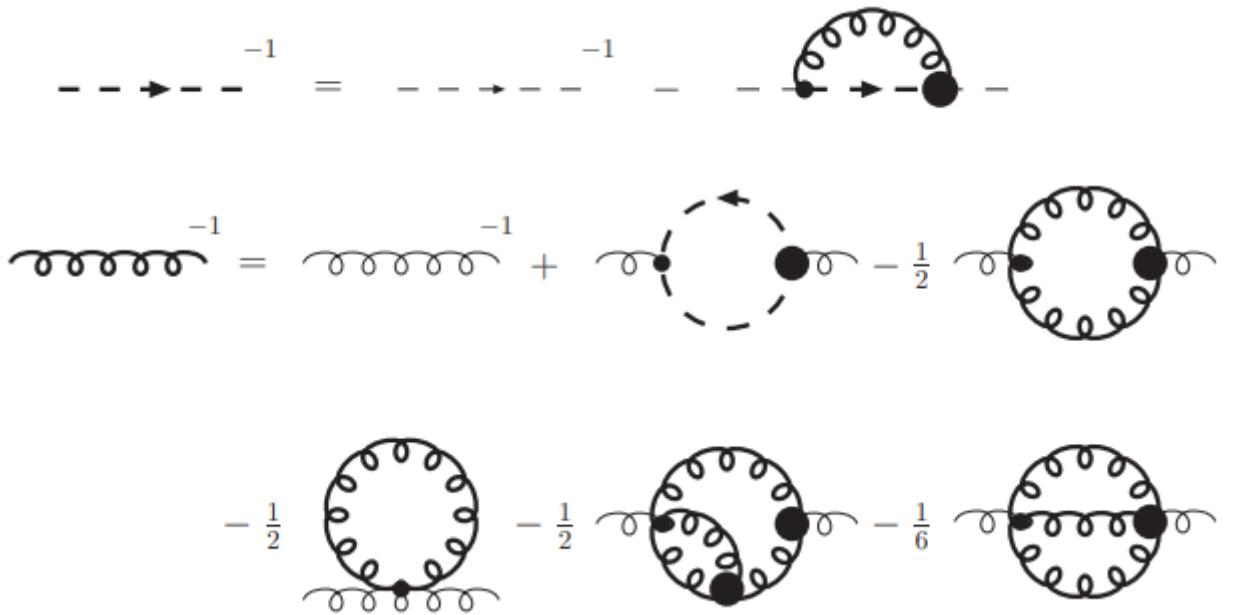


Figura 5: Relações diagramáticas obtidas das equações Dyson-Schwinger no calibre de Landau. Linhas e vértices espessos representam as contribuições completas, a todas as ordens, enquanto as demais representam a nível árvore. Imagens extraídas de (Bloch, 2003)

Que representam um conjunto infinito de equações acopladas e exatas entre as funções de correlação. Estas podem ser resolvidas a partir da escolha de um esquema de aproximações que permita substituir os diagramas em alguma ordem finita por algum *ansatz*, como as contribuições a nível árvore. Diversas soluções já foram exploradas para estas equações como em (Mandelstam, 1979) que, para calcular o propagador dos glúons, neglicenciou as contribuições dos fantasmas. Outro conjunto de soluções de particular importância são as chamadas *scaling solutions* (Smekal; Hauck; Alkofer, 1997; Alkofer; Smekal, 2001; Bloch, 2003; Fischer; Maas; Pawłowski, 2009), que vinculam os propagadores do glúon e dos fantasmas, alterando a dependência na potência do momento de acordo

com a quantidade de pernas externas (Smekal; Hauck; Alkofer, 1997; Fischer; Pawłowski, 2007).

$$\Gamma^{(2n,m)}(p^2) \propto (p^2)^{(n-m)\kappa} \quad (3.9)$$

para n sendo a quantidade de pernas externas de fantasmas, e m a de glúons e κ uma constante arbitrária em $d = 4$. Assim dizemos que o propagador do fantasma foi "aprimorado"(do inglês *enhanced*), o que é compatível com os resultados a nível árvore do modelo de Gribov-Zwanziger para uma escolha de κ , enquanto que o propagador do campo de calibre é suprimido, indo a zero para momento nulo. Estas soluções ainda não se encontram em completo acordo com a rede, porém há uma outra solução, conhecida por *decoupling solution*, que trás resultados coerentes com a rede, com o propagador do glúon transverso tendendo a um valor finito e não nulo para momento nulo, e com o propagador dos fantasmas não aprimorado, o que corresponde a geração de uma escala dinâmica de massa para o glúon, mas não para os fantasmas. (Bloch, 2003; Aguilar; Natale, 2004; Boucaud, Philippe *et al.*, 2006; Aguilar; Papavassiliou, 2008; Aguilar; Binosi; Papavassiliou, 2008; Boucaud, Ph *et al.*, 2008; Rodríguez-Quintero, 2011; Huber; Smekal, 2013) abordaram diferentes aspectos desta solução, nos levando a noção de uma geração de massa efetiva, consistente com a rede, e que inspirou tanto o refinamento do modelo de Gribov-Zwanziger quanto o modelo de Curci-Ferrari.

3.3 O modelo de Curci-Ferrari

Quando olhamos os resultados da rede nos perguntamos se é possível emular estes resultados em teoria de perturbação, como uma teoria efetiva, assim simplificando ao mínimo necessário o cálculo de funções de correlação no regime não-perturbativo. Em (Curci; Ferrari, 1976), foram explorados uma classe de modelos de Yang-Mills massivos, que podem ser invariantes pela simetria de BRST estendida, modificando as transformações dos fantasmas, ao preço de introduzir interações quárticas entre os campos fantasmas. Dentro desta classe de modelos, proposto como efetivo para o calibre de Landau, um em particular já encontrou muito sucesso na reprodução das funções de correlação para o infravermelho encontradas pela rede (Peláez, 2015; Peláez *et al.*, 2021) já a um 1-loop. Desta forma a inserção de parâmetros massivos se torna uma abordagem mínima para exploração dos aspectos não perturbativos das teorias de Yang-Mills.

Nos baseando no modelo de Curci-Ferrari, podemos nos perguntar: Quais as consequências de termos de massa em outros calibres? De maneira mais geral que o calibre

de landau, nos calibres lineares covariantes já é conhecido o termo de condensado de dimensão dois nos glúons (Comitini *et al.*, 2024), introduzido a partir de operadores compostos locais. A condensação do operador $Tr(A_\mu A_\mu)$ a partir da minimização do potencial efetivo na teoria de Yang-Mills pura introduz explicitamente uma escala de massa que é, em princípio um parâmetro redundante, ou seja, calculável em termos dos parâmetros do modelo. Este parâmetro de massa está intimamente atrelado à região de Gribov. A condição *no-pole* descrita em (2.81) no propagador dos fantasmas pode ser descrita em termos da massa do campo de calibre como

$$m^2 > \mu^2 e^{\frac{5}{6} - \frac{32\pi^2}{3g^2}}, \quad (3.10)$$

sendo equivalente a um limite superior, sendo uma abordagem alternativa à introdução da função horizonte, responsável pela não localidade do modelo.

Nos aproveitando do calibre abeliano maximal e do interesse atualmente existente em separar as dinâmicas dos setores abeliano e não-abeliano, nos propomos a calcular as correções quânticas dos propagadores de matéria devido a campos de calibre com massas distintas nesses dois setores. Desta forma inserimos termos de massa independentes para os campos de calibre abeliano, não-abeliano, e fantasmas. Cada um destes termos é, *a priori*, considerado separadamente, porém é comum encontrar a massa dos fantasmas relacionada à do campo de calibre como

$$m_C^2 = -m_{ND}^2 \quad (3.11)$$

(Curci; Ferrari, 1976) No entanto, não postulamos que as massas dos fantasmas e do campo de calibre estejam relacionadas *a priori*. Esta relação deverá ser verificada explicitamente em termos das constantes de renormalização, em caso desta relação se manter.

A justificativa de inserção destes termos sem a quebra da simetria de BRST deve ser colocada em termos de um campo de Stuckelberg (Stueckelberg, 1938; Ruegg; Ruiz-Altaba, 2004), como no caso do calibre de Landau, onde é construído um campo manifestamente independente de calibre

$$A_\mu^h = V^\dagger A_\mu V + \frac{i}{g} V^\dagger \partial_\mu V, \quad (3.12)$$

onde

$$V = e^{ig\xi^A T^A} \quad (3.13)$$

e ξ^A é chamado campo de Stueckelberg. Como A_μ^h é manifestamente invariante de calibre,

é possível introduzir o termo de massa

$$S_1 = \int d^4x \frac{m^2}{2} A_\mu^{Ah} A_\mu^{Ah} \quad (3.14)$$

sem quebrar a simetria de BRST. No calibre de Landau, este campo é equivalente ao campo de calibre (Capri; Fiorentini; Guimaraes *et al.*, 2016), de maneira que se torna possível a introdução do termo de massa sem quebra de simetria. Para que a mesma justificativa seja válida para um modelo massivo no calibre abeliano maximal, a mesma equivalência deveria acontecer, porém até o momento tal demonstração não está disponível, restando tratar esta inserção como termos efetivos que emulam resultados dinâmicos. Desta forma, a adição do termo de massa deve ser interpretada como posterior à fixação de calibre, ignorando a quebra explícita da simetria de BRST.

4 O calibre abeliano maximal

O calibre abeliano maximal tem sido de suma importância para as investigações em teorias se calibre, sendo um dos poucos calibres implementáveis em simulações de rede, juntamente com os calibres lineares covariantes. Sua principal característica é a separação da dinâmica do campo de calibre em dois setores, isto é, abeliano e não abeliano. O setor abeliano é caracterizado pelas componentes pertencentes à subálgebra de Cartan, que é a maior sub-álgebra abeliana do grupo de Lie associado à simetria de calibre. Esta divisão na dinâmica pode apresentar consequências como aquelas apresentadas na conjectura de dominância abeliana, que argumenta que, no infravermelho, o regime não perturbativo das teorias de Yang-Mills, é gerada uma hierarquia de massa entre os setores abelianos e não-abelianos dos campos de calibre. Isto implica que o desacoplamento da dinâmica do campo não-abeliano se desacopla, servindo de campo estático para dinâmica do campo não diagonal (Ezawa; Iwazaki, 1982; Suzuki; Yotsuyanagi, 1990). Esta noção é semelhante à aproximação de Born-Oppenheimer em que os elétrons veem os prótons, de maior massa, como potenciais eletrostáticos, e se ajustam de acordo, manifestando uma hierarquia na dinâmica molecular (Born; Oppenheimer, 1927).

O papel da dominância abeliana se dá como um passo ao entendimento do confinamento de quarks e glúons na QCD. (Ezawa; Iwazaki, 1982) mostrou que, uma vez que se apresenta uma hierarquia de dinâmica entre os graus de liberdade abelianos e não-abelianos, tanto os glúons quanto os quarks da teoria se encontram confinados por vórtices do setor elétrico de cor, explicando porque estes não se encontram nos estados assintóticos da teoria. As investigações na rede encontraram evidências desta hierarquia analisando a contribuição do setor abeliano via loops de Wilson compostos apenas por campos na componente abeliana (Suzuki; Yotsuyanagi, 1990), encontrando bom acordo com a disposição completa dos loops de Wilson associados às funções de correlação. Assim, os loops abelianos são capazes de reproduzir o potencial estático da teoria completa em $SU(2)$ (Hioki *et al.*, 1991). De forma que justifica-se a separação da dinâmica dos graus de liberdade abelianos e não-abelianos, que é característica fundamental do MAG.

Neste trabalho voltaremos nossos esforços para o grupo de simetria como $SU(2)$, onde a sub-álgebra de Cartan é a mais simples possível. Para este grupo só há um gerador na sub-álgebra de Cartan (T^3). A partir desta secção usaremos índices minúsculos $a, b \in \{1, 2\}$ como índices do setor não abeliano, e o setor abeliano perderá a menção ao índice sem causar ambiguidade. Para o grupo $SU(2)$ as constantes de estrutura assumem os valores conhecidos do tensor totalmente anti-simétrico $f^{ABC} = \epsilon_{ABC}$.

Desta forma, a derivada covariante diagonal é definida por

$$D_\mu^{ab} = \delta^{ab}\partial_\mu - gf^{ab3}A_\mu, \quad (4.1)$$

e quantidade f^{ab3} é de particular importância e será denotada por

$$f^{ab3} := \epsilon^{ab} \quad (4.2)$$

que satisfaz as propriedades

$$\epsilon^{12} = 1 \quad (4.3)$$

$$\epsilon^{ab} = -\epsilon^{ba} \quad (4.4)$$

$$\epsilon^{ac}\epsilon^{bc} = \delta^{ab} \quad (4.5)$$

$$\epsilon^{ab}\epsilon^{cd} = \delta^{ac}\delta^{bd} - \delta^{ad}\delta^{bc} \quad (4.6)$$

Nesta separação de graus de liberdade é importante evidenciar a forma do objetos que compõem a ação. Além do setor de Yang-Mills puro, já abordado em ([Capri, 2009](#)), investigaremos o setor escalar acoplado com simetria adjunta. Realizando as simplificações para as derivadas covariantes do campo de matéria podemos explicitar a divisão em campos abeliano e não-abeliano

$$D_\mu^{aB}\phi^B = \partial_\mu\phi^a - gf^{abc}\phi^bA_\mu^c - gf^{ab3}\phi^bA_\mu - gf^{a3b}\phi A_\mu^b, \quad (4.7)$$

$$= D_\mu^{ab}\phi^b + g\epsilon^{ab}\phi A_\mu^b \quad (4.8)$$

$$D_\mu^{3B}\phi^B = \partial_\mu\phi - gf^{3ab}\phi^aA_\mu^b, \quad (4.9)$$

onde utilizamos que, para o caso de $SU(2)$, não existem constantes de estrutura com 3 índices no setor não abeliano. Aplicando o mesmo procedimento para o setor de calibre,

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^bA_\nu^c + gf^{a3b}A_\mu A_\nu^b + gf^{ab3}A_\mu^bA_\nu \quad (4.10)$$

$$= D_\mu^{ab}A_\nu^b - D_\nu^{ab}A_\mu^b, \quad (4.11)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + gf^{3ab}A_\mu^aA_\nu^b, \quad (4.12)$$

É conveniente expressar a simetria de BRST em termos desta separação, a transformação em componentes dos campos fantasmas deve ser dada por

$$sc^a = g\epsilon^{ab}c^c c \quad (4.13)$$

$$sc = \frac{g}{2}\epsilon^{ab}c^a c^b \quad (4.14)$$

enquanto que as transformações de BRST dos campos escalares e de calibre.

$$sA_\mu^a = -D_\mu^{ab}c^b - g\epsilon^{ab}A_\mu^b c \quad sA_\mu = -\partial_\mu c - g\epsilon^{ab}A_\mu^a c^b \quad (4.15)$$

$$s\phi^a = g\epsilon^{ab}\phi c^b - g\epsilon^{ab}\phi^b c \quad s\phi = -g\epsilon^{ab}\phi^a c^b \quad (4.16)$$

O regime infravermelho do setor de calibre com termos condensados de massa já foi investigado em (Capri; Lemes *et al.*, 2006; Capri, 2009) e a renormalizabilidade do modelo sem massa para o setor de calibre e com inserção de campos escalares na representação adjunta foi provada em (Capri; Fiorentini; Sorella, 2015). Desta forma, para construir nosso modelo efetivo, partimos do setor escalar na representação adjunta de SU(2), com calibre fixado no MAG.

A implementação matemática do MAG segue da derivada covariante diagonal do campo de calibre não abeliano

$$F^a[A] = D_\mu^{ab}A_\mu^b = 0. \quad (4.17)$$

Para o setor de calibre abeliano, temos de introduzir outra condição de calibre, que não precisa estar atrelada ao setor não-abeliano, e neste trabalho será a condição de Landau.

$$F[A] = \partial_\mu A_\mu = 0 \quad (4.18)$$

A partir disto podemos derivar os termos de fixação de calibre gerados pela fixação BRST

$$s(\bar{c}^a D_\mu^{ab} A_\mu^b) = ib^a D_\mu^{ab} A_\mu^b - \bar{c}^a [-g\epsilon^{ab}(-\partial_\mu c - g\epsilon^{cd}A^c c^d)]A_\mu^b - \bar{c}^a D_\mu^{ab}(-D_\mu^{bc}c^c - g\epsilon^{bc}A_\mu^c c) \quad (4.19)$$

$$s(\bar{c}\partial_\mu A_\mu) = ib\partial_\mu A_\mu - \bar{c}\partial_\mu(-\partial_\mu c - g\epsilon^{ab}A_\mu^a c^b) \quad (4.20)$$

Portanto o termo de Faddeev-Popov completo é dado por

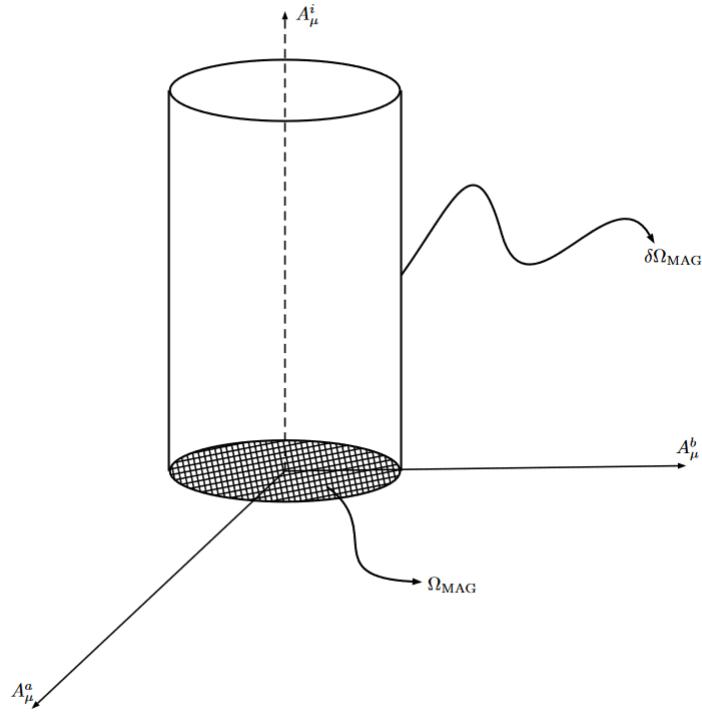


Figura 6: Região de Gribov Ω_{mag} no calibre abeliano maximal. Extraída de (Pereira, 2016)

$$S_{FP} = \int d^4x \left[-\bar{c}^a \mathcal{M}_{mag}^{ab} c^b + ib^a D_\mu^{ab} A_\mu^b + ib\partial_\mu A_\mu + g\epsilon^{ab}\bar{c}^a c D_\mu^{bc} A_\mu^c + \bar{c}\partial_\mu(\partial_\mu c + g\epsilon^{ab}A_\mu^a c^b) \right] \quad (4.21)$$

Tal que

$$\mathcal{M}_{mag}^{ab} = -D_\mu^{ac} D_\mu^{cb} - g\epsilon^{ac}\epsilon^{bd} A_\mu^b A_\mu^d \quad (4.22)$$

podemos descartar os termos lineares na condição de calibre a título de analisar a equação de cópias. Desta forma encontramos que os setores abeliano e não-abeliano de calibre se desacoplam, e o setor diagonal pode ser escrito explicitamente como

$$\theta(x) = -g\epsilon^{ab} \frac{\partial_\mu(A_\mu^a \theta^b)}{\partial^2} \quad (4.23)$$

Tal que o operador \mathcal{M}_{mag} realmente se torna o único responsável independente na criação de cópias de Gribov neste calibre. A região de Gribov no MAG apresenta uma forma inusitada, sendo irrestrita na direção do campo abeliano, conforme ilustrado na Fig. 6, de forma que é evidente a diferença do comportamento não perturbativo que é induzido pelas cópias de Gribov. Inspirados no sucesso do modelo de Curci-Ferrari em representar

o regime infravermelho das Teorias de Yang Mills, introduziremos os termos massivos à ação fixada

$$S_m = \int d^4x \left[\frac{m_D^2}{2} A_\mu A_\mu + \frac{m_{ND}^2}{2} A_\mu^a A_\mu^a + m_C^2 \bar{c}^a c^a \right] \quad (4.24)$$

de maneira a tentar emular o comportamento não perturbativo a partir destes termos massivos. A inserção de S_m quebra explicitamente a simetria de calibre, pela variação de BRST

$$sS_m = - \int d^4x \left[m_D A_\mu (\partial_\mu c + g\epsilon^{ab} A_\mu^a c^b) + m_{ND} A_\mu^a (D_\mu^{ab} c^b + g\epsilon^{ab} A_\mu^b c) + im_C^2 b^a c^a - \frac{gm_C^2}{2} \epsilon^{ab} \bar{c}^a c^b c \right] \quad (4.25)$$

de forma que os termos de massa descritos não podem ser inseridos a nível fundamental nas teorias de Yang-Mills. O termo de massa para os fantasmas, apesar de não ser um foco de análise, se faz necessário para renormalização e por isso será considerado independente neste trabalho.

4.1 Termos quárticos adicionais para renormalização

Para tornar este o modelo escalar acoplado a Yang-Mills renormalizável, devemos adicionar termos BRST-exatos adicionais com acoplamentos arbitrários. Estes novos parâmetros serão responsáveis por absorver as divergências inerentes da não-linearidade da fixação de calibre no MAG sem a introdução de novas dinâmicas, e o limite $(\alpha, \beta) \rightarrow 0$ deve ser tomado quando possível. Os termos relevantes foram calculados em (Capri; Fiorentini; Sorella, 2015) aplicando o método de renormalização algébrica (Piguet; Sorella, 1995). Aqui usaremos seus resultados adicionando os termos

$$S_\alpha = -\frac{\alpha}{2} s \int d^4x \bar{c}^a i b^a - g\epsilon^{ab} \bar{c}^a \bar{c}^b c \quad (4.26)$$

$$= \int d^4x \frac{\alpha}{2} b^a b^a + \frac{\alpha g}{2} \epsilon^{ab} (i b^a \bar{c}^b c - \bar{c}^a i b^b c + \frac{g}{2} \bar{c}^a \bar{c}^b \epsilon^{cd} c^c c^d) \quad (4.27)$$

$$= \int d^4x \frac{\alpha g}{2} b^a b^a + \alpha \epsilon^{ab} i b^a \bar{c}^b c + \frac{\alpha g^2}{2} \bar{c}^a \bar{c}^b c^a c^b \quad (4.28)$$

Para renormalizar o setor escalar devemos introduzir também o seguinte termo

$$S_\beta = \frac{\beta}{2} s \int d^4x \epsilon^{ab} \phi \phi^a \bar{c}^b \quad (4.29)$$

$$= \frac{\beta}{2} \epsilon^{ab} \int d^4x (-g \epsilon^{cd} \phi^c c^d \phi^a \bar{c}^b - \phi (g \epsilon^{ac} \phi^c c - g \epsilon^{ac} \phi c^c) \bar{c}^b + \phi \phi^a i b^b) \quad (4.30)$$

$$= \frac{\beta}{2} \int d^4x g \phi^a \phi^a \bar{c}^b c^b - g \phi^2 \bar{c}^a c^a - g \phi^a \phi^b \bar{c}^a c^b + g \phi \phi^a \bar{c}^a c - i b^a \epsilon^{ab} \phi \phi^b \quad (4.31)$$

Ambas as constantes auxiliares α, β devem ser usadas para renormalização e em seguida levadas a 0. Este é o procedimento que garante a renormalizabilidade do modelo, formalmente. A verificação de como os limites são tomados deverá ser executada com cautela durante a série perturbativa.

Para fins práticos, podemos optar por integrar os campos auxiliares de Nakanishi-Lautrop e tratar da dinâmica resultante. Para isso incluímos um termo algébrico para o setor diagonal do mesmo

$$S_\xi = \int d^4x \frac{\xi}{2} b^2 \quad (4.32)$$

Coletando os termos contendo b^a, b explicitamos,

$$S_b = \int d^4x \frac{\alpha}{2} b^a b^a + i b^a \left(D_\mu^{ab} A_\mu^b + \alpha g \epsilon^{ab} \bar{c}^b c - \frac{\beta}{2} \epsilon^{ab} \phi \phi^b \right) + \frac{\xi}{2} b^2 + i b \partial_\mu A_\mu \quad (4.33)$$

assim separando os termos explicitados das ações de origem S_{FP} , S_α , S_β

Integrando nos campos usando os resultados do Cap. 2 obtemos um novo termo

$$\tilde{S}_b = \int d^4x \frac{1}{2\alpha} \left(D_\mu^{ab} A_\mu^b + \alpha g \epsilon^{ab} \bar{c}^b c - \frac{\beta}{2} \epsilon^{ab} \phi \phi^b \right)^2 + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu)^2 \quad (4.34)$$

De posse destes termos podemos iniciar o cálculo das correções quânticas pela série perturbativa. Faremos uma breve digressão para enunciar a ação completa do modelo a ser dada por

$$S = S_{YM} + S_\phi + S_g f + S_b + S_\alpha + S_\beta \quad (4.35)$$

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{4} (D_\mu^{ab} A_\nu^b - D_\nu^{ab} A_\mu^b)^2 + \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g\epsilon^{ab} A_\mu^a A_\nu^b)^2 \right] \quad (4.36)$$

$$+ \frac{m_{ND}^2}{2} A_\mu^a A_\mu^a + \frac{m_D^2}{2} A_\mu A_\mu + \frac{1}{2} (D_\mu^{ab} \phi^b + g\epsilon^{ab} A_\mu^b \phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi - g\epsilon^{ab} \phi^a A_\mu^b)^2 \quad (4.37)$$

$$+ \frac{m^2}{2} (\phi^a \phi^a + \phi^2) + \frac{\lambda}{4!} [(\phi^a \phi^a)^2 + \phi^4 + 2\phi^a \phi^a \phi^2] + \frac{1}{\xi} (\partial_\mu A_\mu)^2 \quad (4.38)$$

$$+ \frac{1}{2\alpha} \left(D_\mu^{ab} A_\mu^b + \alpha g \epsilon^{ab} \bar{c}^b c - \frac{\beta}{2} \phi \phi^b \right)^2 + \frac{\alpha g^2}{2} \bar{c}^a \bar{c}^b c^a c^b \quad (4.39)$$

$$- \bar{c}^a \mathcal{M}_{\text{mag}}^{ab} c^b + g\epsilon^{ab} \bar{c}^a D_\mu^{bc} A_\mu^c + \bar{c} \partial_\mu (\partial_\mu c + g\epsilon^{ab} A_\mu^a c^b) \quad (4.40)$$

$$+ \frac{\beta g}{2} (\phi^a \phi^a \bar{c}^b c^b - \phi^a \phi^b \bar{c}^a c^b + \phi^a \phi \bar{c}^a c - \phi^2 \bar{c}^a c^a) \quad (4.41)$$

Evidenciamos que o limite do MAG verdadeiro se encontra quando o limite $(\alpha, \beta) \rightarrow 0$ é tomado devidamente, e o modelo descrito em (Capri; Fiorentini; Sorella, 2015) é equivalente à remoção dos termos de massa em S_m .

5 Propagadores perturbativos

Nos inspirando no sucesso do modelo de Curci-Ferrari, neste capítulo exploraremos as contribuições explícitas dos termos de massa do setor de calibre aos propagadores do modelo até 1-loop. Para isso construiremos os diagramas e a auto-energia relevante para cada um destes.

5.1 Propagadores a nível árvore

Os propagadores a nível árvore podem ser encontrados pelo operador definido em [2.5]

$$S_0 = \int d^4x \Phi_i \mathcal{O}_{ij} \Phi_j \quad (5.1)$$

Neste caso, como não há termos mistos da parte quadrática da ação nos campos, \mathcal{O} é diagonal, e os elementos da inversa são dados por

$$\langle \phi^a(p) \phi^b(-p) \rangle_0 = \frac{\delta^{ab}}{p^2 + m^2} \quad (5.2)$$

$$\langle \phi(p) \phi(-p) \rangle_0 = \frac{1}{p^2 + m^2} \quad (5.3)$$

$$\langle \bar{c}^a(p) c^b(-p) \rangle_0 = \frac{\delta^{ab}}{p^2} \quad (5.4)$$

$$\langle \bar{c}(p) c(-p) \rangle_0 = \frac{1}{p^2} \quad (5.5)$$

para dos campos de calibre, devido à sua natureza vetorial, é necessário ter mais álgebra

para lidar com as diferentes polarizações.

$$\int d^4x \left[\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu^a)^2 + \frac{m_{ND}^2}{2}A_\mu^a A_\mu^a \right] \quad (5.6)$$

$$= \int d^4x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu^a \partial_\mu A_\nu^a - \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu^a \partial_\nu A_\mu^a + \frac{1}{2\alpha}\partial_\mu A_\mu^a \partial_\nu A_\nu^a + \frac{m_{ND}^2}{2}A_\mu^a A_\mu^a \right] \quad (5.7)$$

$$= \int d^4x \left[\frac{1}{2}A_\mu^a(-\delta_{\mu\nu}\partial^2 + (1 - 1/\alpha)\partial_\mu\partial_\nu + m_{ND}^2\delta_{\mu\nu})A_\nu^a \right] \quad (5.8)$$

$$= \int d^4x \left[\frac{1}{2}A_\mu^a(\delta_{\mu\nu}p^2 - (1 - 1/\alpha)p_\mu p_\nu + m_{ND}^2\delta_{\mu\nu})A_\nu^a \right] \quad (5.9)$$

O propagador pode ser obtido usando

$$\langle A_\mu^a(p)A_\nu^b(-p) \rangle|_0 = \delta^{ab}\delta_{\mu\nu}G_1 + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}G_2 \quad (5.10)$$

$$G_1 = \frac{1}{p^2 + m_{ND}^2} \quad (5.11)$$

$$G_2 = \frac{1}{p^2 + m_{ND}^2} \frac{(\alpha - 1)p^2}{p^2 + \alpha m_{ND}^2} \quad (5.12)$$

$$= \delta^{ab} \left[\frac{1}{p^2 + m_{ND}^2}T_{\mu\nu}(p) + \frac{\alpha}{p^2 + \alpha m_{ND}^2}L_{\mu\nu}(p) \right] \quad (5.13)$$

tal que $T_{\mu\nu}(p)$ e $L_{\mu\nu}(p)$ são os projetores transversais e longitudinais no espaço de momento, ou seja

$$T_{\mu\nu}(p) = \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}, \quad (5.14)$$

$$L_{\mu\nu}(p) = \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}. \quad (5.15)$$

Seguindo passo análogos para o setor abeliano obtemos

$$\langle A_\mu(p)A_\nu(-p) \rangle_0 = \frac{1}{p^2 + m_D^2}T_{\mu\nu}(p) + \frac{\xi}{p^2 + \xi m_D^2}L_{\mu\nu}(p). \quad (5.16)$$

como era esperado, por não haver interação proporcional a ξ , o único papel deste limite é tornar o propagador do campo de calibre abeliano transverso, de maneira que a componente longitudinal desacople no limite $\xi \rightarrow 0$, e para futuros cálculos é isto que será assumido. As representações diagramáticas dos propagadores a nível árvore são dadas na tabela I

Para calcular as correções a 1-laço do propagadores dos campos escalares podemos

$\phi(p) \text{ ————— } \phi(-p)$	$\langle \phi(p)\phi(-p) \rangle_0$	$(p^2 + m^2)^{-1}$
$\phi^a(p) \text{ ————— } \phi^b(-p)$	$\langle \phi^a(p)\phi^b(-p) \rangle_0$	$\delta^{ab}(p^2 + m^2)^{-1}$
$A_\mu(p) \sim\!\!\!\sim A_\nu(-p)$	$\langle A_\mu(p)A_\nu(-p) \rangle_0$	$T_{\mu\nu}(p)(p^2 + m_D^2)^{-1}$
$A_\mu^a(p) \sim\!\!\!\sim A_\nu^b(-p)$	$\langle A_\mu^a(p)A_\nu^b(-p) \rangle_0$	$\delta^{ab}T_{\mu\nu}(p)(p^2 + m_{ND}^2)^{-1}$ $+ \alpha\delta^{ab}L_{\mu\nu}(p)(p^2 + \alpha m_{ND}^2)^{-1}$
$\bar{c}(p) \text{ - - - - } c(-p)$	$\langle \bar{c}(p)c(-p) \rangle_0$	$(p^2)^{-1}$
$\bar{c}^a(p) \text{ - - - - - } c^b(-p)$	$\langle \bar{c}^a(p)c^b(-p) \rangle_0$	$\delta^{ab}(p^2)^{-1}$

Tabela 1: Propagadores a nível árvore dos campos fundamentais

utilizar os conhecimentos provenientes da teoria $\lambda\phi^4$. Considerando o supercampo Φ_i , sabemos que todas as correções relevantes de propagadores seguem a forma geral da Fig.

7



Figura 7: Contribuições possíveis a 1 -laço

Nos voltando aos casos particulares do propagadores do setor escalar encontramos os diagramas que contribuem substituindo seus respectivos vértices

5.2 Propagadores dos campos escalares

Quando substituímos os vértices encontrados em 4.41 nas formas gerais de contribuições da Fig. 7, percebemos que as contribuições a 1-loop do propagador do campo escalar abeliano podem ser representadas pelos diagramas na Fig. 8. A auto-energia do campo escalar pode ser encontrada a partir da função de 2-pontos 1PI como

$$\Gamma^{(2)}_{\phi\phi}(p) = p^2 + m^2 + \Pi_{\phi^2} \quad (5.17)$$

ou seja, a auto-energia guarda as correções quânticas ao propagador.

Devido à quantidade de vértices presente no modelo se fez necessário o uso do programa FORM (Kuipers *et al.*, 2013) para a manutenção dos cálculos explícitos de maneira consistente, evitando erros algébricos. Calculando explicitamente os diagramas, a auto-energia pode ser renormalizada no esquema \overline{MS} (Peskin; Schroeder, 1995; Weinberg,

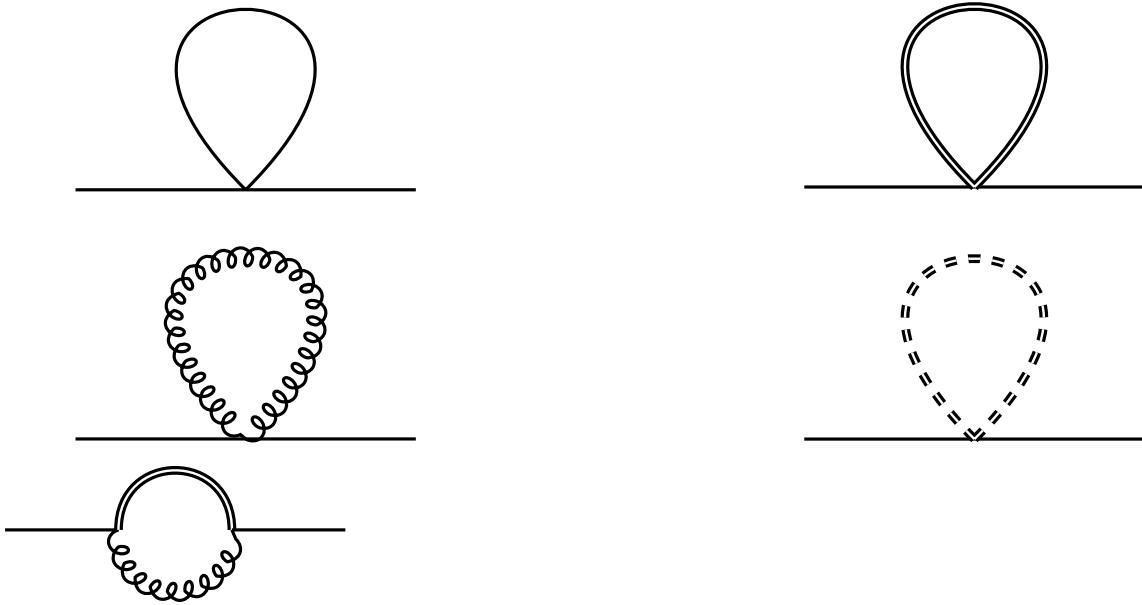


Figura 8: Contribuições não nulas a 1-loop cabíveis para o campo abeliano

[1996] para $d = 4$, assumindo a forma finita

$$\Pi_{\phi^2} = -2g^2 \frac{(p^2 + m^2 + m_{ND}^2)^2 - 4m^2 m_{ND}^2}{m_{ND}^2} \chi(p^2, m^2, m_{ND}^2) \quad (5.18)$$

$$+ 2g^2 \frac{(p^2 - m^2 - \frac{\beta}{2}m_{ND}^2)^2}{m_{ND}^2} \chi(p^2, m^2, \alpha m_{ND}^2) \quad (5.19)$$

$$- m^2 \left(\frac{5\lambda}{6} + g^2 \right) \log \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) - 2(p^2 + m^2 + (2d-3)m_{ND}^2) \log \left(\frac{m_{ND}^2}{\mu^2} \right) \quad (5.20)$$

$$+ 2g(gp^2 + gm^2 - (\alpha g + \alpha\beta)m_{ND}^2) \log \left(\frac{\alpha m_{ND}^2}{\mu^2} \right) - g\beta m_C^2 \log \left(\frac{m_C^2}{\mu^2} \right) \quad (5.21)$$

A função $\chi(p^2, m_1^2, m_2^2)$ é derivada da representação integral dos diagramas e é propriamente definida no apêndice [B], e μ é a escala arbitrária de renormalização. As constantes de renormalização de campo e de massa são definidas a partir das seguintes substituições na ação de partida

$$\phi \rightarrow Z_{\phi\phi}^{1/2} \phi, \quad (5.22)$$

e

$$m^2 \rightarrow Z_{m^2}^{(1)} m^2 \quad (5.23)$$

de maneira que omitimos a renormalização dos vértices que não pode ser obtida sem considerar explicitamente as funções de 4-pontos. As expressões encontradas para os

fatores de renormalização foram de

$$Z_{\phi\phi} = 1 - \frac{1}{16\pi^2} (6g^2 + 2g\beta - 2g^2\alpha) \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln(4\pi) + \gamma \right) \quad (5.24)$$

$$Z_{m^2} = 1 - \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{5\lambda}{6} - 6g^2 + 2\beta g \frac{m_C^2}{m^2} + 2 \left(g^2 (\alpha^2 - 2) + g\alpha\beta - \frac{\beta^2}{4} \right) \frac{m_{ND}^2}{m^2} \right) \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln(4\pi) + \gamma \right) \quad (5.25)$$

Para o campo escalar não-abeliano as contribuições de primeira ordem são representadas pelos diagramas encontrados na Fig. 9.

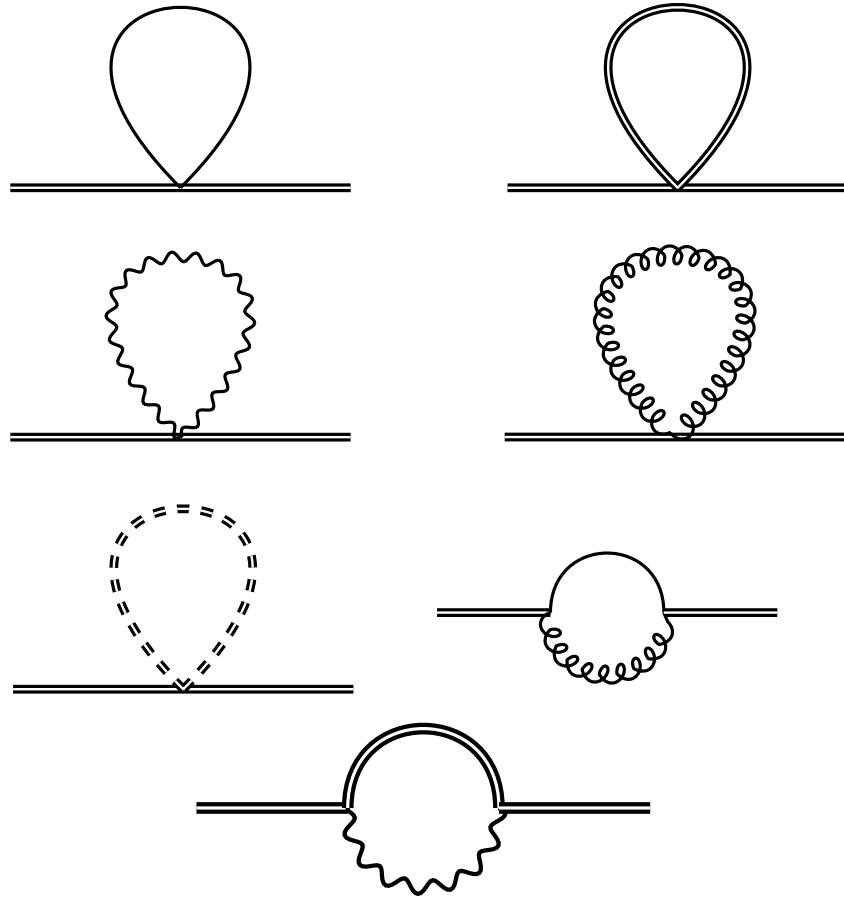


Figura 9: Contribuições não nulas a 1-loop para o campo não-abeliano

De maneira a simplificar a notação, definimos a auto energia a partir de

$$\Gamma_{\phi^a\phi^b}^{(2)}(p) = \delta^{ab} (p^2 + m^2 + \Pi_{\phi^a\phi^b}) \quad (5.26)$$

tal que

$$\begin{aligned}
\Pi_{\phi^a \phi^b} = & -g^2 \frac{(p^2 + m^2 + m_D^2)^2 - 4m^2 m_D^2}{m_D^2} \chi(p^2, m^2, m_D^2) \\
& + g^2 \frac{(p^2 + m^2)^2}{m_D^2} \chi(p^2, m^2, m_D^2) \\
& - g^2 \frac{(p^2 + m^2 + m_D^2)^2 - 4m^2 m_{ND}^2}{m_{ND}^2} \chi(p^2, m^2, 0) \\
& g^2 \frac{(gp^2 + gm^2 + \frac{\beta}{2}m_{ND}^2)^2}{m_{ND}^2} \chi(p^2, m^2, \alpha m_{ND}^2) \\
& - m^2 \left(\frac{5\lambda}{6} - 2g^2 \right) \log \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) - (p^2 + m^2 + (2d-3)m_D^2) \log \left(\frac{m_D^2}{\mu^2} \right) \\
& - (p^2 + m^2 + (2d-3)m_{ND}^2) \log \left(\frac{m_{ND}^2}{\mu^2} \right) \\
& + \alpha(g^2 p^2 + g^2 m^2 + g(g\alpha + \beta)m_{ND}^2) \log \left(\frac{\alpha m_{ND}^2}{\mu^2} \right) + g\beta m_C^2 \log \left(\frac{m_C^2}{\mu^2} \right)
\end{aligned} \tag{5.27}$$

os fatores de renormalização são dados de maneira análoga ao caso do campo abeliano, e são dados por

$$Z_{\phi^a \phi^b} = 1 - \frac{1}{16\pi^2} (6g^2 - g^2\alpha - g\beta) \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln(4\pi) + \gamma \right) \tag{5.28}$$

$$Z_{m^2}^{(2)} = 1 - \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{5\lambda}{6} - 6g^2 + 2g^2(d-1) \frac{m_D^2}{m^2} \right) \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(g^2(2d-2+\alpha^2) - g\alpha\beta - \frac{\beta^2}{4} \right) \frac{m_{ND}^2}{m^2} - g\beta \frac{m_C^2}{m^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln(4\pi) + \gamma \right)
\end{aligned} \tag{5.30}$$

de forma que os dois modos de renormalização da massa são equivalentes *on-shell*, apenas se as massas do setor de calibre são iguais. Essa condição mostra a necessidade de uma bifurcação nos parâmetros de massa do setor escalar, de maneira que a ação quântica não poderia manter a simetria de calibre. Exploraremos melhor a possibilidade da manutenção da simetria de calibre na ação quântica a 1-loop posteriormente neste trabalho.

5.3 Propagadores do setor de calibre

Para o campo de calibre abeliano é importante estabelecer que, devido ao propagador a nível árvore ser transverso, podemos considerar apenas a contribuição transversa da auto-energia, devido à projeção transversal presente no propagador completo. Desta forma a

auto-energia do campo de calibre será dada na forma

$$\Gamma_{A_\mu A_\nu}^{(2)}(p) = \frac{1}{d-1} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) (p^2 + m_D^2 + \Pi_{A_\mu A_\nu}) \quad (5.31)$$

Neste setor encontramos os diagramas que contribuem para auto-energia como aqueles dados pela Fig. 10.

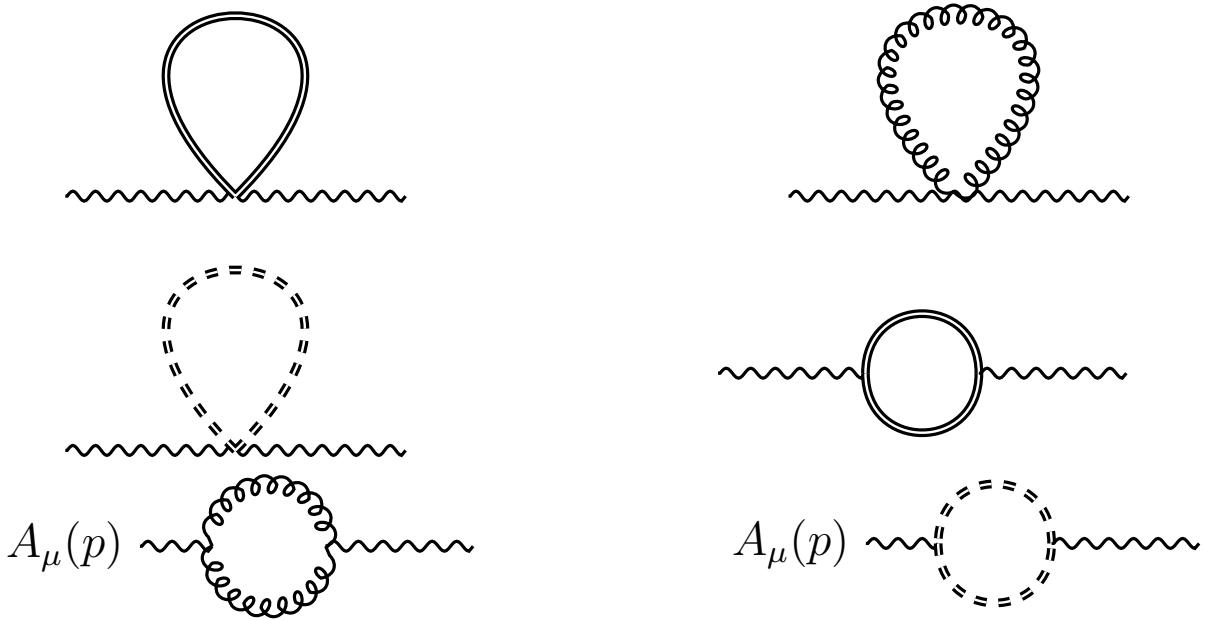


Figura 10: Contribuições não nulas a 1-loop para o campo de calibre abeliano

Desta forma, a auto-energia é dada por

$$\begin{aligned} \Pi_{A_\mu A_\nu} &= 2g^2(p^2 + 4m^2)\chi(p^2, m^2, m^2) - 2g^2(p^2 + 4m_C^2)\chi(p^2, m_C^2, m_C^2) \\ &\quad + g^2 \frac{p^6 - 8(d-2)p^2m_{ND}^2 - 4(7d-11)p^2m_{ND}^4 + 16(d-1)m_{ND}^6}{2m_{ND}^4} \chi(p^2, m_{ND}^2, m_{ND}^2) \\ &\quad - \frac{p^6 - 2(2d-3-\alpha)p^4m_{ND}^2 + (\alpha-1)^2p^2m_{ND}^4}{m_{ND}^4} \chi(p^2, m_{ND}^2, \alpha m_{ND}^2) \\ &\quad + \frac{p^6 + 2(\alpha-1)p^4m_{ND}^2 + 2(1-4\alpha)p^2m_{ND}^4 + 8\alpha m_{ND}^6}{2m_{ND}^4} \chi(p^2, \alpha m_{ND}^2, \alpha m_{ND}^2) \\ &\quad - 4g^2(d-2)m^2 \log\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + 4g^2(d-2)m_C^2 \log\left(\frac{m_C^2}{\mu^2}\right) \\ &\quad - g^2((4d+\alpha-9)p^2 + (4d^2-12d+8)m_{ND}^2) \log\left(\frac{m_{ND}^2}{\mu^2}\right) \\ &\quad + g^2((4d-9\alpha+\alpha^2) - 4(d-2)\alpha m_{ND}^2) \log\left(\frac{\alpha m_{ND}^2}{\mu^2}\right) \end{aligned} \quad (5.32)$$

tal qual os fatores de renormalização do setor escalar, no setor de calibre estes seguem a

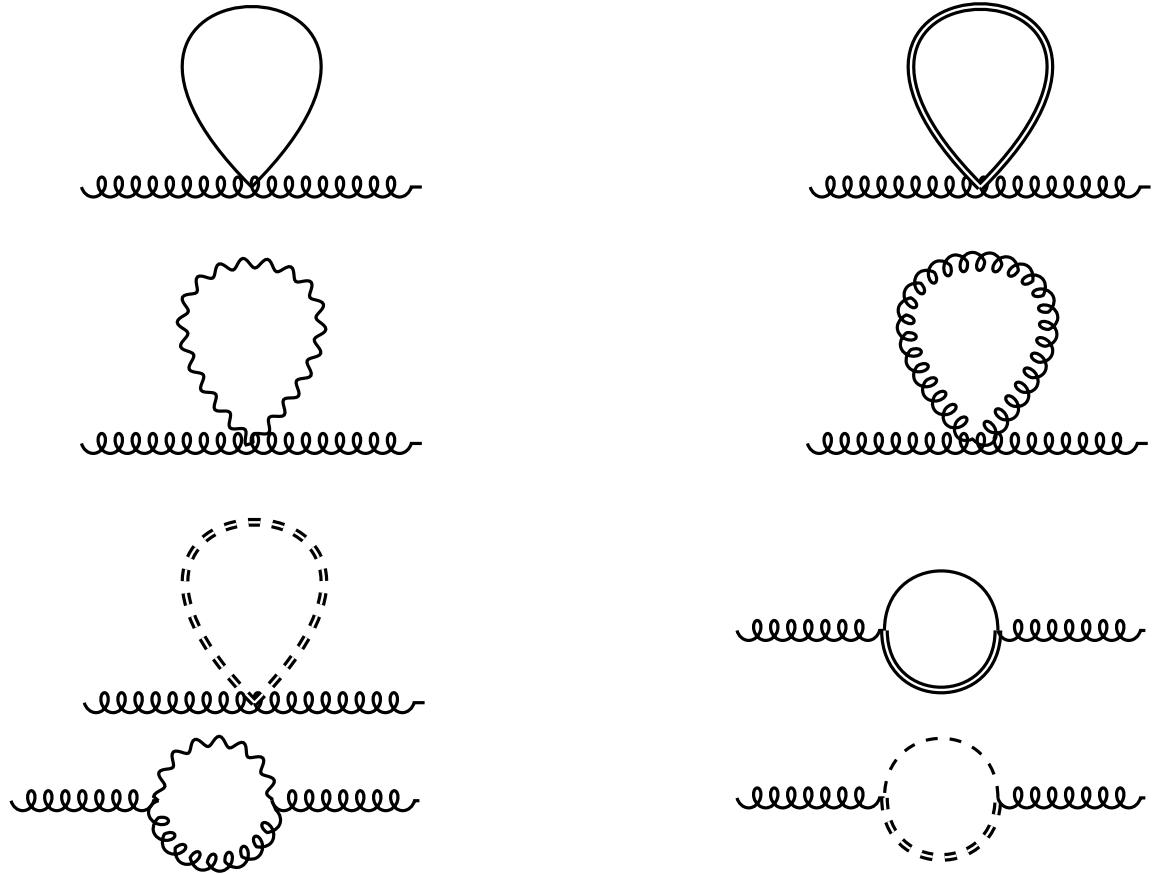


Figura 11: Contribuições não nulas a 1-loop para o campo de calibre não-abeliano

mesma forma, de maneira que encontramos os seguintes fatores de renormalização

$$Z_{A_\mu A_\nu} = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2(d-1)} ((18-4\alpha)d + 16\alpha - 32) \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln(4\pi) + \gamma \right), \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} Z_{m_D^2} = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} & \left(2d(2\alpha - 9) + 32 - 16\alpha + 4(d-4) \frac{m_C^2}{m_D^2} - (d-4) \frac{m_C^2}{m_D^2} \right. \\ & \left. + (4(d^2 + d(\alpha - 5) + 1 - \alpha)) \frac{m_{ND}^2}{m_D^2} \right) \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln(4\pi) + \gamma \right). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Desta forma percebemos que as contribuições da massa dos fantasmas e dos campos escalares é irrelevante para renormalização da massa do campo diagonal.

Quanto ao campo não abeliano definimos a auto-energia a partir de

$$\Gamma_{A_\mu^a A_\nu^b}^{(2)}(p) = \frac{\delta^{ab}}{d-1} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) (p^2 + m_{ND}^2 + \Pi_{A_\mu^a A_\nu^b}^T) + \frac{\delta^{ab}}{\alpha} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} (p^2 + \alpha m_{ND}^2 + \alpha \Pi_{A_\mu^a A_\nu^b}^L) \quad (5.35)$$

e os diagramas que contribuem não trivialmente são dados pela Fig. 11.

De forma que obtemos os seguintes resultados

$$\begin{aligned}
\Pi_{A_\mu^a A_\nu^b}^T &= g^2(p^2 + 4m^2)\chi(p^2, m^2, m^2) \\
&+ \frac{g^2}{p^2 m_{ND}^2 m_D^2} \left\{ \frac{p^8 + m_D^8 + m_{ND}^8}{4} - p^6(d-1)(m_D^2 + m_{ND}^2) \right. \\
&- p^4 \left(\left(2d - \frac{7}{2} \right) (m_D^4 + m_{ND}^4) + (3d-4)m_D^2 m_{ND}^2 \right) \\
&- p^2[(d-2)(m_D^6 + m_{ND}^6) - (3d-4)(m_D^2 + m_{ND}^2)m_D^2 m_{ND}^2] \\
&\left. + (d-2)(m_D^2 - m_{ND}^2)^2 m_D^2 m_{ND}^2 + \frac{3}{2} m_D^4 m_{ND}^4 \right\} \chi(p^2, m_{ND}^2, m_D^2) \\
&- \frac{g^2}{p^2 m_{ND}^2 m_D^2} \left\{ \frac{p^8 + m_{ND}^8}{4} - p^6(d-2)m_{ND}^2 - p^4 \left(2d - \frac{7}{2} \right) m_{ND}^4 \right. \\
&- p^2(d-2)m_{ND}^6 \} \chi(p^2 m_{ND}^2, 0) \\
&- \frac{g^2}{p^2 m_{ND}^2 m_D^2} \left\{ \frac{p^8 + m_{ND}^8 \alpha^2 + m_D^8}{4} + p^6 \frac{2(2-d)m_D^2 + (1+\alpha)m_{ND}^2}{2} \right. \\
&- p^4 \frac{(4d-7)m_D^4 + (4d-\alpha-7)m_D^2 m_{ND}^2 + \frac{\alpha^2 + 4\alpha + 1}{2} m_{ND}^2}{2} \\
&- p^2 \left((d-2)m_D^6 - \frac{\alpha(1+\alpha)}{2} m_{ND}^6 + \frac{4d-\alpha-7}{2} m_D^4 m_{ND}^2 \right. \\
&\left. - \frac{3+\alpha^2}{2} m_D^2 m_{ND}^4 \right) + \frac{1-\alpha}{2} m_D^6 m_{ND}^2 \\
&+ \frac{\alpha^2 - 4\alpha + 1}{4} m_D^4 m_{ND}^4 + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} m_D^2 m_{ND}^6 \} \chi(p^2, \alpha m_{ND}^2, m_D^2) \\
&+ \frac{g^2}{p^2 m_{ND}^2 m_D^2} \left\{ \frac{p^8 + \alpha^2 m_{ND}^8}{4} + \frac{p^6 m_{ND}^2 (1+\alpha) + \alpha(1+\alpha)p^2 m_{ND}^6}{2} \right. \\
&+ (\alpha^2 + 4\alpha + 1) \frac{p^4 m_{ND}^4}{4} \} \chi(p^2, \alpha m_{ND}^2, 0) - 2g^2(2d-3)m^2 \log \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \\
&- \frac{g^2}{p^2} \left[\left(d + \frac{\alpha}{4} - \frac{5}{4} \right) p^4 + \left(\left(d(d-4) + \frac{7+\alpha}{2} \right) m_D^2 \left(d + \frac{\alpha-3}{2} \right) m_{ND}^2 \right) \right. \\
&+ p^2 + \left(\frac{\alpha-9}{4} \right) m_D^4 + \left(\frac{\alpha-1}{4} \right) m_{ND}^4 + \left(\frac{3+\alpha}{2} \right) m_{ND}^2 m_D^2 \left. \right] \log \left(\frac{m_D^2}{\mu^2} \right) \\
&- 2(d-1)m_C^2 \log \left(\frac{m_D^2}{\mu^2} \right) - \frac{g^2}{p^2} \left[\frac{4d-7}{4} p^4 + \frac{16d^2 - 52d + 50 - \frac{3}{d}}{4} m_{ND}^2 p^2 + \frac{d-7}{4} m_D^2 p^2 \right. \\
&+ m_{ND}^4 \frac{4d-7}{4} - m_D^4 \frac{1}{4} - \frac{d-7}{4} m_D^2 m_{ND}^2 \left. \right] \log \left(\frac{m_{ND}^2}{\mu^2} \right) + \frac{g^2}{p^2} \left[\alpha \frac{4d-7}{4} p^4 \right. \\
&+ \alpha \frac{4d-7}{4} p^2 m_D^2 + \frac{d^2(4\alpha - \alpha^2) + d(13\alpha^2 - 6\alpha) - 6\alpha^2}{2d} p^2 m_{ND}^2 \left. \right] \log \left(\frac{\alpha m_{ND}^2}{\mu^2} \right)
\end{aligned} \tag{5.36}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{A_\mu^a A_\nu^b}^L = & -\frac{\beta^2}{4\alpha^2} p^2 \chi(p^2, m^2, m^2) + g^2 \frac{p^2 - m_C^2}{2} \chi(p^2, m_C^2, 0) \\
& - \frac{g^2}{p^2 m_{ND}^2 m_D^2} \left[\frac{p^8 + m_D^8 + m_{ND}^8}{4\alpha^2} + \frac{(1-\alpha)m_{ND}^2 + (1+\alpha)m_D^2}{2\alpha^2} p^6 \right. \\
& + \frac{(\alpha^2 - 4\alpha + 1)m_D^4[(4d-2)\alpha^2 - 6]m_D^2 m_{ND}^2 + (\alpha^2 - 4\alpha + 1)m_{ND}^4}{4\alpha^2} p^4 \\
& + \frac{(\alpha-1)m_D^6 + (-4d-\alpha+7)m_D^4 m_{ND}^2 + (4d-\alpha-7)m_D^2 m_{ND}^4 + (\alpha+1)m_{ND}^6}{2\alpha} p^2 \\
& + (d-2)m_D^6 m_{ND}^2 + \frac{7-4d}{2} m_D^4 m_{ND}^4 + (d-2)m_D^2 m_{ND}^6 \Big] \chi(p^2, m_{ND}^2, m_D^2) \\
& + \frac{g^2}{p^2 m_D^2 m_{ND}^2} \left\{ \frac{p^8 + \alpha^2 m_{ND}^8}{4\alpha^2} \right\} \chi(p^2, m_{ND}^2, 0) \\
& + \frac{g^2}{p^2 m_D^2 m_{ND}^2} \left\{ \frac{p^8 + \alpha^2 m_D^8 + \alpha^4 m_{ND}^8}{4\alpha^2} + \frac{(1-\alpha)m_D^2}{2\alpha^2} p^6 \right. \\
& + \frac{(\alpha^2 - 4\alpha + 1)m_D^4 - 2\alpha(\alpha+3)m_D^2 m_{ND}^2 - 2\alpha^2 m_{ND}^4}{4\alpha^2} p^4 \\
& + \frac{(\alpha-1)m_D^6 + (\alpha^2 + 4\alpha - 1)m_D^4 m_{ND}^2 + (\alpha^2 + 3\alpha - 1)m_D^2 m_{ND}^4}{2\alpha} p^2 \\
& \left. \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 2}{4} m_D^6 m_{ND}^2 + \frac{\alpha-4}{4} m_D^4 m_{ND}^4 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} m_D^2 m_{ND}^6 \right\} \chi(p^2, \alpha m_{ND}^2, m_D^2) \\
& - g^2 \frac{(p^4 - m_{ND}^4)^2}{p^2 m_D^2, m_{ND}^2} \chi(p^2, \alpha m_{ND}^2, 0) - 2g^2 m^2 \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) - \frac{3}{2} g^2 m_C^2 \ln\left(\frac{m_C^2}{\mu^2}\right) \\
& - \frac{g^2}{p^2} \left\{ \frac{(1-2\alpha)}{4\alpha^2} p^4 + \frac{1-2\alpha}{4\alpha} p^2 m_D^2 + \frac{-(4d^2+d)+(3d^2-13d+6)\alpha}{2d\alpha} p^2 m_{ND}^2 \right. \\
& + \frac{1}{4} m_D^4 + \frac{4d-7}{4} m_D^2 m_{ND}^2 - \frac{4d-7}{4} m_{ND}^4 \Big\} \ln\left(\frac{m_{ND}^2}{\mu^2}\right) \\
& + \frac{g^2}{4p^2} \left\{ \frac{1-2\alpha}{\alpha} p^4 + (\alpha-2)p^2 m_D^2 \right. \\
& + \frac{d(-12\alpha^2+4\alpha-2)+12\alpha^2}{d} p^2 m_{ND}^2 \\
& \left. + \alpha m_D^4 + \alpha(\alpha-2)m_D^2 m_{ND}^2 + \alpha(\alpha-2)m_{ND}^4 \right\} \ln\left(\frac{\alpha m_{ND}^2}{\mu^2}\right) \tag{5.37}
\end{aligned}$$

e os fatores de renormalização são dados como

$$Z_{A_\mu^a A_\nu^b} = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2(d-1)} \left\{ 3d - \frac{9}{2} - \alpha \left(d - \frac{5}{2} \right) \right\} \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln(4\pi) + \gamma \right) \tag{5.38}$$

$$Z_{m_{ND}^2} = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2(d-1)} \left\{ \frac{4d^3 + (3\alpha^2 - \alpha - 19)d^2 - (6\alpha^2 + \alpha - 21)d - (1 - \alpha^2)3}{d} \right. \\ \left. (4d - 10)\frac{m^2}{m_{ND}^2} + 2(d-1)\frac{m_C^2}{m_{ND}^2} \right. \\ \left. \frac{4d^2 - 4(8 + \alpha)d + 7\alpha + 37}{4}\frac{m_D^2}{m_{ND}^2} \right\} \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln(4\pi) + \gamma \right) \quad (5.39)$$

Quando tratamos de calibre lineares covariantes é comum encontrar um situação projeitosa. O limite do parâmetro de calibre indo a zero é um ponto fixo sob a renormalização, de forma que, quando consideramos o limite *on-shell* podemos apenas esquecer da renormalização do parâmetro de calibre. Este não é o caso em calibres não lineares. No caso do MAG a renormalização do parâmetro de calibre é dado por

$$\alpha_b = \frac{Z_{A_\mu^a A_\nu^b}}{Z_\alpha} \alpha \quad (5.40)$$

conforme em (Gracey, 2005). Isolando termos multiplicativos para evidenciar a relação ordem a ordem

$$Z_{\alpha_0} \alpha_0 = 0 \quad (5.41)$$

é o limite a ser tomado para garantir a condição *on-shell*. O fator Z_α é evidente da parte longitudinal da auto-energia (5.37).

$$Z_\alpha = 1 - \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{3g^2}{2} + \frac{(d-1)g^2 + \frac{\beta^2}{4}}{\alpha} \right) \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln(4\pi) + \gamma \right) \quad (5.42)$$

A divergência aparente do fator de renormalização do parâmetro de calibre é o motivo da necessidade de um limite não trivial a ser tomado. Separando perturbativamente temos

$$\alpha_b = \frac{1}{16\pi^2} \left((d-1)g^2 + \frac{\beta^2}{4} \right) \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln(4\pi) + \gamma \right) \quad (5.43)$$

de maneira que, de posse desta forma do parâmetro de calibre não renormalizado é cabível tomar que o limite de potências negativas de α se dá como

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-n} = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_b} \alpha_b^{-n} \propto \epsilon^n \rightarrow 0 \quad (5.44)$$

desta forma o limite da condição de calibre se dá de maneira a retirar todas as potências não nulas de α da expressão da auto-energia. Desta forma o propagador ressomado a 1-loop é inteiramente transverso, o que é uma consequência inesperada dada a a condição de calibre do MAG. Desta forma devem ser impostas relações entre a função de 1-ponto $\langle A_\mu^a(x) \rangle$ e o operador composto $A_\mu^a(x)A_\mu(x)$ que pode estar associado à mistura das massas

do setor de calibre. Devido à natureza de cor do vértice cúbico de interação do setor de calibre é evidente que o modelo ser renormalizável implica que a função de 1-ponto é necessariamente nula a todas as ordens, de forma que não se faz necessário introduzir o operador composto $A_\mu^a(x)A_\mu(x)$ como uma fonte da mistura de massas.

5.4 Fantasma não-abeliano

Para o fantasma não abeliano há menos vértices, o que resulta nas seguintes da Fig. 12

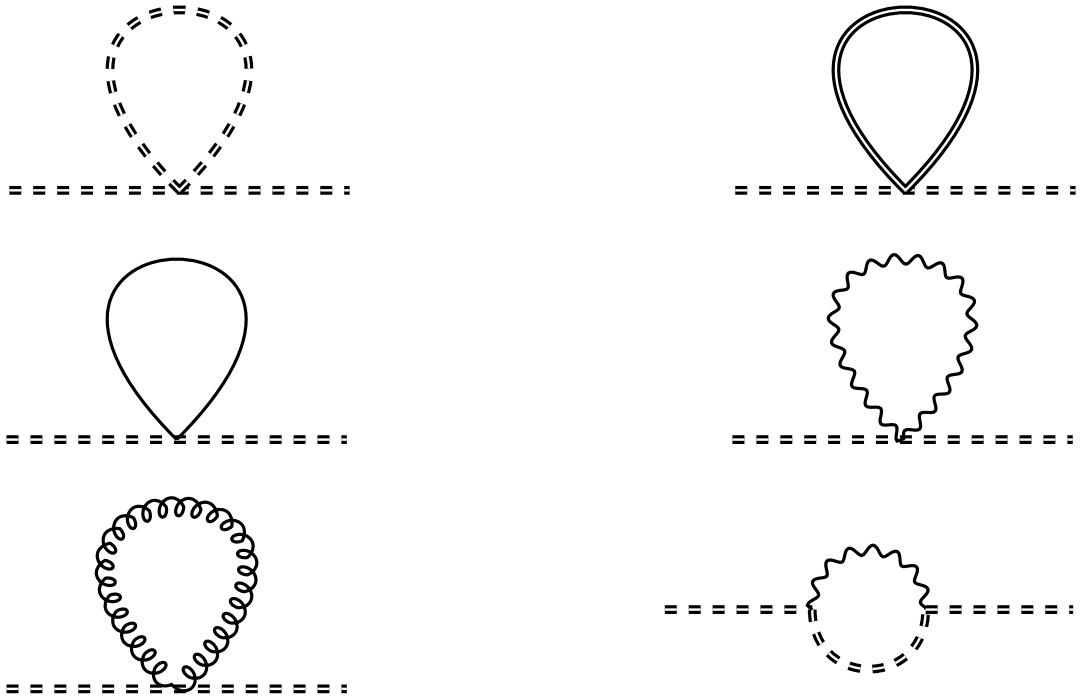


Figura 12: Contribuições não nulas a 1-loop para o campo de fantasma não-abeliano

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\bar{c}^a c^b} = & -g^2 \frac{(p^2 + m_C^2 - m_D^2)^2}{m_D^2} \chi(p^2, m_D^2, m_C^2) + g^2 \frac{(p^2 + m_C^2)}{m_D^2} \chi(p^2, m_C^2, 0) \\
 & - g^2(1 - \alpha)m_C^2 \ln\left(\frac{m_C^2}{\mu^2}\right) - (p^2 + m_C^2 + (2d - 3)m_D^2) \ln\left(\frac{m_D^2}{\mu^2}\right) \\
 & - 2g^2(d - 1)m_{ND}^2 \ln\left(\frac{m_{ND}^2}{\mu^2}\right) - 2g^2\alpha^2 m_{ND}^2 \ln\left(\frac{\alpha m_{ND}^2}{\mu^2}\right)
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

$$Z_{\bar{c}^a c^b} = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} 3 \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln(4\pi) + \gamma \right) \quad (5.46)$$

$$Z_{m_C^2} = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} \left(3 + \alpha + 2 \frac{1 - \alpha^2}{m_C^2} - 2(d-1) \frac{m_{ND}^2 + m_D^2}{m_C^2} \right) \quad (5.47)$$

Enquanto que o fantasma abeliano não apresenta diagramas divergentes.

5.5 Explorando o termo de massa escalar

Conforme vimos, a auto-energia dos campos escalares difere entre as componentes abeliana e não-abeliana. Assim, podemos encontrar se há quebra dinâmica de simetria a 1-loop tomando a diferença entre as massas efetivas no setor abeliano e não-abeliano. A massa efetiva a 1-loop pode ser encontrada perturbativamente pela relação

$$\bar{m}_{ab}^2 = -m^2 + \Pi_{\phi\phi} \Big|_{p^2=-m^2} \quad (5.48)$$

e analogamente para o campo não-abeliano. Dessa forma podemos definir a diferença de massa efetiva entre os campos escalares (*on shell*) como

$$\begin{aligned} \delta m^2 &= \bar{m}_{ab}^2 - \bar{m}_{nab}^2 - g^2(m_D^2 - 4m^2)\chi(-m^2, m^2, m_D^2) \\ &\quad + g^2(m_{ND}^2 - 4m^2)\chi(-m^2, m^2, m_{ND}^2) \\ &\quad - (2d-3)m_D^2 \log\left(\frac{m_D^2}{\mu^2}\right) \\ &\quad + (2d-3)m_{ND}^2 \log\left(\frac{m_{ND}^2}{\mu^2}\right) \end{aligned} \quad (5.49)$$

Usando a forma explícita para $\chi(p^2, m_1^2, m_2^2)$ disponível no anexo B para o caso particular obtido nesse contexto escrevemos que

$$\begin{aligned} &(x-4)\sqrt{x^2-4x} \ln\left(\frac{3x+2+\sqrt{x^2-4x}}{2}\right) + (2d-3)x \log(x) \\ &= (y-4)\sqrt{y^2-4y} \ln\left(\frac{3y+2+\sqrt{y^2-4y}}{2}\right) + (2d-3)y \log(y) \end{aligned} \quad (5.50)$$

tendo $x = m_D^2/m^2$ e $y = m_{ND}^2/m^2$. A solução trivial equivalente às massas iguais nos campos de calibre presente no modelo de Curci-Ferrari se apresenta novamente pela simetria da equação transcendental. No entanto, outras soluções para (5.50) podem existir

fora da igualdade de massas. Para explorar estas soluções não-triviais definimos

$$F(x) = (x - 4)\sqrt{x^2 - 4x} \ln\left(\frac{3x + 2 + \sqrt{x^2 - 4x}}{2}\right) + (2d - 3)x \log(x) \quad (5.51)$$

as soluções não triviais são dadas por duplas cartesianas (x,y) tal que $F(x) = F(y)$, $x \neq y$. Por inspeção gráfica sabemos que tais soluções existem contanto que pelo menos uma destas seja negativa. Na figura 13 observamos que para $x < -2.41639\dots$ não há pares

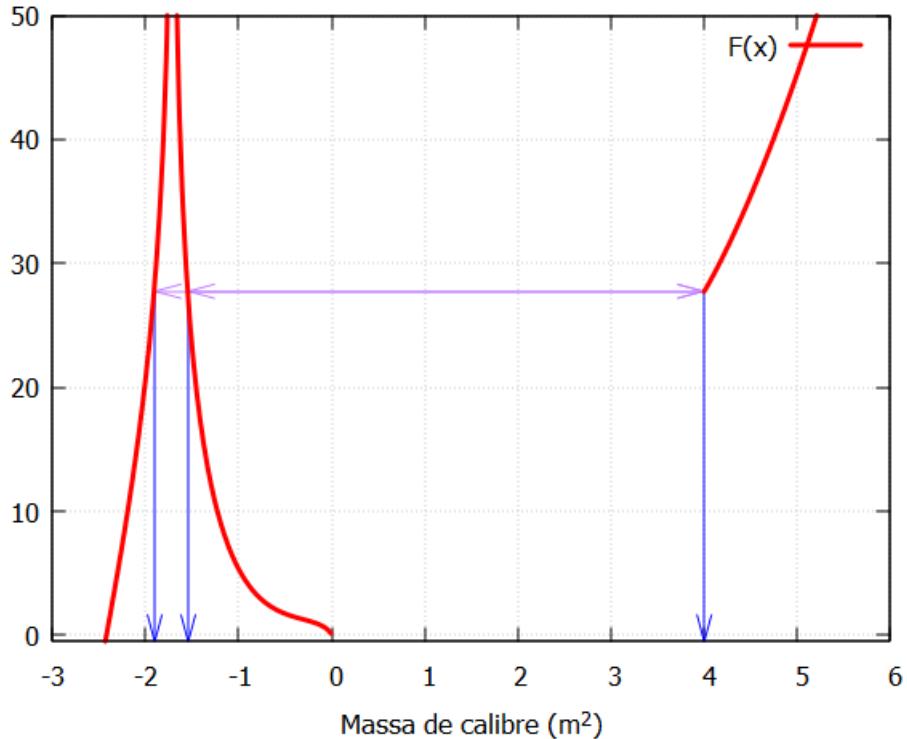


Figura 13: Gráfico de $F(x)$, em vermelho, evidenciando as três regiões com pares de soluções, projetadas para o eixo de massa em azul

de soluções, logo não há solução trivial nesse intervalo. Para $-2.41639\dots \leq x \leq 0$ existem pares negativos onde $F(x)$ assume valores que se tornam arbitrariamente próximos no polo aparente. Para $x > 4$ existem 3 pares de soluções, sendo uma equivalente à anterior e duas com uma massa positiva e outra negativa. As duas massas negativas na terceira região tendem ao mesmo valor quando $x \rightarrow \infty$, de forma que exista uma relação entre elas. Podemos perceber nessa região que, em módulo, existe uma hierarquia entre as massas nas soluções não triviais, de tal modo que estas soluções possam estar relacionadas com a dominância abeliana. No momento a análise descrita foi realizada por inspeção gráfica, que depende da representação numérica. Assim será necessária maior investigação para entender a natureza destas soluções com massa fora do modelo de Curci-Ferrari e obter uma relação explícita entre as massas do campo de calibre abeliano e não-abeliano.

6 Conclusões

A partir destes resultados, concluímos que o modelo escalar com simetria SU(2) adjunta acoplado ao campo de Yang-Mills com calibre fixado pelo MAG admitiu renormalização dentro dos parâmetros especificados, em concordância com o resultado obtido por renormalização algébrica em (Capri; Fiorentini; Sorella, 2015), não sendo quebrada pela inserção dos termos efetivos massivos.

Dentro deste modelo calculamos os propagadores a 1-loop explicitamente a partir dos diagramas de Feynman relevantes e explicitamos as constantes de renormalização de campo e de massa. Através da bifurcação da massa efetiva no setor escalar investigamos as condições necessárias para que as massas do setor de calibre não interferissem dinamicamente no termo de massa do setor escalar. Assim chegamos a uma equação transcendental simétrica entre as massas de calibre, cujas soluções descreveram um vínculo entre as massas do campo de calibre abeliano e não-abeliano. Dentro do setor de calibre também observamos a manutenção da separação de massas entre os campos diagonais e não-diagonais, admitindo contribuições necessariamente distintas, de forma que os resultados básicos para análise da dinâmica de renormalização da teoria pelo o grupo de renormalização foram explicitamente citadas.

Essa assimetria no setor de calibre corrobora com qualitativamente com a conjectura de dominância abeliana. Porém, dentro deste modelo efetivo, é cabível afirmar apenas que o caso extremo $m_D^2 = 0$ é inconsistente, devido as contribuições do campo escalar e do campo de calibre não-abeliano para renormalização da massa de calibre.

A renormalização explícita do parâmetro de calibre se mostrou um passo muito importante para entender a transversalidade do propagador do campo de calibre a 1-loop, visto que a condição de calibre do MAG não é suficiente para fixar esta propriedade. De posse deste resultado é possível construir relações entre funções de correlação que podem se mostrar úteis na análise de operadores compostos invariantes de calibre, como aqueles descritos em (Peruzzo, 2022). Desta forma novos parâmetros de calibre podem ser

incluídos de forma a generalizar convergência.

Os resultados aqui apresentados representam boa parte do caminho para o cálculo das dimensões anômalas dos parâmetros do modelo a 1-loop. Sendo necessário agora a investigação das funções de correlação de 3 e 4 pontos, os vértices efetivos. Desta forma este trabalho representa um passo inicial, porém indispensável para uma maior compreensão deste modelo. Ademais, sendo o MAG um dos poucos calibres fixáveis na rede por um método de relaxação, é possível construir simulações de Monte-Carlo na rede como uma segunda forma de computar os propagadores dos campos. Desta maneira os valores das massas efetivas poderiam, em princípio ser fixadas por ajuste dos dados da rede.

REFERÊNCIAS

AGUILAR, A. C.; BINOSI, D.; PAPAVASSILIOU, J. Gluon and ghost propagators in the Landau gauge: Deriving lattice results from Schwinger-Dyson equations. **Physical Review D**, v. 78, n. 2, p. 025010, jul. 2008. Publisher: American Physical Society. DOI: [10.1103/PhysRevD.78.025010](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.78.025010). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.025010>. Acesso em: 15 jun. 2025.

AGUILAR, A. C.; PAPAVASSILIOU, J. Power law running of the effective gluon mass. en. **The European Physical Journal A**, v. 35, n. 2, p. 189–205, fev. 2008. ISSN 1434-601X. DOI: [10.1140/epja/i2008-10535-4](https://doi.org/10.1140/epja/i2008-10535-4). Disponível em: <https://doi.org/10.1140/epja/i2008-10535-4>. Acesso em: 15 jun. 2025.

AGUILAR, Arlene Cristina; NATALE, Adriano Antonio. A dynamical gluon mass solution in a coupled system of the Schwinger-Dyson equations. en. **Journal of High Energy Physics**, v. 2004, n. 08, p. 057, set. 2004. ISSN 1126-6708. DOI: [10.1088/1126-6708/2004/08/057](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2004/08/057). Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2004/08/057>. Acesso em: 15 jun. 2025.

ALKOFER, Reinhard; SMEKAL, Lorenz von. The infrared behaviour of QCD Green's functions: Confinement, dynamical symmetry breaking, and hadrons as relativistic bound states. **Physics Reports**, v. 353, n. 5, p. 281–465, nov. 2001. ISSN 0370-1573. DOI: [10.1016/S0370-1573\(01\)00010-2](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(01)00010-2). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157301000102>. Acesso em: 14 jul. 2025.

BAAL, Pierre van. More (thoughts on) Gribov copies. **Nuclear Physics B**, v. 369, n. 1, p. 259–275, jan. 1992. ISSN 0550-3213. DOI: [10.1016/0550-3213\(92\)90386-P](https://doi.org/10.1016/0550-3213(92)90386-P). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139290386P>. Acesso em: 9 jul. 2025.

BECCHI, C; ROUET, A; STORA, R. Renormalization of gauge theories. **Annals of Physics**, v. 98, n. 2, p. 287–321, jun. 1976. ISSN 0003-4916. DOI: [10.1016/0003-4916\(76\)90156-1](https://doi.org/10.1016/0003-4916(76)90156-1). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491676901561>. Acesso em: 9 jul. 2025.

BECCHI, C.; ROUET, A.; STORA, R. Renormalization of the abelian Higgs-Kibble model. en. **Communications in Mathematical Physics**, v. 42, n. 2, p. 127–162, jun. 1975. ISSN 1432-0916. DOI: [10.1007/BF01614158](https://doi.org/10.1007/BF01614158). Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01614158>. Acesso em: 9 jul. 2025.

BLOCH, J. C. R. Two-Loop Improved Truncation of the Ghost-Gluon Dyson-Schwinger Equations: Multiplicatively Renormalizable Propagators and Nonperturbative Running Coupling. en. **Few-Body Systems**, v. 33, n. 2, p. 111–152, out. 2003. ISSN 1432-5411. DOI: [10.1007/s00601-003-0013-3](https://doi.org/10.1007/s00601-003-0013-3). Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00601-003-0013-3>. Acesso em: 9 jul. 2025.

BORN, M.; OPPENHEIMER, R. Zur Quantentheorie der Moleküle. en. **Annalen der Physik**, v. 389, n. 20, p. 457–484, 1927. _eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/andp.19273892002>. ISSN 1521-3889. DOI: [10.1002/andp.19273892002](https://doi.org/10.1002/andp.19273892002). Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19273892002>. Acesso em: 21 jul. 2025.

BOUCAUD, Ph *et al.* On the IR behaviour of the Landau-gauge ghost propagator. en. **Journal of High Energy Physics**, v. 2008, n. 06, p. 099, jun. 2008. ISSN 1126-6708. DOI: [10.1088/1126-6708/2008/06/099](https://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2008/06/099). Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2008/06/099>. Acesso em: 15 jun. 2025.

BOUCAUD, Philippe *et al.* Is the QCD ghost dressing function finite at zero momentum ? en. **Journal of High Energy Physics**, v. 2006, n. 06, p. 001, jun. 2006. ISSN 1126-6708. DOI: [10.1088/1126-6708/2006/06/001](https://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2006/06/001). Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2006/06/001>. Acesso em: 15 jun. 2025.

CAO, Jian *et al.* X(2370) glueball-like particle production in $\bar{q}q$ collisions at the BESIII energy and in pp collisions at the LHC energy with the PACIAE model. **Physical Review D**, v. 110, n. 5, p. 054046, set. 2024. Publisher: American Physical Society. DOI: [10.1103/PhysRevD.110.054046](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.110.054046). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.110.054046>. Acesso em: 21 ago. 2025.

CAPRI, M. A. L.; DUDAL, D. *et al.* A local and BRST-invariant Yang-Mills theory within the Gribov horizon. **Physical Review D**, v. 94, n. 2, p. 025035, jul. 2016. arXiv:1605.02610 [hep-th]. ISSN 2470-0010, 2470-0029. DOI: [10.1103/PhysRevD.94.025035](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.025035). Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1605.02610>. Acesso em: 10 mai. 2025.

CAPRI, M. A. L.; FIORENTINI, D.; GUIMARAES, M. S. *et al.* Local and renormalizable framework for the gauge-invariant operator $\langle A \rangle - \langle \text{min} \rangle^2$ in Euclidean Yang-Mills theories in linear covariant gauges. **Physical Review D**, v. 94, n. 6, p. 065009, set. 2016. Publisher: American

Physical Society. DOI: [10.1103/PhysRevD.94.065009](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.065009). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.065009>. Acesso em: 24 jul. 2025.

CAPRI, M. A. L.; FIORENTINI, D.; SORELLA, S. P. Yang-Mills theory in the maximal Abelian gauge in presence of scalar matter fields. **Phys. Rev. D**, v. 91, n. 12, p. 125004, 2015. _eprint: 1502.00562. DOI: [10.1103/PhysRevD.91.125004](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.125004).

CAPRI, M. A. L.; LEMES, V. E. R. *et al.* Study of the maximal Abelian gauge in $\$SU(2)\$$ Euclidean Yang-Mills theory in the presence of the Gribov horizon. **Physical Review D**, v. 74, n. 10, p. 105007, nov. 2006. Publisher: American Physical Society. DOI: [10.1103/PhysRevD.74.105007](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.74.105007). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.74.105007>. Acesso em: 21 jul. 2025.

CAPRI, Marcio André Lopes. **Aspectos não perturbativos das teorias de Yang-Mills no calibre abeliano maximal**. Jan. 2009. Tese (Doutorado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Accepted: 2021-01-06T21:02:40Z Publisher: Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Disponível em: <https://www.bdtd.uerj.br:8443/handle/1/12859>. Acesso em: 12 ago. 2024.

COMITINI, Giorgio *et al.* Dynamically massive linear covariant gauges: Setup and first results. **Physical Review D**, v. 109, n. 1, p. 014037, jan. 2024. Publisher: American Physical Society. DOI: [10.1103/PhysRevD.109.014037](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.109.014037). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.109.014037>. Acesso em: 24 jul. 2025.

CUCCHIERI, A. *et al.* Modeling the gluon propagator in Landau gauge: Lattice estimates of pole masses and dimension-two condensates. **Physical Review D**, v. 85, n. 9, p. 094513, mai. 2012. Publisher: American Physical Society. DOI: [10.1103/PhysRevD.85.094513](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.094513). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.094513>. Acesso em: 5 jul. 2025.

CURCI, G.; FERRARI, R. On a class of Lagrangian models for massive and massless Yang-mills fields. en. **Il Nuovo Cimento A**, v. 32, n. 2, p. 151–168, mar. 1976. ISSN 0369-3546, 1826-9869. DOI: [10.1007/BF02729999](https://doi.org/10.1007/BF02729999). Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/BF02729999>. Acesso em: 17 jun. 2025.

DELL'ANTONIO, Gianfausto; ZWANZIGER, Daniel. Every gauge orbit passes inside the Gribov horizon. en. **Communications in Mathematical Physics**, v. 138, n. 2, p. 291–299, mai. 1991. ISSN 1432-0916. DOI: [10.1007/BF02099494](https://doi.org/10.1007/BF02099494). Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF02099494>. Acesso em: 9 jul. 2025.

DUDAL, D.; OLIVEIRA, O.; VANDERSICKEL, N. Indirect lattice evidence for the refined Gribov-Zwanziger formalism and the gluon condensate $\langle\{A\}^2\rangle$ in the Landau gauge. **Physical Review D**, v. 81, n. 7, p. 074505, abr. 2010. Publisher: American Physical Society. DOI: [10.1103/PhysRevD.81.074505](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.074505). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.074505>. Acesso em: 5 jul. 2025.

- DUDAL, David; OLIVEIRA, Orlando; SILVA, Paulo J. High precision statistical Landau gauge lattice gluon propagator computation vs. the Gribov–Zwanziger approach. **Annals of Physics**, v. 397, p. 351–364, out. 2018. ISSN 0003-4916. DOI: [10.1016/j.aop.2018.08.019](https://doi.org/10.1016/j.aop.2018.08.019). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491618302318>. Acesso em: 5 jul. 2025.
- DYSON, F. J. The $\$S\$$ Matrix in Quantum Electrodynamics. **Physical Review**, v. 75, n. 11, p. 1736–1755, jun. 1949. Publisher: American Physical Society. DOI: [10.1103/PhysRev.75.1736](https://doi.org/10.1103/PhysRev.75.1736). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.75.1736>. Acesso em: 14 jul. 2025.
- EZAWA, Z. F.; IWAZAKI, A. Abelian dominance and quark confinement in Yang-Mills theories. **Physical Review D**, v. 25, n. 10, p. 2681–2689, mai. 1982. Publisher: American Physical Society. DOI: [10.1103/PhysRevD.25.2681](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.25.2681). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.25.2681>. Acesso em: 9 jul. 2025.
- FADDEEV, L. D.; POPOV, V. N. Feynman diagrams for the Yang-Mills field. **Physics Letters B**, v. 25, n. 1, p. 29–30, 1967. ISSN 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(67\)90067-6](https://doi.org/10.1016/0370-2693(67)90067-6). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269367900676>.
- FECKO, Marián. **Differential geometry and Lie groups for physicists**. Cambridge, UK New York: Cambridge university press, 2006. ISBN 978-0-521-18796-1.
- FEYNMAN, Richard Phillips; HIBBS, Albert R.; STYER, Daniel F. **Quantum mechanics and path integrals**. Emended ed. Mineola: Dover publ, 2010. (Dover books on physics). ISBN 978-0-486-47722-0.
- FISCHER, Christian S.; MAAS, Axel; PAWLOWSKI, Jan M. On the infrared behavior of Landau gauge Yang–Mills theory. **Annals of Physics**, v. 324, n. 11, p. 2408–2437, nov. 2009. ISSN 0003-4916. DOI: [10.1016/j.aop.2009.07.009](https://doi.org/10.1016/j.aop.2009.07.009). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491609001468>. Acesso em: 14 jul. 2025.
- FISCHER, Christian S.; PAWLOWSKI, Jan M. Uniqueness of infrared asymptotics in Landau gauge Yang–Mills theory. **Physical Review D**, v. 75, n. 2, p. 025012, jan. 2007. Publisher: American Physical Society. DOI: [10.1103/PhysRevD.75.025012](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.75.025012). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.75.025012>. Acesso em: 15 jun. 2025.
- GRACEY, John A. Three loop M-S- renormalization of QCD in the maximal abelian gauge. en. **Journal of High Energy Physics**, v. 2005, n. 04, p. 012, abr. 2005. ISSN 1126-6708. DOI: [10.1088/1126-6708/2005/04/012](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2005/04/012). Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2005/04/012>. Acesso em: 13 jun. 2025.

GREENSITE, Jeff. **An Introduction to the Confinement Problem**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011. v. 821. (Lecture Notes in Physics). ISBN 978-3-642-14381-6 978-3-642-14382-3. DOI: [10.1007/978-3-642-14382-3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-14382-3). Disponível em: <https://link.springer.com/10.1007/978-3-642-14382-3>. Acesso em: 10 ago. 2024.

GRIBOV, V. N. Quantization of non-Abelian gauge theories. **Nuclear Physics B**, v. 139, n. 1, p. 1–19, jun. 1978. ISSN 0550-3213. DOI: [10.1016/0550-3213\(78\)90175-X](https://doi.org/10.1016/0550-3213(78)90175-X). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032137890175X>. Acesso em: 9 jul. 2025.

HIOKI, S. *et al.* Abelian dominance in SU (2) color confinement. **Physics Letters B**, v. 272, n. 3, p. 326–332, 1991. ISSN 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(91\)91838-M](https://doi.org/10.1016/0370-2693(91)91838-M). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026939191838M>.

HUBER, Markus Q.; SMEKAL, Lorenz von. On the influence of three-point functions on the propagators of Landau gauge Yang-Mills theory. en. **Journal of High Energy Physics**, v. 2013, n. 4, p. 149, abr. 2013. ISSN 1029-8479. DOI: [10.1007/JHEP04\(2013\)149](https://doi.org/10.1007/JHEP04(2013)149). Disponível em: [https://doi.org/10.1007/JHEP04\(2013\)149](https://doi.org/10.1007/JHEP04(2013)149). Acesso em: 15 jun. 2025.

KUIPERS, J. *et al.* FORM version 4.0. **Computer Physics Communications**, v. 184, n. 5, p. 1453–1467, mai. 2013. ISSN 0010-4655. DOI: [10.1016/j.cpc.2012.12.028](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2012.12.028). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465513000052>. Acesso em: 7 ago. 2025.

LEPAGE, G. Peter. **Lattice QCD for Novices**. [S. l.]: arXiv, jun. 2005. arXiv:hep-lat/0506036. DOI: [10.48550/arXiv.hep-lat/0506036](https://arxiv.org/abs/hep-lat/0506036). Disponível em: [http://arxiv.org/abs/hep-lat/0506036](https://arxiv.org/abs/hep-lat/0506036). Acesso em: 9 jul. 2025.

MANDELSTAM, S. Approximation scheme for quantum chromodynamics. **Physical Review D**, v. 20, n. 12, p. 3223–3238, dez. 1979. Publisher: American Physical Society. DOI: [10.1103/PhysRevD.20.3223](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.20.3223). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.20.3223>. Acesso em: 9 jul. 2025.

OECKL, Robert. **Discrete gauge theory: from lattices to TQFT**. London: Imperial College Press, 2005. ISBN 978-1-86094-579-3.

PELÁEZ, Marcela. **Infrared correlation functions in Quantum Chromodynamics**. Jul. 2015. Tese (Doutorado) – Université Pierre et Marie Curie - Paris VI ; Universidad de la República (Montevideo). Disponível em: <https://theses.hal.science/tel-01298242>. Acesso em: 27 jun. 2025.

PELÁEZ, Marcela *et al.* A window on infrared QCD with small expansion parameters. en. **Reports on Progress in Physics**, v. 84, n. 12, p. 124202, dez. 2021. Publisher: IOP Publishing. ISSN 0034-4885. DOI: [10.1088/1361-6633/ac36b8](https://doi.org/10.1088/1361-6633/ac36b8). Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/ac36b8>. Acesso em: 27 jun. 2025.

PEREIRA, Antonio Duarte. **Exploring new horizons of the Gribov problem in Yang-Mills theories**. Mai. 2016. Tese de Doutorado – Universidade Federal Fluminense, Niterói, RJ. Disponível em: https://sucupira-legado.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=3623423. Acesso em: 22 mai. 2025.

PERUZZO, Giovani. **Operadores compostos invariantes de BRST nos modelos de Higgs U(1) e SU(2)**. Jun. 2022. Tese (Doutorado) – UERJ. Accepted: 2022-10-11T15:53:52Z Publisher: Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Disponível em: <https://www.bdtd.uerj.br:8443/handle/1/18504>. Acesso em: 14 nov. 2024.

PESKIN, Michael Edward; SCHROEDER, Daniel V. **An introduction to quantum field theory**. Reading, Mass: Addison-Wesley Pub. Co, 1995. ISBN 978-0-201-50397-5.

PIGUET, Olivier; SORELLA, Silvio Paolo. **Algebraic Renormalization**. Berlin, Heidelberg: Springer, 1995. (Lecture Notes in Physics Monographs). ISSN: 0940-7677. ISBN 978-3-540-59115-3 978-3-540-49192-7. DOI: [10.1007/978-3-540-49192-7](https://doi.org/10.1007/978-3-540-49192-7). Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-540-49192-7>. Acesso em: 21 jul. 2025.

POKORSKI, Stefan. **Gauge Field Theories**. [S. l.]: Cambridge University Press, mar. 2000. Google-Books-ID: v_CVnHFf0SwC. ISBN 978-0-521-47816-8.

RIVERS, R. J. **Path Integral Methods in Quantum Field Theory**. [S. l.]: Cambridge University Press, out. 1988. ISBN 978-0-521-36870-4.

RODRÍGUEZ-QUINTERO, J. On the massive gluon propagator, the PT-BFM scheme and the low-momentum behaviour of decoupling and scaling DSE solutions. en. **Journal of High Energy Physics**, v. 2011, n. 1, p. 105, jan. 2011. ISSN 1029-8479. DOI: [10.1007/JHEP01\(2011\)105](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2011)105). Disponível em: [https://doi.org/10.1007/JHEP01\(2011\)105](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2011)105). Acesso em: 15 jun. 2025.

RUEGG, Henri; RUIZ-ALTABA, Marti. The Stueckelberg Field. **International Journal of Modern Physics A**, v. 19, n. 20, p. 3265–3347, ago. 2004. arXiv:hep-th/0304245. ISSN 0217-751X, 1793-656X. DOI: [10.1142/S0217751X04019755](https://doi.org/10.1142/S0217751X04019755). Disponível em: <http://arxiv.org/abs/hep-th/0304245>. Acesso em: 17 jul. 2025.

SCHWINGER, Julian. On the Green's functions of quantized fields. II. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 37, n. 7, p. 455–459, jul. 1951. Publisher: Proceedings of the National Academy of Sciences. DOI: [10.1073/pnas.37.7.455](https://doi.org/10.1073/pnas.37.7.455). Disponível em: <https://www.pnas.org/doi/full/10.1073/pnas.37.7.455>. Acesso em: 14 jul. 2025.

SINGER, I. M. Some remarks on the Gribov ambiguity. en. **Communications in Mathematical Physics**, v. 60, n. 1, p. 7–12, fev. 1978. ISSN 1432-0916. DOI: [10.1007/BF01609471](https://doi.org/10.1007/BF01609471). Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01609471>. Acesso em: 8 jul. 2025.

SMEKAL, Lorenz von; HAUCK, Andreas; ALKOFER, Reinhard. Infrared Behavior of Gluon and Ghost Propagators in Landau Gauge QCD. **Physical Review Letters**, v. 79, n. 19, p. 3591–3594, nov. 1997. Publisher: American Physical Society. DOI: [10.1103/PhysRevLett.79.3591](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.79.3591). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.79.3591>. Acesso em: 14 jul. 2025.

STUECKELBERG, E. C. G. Die Wechselwirkungs Kräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte. Teil I, abr. 1938. Medium: text/html,application/pdf,text/html Publisher: Birkhäuser. DOI: [10.5169/SEALS-110852](https://doi.org/10.5169/SEALS-110852). Disponível em: <https://www.e-periodica.ch/digbib/view?pid=hpa-001:1938:11::636>. Acesso em: 17 jul. 2025.

SUZUKI, Tsuneo; YOTSUYANAGI, Ichiro. Possible evidence for Abelian dominance in quark confinement. **Physical Review D**, v. 42, n. 12, p. 4257–4260, dez. 1990. Publisher: American Physical Society. DOI: [10.1103/PhysRevD.42.4257](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.42.4257). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.42.4257>. Acesso em: 9 jul. 2025.

TYUTIN, I. V. **Gauge Invariance in Field Theory and Statistical Physics in Operator Formalism**. [S. l.]: arXiv, dez. 2008. arXiv:0812.0580 [hep-th]. DOI: [10.48550/arXiv.0812.0580](https://arxiv.org/abs/0812.0580). Disponível em: <http://arxiv.org/abs/0812.0580>. Acesso em: 9 jul. 2025.

VANDERSICKEL, N.; ZWANZIGER, Daniel. The Gribov problem and QCD dynamics. **Physics Reports**, v. 520, n. 4, p. 175–251, nov. 2012. ISSN 0370-1573. DOI: [10.1016/j.physrep.2012.07.003](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2012.07.003). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157312002074>. Acesso em: 9 jul. 2025.

VANDERSICKEL, Nele. **A study of the Gribov-Zwanziger framework: from propagators to glueballs**. 2011. dissertation – Ghent University. Disponível em: <http://hdl.handle.net/1854/LU-1191171>. Acesso em: 9 jul. 2025.

WEINBERG, Steven. **The Quantum Theory of Fields: Volume 2, Modern Applications.** [S. l.]: Cambridge University Press, ago. 1996. Google-Books-ID: J2EhAwAAQBAJ. ISBN 978-1-139-64325-2.

YANG, C. N.; MILLS, R. L. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. **Physical Review**, v. 96, n. 1, p. 191–195, out. 1954. Publisher: American Physical Society. DOI: [10.1103/PhysRev.96.191](https://doi.org/10.1103/PhysRev.96.191). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.96.191>. Acesso em: 5 jul. 2025.

APÊNDICE A - Regras de Feynman

Os fatores de vértice a serem usados nas regras de Feynman são definidos da maneira usual

$$V[\Phi_i \dots \Phi_j] = -\frac{\delta^n}{\delta \Phi_i(x_1) \dots \delta \Phi_j(x_n)} S_{\text{int}} \Big|_{\Phi_i \dots = 0} \quad (\text{A.1})$$

Aplicando esta regra obtemos os seguintes fatores de vértice não-nulos

$$\begin{aligned} V[A_\mu^a(p_1)A_\nu^b(p_2)A_\xi(p_3)] &= -ig\epsilon^{ab} [(p_1 - p_2)_\xi \delta_{\mu\nu} \\ &\quad - (p_1 + p_2/\alpha - p_3)_\nu \delta_{\mu\xi} + (p_2 + p_1/\alpha - p_3)_\mu \delta_{\nu\xi}] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$V[A_\mu^a(p_1)A_\nu^b(p_2)A_\xi^c(p_3)A_\eta^d(p_4)] = -g^2 (\delta_{\mu\nu} \delta_{\xi\eta} (\epsilon^{ad} \epsilon^{bc} + \epsilon^{ac} \epsilon^{bd})) \quad (\text{A.3})$$

$$+ \delta_{\mu\xi} \delta_{\nu\eta} (\epsilon^{ad} \epsilon^{bc} - \epsilon^{ab} \epsilon^{cd}) - \delta_{\mu\eta} \delta_{\nu\xi} (\epsilon^{ac} \epsilon^{bd} + \epsilon^{ab} \epsilon^{cd})) \quad (\text{A.4})$$

$$V[A_\mu^a(p_1)A_\nu^b(p_2)A_\xi(p_3)A_\eta(p_4)] = -g^2 (2\delta_{\mu\nu} d_{\xi\eta} - (1 - 1/\alpha)(\delta_{\mu\xi} \delta_{\nu\eta} + \delta_{\mu\eta} \delta_{\nu\xi})) \quad (\text{A.5})$$

$$V[\phi^a(p_1)\phi^b(p_2)A_\mu(p_3)] = -ig\epsilon^{ab}(p_1 - p_2)_\mu \quad (\text{A.6})$$

$$V[\phi^a(p_1)\phi(p_2)A_\mu^b(p_3)] = i\epsilon^{ab} \left(gp_1 - gp_2 + \frac{\beta}{2\alpha} p_3 \right)_\mu \quad (\text{A.7})$$

$$V[\phi^a(p_1)\phi^b(p_2)A_\mu^c(p_3)A_\nu^d(p_4)] = -g^2 \delta_{\mu\nu} (\epsilon^{ad} \epsilon^{bc} + \epsilon^{ac} \epsilon^{bd}) \quad (\text{A.8})$$

$$V[\phi^a(p_1)\phi(p_2)A_\mu^b(p_3)A_\nu(p_4)] = \delta_{\mu\nu} \delta^{ab} \left(g^2 - \frac{\beta g}{2\alpha} \right) \quad (\text{A.9})$$

$$V[\phi^a(p_1)\phi^b(p_2)A_\mu(p_3)A_\nu(p_4)] = -2g^2 \delta_{\mu\nu} \delta^{ab} \quad (\text{A.10})$$

$$V[\phi(p_1)\phi(p_2)A_\mu^a(p_3)A_\nu^b(p_4)] = -2g^2 \delta^{ab} \delta_{\mu\nu} \quad (\text{A.11})$$

$$V[\phi^a(p_1)\phi^b(p_2)\phi(p_3)\phi(p_4)] = -\delta^{ab} \left(\frac{\lambda}{3} + \frac{\beta^2}{2\alpha} \right) \quad (\text{A.12})$$

$$V[\phi^a(p_1)\phi^b(p_2)\phi^c(p_3)\phi^d(p_4)] = -\frac{\lambda}{3} (\delta^{ab} \delta^{cd} + \delta^{ac} \delta^{bd} + \delta^{ad} \delta^{bc}) \quad (\text{A.13})$$

$$V[\phi(p_1)\phi(p_2)\phi(p_3)\phi(p_4)] = -\lambda \quad (\text{A.14})$$

$$V[\bar{c}^a(p_1)c^b(p_2)A_\mu(p_3)] = -ig\epsilon^{ab}(p_1 - p_2) \quad (\text{A.15})$$

$$V[\bar{c}^a(p_1)c(p_2)A_\mu^b(p_3)] = -ig\epsilon^{ab}p_{3\mu}/2 \quad (\text{A.16})$$

$$V[\bar{c}(p_1)c^a(p_2)A_\mu^b(p_3)] = -ig\epsilon^{ab}p_{1\mu} \quad (\text{A.17})$$

$$V[\bar{c}^a\bar{c}^b c^c c^d] = \alpha g^2(\delta^{ac}\delta^{bd} - \delta^{ad}\delta^{bc}) \quad (\text{A.18})$$

$$V[\bar{c}^a c^b \phi^c \phi^d] = -\frac{\beta g}{2}(2\delta^{ab}\delta^{cd} - \delta^{ac}\delta^{bd} - \delta^{ad}\delta^{bc}) \quad (\text{A.19})$$

$$V[\bar{c}^a c^b \phi \phi] = g\beta\delta^{ab} \quad (\text{A.20})$$

Estas regras foram aplicadas na geração dos diagramas que foram utilizados nos cálculos perturbativos. A convenção de transformada de Fourier utilizada para dependência explícita no momento é dada por

$$f(p) = \int d^4x e^{-ip \cdot x} f(x) \quad (\text{A.21})$$

com a transformada inversa como

$$f(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} f(p) \quad (\text{A.22})$$

APÊNDICE B - Integrais mestras e expansão assintótica

Dentre as integrais geradas pelos diagramas, após a aplicação da redução de Veltman-Passarino e da simplificação dos termos, restam apenas duas *Integrais mestras*, que devem ser resolvidas explicitamente. Estas são

$$\chi^a(m^2) = \mu^\epsilon \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + m^2)^a}, \quad (\text{B.1})$$

e

$$\chi(p^2, m_1^2, m_2^2) = \mu^\epsilon \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + m_1^2} \frac{1}{(p - k)^2 + m_2^2}, \quad (\text{B.2})$$

sendo o caso de particular interesse quando $a = 1$. A primeira destas pode ser resolvida facilmente usando integração em coordenadas hiper-esféricas.

$$\chi^a(m^2) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \mu^\epsilon \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^d} \frac{k^{d-1}}{(k^2 + m^2)^a} \quad (\text{B.3})$$

$$= \frac{\mu^\epsilon}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} (m^2)^{d/2-a} \int_0^\infty \frac{t^{d/2-1}}{(t+1)^a} \quad (\text{B.4})$$

$$= \frac{\mu^\epsilon}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} (m^2)^{d/2-a} \frac{\Gamma(d/2) \Gamma(a-d/2)}{\Gamma(a)} \quad (\text{B.5})$$

$$= \frac{\mu^\epsilon}{(4\pi)^{d/2}} (m^2)^a (m^2)^{-\epsilon/2} \Gamma(\epsilon/2 + a - 2) \quad (\text{B.6})$$

Para $a = 1$ a parte divergente se apresenta no polo de $\Gamma(\epsilon/2)$, assim, partindo da expansão assintótica da função gamma,

$$\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (\text{B.7})$$

e a expansão

$$(m^2)^{-\epsilon/2} = 1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(m^2) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (\text{B.8})$$

Obtemos a seguinte expressão

$$\chi^1(m^2) = -\frac{1}{16\pi^2} \left(-\ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) \right). \quad (\text{B.9})$$

No esquema \overline{MS} escolhemos remover além do polo em ϵ os termos envolvendo $\ln(4\pi)$ e γ . Assim obtemos uma expressão devidamente finita.

Para integral $\chi(p^2, m_1^2, m_2^2)$ utilizamos a parametrização de Feynman.

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dt}{[(1-t)A + tB]^2} \quad (\text{B.10})$$

Desta forma podemos escrever a integral como

$$\chi(p^2, m_1^2, m_2^2) = \mu^\epsilon \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)(k^2 + m_1^2) + t((p-k)^2 + m_2^2)} \quad (\text{B.11})$$

$$= \mu^\epsilon \int_0^1 dt \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(k+tp)^2 + t(1-t)p^2 + (1-t)m_1^2 + tm_2^2]^2}. \quad (\text{B.12})$$

depois de um deslocamento no espaço de momento, encontramos no integrando em t uma forma compatível com $\chi^2(t(1-t)p^2 + (1-t)m_1^2 + tm_2^2)$. Expandindo adequadamente no polo obtemos

$$\chi(p^2, m_1^2, m_2^2) = \frac{1}{16\pi^2} \left[- \int_0^1 \ln \left(\frac{t(1-t)p^2 + (1-t)m_1^2 + tm_2^2}{\mu^2} \right) dt + \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) \right], \quad (\text{B.13})$$

cuja renormalização no esquema \overline{MS} é imediata. A solução explícita da integral em toda sua generalidade é muito trabalhosa, mas o resultado pode ser encontrado em (Peruzzo, 2022) como

$$\begin{aligned} \chi_{ren}(p^2, m_1^2, m_2^2) &= \frac{1}{2p^2} \left\{ m_1^2 \ln \frac{m_2^2}{m_1^2} + m_2^2 \ln \frac{m_1^2}{m_2^2} + p^2 \ln \frac{m_1^2 m_2^2}{\mu^4} - 4p^2 \right. \\ &\quad \left. - 4\sqrt{-p^4 - m_1^4 - m_2^4 + 2m_1^2 m_2^2 - 2(m_1^2 + m_2^2)p^2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\times \tan^{-1} \left[\frac{m_2^2 - m_1^2 - p^2}{\sqrt{-m_1^4 + 2m_1^2(m_2^2 - p^2) - (m_2^2 + p^2)^2}} \right] \quad (\text{B.15})$$

No entanto, é possível encontrar expressões mais simples para o único caso particular que nos fora de interesse. Para um valor particular

$$\begin{aligned} \chi_{ren}(-m^2, m^2, am^2) &= \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) + \frac{\sqrt{a^2 - 4a}}{2} \left[\ln \left(\frac{|\sqrt{a^2 - 4a} - a + 2|}{|\sqrt{a^2 - 4a} + a - 2|} \right) \right. \\ &\quad \left. - \ln \left(\frac{|\sqrt{a^2 - 4a} - a|}{|\sqrt{a^2 - 4a} + a|} \right) \right] - a \ln(|a|) + 2 \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

que pode ser simplificado, resultando na expressão encontrada no capítulo 5.