

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
MESTRADO EM FÍSICA

Oscilações de objetos compactos: Um estudo
dos Modos Quasi-Normais de Estrelas de
Nêutrons e Buracos Negros

Isabella Ramos de Souza Nunes

Niterói-RJ

2023

ISABELLA RAMOS DE SOUZA NUNES

OSCILAÇÕES DE OBJETOS COMPACTOS: UM ESTUDO DOS MODOS QUASI-NORMAIS DE
ESTRELAS DE NÊUTRONS E BURACOS NEGROS

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Programa de Pós-Graduação em Física
da Universidade Federal Fluminense,
como parte dos requisitos necessários
para a obtenção do Título de Mestre em
Física

Orientador(a): Prof.^a Dr.^a RAISSA FERNANDES PESSOA MENDES

Niterói-RJ

2023

Ficha catalográfica automática - SDC/BIF
Gerada com informações fornecidas pelo autor

N972o Nunes, Isabella Ramos de Souza
Oscilações de objetos compactos : Um estudo dos Modos Quasi-Normais de Estrelas de Nêutrons e Buracos Negros / Isabella Ramos de Souza Nunes. - 2023.
86 p.: il.

Orientador: Raissa Fernandes Pessoa Mendes.
Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense, Instituto de Física, Niterói, 2023.

1. Relatividade. 2. Modos Quasi-normais. 3. Estrelas de Nêutrons. 4. Buracos Negros. 5. Produção intelectual. I. Mendes, Raissa Fernandes Pessoa, orientadora. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Física. III. Título.

CDD - XXX

ISABELLA RAMOS DE SOUZA NUNES

Oscilações de objetos compactos: Um estudo dos Modos Quasi-Normais de Estrelas de Nêutrons e Buracos Negros

Dissertação submetida ao curso de pós-graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Física.

Aprovado em 13 de setembro de 2023

BANCA AVALIADORA

Membros titulares



Profa. Dra. Raissa Fernandes Pessoa Mendes
(Orientadora)
UFF



Profa. Dra. Leila Lobato Graef
UFF



Prof. Dr. Santiago Esteban Perez Bergliaffa
UERJ

Agradecimentos

Eu gostaria de começar agradecendo aos meus pais, Cleuza e Manuel, por investirem na minha educação, me possibilitando o acesso a ótimas instituições de ensino, e por me permitirem forçar quase exclusivamente nos meus estudos. Todo apoio, incentivo e amor que recebo deles representam a base fundamental da minha formação pessoal e acadêmica.

Agradeço imensamente à Profa. Dra. Raissa Mendes, que, se dividindo entre os papéis de professora, pesquisadora e mãe, se mostrou sempre dedicada à minha orientação e enriquecimento acadêmico. Eu sou uma pessoa extremamente grata por você ter aceitado me orientar. Você é um exemplo tanto de pessoa quanto de pesquisadora e eu agradeço imensamente pela sua contribuição na minha carreira.

Gostaria de agradecer ao meu namorado Ian por sempre me apoiar, me fazer acreditar no meu potencial e por ter sido compreensivo e acolhedor nos diversos momentos em que precisei me ausentar em função dos estudos do projeto que compõe essa dissertação.

Agradeço aos meus amigos André, Brenda e Karolayne que, como físicos, ajudaram a tornar o ambiente da faculdade e a trajetória pelo mestrado um caminho muito mais agradável. Eu tenho orgulho demais de vocês e agradeço por todos os momentos em que me apoiaram também.

Por último, agradeço o suporte financeiro da CAPES e da FAPERJ.

Sumário

Agradecimentos	iii
Resumo	vi
Abstract	vii
1 Introdução	1
2 Soluções de Equilíbrio para Estrelas e Buracos Negros	5
2.1 Métrica do espaço-tempo esfericamente simétrico e estático	5
2.2 Buracos Negros: Solução de Vácuo	6
2.3 Estrelas de Nêutrons	8
2.3.1 Fluido Perfeito	8
2.3.2 Equações de TOV	9
2.3.3 Equação de Estado	11
2.3.4 Calculando as Propriedades de uma Estrela de Nêutrons	13
3 Perturbações	18
3.1 Perturbações Gravitacionais	18
3.2 Separação em Harmônicos Esféricos	19
3.3 Calibre de Regge-Wheeler	23
3.4 Perturbações Axiais	25
3.4.1 Equações de Movimento Axiais	25
3.4.2 Perturbações Axiais no Vácuo	27
3.5 Perturbações Polares	28
3.5.1 Equações de Movimento Polares	28
3.5.2 Formas Alternativas das Equações Para Perturbações Polares	32
3.5.3 Perturbações Polares no Vácuo	36
3.5.4 Relação Entre Equações Axiais e Polares	37
4 Modos Quasi-Normais de Buracos Negros	39
4.1 Definição dos Modos Quasi-Normais	39
4.2 Domínio Temporal	41

4.2.1	Determinando as Frequências: Transformada Discreta de Fourier	44
4.2.2	Determinando as Frequências: Método de Ajuste	46
4.3	Domínio das Frequências	46
4.3.1	Determinando as Frequências: Fração Continuada	48
4.4	Primeira Detecção de Ondas Gravitacionais: GW150914	50
5	Modos Quasi-Normais de Estrelas de Nêutrons	52
5.1	Análise de Modos	52
5.2	Domínio das frequências	53
5.2.1	Expansão em Torno da Origem	54
5.2.2	Integração Dentro da Estrela de Nêutrons	54
5.2.3	Solução Externa: Relação de Recorrência	56
5.2.4	Determinando as Frequências: Fração Continuada	58
5.3	Domínio Temporal	60
5.3.1	Condições Iniciais	61
5.3.2	Evolução Temporal	63
5.3.3	Determinando as Frequências: Transformada Discreta de Fourier	66
5.3.4	Determinando as Frequências: Método de Fit	67
5.4	Resultados para Diferentes Equações de Estado	68
6	Conclusão e perspectivas	70
	Referências Bibliográficas	73

Resumo

Nas últimas décadas, o estudo das perturbações em estrelas e buracos negros tem ganhado destaque na astrofísica relativística. Isso se deve à capacidade dessas perturbações de gerar ondas gravitacionais, que podem fornecer informações valiosas sobre a fonte que as emitiu. Neste trabalho, exploramos a teoria dos modos quasi-normais de objetos compactos, como estrelas de nêutrons e buracos negros, que realizam oscilações não radiais, utilizando a teoria de perturbação. Por meio de modelos numéricos, calculamos esses modos quasi-normais, adotando abordagens tanto no domínio temporal quanto no domínio das frequências. Essas abordagens nos permitem investigar as propriedades desses modos e compreender melhor a dinâmica e a estrutura desses objetos astrofísicos. Ao combinar a teoria de perturbação com técnicas numéricas, ampliamos nosso conhecimento sobre os modos quasi-normais e avançamos em direção à compreensão mais profunda desses fenômenos complexos.

Palavras-chave: modos quasi-normais; estrela de nêutron; buraco negro.

Abstract

In recent decades, the study of perturbations on stars and black holes has acquired prominence in relativistic astrophysics. This is due to the ability of these perturbations to generate gravitational waves, which can provide valuable information about the source that emitted them. In this work, we explore the theory of quasi-normal modes of compact objects that exhibit non-radial oscillations, such as neutron stars and black holes, using perturbation theory. Through numerical models, we calculate these quasi-normal modes, employing approaches in both the time and frequency domains. These approaches allow us to investigate the properties of these modes and gain a better understanding of the dynamics and structure of these astrophysical objects. By combining perturbation theory with numerical techniques, we expand our knowledge of quasi-normal modes and make progress towards a deeper comprehension of these complex phenomena.

Keywords: quasi-normal modes; neutron star; black hole.

Capítulo 1

Introdução

Objetos compactos se diferenciam de estrelas comuns por sua grande concentração de massa em um tamanho extremamente pequeno. Em relação a estrelas comuns de massa comparável, eles possuem raios muito menores e, portanto, campos gravitacionais de superfície muito mais fortes. A diferença entre essas duas classes de objetos pode ser analisada através da sua compacidade, definida como $C = GM/(Rc^2)$, onde M e R são quantidades físicas que caracterizam o corpo, massa e raio típicos respectivamente, G é a constante gravitacional e c é a velocidade da luz no vácuo [1]. A compacidade é um parâmetro importante para indicar a intensidade de correções relativísticas. De fato, quando $GM/(Rc^2) \ll 1$ o problema físico ainda pode ser tratado com a mecânica newtoniana. Caso contrário, estamos no regime de campos gravitacionais fortes e a Relatividade Geral se torna necessária.

Para um buraco negro sem rotação, $C_{\text{BN}} = 0.5$, se tomamos como raio típico aquele do seu horizonte de eventos, superfície tipo-luz que separa o espaço-tempo em duas regiões distintas: a exterior e a interior, sendo que nenhuma informação consegue ser transmitida da interna à externa [2]. Já as estrelas de nêutrons são caracterizadas por uma massa de aproximadamente $1-3M_{\odot}$ (com M_{\odot} denotando a massa do Sol) e raios típicos de 10 km. Assim, sua densidade média é da ordem de $\bar{\rho} \sim 10^{15} \text{ g/cm}^3$, ao passo que o Sol tem uma densidade média de $\bar{\rho}_{\odot} = 1.4 \text{ g/cm}^3$. Por outro lado, a compacidade de estrelas de nêutrons é da mesma ordem daquela de buracos negros, $C_{\text{EN}} \approx 0.2 - 0.3$. Ao contrário de estrelas como o Sol, que se sustentam através de pressão de origem térmica, estrelas de nêutrons não queimam significativamente combustível nuclear. Em vez disso, estrelas de nêutrons são sustentadas por uma combinação da pressão de degenerescência dos nêutrons¹ e a pressões originadas das interações nucleares [3, 4]. Já os buracos negros são estrelas completamente colapsadas – isto é, estrelas que não conseguiram encontrar nenhum meio de contrapor a atração gravitacional e, portanto, colapsaram em singularidades.

Objetos compactos perturbados são uma fonte promissora de ondas gravitacionais observáveis por detectores atuais, como LIGO [5, 6, 7], Virgo [8] e Kagra [9], e de terceira geração, como Einstein Telescope [10] e Cosmic Explorer [11]. A observação das frequências e tempos de decaimento característicos de seus

¹Cada célula de volume h^3 no espaço de fase pode comportar apenas 2 férmions de *spins* opostos, de modo que em um volume d^3k no espaço de momentos a densidade de número é $dn = 2d^3k/h^3$. Quanto maior a densidade de número, maior o momento característico e maior a pressão associada.

modos de oscilação pode ser utilizada para inferir propriedades físicas desses corpos, realizar testes da Relatividade Geral, e melhorar nossa compreensão de fenômenos que os envolvem.

Parece intuitivo imaginar que estrelas de nêutrons possam oscilar em frequências características. Estas oscilações são sustentadas pelo fluido que compõe a estrela. No entanto, um buraco negro não possui nenhum material que possa sustentar tais oscilações. Veremos que essas oscilações envolvem essencialmente a métrica do espaço-tempo fora do horizonte de eventos. Isso ilustra o fato de que, na teoria da Relatividade Geral, o espaço-tempo não é apenas o palco onde os processos físicos ocorrem. É, em si, uma entidade dinâmica. De fato, tanto para estrelas quanto para buracos negros, informações sobre suas oscilações são transportadas na forma de ondas gravitacionais.

Existem diferenças importantes entre um sistema que oscila em um conjunto de modos normais e as oscilações características de objetos compactos. Oscilações não radiais de objetos compactos não são verdadeiramente estacionárias, mas decaem exponencialmente no tempo. Isto está relacionado ao fato de que o sistema emite ondas gravitacionais, que retiram energia da fonte. Assim, sua dependência temporal é $\propto \exp(i\omega t)$, com $\omega \in \mathbb{C}$, com a parte real da frequência representando a frequência de oscilação e a parte imaginária, seu tempo de decaimento. Tais modos são chamados de *modos quasi-normais* (MQN) [12, 13, 14].

Em uma análise de modos normais, geralmente se tem uma equação diferencial ordinária, ou um sistema de tais equações, e impõem-se condições de contorno de modo que a perturbação esteja restrita a uma região finita do espaço. Um sistema que exemplifica esse caso é uma corda finita com extremidades fixas e isolada do restante do ambiente. Esse sistema é descrito por um conjunto completo de modos normais. Por outro lado, perturbações em objetos compactos são bastante diferentes: o sistema que temos é a métrica fora do horizonte de eventos no caso de um buraco negro, ou a métrica e as quantidades que caracterizam a matéria para estrelas de nêutrons. Nesse caso, as perturbações se propagam por todo o espaço e não podemos exigir que elas sejam nulas fora de uma região finita. No caso de modos quasi-normais, a condição de contorno apropriada é que não haja radiação gravitacional entrando no sistema vindas do infinito tipo-luz passado, ou seja, que a radiação seja puramente *direcionada para fora*. Para buracos negros, impõe-se ainda que não haja radiação emanando do horizonte de eventos, ao passo que, para as estrelas de nêutrons, condições de regularidade no centro e condições de compatibilidade na superfície substituem a condição de contorno no horizonte.

A forma natural de estudar oscilações de estrelas de nêutrons e buracos negros é considerando as equações de Einstein linearizadas. O trabalho pioneiro nessa área de teoria de perturbações tinha como foco principal os buracos negros e foi realizado por Regge e Wheeler [15] em 1957 para, então, continuar, entre outros, com Zerilli [16] em 1970. No entanto, Regge e Wheeler concentraram-se apenas em investigar a estabilidade de buracos negros diante de pequenas perturbações, sem buscar uma conexão dessas perturbações com a astrofísica. As frequências quasi-normais foram computadas em 1970 por Vishveshwara [17] em cálculos de espalhamento de ondas gravitacionais por um buraco negro de Schwarzschild. Na década de 1960, Kip Thorne e seus colaboradores realizaram os primeiros estudos das perturbações de estrelas relativísticas na Relatividade Geral [18, 19]. Esses trabalhos tinham como objetivo expandir as propriedades conhecidas da teoria de oscilações newtonianas para a Relatividade

Geral e, ao mesmo tempo, estimar as frequências e a energia emitida em forma de ondas gravitacionais para as estrelas relativísticas.

Nas décadas seguintes, novas técnicas foram desenvolvidas e consolidadas para o estudo desses modos — ver [13, 14, 20] para artigos de revisão sobre o tema. Mas foi apenas em 2015 que a primeira detecção de ondas gravitacionais, o evento GW150914, foi realizada pelos detectores do LIGO [6]. A análise deste evento permitiu a primeira estimativa da frequência do modo fundamental quadrupolar de um buraco negro de Kerr, de acordo com a previsão da teoria da Relatividade Geral [21]. Com os avanços na tecnologia dos detectores de ondas gravitacionais, ondas gravitacionais de eventos astrofísicos continuam sendo observadas [22, 23, 24, 25], incluindo fusões de estrelas de nêutrons e colisões de buracos negros. Detectores de terceira geração, como o Einstein Telescope e o Cosmic Explorer, devem possuir uma sensibilidade maior no regime de altas frequências, possibilitando também a observação de pulsações de estrelas de nêutrons. O futuro da pesquisa em modos quasi-normais é promissor e repleto de perspectivas observacionais que permitem expandir nosso conhecimento sobre suas fontes.

Esta dissertação tem como objetivo principal realizar um estudo da teoria de perturbação de objetos compactos e desenvolver códigos numéricos que nos permitam inferir a frequência dos modos quasi-normais de buracos negros e estrelas de nêutrons. Para isso, seguiremos duas abordagens: a primeira no domínio temporal, que visa realizar a evolução temporal das equações que descrevem as perturbações, e a segunda no domínio das frequências, em que, através de um *ansatz* da forma $\exp(i\omega t)$ para a dependência temporal, transforma-se o problema em um problema de autovalores. Esse processo será feito alinhando a teoria de perturbação com técnicas numéricas.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: o Capítulo 2 visa estabelecer as soluções de equilíbrio que regem as duas classes de objetos compactos estudadas aqui. Serão apresentadas as equações que descrevem o equilíbrio estático e esfericamente simétrico desses corpos e calcularemos as propriedades macroscópicas de equilíbrio de estrelas de nêutrons. O Capítulo 3 se destina ao estudo de teoria de perturbação, que fornecerá as equações que descrevem as oscilações no fluido estelar e no espaço-tempo. No Capítulo 4, definimos os modos quasi-normais de buracos negros e encontramos suas frequências características por meio da implementação de métodos numéricos para a resolução da equação de Regge-Wheeler. Já no Capítulo 5 serão abordadas as técnicas necessárias para extração das frequências dos modos quasi-normais de estrelas de nêutrons. O Capítulo 6 contém as conclusões e perspectivas de trabalho futuro.

Este projeto possibilitou a criação de diversos códigos em Python e Mathematica que possibilitam o estudo dos modos quasi-normais de objetos compactos. Os códigos desenvolvidos podem ser encontrados no repositório do GitHub [26]. Eles são divididos da seguinte forma:

- Notebooks do *Wolfram Mathematica*: Desenvolvimento analítico.
 - *Axial_perturbations.nb* [27] e *Polar_perturbations.nb* [28]: Destinados ao estudo das equações que descrevem perturbações em buracos negros e estrelas de nêutrons.
 - *MQNSofBN.nb* [29] e *MQNSofEN.nb* [30]: Cálculo de coeficientes e equações necessárias para a extração de MQNs no domínio temporal.

- Notebooks e arquivos do *Python*: Desenvolvimento numérico.
 - *BN_DomFreq.ipynb* [31], *BN_DomTemp.ipynb* [32]: Códigos responsáveis pelo cálculo da extração dos MQNs de buracos negros no domínio temporal e domínio das frequências.
 - *EN_DomFreq.ipynb* [33] e *EN_DomTemp.ipynb* [34]: Códigos responsáveis pelo cálculo da extração dos MQNs de estrelas de nêutrons no domínio temporal e domínio das frequências.
 - *Eq_timeD.py* [36] e *Eq_freqD.py* [37]: Definição do lado direito das equações diferenciais de perturbação e funções necessárias para a integração no domínio temporal e no domínio das frequências, respectivamente.
 - *ContFrac_EN.py* [35]: Definição de função responsável pela resolução da fração continuada para uma estrela de nêutrons;
 - *EOS.py* [38]: Definição das equações de estado e parâmetros correspondentes responsáveis por caracterizar uma estrela;
 - *rhs_freqD2.py* [39]: Responsável pela integração das equações de movimento no domínio das frequências.
 - *background.py* [40]: Define as funções de fundo, através da integração numérica das equações de TOV;
 - *RK.py* [41]: Definições dos métodos de Runge-Kutta de terceira e quarta ordem;
 - *constants.py* [42]: Constantes utilizadas ao longo dos cálculos.

Capítulo 2

Soluções de Equilíbrio para Estrelas e Buracos Negros

O estudo de objetos compactos começa pela análise das suas propriedades físicas na configuração de equilíbrio. Inicialmente estudamos o caso esfericamente simétrico e sem rotação para, nos capítulos seguintes, analisar estes objetos sujeitos a perturbações físicas. Note que, neste e nos próximos capítulos, serão usadas “unidades naturais”, em que $G = c = 1$, a menos que se aponte o contrário.

2.1 Métrica do espaço-tempo esfericamente simétrico e estático

A métrica é um campo tensorial de ordem 2 que adiciona estrutura ao conjunto de eventos que constitui o espaço-tempo, a variedade. Sua noção tem grande aplicação no ramo da Relatividade, uma vez que a partir dela é possível descrever a geometria do espaço-tempo.

Na Relatividade Geral, o intervalo entre dois eventos próximos é obtido através de um elemento de linha que depende justamente das componentes $g_{\mu\nu}$ da métrica:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.1)$$

onde $\{x^\mu\}$ representam as coordenadas do espaço-tempo, com $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$, sendo 0 o índice da coordenada temporal e $\{1, 2, 3\}$ os índices das coordenadas espaciais. A convenção de soma de Einstein está implícita em (2.1).

Um corpo que possui uma distribuição estática e esfericamente simétrica, resultado de uma configuração mais simples (sem rotação) do equilíbrio gravitacional, pode ser descrito por coordenadas esféricas r , θ e ϕ , e por uma coordenada t que captura a simetria temporal. Estamos interessados em descrever a métrica de um espaço-tempo com essas simetrias. Para isso, vamos entender primeiramente seu significado e suas implicações para a métrica [43]:

- **Estaticidade:** Um espaço-tempo estático é aquele em que é possível encontrar uma coordenada temporal t tal que (i) as componentes da métrica não dependam de t (condição para que seja

estacionário) e (ii) a geometria seja invariante por reflexão temporal: $t \rightarrow -t$. A condição (ii) tem como consequência o fato de que qualquer elemento g_{0i} é identicamente nulo.

- **Simetria esférica:** Um espaço-tempo esfericamente simétrico é aquele que tem todas as simetrias de uma esfera, sendo invariante por rotações arbitrárias. Nele, todo ponto está sobre uma superfície que tem a métrica de uma esfera, ou seja, cujo elemento de linha é proporcional ao elemento de ângulo sólido $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$.

Portanto, um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico pode ser descrito pelo seguinte elemento de linha [2, 43]

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.2)$$

onde ν e λ são funções da coordenada radial a serem determinadas.

2.2 Buracos Negros: Solução de Vácuo

Nesta seção, vamos determinar a geometria de um buraco negro, como dada pela métrica de Schwarzschild. A hipótese que impomos para encontrá-la é que o tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$, um tensor de ordem 2 que depende das componentes da métrica e traz informações físicas sobre os campos de matéria, é zero.

Na teoria da Relatividade Geral, Einstein descreveu, com uma equação que hoje leva o seu nome, como a presença de massa-energia afeta a curvatura do espaço-tempo e, por sua vez, como a curvatura do espaço-tempo afeta o movimento dos corpos que o povoam. A, então, equação de campo de Einstein tem a forma

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \implies G_{\mu\nu} = 0, \quad (2.3)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein e a implicação vem em decorrência da hipótese de o tensor de energia-momento ser igual a zero. O tensor de Einstein é definido como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad (2.4)$$

O termo $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\lambda}^\lambda, \quad (2.5)$$

e a sua contração com a métrica inversa gera o escalar de Ricci, ou seja

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\mu_\mu. \quad (2.6)$$

Esses dois tensores resultam da contração de um tensor mais fundamental que descreve a curvatura do espaço-tempo e leva o nome de tensor de Riemann, $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$. Na expressão (2.5), $\Gamma^\nu_{\rho\mu}$ são os símbolos de Christoffel, um importante objeto na Relatividade Geral, que está relacionado às derivadas covariantes,

uma generalização da derivada usual que permite estender o cálculo diferencial para coordenadas curvilíneas ou para variedades com curvatura. Sua definição é dada em termos das derivadas da métrica, de forma que

$$\Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(\partial_{\lambda}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\sigma\lambda} - \partial_{\sigma}g_{\lambda\nu}). \quad (2.7)$$

Calculando o tensor de Einstein correspondente à métrica na forma (2.2), encontramos que apenas as componentes diagonais são diferentes de zero. Por esse motivo, das 16 equações descritas por (2.3) apenas 4 são não triviais. Além disso, $G^2_2 = G^3_3$, de forma que restam apenas 3 componentes independentes das equações de Einstein. O resultado é simplificado quando calculamos o tensor de Einstein com índices mistos, que é obtido da contração do tensor com a métrica inversa, ou seja:

$$g^{\mu\lambda}G_{\lambda\nu} = G^{\mu}_{\nu}. \quad (2.8)$$

As componentes não nulas do tensor de Einstein com índices mistos são

$$G^0_0 = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}; \quad (2.9a)$$

$$G^1_1 = e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2}; \quad (2.9b)$$

$$G^2_2 = G^3_3 = e^{-\lambda} \left[-\frac{(\lambda' - \nu')(2 + r\nu')}{4r} + \frac{\nu''}{2} \right]. \quad (2.9c)$$

onde “ ’ ” é a representação de uma derivada com relação à coordenada r .

A equação $G^0_0 = 0$ pode ser reescrita na forma

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-\lambda})] = 0, \quad (2.10)$$

da qual segue imediatamente que a solução para e^{λ} é

$$r(1 - e^{-\lambda}) = \text{cte} =: R_G \quad \implies \quad e^{\lambda} = \left(1 - \frac{R_G}{r} \right)^{-1}, \quad (2.11)$$

De forma análoga, a equação $G^1_1 = 0$ pode ser reescrita na forma

$$\frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{r} e^{\lambda}(1 - e^{-\lambda}) = 0 \quad \implies \quad e^{\nu} = 1 - \frac{R_G}{r}, \quad (2.12)$$

onde impusemos a condição de contorno que $g_{00} \rightarrow 1$ quando $r \rightarrow \infty$.

A última tarefa consiste em interpretar a constante R_G em termos dos parâmetros físicos relevantes. O potencial newtoniano é derivado do comportamento assintótico da componente g_{00} quando $r \rightarrow \infty$, onde temos $g_{00} \rightarrow -(1 + 2\Phi)$. Dado que o campo gravitacional associado a uma distribuição esférica de matéria é $\Phi = -M/r$, podemos identificar R_G , tal que, em unidades naturais, $R_G = 2M$. Esse é o conhecido raio de Schwarzschild.

Portanto, o elemento de linha que descreve um espaço-tempo esfericamente simétrico, estático,

de vácuo e assintoticamente plano é dado pela métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.13)$$

Além de descrever a solução mais simples para um buraco negro, essa métrica também descreve a geometria externa a qualquer corpo estático e esfericamente simétrico.

2.3 Estrelas de Nêutrons

Tendo obtido o elemento de linha que descreve a parte externa ($r \geq R$, onde R é o raio da estrela) do espaço-tempo de uma estrela, dado por (2.13), o próximo passo é entender a solução interna.

2.3.1 Fluido Perfeito

Apesar de não fornecer uma descrição exata, o material dentro das estrelas pode ser idealizado como um fluido perfeito com grande grau de precisão. De fato, fenômenos como tensão de cisalhamento e transporte de energia podem ser negligenciados numa escala de tempo hidrodinâmica¹ [2]. Um fluido perfeito, em conformidade com as hipóteses de equilíbrio estático, deve ser inteiramente descrito por funções que não dependem de t . De fato, esse fluido é descrito por um tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$, que depende da quadri-velocidade dos elementos de fluido e das seguintes funções termodinâmicas:

- $\epsilon = \epsilon(r)$ = densidade de energia no referencial de repouso do elemento de fluido;
- $p = p(r)$ = pressão isotrópica no referencial de repouso do elemento de fluido;
- $n = n(r)$ = densidade de número de partículas no referencial de repouso do elemento de fluido.

O tensor de energia-momento de um fluido perfeito é dado por [2]

$$T^{\mu\nu} = (p + \epsilon)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

onde u^μ é a quadri-velocidade dos elementos de fluido:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (2.15)$$

A parametrização se dá pelo tempo próprio τ , coordenada temporal do referencial de repouso do elemento fluido. A estaticidade do modelo de equilíbrio requer que cada elemento permaneça em repouso com respeito à coordenada t , que está associada com a isometria temporal da métrica. Consequentemente, $u^i = 0$. A componente temporal pode ser encontrada usando a métrica (2.2) e a condição de normalização da quadri-velocidade. De fato,

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = g_{00}u^0 u^0 = -e^\nu u^0 u^0 = -1, \quad (2.16)$$

¹Essa escala é definida em termos das propriedades do fluido, como a densidade, e é usada para descrever a evolução temporal dos fenômenos hidrodinâmicos.

que determina $u^0 = -e^{-\nu/2}$. Portanto, a quadri-velocidade de um elemento de fluido estático é

$$u^\mu = \{e^{-\nu/2}, 0, 0, 0\}. \quad (2.17)$$

O divergente do tensor de energia-momento é zero:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.18)$$

Em outras palavras, o tensor de energia-momento obedece a uma lei de conservação que se traduz em um conjunto equações que descrevem a conservação da energia e do momento do sistema. Explicitamente,

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\rho\mu}^\nu T^{\rho\mu} + \Gamma_{\rho\mu}^\mu T^{\nu\rho} = 0. \quad (2.19)$$

Tendo a quadri-velocidade, Eq. (2.17), e as componentes da métrica (2.2), podemos calcular as componentes do tensor de energia-momento. Usando índices mistos, as componentes não nulas de T^μ_ν são

$$T^0_0 = -\epsilon; \quad (2.20a)$$

$$T^1_1 = T^2_2 = T^3_3 = p. \quad (2.20b)$$

Podemos ainda definir uma corrente de número de partículas, $N^\mu = nu^\mu$, cuja lei de conservação,

$$\nabla_\mu N^\mu = 0, \quad (2.21)$$

está ligada à conservação do número de partículas. Na situação de equilíbrio estático em consideração, essa equação é trivialmente satisfeita, mas será relevante quando considerarmos perturbações no fluido da estrela.

2.3.2 Equações de TOV

Das equações de campo de Einstein podemos encontrar as equações que descrevem uma estrela esfericamente simétrica em equilíbrio estático. Essas equações foram encontradas primeiramente por Tolman [44], Oppenheimer e Volkoff [45], e por esse motivo as equações que vamos determinar a seguir levam o nome de equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV).

Desta vez, as equações de campo de Einstein são dadas por $G^\mu_\nu = 8\pi T^\mu_\nu$ e dependem do tensor de energia-momento do fluido perfeito, sendo reescritas da seguinte forma:

$$G^0_0 = 8\pi T^0_0 \implies e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi\epsilon, \quad (2.22a)$$

$$G^1_1 = 8\pi T^1_1 \implies e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi p, \quad (2.22b)$$

$$G^2_2 = 8\pi T^2_2 \implies e^{-\lambda} \left[-\frac{(\lambda' - \nu')(2 + r\nu')}{4r} + \frac{\nu''}{2} \right] = 8\pi p, \quad (2.22c)$$

onde as componentes do tensor de energia-momento são dadas pelas equações (2.20).

Análogo ao que foi feito na seção anterior, a componente 00 pode ser reescrita como

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-\lambda})] = 8\pi\epsilon, \quad (2.23)$$

de forma que, definindo uma função auxiliar $m(r)$ a partir de $e^{\lambda(r)}$ da forma

$$e^{\lambda(r)} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}, \quad (2.24)$$

ou seja,

$$m(r) = \frac{r}{2}(1 - e^{-\lambda(r)}), \quad (2.25)$$

encontramos que

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon \quad (2.26)$$

é a equação que determina a função aspecto de massa em termos da posição r .

Em seguida, consideramos a componente 11. Substituindo a expressão (2.24), temos que

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{2(4\pi p r^3 + m)}{r(r - 2m)}. \quad (2.27)$$

Por fim, a equação que determina a pressão é obtida através da componente 22, Eq. (2.22c). Se substituirmos nossos resultados, Eqs. (2.24), (2.26) e (2.27), nessa componente, aparentemente vamos obter uma equação para dp/dr . No entanto, a álgebra necessária para isso pode ser simplificada se usarmos a Eq. (2.18). Em especial, a componente $\nabla_\mu T_1^\mu = 0$ gera a equação

$$\frac{d\nu}{dr} = -\frac{2}{(p + \epsilon)} \frac{dp}{dr}. \quad (2.28)$$

Substituindo (2.27) temos:

$$\frac{dp}{dr} = -(p + \epsilon) \frac{(4\pi p r^3 + m)}{r(r - 2m)}. \quad (2.29)$$

Recuperando a constante gravitacional G e a velocidade da luz c , temos que, no limite newtoniano, em que $p(r)r^3/c^2 \ll m(r)$, $\epsilon(r) \approx \rho(r)c^2$ (com ρ a densidade de massa) e $Gm(r)/c^2 \ll r$, as equações (2.26), (2.27) e (2.29) se reduzem a

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad \frac{d\nu}{dr} = \frac{2m}{r^2}, \quad \frac{dp}{dr} = -\frac{G\rho m}{r^2}, \quad (2.30)$$

que são as equações Newtonianas de equilíbrio hidrostático, sendo o potencial Newtoniano dado por $\Phi = 2\nu$.

As equações (2.26), (2.27) e (2.29) são as famosas equações de TOV. Sua integração fornece dados sobre a pressão, massa, campo gravitacional e densidade de energia presentes no interior da estrela. No entanto, não podemos contar apenas com as equações de TOV para determinar a estrutura de uma estrela sem dispor, também, de informações sobre a sua composição. É necessário, portanto, uma relação entre

as grandezas termodinâmicas p e ϵ . A essa relação damos o nome de equação de estado, a qual será tratada mais detalhadamente a seguir.

2.3.3 Equação de Estado

Note que temos três equações, (2.26), (2.27) e (2.29) para quatro incógnitas: p , ϵ , ν e m . A informação adicional necessária para que as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff determinem completamente a estrutura da estrela é a equação de estado. A microfísica, descrita pela equação de estado, está relacionada às propriedades macroscópicas da estrela de nêutrons por meio das equações de TOV.

O interior de uma estrela de nêutrons pode ser subdividido em duas regiões principais: crosta e núcleo. A camada mais externa, que corresponde à crosta, é menos densa com $10^{11}\text{g/cm}^3 \lesssim \rho \lesssim 10^{14}\text{g/cm}^3$, enquanto o núcleo tem densidade da ordem de $10^{14}\text{g/cm}^3 \lesssim \rho \lesssim 10^{15}\text{g/cm}^3$ [46].

Na crosta, quando a densidade ainda é da ordem de $\rho \approx 10^{11}\text{g/cm}^3$ é esperado que o comportamento do núcleo atômico seja o mesmo daquele observado em laboratório. Além disso, para densidades até $\rho \approx 10^{13}\text{g/cm}^3$, efeitos térmicos podem ser relevantes. Agora, quando $\rho \gtrsim 10^{13}\text{g/cm}^3$, os efeitos térmicos deixam de ser relevantes, de forma que a pressão passa a depender somente da densidade de energia. Isso significa que a temperatura é pequena comparada com a energia interna do gás degenerado e a equação de estado depende apenas de um parâmetro. Portanto, para um fluido simples em equilíbrio termodinâmico local, assumimos que existe uma relação da forma

$$p = p(\epsilon), \quad (2.31)$$

que fornece a pressão, p , em termos da densidade de energia, ϵ . Essa relação tem formas funcionais diferentes para diferentes modelos microscópicos para estrelas de nêutrons. A figura 2.1(a) ilustra as previsões de quatro equações de estado nucleares: APR [47], MPA1 [48], MS1 [49] e WFF1 [50]. As equações de estado APR e WFF1 são obtidas a partir de métodos variacionais [47, 50], a MPA1 utiliza o método de Brueckner-Hartree-Fock relativístico [48] e a MS1 vem de uma abordagem de teoria relativística de campo médio [49]. Todas elas incluem nêutrons, prótons, elétrons e múons na composição da estrela.

Tabelas para equações de estado podem ser obtidas de repositórios como CompOSE [51]. As tabelas que utilizamos encontram-se no diretório [26]. Cada tabela contém valores de pressão, densidade de massa e densidade de energia para uma dada equação de estado. Veja um exemplo a seguir:

	Pressão	Densidade de Massa	Densidade de Energia
1	1.549166e-11	2.700000e-02	2.700000e-02
2	1.650004e-11	2.807784e-02	2.807784e-02
3	1.757406e-11	2.919872e-02	2.919872e-02
...
999	5.162856e+15	2.596353e+15	4.889400e+15
1000	5.877253e+15	2.700000e+15	5.304547e+15

Tabela 2.1: Trecho da tabela para a equação de estado “APR” [47]. A primeira coluna contém p/c^2 , a segunda coluna contém ρ , a densidade de massa, e a terceira coluna contém ϵ/c^2 . Todas as três quantidades termodinâmicas da tabela são dadas em unidades de $[\text{g/cm}^3]$.

A partir disso, é possível realizar uma interpolação entre pressão e densidade de energia de forma

que encontramos uma equação de estado na forma (2.31), ou, alternativamente, $\epsilon = \epsilon(p)$.

Variando a pressão central da estrela, para uma dada equação de estado, obtemos uma sequência de modelos de equilíbrio por meio da integração das equações de TOV. O painel (b) da Figura 2.1 apresenta a relação massa-raio para uma sequência de equilíbrio correspondente a cada equação de estado presente em (a). Cada ponto na curva (b) representa uma estrela diferente com um valor distinto de pressão central. Além disso, observa-se que as curvas massa-raio são caracterizadas por uma massa máxima. Soluções com pressão central superior àquela configuração que possui massa máxima, marcados na imagem, são instáveis por perturbações radiais [52]. O procedimento para obter essas soluções será detalhado na próxima seção.

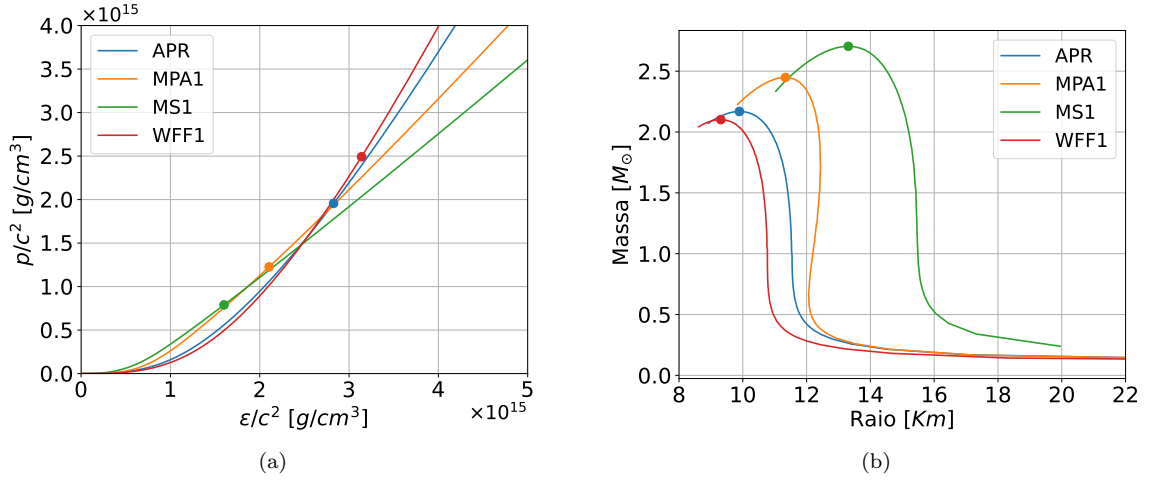


Figura 2.1: (a) Equações de estado calculadas sob diferentes descrições microfísicas de estrelas de nêutrons. (b) Curvas de relação massa-raio correspondentes às equações de estado do gráfico (a). Os pontos destacados no gráfico (b) correspondem às estrelas de massa máxima, cujas pressões e densidades de energia centrais são destacadas no gráfico (a).

Algumas quantidades podem ser definidas para caracterizar a dureza da equação de estado, isto é, quão abrupto é o aumento de pressão dado um aumento na densidade. Entre elas se destacam o índice adiabático,

$$\Gamma = \frac{d \log p}{d \log \rho} \quad (2.32)$$

e a velocidade do som

$$C_s^2 = \frac{dp}{d\epsilon}. \quad (2.33)$$

Esta última está relacionada à rapidez com que variações de pressão e densidade se propagam pelo meio [53]. A figura 2.2 mostra como o índice adiabático e a velocidade do som se comportam para as quatro equações de estado APR, MPA1, MS1 e WFF1.

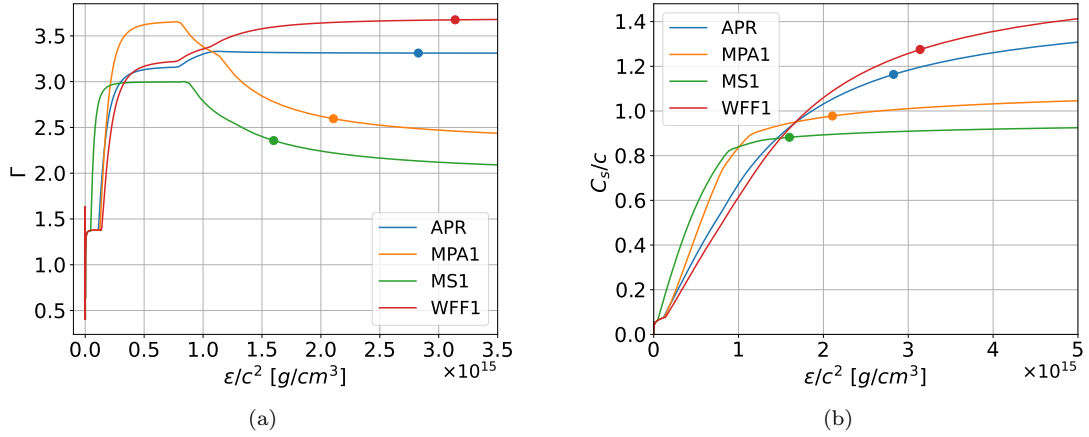


Figura 2.2: Comportamento do (a) índice adiabático e da (b) velocidade do som em função da densidade de energia. Os pontos destacados representam o limiar entre um modelo estável e instável da estrela baseados em sua massa máxima.

As camadas que compõe o interior de uma estrela de nêutrons são caracterizadas por comportamentos distintos de Γ . A parte externa da crosta da estrela é composta por íons e elétrons livres, e é a pressão de degenerescência associada a esse gás de elétrons que domina nessa região. Para um gás de elétrons livres relativísticos a equação de estado tem uma forma politrópica, com $p \propto \rho^{4/3}$, e, portanto, $\Gamma = 4/3$ [52]. Na interface entre a crosta e o núcleo estelar, constituído predominantemente por nêutrons, a matéria se torna consideravelmente mais rígida e o índice adiabático aumenta abruptamente, atingindo valores da ordem de $\sim 3 - 3.5$. Para densidades muito altas, Γ diminui progressivamente. Para mais detalhes, ver [54].

Por outro lado, o painel (b) da Figura 2.2b mostra o comportamento da velocidade do som para as diferentes equações de estado. Perceba, a partir da imagem, que, para as equações de estado APR e WFF1, existem densidades que podem ser encontradas em estrelas estáveis (ou seja, anteriores ao ponto que corresponde à massa máxima) mas possuem velocidades do som superiores à velocidade da luz. A condição $C_s > c$ em geral está associada à quebra de causalidade pelo modelo. Essa violação da causalidade, comum em modelos não relativísticos para a equação de estado, indica que o modelo precisa ser modificado para densidades suficientemente altas, mas não possui impacto marcante nas propriedades das estrelas que serão discutidas nesta dissertação.

2.3.4 Calculando as Propriedades de uma Estrela de Nêutrons

A microfísica, conforme descrita pela equação de estado, está conectada às propriedades macroscópicas da estrela de nêutrons por meio das equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff. Nesta seção, vamos discutir como integrar essas equações, tendo como resultado sequências de equilíbrio como aquelas mostradas no painel (b) da Figura 2.1.

Vamos recuperar as equações de TOV de modo que o sistema de equações diferenciais representado por elas tenha a seguinte forma:

$$\mathbf{u}'(r) = \mathbf{f}(\mathbf{u}, r). \quad (2.34)$$

Esse sistema de EDOs é composto por três equações para o vetor $\mathbf{u} = [\lambda(r), \nu(r), p(r)]$. A partir das equações de Einstein (2.22) e da equação de estado, escrita como $\epsilon = \epsilon(p)$, podemos escrevê-las como

$$\frac{d\lambda}{dr} = \frac{1 + e^\lambda[-1 + 8\pi r^2 \epsilon(p)]}{r}, \quad (2.35a)$$

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{-1 + e^\lambda[1 + 8\pi r^2 p]}{r}, \quad (2.35b)$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\epsilon(p) + p}{2} \left[\frac{-1 + e^\lambda(1 + 8\pi r^2 p)}{r} \right]. \quad (2.35c)$$

Em seguida, definimos as quantidades adimensionais que serão utilizadas na integração. Seja $\rho_* = 2.7 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$, uma densidade de calibração da ordem da densidade de saturação nuclear. Definimos as quantidades adimensionais como sendo:

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_*}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho_* c^2}, \quad \bar{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\rho_* c^2}, \quad \bar{r} = \frac{r\sqrt{G\rho_*}}{c}, \quad \bar{m} = \frac{m\sqrt{G^3\rho_*}}{c^3}. \quad (2.36)$$

As equações de TOV para as quantidades adimensionais ficam inalteradas com respeito àsquelas escritas em unidades naturais ($c = G = 1$), independentemente do valor adotado para ρ_* .

Adicionalmente, precisamos impor condições de contorno para resolver as equações de TOV. Vejamos a seguir:

Condições de contorno na origem

Assumimos que $\lambda(r)$, $\nu(r)$, $p(r)$ e $\epsilon(r)$ são regulares na origem. Dessa forma, é possível fazer uma expansão de Taylor em torno de $r = 0$:

$$\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i r^i, \quad \nu = \sum_{i=0}^{\infty} \nu_i r^i, \quad p = \sum_{i=0}^{\infty} p_i r^i, \quad \epsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon_i r^i, \quad (2.37)$$

Inserindo esse *ansatz* nas equações de TOV (2.35) e mantendo termos de até segunda ordem na expansão, obtemos (ver *notebook* [30])

$$\lambda_0 = 0; \quad (2.38a)$$

$$\lambda_1 = \nu_1 = p_1 = 0; \quad (2.38b)$$

$$\lambda_2 = \frac{8}{3}\pi\epsilon_0; \quad (2.38c)$$

$$\nu_2 = 4 \left(\pi p_0 + \frac{1}{3}\pi\epsilon_0 \right); \quad (2.38d)$$

$$p_2 = -\frac{2}{3}\pi(3p_0^2 + 4p_0\epsilon_0 + \epsilon_0^2). \quad (2.38e)$$

Em particular, a condição $\lambda_0 = 0$ implica, pela equação (2.25), que $m(0) = 0$. Os demais termos com subíndice 0 (ν_0 e p_0) não são determinados dessa maneira, que apenas fixa $\lambda_0 = 0$.

Chamamos atenção para o fato de que, para obter propriedades de equilíbrio da estrela, como massa e raio, podemos escolher um valor arbitrário para ν_0 , uma vez que as equações de TOV são invariantes sob a transformação $\nu \rightarrow \nu + \text{cte}$. No entanto, o valor correto de ν_0 , que, como veremos a

seguir, pode ser fixado através da condição de contorno na superfície, é necessário para calcularmos as perturbações desses objetos. Já p_0 representa a pressão central (p_c), que é um *input* das equações, sendo que cada valor de pressão central dá origem a uma estrela com propriedades distintas.

Finalmente, os coeficientes da expansão em Taylor da função $\epsilon(r)$ são fixados através da equação de estado, onde $\epsilon_0 = \epsilon(p_0)$, $\epsilon_1 = 0$, e a constante ϵ_2 pode ser determinada por meio da realização de uma expansão da equação $\epsilon(p)$:

$$\begin{aligned}
 \epsilon(p(r)) &= \epsilon(p_0 + r^2 p_2 + \dots) \\
 &= \epsilon(p_0) + \left. \frac{d\epsilon}{dp} \right|_{p_0} (p - p_0) + \dots \\
 &= \epsilon(p_0) + \left. \frac{d\epsilon}{dp} \right|_{p_0} (p_0 + r^2 p_2 + \dots - p_0) + \dots \\
 &= \epsilon_0 + \left. \frac{d\epsilon}{dp} \right|_{p_0} r^2 p_2 + O(r^4).
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

De forma que, como $dp/d\epsilon = C_s^2$ (2.33), $\epsilon_2 = p_2/C_s^2(p_0)$. As expressões explícitas para todos esses coeficientes de expansão podem ser encontrados no *notebook* [30].

Condições de contorno na superfície

As quantidades avaliadas sobre a superfície da estrela ($r = R$) estão conectadas ao meio externo através da continuidade. Uma vez que há vácuo no espaço-tempo externo, temos que a pressão sobre a superfície da estrela deve ser nula, ou seja, $p(R) = 0$, caso contrário haveria um gradiente infinito de pressão (e, portanto, uma força infinita) na superfície. A expressão $p(R) = 0$ pode ser tomada como uma definição do raio (R) da estrela.

Expressões para $\lambda(R)$ e $\nu(R)$ são obtidas partir das funções (2.11) e (2.12), de forma que

$$\lambda(R) = -\ln \left(1 - \frac{2M}{R} \right) \tag{2.40a}$$

$$\nu(R) = \ln \left(1 - \frac{2M}{R} \right). \tag{2.40b}$$

Se invertemos a equação (2.40a), encontramos a massa da estrela:

$$M = m(R) = \frac{R(1 - e^{\lambda(R)})}{2}. \tag{2.41}$$

Por outro lado, a condição (2.40b) pode ser usada para fixar ν_0 . Seja $\nu_{calc}(r)$ o valor da função ν calculado a partir de um valor arbitrário de ν_0 . Como discutimos antes, as equações de TOV são invariantes pela transformação $\nu \rightarrow \nu + \text{cte}$. Portanto, deve haver uma constante C que leva a solução calculada naquela “verdadeira”, ou seja, que respeita a equação (2.40b):

$$\nu(r) = \nu_{calc}(r) + C. \tag{2.42}$$

Avaliando esse reescalonamento em $r = R$, temos que

$$\nu(R) = \nu_{calc}(R) + C = \ln \left(1 - \frac{2M}{R} \right) \quad (2.43)$$

e isso nos leva à conclusão de que a constante de reescalonamento é

$$C = \ln \left(1 - \frac{2M}{R} \right) - \nu_{calc}(R). \quad (2.44)$$

Portanto, temos que

$$\nu_0 = \nu(0) = \nu_{calc}(0) - \nu_{calc}(R) + \ln \left(1 - \frac{2M}{R} \right), \quad (2.45)$$

onde $\nu_{calc}(0)$ é o valor arbitrário (digamos, 1) usado inicialmente para a integração. O reescalonamento adequado de $\nu(r)$ será importante para as equações de perturbação, uma vez que embora a escolha de ν_0 não afete as equações de TOV, ela pode gerar diferentes perturbações.

Tendo estabelecido as condições de contorno, podemos integrar as equações de TOV numericamente na linguagem de escolha (no nosso caso, o *Python*) com um método numérico adequado. Nesta etapa, usamos o método de Runge-Kutta de 4ª ordem. As equações de TOV são integradas de $r_0 \approx 0$ até o raio da estrela. Como vimos, a partir da continuidade com o meio externo, $p(R) = 0$. Então, encontrar o ponto em que a função $p(r)$ mais se aproxima de zero (através de uma busca binária, por exemplo) equivale a encontrar R .

Feito isso, podemos analisar graficamente o comportamento das funções m , ν , p , ϵ e C_s^2 para uma estrela de nêutrons na configuração de equilíbrio.

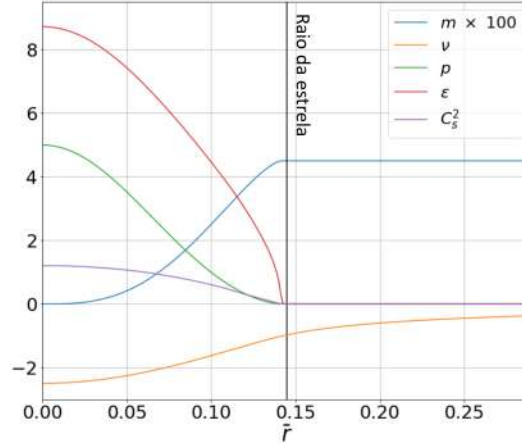


Figura 2.3: Características físicas de uma estrela de nêutrons, com equação de estado APR. Possui pressão central $\bar{p}_c = 5$ e raio $\bar{R} = 0.145$.

Como era de se esperar, vemos na figura 2.3, que as funções p e C_s^2 vão a zero conforme o ponto r se aproxima da superfície da estrela. De fato, a pressão, a densidade de energia e a velocidade do som são quantidades intrínsecas ao fluido. Embora algumas dessas quantidades, como a densidade, possam ser descontínuas na superfície, para esta equação de estado todas vão a zero na interface com o meio externo. A função aspecto de massa, por sua vez, é uma função que aumenta à medida que o ponto se afasta do centro da estrela, atingindo seu máximo na superfície, onde $m(R) = M$. O campo ν se aproxima de zero

conforme r aumenta, de acordo com a hipótese de que a métrica tende àquela do espaço-tempo plano nesse limite.

Para visualizar melhor os dados encontrados, podemos recuperar a dimensão das quantidades físicas da estrela analisada na figura 2.3. A dimensionalidade da pressão central, $\bar{p}_c = 5$, é recuperada facilmente se lembramos das relações apresentadas em (2.36):

$$p_c = 5\rho_*c^2 = 1.35 \times 10^{15} \text{ g}/(\text{cm s}^2), \quad (2.46)$$

lembrando que $\rho_* = 2.7 \times 10^{14} \text{ g}/\text{cm}^3$. Da mesma forma, para o raio em km, temos:

$$R = 0.14 \frac{1}{10000} \frac{c}{\sqrt{G\rho_*}} = 10.22 \text{ km} \quad (2.47)$$

e para a massa, em termo da massa solar, temos:

$$M = 0.04 \frac{1}{(M_\odot)} \frac{c^3}{\sqrt{G^3\rho_*}} = 2.15 M_\odot. \quad (2.48)$$

Portanto, a estrela de nêutrons, nas configurações de equilíbrio, descrita pela equação de estado APR e por uma pressão central de $p_c = 1.35 \times 10^{15} \text{ g}/(\text{cm s}^2)$, tem raio $R = 10.22 \text{ km}$ e massa $M = 2.15 M_\odot$. Variando a pressão central e a equação de estado, obtemos as curvas de equilíbrio mostradas anteriormente, no painel (b) da Figura 2.1.

Capítulo 3

Perturbações

Neste capítulo, veremos os conceitos básicos da teoria de perturbação para um espaço-tempo de fundo esfericamente simétrico. Vamos ver como decompor as perturbações em termos de harmônicos esféricos escalares, vetoriais e tensoriais e, por fim, deduzir as equações de movimento que descrevem as perturbações, como foi feito primeiramente por S. Thorne e A. Campolattaro [18].

O estudo da teoria de perturbação de um sistema físico resulta, muitas vezes, em equações extremamente extensas e trabalhosas de se obter manualmente. Por esse motivo, grande parte das equações que vamos encontrar neste capítulo foram deduzidas em dois *notebooks* do *Mathematica* com uso do pacote *diffgeo.m* [55]: um para as perturbações axiais [27] e outro para as perturbações polares [28].

3.1 Perturbações Gravitacionais

Consideramos o caso em que há uma perturbação gravitacional ou no fluido, causando um deslocamento do mesmo. Como resultado dessa perturbação, o espaço-tempo não corresponde mais às configurações de equilíbrio mostradas em (2.2). Consideramos a métrica perturbada como uma expansão linear descrita pela soma da métrica de fundo (não perturbada) $g_{\mu\nu}^{(0)}$ com a perturbação $h_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

onde o índice (0) caracteriza um termo na sua configuração de equilíbrio. Como estamos num regime de pequenas perturbações, usamos apenas uma aproximação de primeira ordem, de modo que quaisquer termos quadráticos na métrica perturbada são considerados suficientemente pequenos em comparação com a métrica de fundo e podem ser descartados.

Podemos então expandir o tensor de Einstein linearmente da seguinte forma:

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^{(0)} + \delta G_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

onde δ indica a perturbação.

O tensor de energia-momento do fluido perfeito também precisa ser modificado:

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(0)} + \delta T_{\mu\nu}. \quad (3.3)$$

Nessas novas configurações perturbadas, a densidade de energia e a pressão são reescritas como

$$\epsilon = \epsilon^{(0)} + \delta\epsilon, \quad (3.4a)$$

$$p = p^{(0)} + \delta p. \quad (3.4b)$$

Portanto, o tensor de energia-momento completo se torna

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(0)} + (\epsilon^{(0)} + \delta\epsilon + p^{(0)} + \delta p)(u_\mu^{(0)} + \delta u_\mu)(u_\nu^{(0)} + \delta u_\nu) + (p^{(0)} + \delta p)(g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu}), \quad (3.5)$$

de forma que em primeira ordem a perturbação $\delta T_{\mu\nu}$ se reduz a:

$$\delta T_{\mu\nu} = u_\mu^{(0)} u_\nu^{(0)} (\delta\epsilon + \delta p) + (\epsilon^{(0)} + p^{(0)}) u_\mu^{(0)} \delta u_\nu + (\epsilon^{(0)} + p^{(0)}) \delta u_\mu u_\nu^{(0)} + p^{(0)} h_{\mu\nu} + \delta p g_{\mu\nu}^{(0)}. \quad (3.6)$$

Portanto, calculando o tensor de Einstein, o tensor de energia-momento (3.6) e os relacionando através da equação de campo de Einstein, é possível encontrar as equações de movimento que regem a dinâmica das perturbações.

3.2 Separação em Harmônicos Esféricos

Como uma etapa preliminar para estudar perturbações, é interessante introduzir um formalismo para decompor as perturbações em generalizações apropriadas dos harmônicos esféricos. A motivação para essa decomposição é permitir que as equações de campo de Einstein sejam simplificadas.

Uma vez que a métrica de fundo é esfericamente simétrica, poderíamos esperar que fosse possível separar a parte angular da parte temporal/radial via uma decomposição em harmônicos esféricos:

$$h_{\mu\nu}(t, r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l h_{\mu\nu}^{lm}(t, r) Y^{lm}(\theta, \phi). \quad (3.7)$$

Os harmônicos esféricos $Y^{lm}(\theta, \phi)$ representam os autovetores do operador Laplaciano sobre a esfera, de forma que a equação associada de Legendre¹ pode ser escrita como

$$\gamma^{AB} \nabla_A \nabla_B Y^{lm} = -l(l+1) Y^{lm}, \quad (3.8)$$

¹Como exemplo, a solução da equação de Laplace em coordenadas esféricas tem a forma $f(r, \theta, \phi) = R(r) Y_l^m(\theta, \phi)$. Utilizando o método de separação de variáveis, nota-se que a equação de Laplace admite soluções periódicas nas duas coordenadas angulares. Portanto, a solução periódica da equação em questão depende dos valores inteiros de l e m e é dada em termos das funções trigonométricas e dos polinômios associados de Legendre: $Y_l^m(\theta, \phi) = N e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta)$, onde N é uma constante de normalização.

onde γ representa as componentes da métrica da esfera:

$$\gamma_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

e os índices latinos maiúsculos representam as coordenadas (θ, ϕ) ao passo que índices latinos minúsculos representarão (t, r) . O símbolo ∇_A representa uma derivada covariante compatível com γ_{AB} .

Porém, o problema de considerar a expansão (3.8) é que as equações diferenciais para $h_{\mu\nu}$ que vêm das equações de Einstein também envolvem as coordenadas angulares e essa expansão não nos permite obter um conjunto de equações para os modos $h_{\mu\nu}^{lm}(t, r)$ que só dependa de t e r .

Esse problema pode ser contornado explorando as propriedades das componentes da métrica sob rotações. Como explorado por Regge e Wheeler [15], sob uma rotação do referencial em torno da origem, as dez componentes da métrica se transformam como escalares, vetores ou tensores. Assim, a matriz de perturbação é uma matriz simétrica cuja estrutura tem a seguinte forma:

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \boxed{E} & \boxed{E} & \boxed{V} \\ \boxed{E} & \boxed{E} & \boxed{V} \\ \boxed{V} & \boxed{V} & \boxed{T} \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

onde as componentes h_{ab} (E) se transformam como escalares, as componentes h_{aA} (V) se transformam como vetores e as componentes h_{AB} (T) se transformam como tensores. Ou seja, uma transformação do tipo $\theta \rightarrow f_1(\theta, \phi)$ e $\phi \rightarrow f_2(\theta, \phi)$ mantém as componentes escalares inalteradas, ao passo que mistura as componentes vetoriais e tensoriais.

Levando essas propriedades em conta, Regge e Wheeler [15] perceberam que é vantajoso usar uma base de harmônicos esféricos vetoriais para h_{0A} e h_{1A} e tensoriais para h_{AB} , e que isso permitiria desacoplar a parte temporal/radial da parte angular das equações de Einstein.

Além disso, a decomposição feita por Regge e Wheeler leva em conta a propriedade de transformação dos vetores/tensores de base com respeito a uma mudança de paridade, que é a inversão simultânea de todos os eixos cartesianos, o que corresponde à transformação angular $(\theta, \phi) \rightarrow (\pi - \theta, \pi + \theta)$. Os harmônicos esféricos têm paridade $(-1)^l$, uma vez que $Y^{lm}(\pi - \theta, \pi + \theta) = (-1)^l Y^{lm}(\theta, \phi)$. As componentes vetoriais/tensoriais podem ser expandidas em uma base de harmônicos esféricos vetoriais/tensoriais com a mesma paridade dos harmônicos esféricos (“polares”) ou com paridade oposta (“axiais”). Dessa forma, podemos analisar as diferentes componentes de $h_{\mu\nu}$ da seguinte forma:

Escalares:

Uma típica função escalar se desenvolve como uma onda polar de momento angular proporcional a l , cuja projeção no eixo- z tem autovalores m . Uma função escalar expandida em harmônicos esféricos

é dada por

$$S = \sum_{l,m} H^{lm}(t,r) Y^{lm}(\theta, \phi). \quad (3.11)$$

Dessa forma, expandimos os termos da matriz (3.10) que se transformam como escalares da forma:

$$h_{00} = \sum_{l,m} e^\nu H_0^{lm} Y^{lm}, \quad (3.12a)$$

$$h_{01} = h_{10} = \sum_{l,m} H_1^{lm} Y^{lm}, \quad (3.12b)$$

$$h_{11} = \sum_{l,m} e^\lambda H_2^{lm} Y^{lm}, \quad (3.12c)$$

onde os termos de fundo e^ν e e^λ foram introduzidos para conveniência posterior.

Vetores:

Para as componentes que se transformam como vetores sob rotações, temos dois tipos distintos de vetores de base com paridades opostas:

$$V_A^{lm} = \nabla_A Y^{lm}, \quad \text{paridade } (-1)^l; \quad (3.13a)$$

$$V_A^{lm} = \varepsilon_A^B \nabla_B Y^{lm}, \quad \text{paridade } (-1)^{l+1}, \quad (3.13b)$$

onde ε_A^B é o simbolo de Levi-Civita, que em coordenadas esféricas e com índices mistos gerados através da contração de ε_{AB} com a métrica inversa γ^{AB} é

$$\varepsilon_A^B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sin \theta} \\ \sin \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Juntando os dois termos apresentados em (3.13), os objetos que se comportam como vetores sob rotações podem ser escritos como

$$V_A = \sum_{l,m} \left[h^{lm}(t,r) V_A^{lm}(\theta, \phi) + g^{lm}(t,r) V_A^{lm}(\theta, \phi) \right], \quad (3.15)$$

de forma que as componentes que se transformam como vetores na matriz de perturbação (3.10) são:

$$h_{02} = h_{20} = \sum_{l,m} h_0^{lm} \partial_\theta Y^{lm} - g_0^{lm} \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi Y^{lm}; \quad (3.16a)$$

$$h_{03} = h_{30} = \sum_{l,m} h_0^{lm} \partial_\phi Y^{lm} + g_0^{lm} \sin \theta \partial_\theta Y^{lm}; \quad (3.16b)$$

$$h_{12} = h_{21} = \sum_{l,m} h_1^{lm} \partial_\theta Y^{lm} - g_1^{lm} \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi Y^{lm}; \quad (3.16c)$$

$$h_{13} = h_{31} = \sum_{l,m} h_1^{lm} \partial_\phi Y^{lm} + g_1^{lm} \sin \theta \partial_\theta Y^{lm}. \quad (3.16d)$$

Tensores:

Por fim, as componentes que se transformam como tensores sob rotações são descritas por três tipos fundamentais de tensores:

$$T_{AB}^{lm} = \nabla_B \nabla_A Y^{lm}, \quad \text{paridade } (-1)^l; \quad (3.17a)$$

$$T_{AB}^{lm} = \gamma_{AB} Y^{lm}, \quad \text{paridade } (-1)^l; \quad (3.17b)$$

$$T_{AB}^{lm} = \varepsilon_A^C T_{CB}^{lm} + \varepsilon_B^C T_{CA}^{lm}, \quad \text{paridade } (-1)^{l+1}. \quad (3.17c)$$

A equação (3.17b) nada mais é do que a combinação de um escalar com a métrica da esfera, isto é, $\gamma_{AB} = g_{AB}/r^2$. Desta forma, a fim de simplificar resultados posteriores, podemos multiplicar as equações (3.17) por r^2 sem perder a validade das propriedades de transformações por rotações. Logo, os objetos que se transformam como tensores são escritos como:

$$T_{AB} = \sum_{lm} \left[r^2 G^{lm}(t, r) T_{AB}^{lm}(\theta, \phi) + r^2 K^{lm}(t, r) T_{AB}^{lm}(\theta, \phi) - \frac{1}{2} h_2^{lm}(t, r) T_{AB}^{lm}(\theta, \phi) \right]. \quad (3.18)$$

Portanto, juntando as duas equações de mesma paridade, (3.17a) e (3.17b), é possível encontrar as componentes polares dos termos da métrica $h_{\mu\nu}$ que se comportam como tensores; são elas:

$$h_{22}^{(p)} = \sum_{l,m} r^2 [K^{lm} \gamma_{22} + G^{lm} (\partial_\theta^2 Y^{lm} - \Gamma_{22}^A \partial_A)] Y^{lm} = \sum_{l,m} r^2 (K^{lm} + G^{lm} \partial_\theta^2) Y^{lm}; \quad (3.19a)$$

$$h_{23}^{(p)} = h_{32(p)} = \sum_{l,m} r^2 G^{lm} (\partial_\phi \partial_\theta - \Gamma_{23}^A \partial_A) Y^{lm} = \sum_{l,m} r^2 G^{lm} (\partial_\phi \partial_\theta - \cot \theta \partial_\phi) Y^{lm}; \quad (3.19b)$$

$$h_{33}^{(p)} = \sum_{l,m} r^2 [K^{lm} \gamma_{33} + G^{lm} (\partial_\phi^2 - \Gamma_{33}^A \partial_A)] Y^{lm} = \sum_{l,m} r^2 [K^{lm} \sin^2 \theta + G^{lm} (\partial_\phi^2 + \sin \theta \cos \theta \partial_\theta)] Y^{lm}. \quad (3.19c)$$

E, para as componentes axiais, temos:

$$h_{22}^{(a)} = - \sum_{l,m} \frac{h_2^{lm}}{2} \left(\varepsilon_2^3 T_{32}^{lm} + \varepsilon_2^1 T_{32}^{lm} \right) = \sum_{l,m} \frac{h_2^{lm}}{\sin \theta} (\partial_\phi \partial_\theta - \cot \theta \partial_\phi) Y^{lm}; \quad (3.20a)$$

$$h_{23}^{(a)} = h_{32(a)} = - \sum_{l,m} \frac{h_2^{lm}}{2} \left(\varepsilon_2^3 T_{33}^{lm} + \varepsilon_3^2 T_{22}^{lm} \right) = \sum_{l,m} \frac{h_2^{lm}}{2} \left[\frac{1}{\sin \theta} (\partial_\phi^2 + \sin \theta \cos \theta \partial_\theta) - \sin \theta \partial_\theta^2 \right] Y^{lm}; \quad (3.20b)$$

$$h_{33}^{(a)} = - \sum_{l,m} \frac{h_2^{lm}}{2} \left(\varepsilon_3^2 T_{23}^{lm} + \varepsilon_3^1 T_{23}^{lm} \right) = - \sum_{l,m} h_2^{lm} \sin \theta (\partial_\phi \partial_\theta - \cot \theta \partial_\phi) Y^{lm}. \quad (3.20c)$$

Então, de forma completa, as componentes que se transformam como tensores na matriz (3.10) são

$$h_{22} = \sum_{l,m} r^2 (K^{lm} + G^{lm} \partial_\theta^2) Y^{lm} + \frac{h_2^{lm}}{\sin \theta} (\partial_\phi \partial_\theta - \cot \theta \partial_\phi) Y^{lm}; \quad (3.21a)$$

$$h_{23} = h_{32} = \sum_{l,m} r^2 G^{lm} (\partial_\phi \partial_\theta - \cot \theta \partial_\phi) Y^{lm} + \frac{h_2^{lm}}{2} \left[\frac{1}{\sin \theta} (\partial_\phi^2 + \sin \theta \cos \theta \partial_\theta) - \sin \theta \partial_\theta^2 \right] Y^{lm}; \quad (3.21b)$$

$$h_{33} = \sum_{l,m} r^2 [K^{lm} \sin^2 \theta + G^{lm} (\partial_\phi^2 + \sin \theta \cos \theta \partial_\theta)] Y^{lm} - h_2^{lm} \sin \theta (\partial_\phi \partial_\theta - \cot \theta \partial_\phi) Y^{lm}. \quad (3.21c)$$

Na forma matricial, a componente polar $[(-1)^l]$ da métrica perturbada é

$$h_{\mu\nu}^{(p)} = \sum_{l,m} \begin{pmatrix} e^\nu H_0^{lm} & H_1^{lm} & h_0^{lm} \partial_\theta & h_0^{lm} \partial_\phi \\ H_1^{lm} & e^\lambda H_2^{lm} & h_1^{lm} \partial_\theta & h_1^{lm} \partial_\phi \\ * & * & r^2 (K^{lm} + G^{lm} \partial_\theta^2) & r^2 G^{lm} (\partial_\phi \partial_\theta - \cot \theta \partial_\phi) \\ * & * & * & r^2 [K^{lm} \sin^2 \theta + G^{lm} (\partial_\phi^2 + \sin \theta \cos \theta \partial_\theta)] \end{pmatrix} Y^{lm}, \quad (3.22)$$

e a componente axial $[(-1)^{l+1}]$ é

$$h_{\mu\nu}^{(a)} = \sum_{l,m} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -g_0^{lm} \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi & g_0^{lm} \sin \theta \partial_\theta \\ 0 & 0 & -g_1^{lm} \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi & g_1^{lm} \sin \theta \partial_\theta \\ * & * & h_2^{lm} \frac{1}{\sin \theta} (\partial_\phi \partial_\theta - \cot \theta \partial_\phi) & h_2^{lm} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sin \theta} (\partial_\phi^2 + \sin \theta \cos \theta \partial_\theta) - \sin \theta \partial_\theta^2 \right] \\ * & * & * & -h_2^{lm} \sin \theta (\partial_\phi \partial_\theta - \cot \theta \partial_\phi) \end{pmatrix} Y^{lm}, \quad (3.23)$$

onde “*” representa os termos simétricos.

3.3 Calibre de Regge-Wheeler

O mesmo fenômeno físico pode ser representado por diferentes perturbações em diferentes sistemas de coordenadas. Como veremos a seguir, a matriz de perturbação pode ser fortemente simplificada com a fixação de um calibre.

Considere uma transformação de coordenadas “tão pequena” quanto a métrica perturbada:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x). \quad (3.24)$$

Sob essa transformação, a métrica se transforma como:

$$g_{\mu\nu}^{(0)'} + h'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \nabla_\nu \xi_\mu + \nabla_\mu \xi_\nu + h_{\mu\nu}. \quad (3.25)$$

Agora, $h'_{\mu\nu}$ é definido como a diferença entre a métrica perturbada e métrica de fundo. Assumindo que a métrica de fundo é invariante, ou seja, $g_{\mu\nu}^{(0)'} = g_{\mu\nu}^{(0)}$, a perturbação no novo referencial terá o valor

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \nabla_\nu \xi_\mu + \nabla_\mu \xi_\nu. \quad (3.26)$$

Este resultado pode ser interpretado afirmando que para mudanças infinitesimais nas coordenadas, a perturbação $h_{\mu\nu}$ sofre uma “transformação de calibre”. Portanto, assumimos que pequenas mudanças de coordenadas afetam as perturbações de primeira ordem na métrica perturbada, mas não a métrica de fundo.

A perturbação descrita pela métrica $h_{\mu\nu}$ no “calibre Regge-Wheeler” satisfaz o seguinte conjunto de equações [15]:

$$h_{\theta\phi} = 0, \quad (3.27a)$$

$$h_{\phi\phi} = h_{\theta\theta} \sin^2 \theta, \quad (3.27b)$$

$$\partial_\phi h_{t\phi} = -\sin \theta \partial_\theta (h_{t\theta} \sin \theta), \quad (3.27c)$$

$$\partial_\phi h_{r\phi} = -\sin \theta \partial_\theta (h_{r\theta} \sin \theta). \quad (3.27d)$$

Da primeira equação do calibre de Regge-Wheeler (3.27a), temos, usando (3.21b)

$$h_{\theta\phi} = \sum_{lm} \left\{ r^2 G^{lm} (\partial_\phi \partial_\theta - \cot \theta \partial_\phi) + \frac{h_2^{lm}}{2} \left[\frac{1}{\sin \theta} (\partial_\phi^2 + \sin \theta \cos \theta \partial_\theta) - \sin \theta \partial_\theta^2 \right] \right\} Y^{lm} = 0. \quad (3.28)$$

Isto quer dizer que $h_2^{lm} = G^{lm} = 0$. A partir disso, a equação (3.27b) é trivialmente satisfeita.

A equação de calibre (3.27c) usa as componentes (3.16a) e (3.16b) da métrica e tem como resultado:

$$\partial_\phi (h_0^{lm} \partial_\phi + g_0^{lm} \sin \theta \partial_\theta) Y^{lm} = -\sin \theta \partial_\theta (h_0^{lm} \sin \theta \partial_\theta - g_0^{lm} \partial_\phi) Y^{lm}. \quad (3.29)$$

A simplificação dá

$$h_0^{lm} (\partial_\phi^2 + \cos \theta \sin \theta \partial_\theta + \sin^2 \theta \partial_\theta^2) Y^{lm} = 0, \quad (3.30)$$

ou seja, $h_0^{lm} = 0$.

Por fim, vamos analisar (3.27d) usando as componentes (3.16d) e (3.16c).

$$\partial_\phi (h_1^{lm} \partial_\phi + g_1^{lm} \sin \theta \partial_\theta) Y^{lm} = -\sin \theta \partial_\theta (h_1^{lm} \sin \theta \partial_\theta - g_1^{lm} \partial_\phi) Y^{lm}. \quad (3.31)$$

De forma análoga, vamos simplificar. Então,

$$h_1^{lm} (\partial_\phi^2 + \cos \theta \sin \theta \partial_\theta + \sin^2 \theta \partial_\theta^2) Y^{lm} = 0, \quad (3.32)$$

que resulta $h_1^{lm} = 0$.

Portanto, impondo $h_0^{lm} = h_1^{lm} = h_2^{lm} = G^{lm} = 0$, encontramos a matriz da perturbação da métrica expandida em harmônicos esféricos no calibre de Regge-Wheeler:

$$h_{\mu\nu}^{(p)} = \sum_{l,m} \begin{pmatrix} e^\nu H_0^{lm} & H_1^{lm} & 0 & 0 \\ H_1^{lm} & e^\lambda H_2^{lm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 K^{lm} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 K^{lm} \sin^2 \theta \end{pmatrix} Y^{lm} \quad (3.33)$$

para as componentes polares e

$$h_{\mu\nu}^{(a)} = \sum_{l,m} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -g_0^{lm} \frac{1}{\sin\theta} \partial_\phi & g_0^{lm} \sin\theta \partial_\theta \\ 0 & 0 & -g_1^{lm} \frac{1}{\sin\theta} \partial_\phi & g_1^{lm} \sin\theta \partial_\theta \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \end{pmatrix} Y^{lm} \quad (3.34)$$

para as componentes axiais.

Agora, chamamos atenção para o fato de que não há necessidade de trabalhar com valores arbitrários de m . Para qualquer escolha específica de l todos os valores de m levarão à mesma equação radial. Podemos então fixar $m = 0$, e, para esse caso, $\partial_\phi Y^{l0} = 0$. Perturbações com valores distintos de m podem ser obtidas por uma rotação do sistema de coordenadas, partindo daquela com $m = 0$. Com essa restrição, finalmente, temos a Eq. (3.33) para as componentes polares, e

$$h_{\mu\nu}^{(a)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g_0^{lm} \\ 0 & 0 & 0 & g_1^{lm} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \end{pmatrix} \sin\theta \partial_\theta Y^{lm} \quad (3.35)$$

para as componentes axiais da matriz de perturbação no calibre de Regge-Wheeler.

3.4 Perturbações Axiais

3.4.1 Equações de Movimento Axiais

Toda teoria de pulsações não-radiais consiste no estudo das equações de movimento que governam as perturbações. Como dito anteriormente, essas equações podem ser simplificadas a partir da decomposição em harmônicos esféricos. Além disso, é possível mostrar que as equações de Einstein não acoplam perturbações axiais e polares, o que nos permite considerá-las separadamente. Nesta seção, vamos considerar o caso de perturbações axiais.

Vamos começar definindo a métrica completa que descreve uma perturbação axial (paridade $(-1)^{l+1}$), que, usando (3.35), tem a forma:

$$g_{\mu\nu} = \sum_{l,m} \begin{pmatrix} -e^\nu & 0 & 0 & g_0^{lm} \sin\theta \partial_\theta Y^{lm} \\ 0 & e^\lambda & 0 & g_1^{lm} \sin\theta \partial_\theta Y^{lm} \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ * & * & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

O próximo passo é descrever a perturbação no fluido. O movimento de pequena amplitude da configuração de equilíbrio que estamos considerando é descrito por um vetor deslocamento dado por $\xi_j(t, r, \theta, \phi)$. A componente ξ_r é escalar sob rotações e, por isso, tem parte axial nula. Já ξ_θ e ξ_ϕ se

transformam como vetores sob a mesma transformação. Consequentemente, temos

$$\xi_r^{(a)} = 0, \quad \xi_A^{(a)} = \sum_{l,m} U^{lm}(t, r) \overset{2}{V}_A^{lm}(\theta, \phi), \quad (3.37)$$

que usando (3.13b) para $\overset{2}{V}_a^{lm}$ fica

$$\xi_r^{(a)} = 0, \quad \xi_\theta^{(a)} = 0, \quad \xi_\phi^{(a)} = \sum_{l,m} U^{lm}(t, r) \sin \theta \partial_\theta Y^{lm}(\theta, \phi), \quad (3.38)$$

onde usamos o fato de que, para $m = 0$, $\partial_\phi Y^{lm} = 0$. A partir do deslocamento do fluido, encontramos a quadri-velocidade. Se

$$\frac{u^j}{u^0} = \frac{dx^j}{d\tau} \frac{d\tau}{dx^0} = \frac{dx^j}{dt} \equiv g_{(0)}^{jk} \frac{\partial \xi_k}{\partial t}, \quad (3.39)$$

temos²

$$u_t^{(a)} = -e^{\nu/2}, \quad u_r^{(a)} = 0, \quad u_\theta^{(a)} = 0, \quad u_\phi^{(a)} = e^{-\nu/2} \sum_{l,m} \partial_t U^{lm} \sin \theta \partial_\theta Y^{lm}. \quad (3.40)$$

onde $u_t^{(a)}$ é determinado pela condição de normalização da quadri-velocidade.

No caso de perturbações axiais, a pressão e a densidade permanecem inalteradas, pois são grandezas escalares sob rotações. Consequentemente, a perturbação no tensor de energia-momento tem apenas as seguintes componentes diferentes de zero (conforme calculado no *notebook Perturbações Axiais* [27]):

$$\delta T_{03} = \delta T_{30} = \sum_{l,m} \sin \theta \left[p g_0^{lm} - (p + \epsilon) \dot{U}^{lm} \right] \partial_\theta Y^{lm}, \quad (3.41a)$$

$$\delta T_{13} = \delta T_{31} = \sum_{l,m} p g_1^{lm} \sin \theta \partial_\theta Y^{lm}, \quad (3.41b)$$

sendo “ $\dot{}$ ” a representação de uma derivada temporal.

As componentes $(t\phi)$, $(r\phi)$ e $(\theta\phi)$ das equações de campo de Einstein perturbadas resultam nas equações de movimento axiais do sistema. Elas formam um conjunto de equações diferenciais parciais acopladas que contêm a função de deslocamento do fluido $U(t, r)$ e as funções da métrica perturbada $g_0(r, t)$ e $g_1(t, r)$, sendo que, a partir daqui, passamos a suprimir os índices “ lm ” nessas quantidades. Temos (conforme calculado no *notebook* em [27]):

$$\begin{aligned} \dot{U} = & \frac{e^{-\lambda}}{16\pi r^2(p + \epsilon)} \left\{ g_0 \left[-2 - e^\lambda (-2 + l + l^2 - 8\pi r^2(p + \epsilon)) \right] + r^2 \left[-4e^\lambda \pi r(p + \epsilon)(g'_0 - g_1) \right. \right. \\ & \left. \left. - \dot{g}'_1 + g''_0 \right] - 2r\dot{g}_1 \right\}; \end{aligned} \quad (3.42a)$$

$$\ddot{g}_1 = - \frac{e^\nu(l + l^2 - 2)}{r^2} h_1 - \frac{2}{r} \dot{g}_0 + \dot{g}'_0; \quad (3.42b)$$

$$\dot{g}_0 = \frac{e^{\nu-\lambda}}{r} \left\{ g_1 \left[e^\lambda (1 + 4\pi r^2(p - \epsilon)) - 1 \right] + r g'_1 \right\}. \quad (3.42c)$$

²Note que a convenção utilizada em [18] é ligeiramente diferente daquela empregada aqui, uma vez que os autores utilizam uma assinatura -2 para a métrica, e aqui utilizamos $+2$. De todo modo, os sinais foram ajustados para que as equações finais (3.42) coincidam com as equações (B5) do artigo de Thorne e Campolattaro [18].

Pode-se mostrar que as equações (3.42b) e (3.42c) garantem que o lado direito da equação (3.42a) não depende da coordenada temporal e, por isso, o fluido não pulsa (ver *notebook* [27])

$$\ddot{U} = 0. \quad (3.43)$$

Portanto, vemos que os movimentos axiais não são caracterizados por pulsações que emitem ondas gravitacionais; em vez disso, eles são caracterizados por uma rotação diferencial estacionária do fluido dentro da estrela. Isso significa que a estrela está em um estado onde diferentes partes suas estão se movendo continuamente a velocidades diferentes e/ou em diferentes direções, mas essa rotação não muda ou varia com o tempo.

De fato, as pulsações podem ocorrer apenas se a perturbação causar uma mudança na densidade e pressão interna da estrela, p e ϵ . No entanto, p e ϵ são campos escalares e os harmônicos esféricos escalares são polares. Consequentemente, uma perturbação axial não pode alterar a densidade da estrela ou as distribuições de pressão e, portanto, não pode causar a pulsação de uma estrela.

3.4.2 Perturbações Axiais no Vácuo

Agora iremos analisar como as equações derivadas anteriormente são afetadas quando a métrica de fundo é a métrica de Schwarzschild, ou seja, quando consideramos um buraco negro ou o espaço-tempo externo a uma estrela. Além disso, consideraremos que $\delta T_{\mu\nu} = 0$, ou seja, a perturbação é puramente gravitacional. A métrica que descreve perturbações axiais no espaço-tempo de Schwarzschild é

$$g_{\mu\nu}^{(a)} = \sum_{l,m} \begin{pmatrix} -(1 - 2M/r) & 0 & 0 & g_0^{lm} \sin \theta \partial_\theta Y^{lm} \\ 0 & (1 - 2M/r)^{-1} & 0 & g_1^{lm} \sin \theta \partial_\theta Y^{lm} \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ * & * & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Temos, então, para as mesmas componentes $(t\phi)$, $(r\phi)$ e $(\theta\phi)$, as seguintes equações (conforme calculado no *notebook* [27]):

$$(t\phi) \rightarrow [l(1+l)r - 4M]g_0 + r(r-2M)(-rg_0'' + 2\dot{g}_1 + r\dot{g}_1') = 0; \quad (3.45a)$$

$$(r\phi) \rightarrow \frac{(l+l^2-2)}{r^2}g_1 + \left(\frac{r\partial_r - 2}{2M-r}\right)\dot{g}_0 - \left(\frac{r}{2M-r}\right)\ddot{g}_1 = 0; \quad (3.45b)$$

$$(\theta\phi) \rightarrow 2M(r-2M)g_1 + r(r-2M)^2\dot{g}_1' - r^3\dot{g}_0 = 0, \quad (3.45c)$$

onde novamente omitimos os índices “ lm ” das perturbações.

Essas três equações acima não são independentes. De fato, a equação (3.45a) pode ser obtida a partir das equações (3.45b) e (3.45c). Para isso, basta usar (3.45c) para eliminar \dot{g}_0 de (3.45b) e a derivada temporal de (3.45a). Por fim, usa-se a equação (3.45b) para eliminar \ddot{g}_1 . Logo, a equação (3.45a) é redundante. Por outro lado, através da equação (3.45c) podemos eliminar \dot{g}_0 de (3.45b), para

obter uma equação que envolve apenas g_1 :

$$\frac{[r^2(l+l^2-2) - 2Mr(l+l^2-6) - 20M^2]}{r^3(r-2M)}g_1 + r^4\ddot{g}_1 + \frac{2(r-5M)g_1' + r(2M-r)g_1''}{r^2} = 0 \quad (3.46)$$

Introduzimos, agora,

$$\Psi_{RW}(t, r) = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) g_1(t, r), \quad (3.47)$$

de forma que, em termos dessa variável, e da coordenada de tartaruga,

$$r_* = r + 2M \log \left(\frac{r}{2M} - 1 \right), \quad (3.48)$$

a Eq. (3.46) é reescrita como:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi_{RW} - \frac{\partial^2}{\partial r_*^2} \Psi_{RW} + V_{RW}(r) \Psi_{RW} = 0, \quad (3.49)$$

que é a equação de Regge-Wheeler, fundamental para descrever perturbações axiais no vácuo. O termo $V_{RW}(r)$ é o chamado potencial de Regge-Wheeler:

$$V_{RW}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \right]. \quad (3.50)$$

Note que a partir de Ψ_{RW} é possível obter g_1 pela definição e, uma vez que g_1 é conhecido, podemos usar uma das equações (3.45) para encontrar g_0 . Além disso, se assumimos que Ψ_{RW} tem uma dependência harmônica no tempo, isto é, $\Psi_{RW} = \phi_{RW}(r)e^{i\omega t}$, a equação de Regge-Wheeler (3.49) se reduz a

$$\frac{d^2}{dr_*^2} \phi_{RW} + [\omega^2 - V(r_*)] \phi_{RW} = 0. \quad (3.51)$$

Tanto a equação (3.49) quanto a equação (3.51) serão usadas no capítulo 4, quando formos estudar os modos quasi-normais de buracos negros.

3.5 Perturbações Polares

3.5.1 Equações de Movimento Polares

De maneira análoga à anterior, as equações de movimento que serão obtidas a seguir dependem da métrica completa que, desta vez, contém uma perturbação polar (com paridade $(-1)^l$), e depende da matriz (3.33), apresentando a seguinte forma:

$$g_{\mu\nu} = \sum_{l,m} \begin{pmatrix} e^\nu (-1 + H_0^{lm} Y^{lm}) & H_1^{lm} Y^{lm} & 0 & 0 \\ H_1^{lm} Y^{lm} & e^\lambda (1 + H_2^{lm} Y^{lm}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 (1 + K^{lm} Y^{lm}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta (1 + K^{lm} Y^{lm}) \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

Vamos agora considerar as componentes polares do vetor deslocamento do fluido. Como dito anteriormente, sob rotação a componente ξ_r se transforma como um escalar, e ξ_θ e ξ_ϕ como componentes de um vetor. No caso que estamos estudando agora é mais conveniente trabalhar na forma contravariante desses vetores. Para isso, basta fazer a contração com a métrica: $g^{\mu\nu}\xi_\nu = \xi^\mu$.

Portanto, considerando as funções com paridade par, a restrição $m = 0$ e usando a equação (3.13a), as componentes polares do vetor deslocamento do fluido são

$$\xi_{(p)}^r = \sum_{l,m} -\frac{W^{lm}(t,r)}{r^2 e^{\lambda/2}} Y^{lm}(\theta, \phi), \quad \xi_{(p)}^\theta = \sum_{l,m} \frac{V^{lm}(t,r)}{r^2} \partial_\theta Y^{lm}(\theta, \phi), \quad \xi_{(p)}^\phi = 0. \quad (3.53)$$

Adaptando à contravariância, a quadri-velocidade é encontrada da mesma forma que vimos em (3.39). Portanto, as componentes da quadri-velocidade do fluido referente ao deslocamento de paridade par são

$$u_{(p)}^t = \sum_{l,m} e^{-\nu/2} \left(1 + \frac{H_0^{lm}}{2} Y^{lm} \right), \quad u_{(p)}^r = \sum_{l,m} -\frac{\dot{W}^{lm}}{r^2 e^{(\nu+\lambda)/2}} Y^{lm}, \quad u_{(p)}^\theta = \sum_{l,m} \frac{\dot{V}^{lm}}{r^2 e^{\nu/2}} \partial_\theta Y^{lm}, \quad u_{(p)}^\phi = 0. \quad (3.54)$$

Durante o movimento de um fluido, é natural que o número de partículas em um dado volume varie. No entanto, o número total de partículas será sempre conservado. Matematicamente isso se traduz na equação (2.21) que, em teoria de perturbação, dá

$$\nabla_\alpha \left[(n_{(0)} + \delta n)(u_{(0)}^\alpha + \delta u^\alpha) \right] = 0, \quad (3.55)$$

sendo n a densidade de número de partículas no referencial de repouso do fluido. Em primeira ordem nas perturbações, essa equação pode ser reescrita como

$$\nabla_t \left(\delta n u_{(0)}^t \right) + \nabla_\alpha (n_{(0)} \delta u^\alpha) = 0, \quad (3.56)$$

uma vez que a componente $u_{(0)}^\alpha$ é não nula apenas para $\alpha = 0$. Expandindo essa expressão, e utilizando que $\delta n = \sum_{l,m} \delta n^{lm}(t,r) Y^{lm}(\theta, \phi)$, percebemos que pode ser escrita em termos de uma derivada total no tempo (ver *notebook* [28]):

$$\partial_t \left(\delta n^{lm} + \frac{n H_2^{lm}}{2} - \frac{l(l+1)n V^{lm}}{r^2} + n K^{lm} - \frac{e^{-\lambda/2} n W^{lm'}}{r^2} - \frac{e^{-\lambda/2} n' W^{lm}}{r^2} \right) = 0 \quad (3.57)$$

e, conseqüentemente, podemos resolvê-la para variação euleriana da densidade de número, δn^{lm3} .

Podemos então calcular a variação lagrangeana da densidade de número, que será útil em seguida. A perturbação lagrangeana de uma quantidade a mede a mudança nessa quantidade como medida por um observador que se move com o fluido, ou seja:

$$\Delta a = a(r + \xi^r, \theta + \xi^\theta, \phi + \xi^\phi) - a(r, \theta, \phi) = \delta a + \xi^j \partial_j a_{(0)}. \quad (3.58)$$

³Uma variação euleriana se baseia na comparação de quantidades antes e após a perturbação em um ponto fixo do espaço ao longo do tempo. Isso significa que em vez de acompanhar um elemento de fluido individual, mede-se a mudança de propriedades como velocidade, pressão e densidade do fluido em um ponto específico ao longo do tempo.

Levando em consideração que $n_{(0)} = n_{(0)}(r)$, temos que $\Delta n = \delta n + \xi^r n'$ e obtemos, finalmente,

$$\Delta n = \sum_{l,m} \left(-\frac{n H_2^{lm}}{2} + \frac{l(l+1)n V^{lm}}{r^2} - n K^{lm} + \frac{e^{-\lambda/2} n W^{lm'}}{r^2} \right) Y^{lm}. \quad (3.59)$$

Da primeira lei da termodinâmica, que se refere a perturbações lagrangeanas (ou seja, variações em um mesmo elemento de fluido), podemos encontrar uma equação para $\Delta \epsilon$ em termos de Δn . Seja

$$\Delta Q = \Delta E_{total} + p \Delta V. \quad (3.60)$$

Uma vez que os sistemas que estamos considerando têm temperatura desprezível, $\Delta Q = 0$, temos

$$\Delta E_{total} = \Delta(\epsilon V) = V \Delta \epsilon + \epsilon \Delta V = -p \Delta V. \quad (3.61)$$

Mas,

$$\Delta V = \Delta \frac{N}{n} = -\frac{N}{n^2} \Delta n = -V \frac{\Delta n}{n}, \quad (3.62)$$

onde usamos que $\Delta N = 0$, ou seja, a quantidade de partículas (N) num elemento de fluido não se altera. Assim, a perturbação lagrangeana na densidade de energia é

$$\Delta \epsilon = (p + \epsilon) \frac{\Delta n}{n}. \quad (3.63)$$

Por outro lado, dado que o índice adiabático de uma equação de estado é definido como

$$\Gamma = \frac{d \log p}{d \log \rho} = \frac{\rho}{p} \frac{dp}{d\rho} = \frac{n}{p} \frac{dp}{dn}, \quad (3.64)$$

podemos obter a perturbação lagrangeana na pressão como

$$\Delta p = p \Gamma \frac{\Delta n}{n}. \quad (3.65)$$

Tratamos os deslocamentos segundo a notação lagrangeana pois, como foi dito, a primeira lei da termodinâmica se refere a esse tipo de deslocamento. No entanto, estamos interessados em estudar os deslocamentos eulerianos na pressão e na densidade. Usando a expressão (3.58), obtemos

$$\delta \epsilon = (p + \epsilon) \frac{\Delta n}{n} + \sum_{l,m} \epsilon' r^{-2} e^{-\lambda/2} W^{lm} Y^{lm}, \quad (3.66a)$$

$$\delta p = \Gamma p \frac{\Delta n}{n} + \sum_{l,m} p' r^{-2} e^{-\lambda/2} W^{lm} Y^{lm}, \quad (3.66b)$$

onde, a partir de agora, o índice (0) será omitido das quantidades de equilíbrio. Consequentemente, podemos encontrar as componentes não nulas que representam as mudanças eulerianas no tensor de

energia-momento, que com índices mistos são (calculados no *notebook* [28])

$$\delta T_0^0 = - \sum_{l,m} \delta \epsilon^{lm} Y^{lm}; \quad (3.67a)$$

$$\delta T_1^1 = \delta T_2^2 = \delta T_3^3 = \sum_{l,m} \delta p^{lm} Y^{lm}; \quad (3.67b)$$

$$\delta T_0^1 = \sum_{l,m} (p + \epsilon) r^{-2} e^{-\lambda/2} \dot{W}^{lm} Y^{lm}; \quad (3.67c)$$

$$\delta T_0^2 = - \sum_{l,m} (p + \epsilon) r^{-2} \dot{V}^{lm} \partial_\theta Y^{lm}; \quad (3.67d)$$

$$\delta T_1^0 = \sum_{l,m} (p + \epsilon) r^{-2} e^{-\nu} \left(r^2 H_1^{lm} - e^{\lambda/2} \dot{W}^{lm} \right) Y^{lm}; \quad (3.67e)$$

$$\delta T_3^0 = \sum_{l,m} (p + \epsilon) e^{-\nu} \dot{V}^{lm} \partial_\theta Y^{lm}, \quad (3.67f)$$

onde definimos $\delta p = \sum_{l,m} \delta p^{lm}(t, r) Y^{lm}(\theta, \phi)$ e $\delta \epsilon = \sum_{l,m} \delta \epsilon^{lm}(t, r) Y^{lm}(\theta, \phi)$.

Das equações de campo de Einstein perturbadas, as componentes (t, t) , (t, r) , (r, r) , (r, θ) , (θ, θ) e (ϕ, ϕ) serão aquelas utilizadas do conjunto total de equações de movimento para perturbações polares. O conjunto usado se torna completo com equações dadas por $\delta(\nabla_\mu T_1^\mu) = 0$ e $\delta(\nabla_\mu T_2^\mu) = 0$. Essas equações formam um conjunto de equações acopladas que contém as funções de deslocamento do fluido, $V(t, r)$ e $W(t, r)$, e as funções da métrica perturbada $H_0(t, r)$, $H_1(t, r)$, $H_2(t, r)$ e $K(t, r)$, nas quais os índices lm serão omitidos a partir de agora.

A primeira equação que vamos analisar é

$$\delta(G_\theta^\theta - G_\phi^\phi) = 8\pi\delta(T_\theta^\theta - T_\phi^\phi). \quad (3.68)$$

A partir dela, conclui-se que $H_2 = H_0$, o que nos permite utilizá-la para eliminar H_2 das equações restantes.

Manipulando as demais componentes, vemos que as equações de valor inicial (ou seja, que envolvem apenas derivadas primeiras no tempo) são (segundo o *notebook* [28])

$$\begin{aligned} H'_0 = & 8e^\lambda \pi r \delta \epsilon - \frac{1}{2r} \left\{ e^\lambda [(l + l^2 - 2)K + (l + l^2 + 2 - 16\pi r^2 \epsilon)H_0] \right\} \\ & + \frac{1}{2} (5 + e^\lambda - 8e^\lambda \pi r^2 \epsilon) K' + r K''; \end{aligned} \quad (3.69a)$$

$$H_1 = \frac{1}{l(1+l)} \left\{ 16e^{\lambda/2} \pi (p + \epsilon) \dot{W} + r [3 - e^\lambda (1 + 8\pi r^2 p)] \dot{K} \right\} + \frac{1}{l+l^2} (2r^2 \dot{K}' - 2r \dot{H}_0); \quad (3.69b)$$

$$\dot{H}_1 = \frac{1}{r} \left\{ e^\nu H_0 [-1 + e^\lambda (1 + 8\pi r^2 p)] \right\} + e^\nu (H'_0 - K') \quad (3.69c)$$

e as equações de propagação (ou seja, que envolvem derivadas segundas no tempo) são

$$\begin{aligned} \ddot{K} = & 2e^\nu H_0 \left[4\pi(p + \epsilon) - \frac{e^{-\lambda}}{r^2} \right] - \frac{1}{r^2} [e^\nu(l + l^2 - 2)K] + \frac{1}{r} \{e^\nu [1 + e^{-\lambda} + 4\pi r^2(p - \epsilon)] K'\} \\ & + e^\nu(8\pi\delta\epsilon - 8\pi\delta p + e^{-\lambda}K''); \end{aligned} \quad (3.70a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{W} = & \frac{r}{2(p + \epsilon)} e^{\nu-\lambda/2} \{(\delta p + \delta\epsilon) [e^\lambda(1 + 8\pi r^2 p) - 1] + 2H_0 [-1 + e^\lambda(1 + 8\pi r^2 p)] (p + \epsilon) \\ & + 2r\delta p' + r(p + \epsilon)(H_0' - 2K')\}; \end{aligned} \quad (3.70b)$$

$$\ddot{V} = \frac{1}{2} e^\nu \left(H_0 - \frac{2\delta p}{p + \epsilon} \right). \quad (3.70c)$$

A estrutura das equações de movimento (3.69) e (3.70) reflete o fato de que os movimentos polares têm três graus de liberdade: dois, W e V , associados ao movimento do fluido; e um, K , associado às ondas gravitacionais.

3.5.2 Formas Alternativas das Equações Para Perturbações Polares

Existem diversas formulações possíveis para o problema de perturbação, mesmo dentro do calibre de Regge-Wheeler. Embora seja difícil prever se uma específica é mais vantajosa do ponto de vista das evoluções numéricas, neste estudo, analisaremos duas novas formas em que podemos reescrever o conjunto de equações que governam as perturbações polares; elas serão úteis para o estudo de perturbações em estrelas de nêutrons.

As equações de movimento encontradas nas seções anteriores estão em concordância com aquelas derivadas por Thorne e Campolattaro [18]. No entanto, Lindblom e Detweiler [56] mostraram que é possível reduzi-las a um sistema não singular de quarta ordem. Começamos impondo uma dependência harmônica para as funções H_0 , H_1 , H_2 , K , V , W , que é dada por [56]:

$$\begin{aligned} H_0(t, r) &= r^l e^{i\omega t} H_0(r), & H_1(t, r) &= r^{l+1} i\omega e^{i\omega t} r^l H_1(r), & H_2(t, r) &= r^l e^{i\omega t} H_2(r), \\ K(t, r) &= r^l e^{i\omega t} K(r), & V(t, r) &= r^l e^{i\omega t} V(r), & W(t, r) &= r^{l+1} e^{i\omega t} W(r), \end{aligned}$$

onde ω é a frequência de um certo modo de pulsação do corpo. Portanto, adotando essa notação, que considera um modo específico (mas genérico), com frequência e momento angular bem definidos, a métrica perturbada se torna:

$$\begin{aligned} ds^2 = & -e^\nu (1 + r^l H_0 Y^{lm} e^{i\omega t}) dt^2 - 2i\omega r^{l+1} H_1 Y_m^l e^{i\omega t} dt dr + e^\lambda (1 - r^l H_0 Y^{lm} e^{i\omega t}) dr^2 \\ & + r^2 (1 - r^l K Y^{lm} e^{i\omega t}) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Da mesma forma, as novas componentes para o vetor deslocamento de fluido são

$$\xi_{(p)}^r = \sum_{l,m} r^{l-1} e^{-\lambda/2} W(r) Y^{lm} e^{i\omega t}, \quad \xi^\theta = \sum_{l,m} -r^{l-2} V(r) \partial_\theta Y^{lm} e^{i\omega t}, \quad \xi^\phi = \sum_{l,m} -r^l \frac{V(r)}{(r \sin \theta)^2} \partial_\theta Y^{lm} e^{i\omega t}. \quad (3.72)$$

As cinco equações de perturbação para H_0 , H_1 , K , V , W não são todas independentes. De fato, essas funções devem satisfazer a seguinte relação algébrica como consequência das equações de Einstein (ver *notebook* [28]):

$$\begin{aligned} \left[\frac{3(1-e^{-\lambda})}{2}r + \frac{l^2+l-2}{2}r + 4\pi r^3 p \right] H_0 = & - \left\{ \frac{l(l+1)}{2} \left[\frac{(1-e^{-\lambda})}{2}r + 4\pi r^3 p \right] - \omega^2 r^3 e^{-(\lambda+\nu)} \right\} H_1 \\ & + \left\{ \frac{l^2+l-2}{2}r - \omega^2 r^3 e^{-\nu} - \frac{e^\lambda}{r} \left[\frac{(1-e^{-\lambda})}{2}r + 4\pi r^3 p \right] \left[\frac{3(1-e^{-\lambda})}{2}r - r + 4\pi r^3 p \right] \right\} K + 8\pi r^3 e^{\nu/2} X, \end{aligned} \quad (3.73)$$

onde X é uma nova variável perturbativa definida por⁴

$$X = \omega^2(p + \epsilon)e^{-\nu/2}V - \frac{1}{r}p'e^{(\nu-\lambda)/2}W + \frac{1}{2}(p + \epsilon)e^{\nu/2}H_0. \quad (3.74)$$

Felizmente, a equação (3.73) permite eliminar uma das variáveis a favor das demais. Escolhemos eliminar H_0 e, dessa forma, resolvendo também a equação (3.74) para V , podemos escrever as equações de movimento em termos apenas de H_1 , K , W , e X . A forma final das equações sob essas condições é extremamente extensa. Por esse motivo, vamos apresentar abaixo a forma simplificada das equações, que mantém a dependência em V (ver *notebook* [28])⁵:

⁴Há uma inconsistência entre a expressão X apresentada por Lindblom e Detweiler [56] e a encontrada neste trabalho. No artigo mencionado existe um ω^3 ao invés de ω^2 . Uma vez que os cálculos deste trabalho estão consistentes e de acordo com as outras expressões do artigo, podemos crer que a inconsistência é fruto apenas de um erro de digitação.

⁵A expressão para X' tem uma forma bastante diferente no artigo de Lindblom e Detweiler [56]. No entanto, verificamos que a forma apresentada no artigo é inconsistente com as demais equações ali presentes, o que nos motiva a seguir trabalhando com a forma derivada neste trabalho.

$$H'_1 = \frac{1}{r} \left\{ -lH_1 + e^\lambda [H_0 + K - 16\pi V(p + \epsilon) + H_1(-1 + 4\pi r^2(\epsilon - p))] \right\}; \quad (3.75a)$$

$$K' = \frac{1}{2r} \left[2H_0 + l(l+1)H_1 - (3+2l)K + e^\lambda(1 + 8\pi r^2 p)K - 16e^{\lambda/2}\pi W(p + \epsilon) \right]; \quad (3.75b)$$

$$W' = \frac{e^{-\nu}}{2rp\Gamma} \left\{ 2e^{\lambda/2}r^2\omega^2 V(p + \epsilon) + e^\nu [e^\lambda(1 + 8\pi r^2 p)W(p + \epsilon) - W(p + 2(l+1)p\Gamma + \epsilon) + e^{\lambda/2}(-2p\Gamma(l(l+1)V - r^2K) + r^2H_0[p(1 + \Gamma) + \epsilon])] \right\}; \quad (3.75c)$$

$$\begin{aligned} X' = \frac{e^{-(\lambda+\nu/2)}}{32\pi r^3(p + \epsilon)} & \left\{ e^{3\lambda+\nu}(1 + 8\pi r^2 p)^3 K(p + \epsilon) - 24e^{\nu+5\lambda/2}\pi(1 + 8\pi r^2 p)^2 W(p + \epsilon)^2 \right. \\ & + 8e^{\nu+\lambda/2}\pi W(p + \epsilon)(p + \epsilon - 2r\epsilon') + [4r^2\omega^2 H_1 + e^\nu(l(l+1)H_1 - 3K)][(3+l)(p + \epsilon) + r\epsilon'] \\ & + 16e^{3\lambda/2}\pi W(p + \epsilon)[-2r^2\omega^2(p + \epsilon) + e^\nu((l + 24\pi r^2 p)(p + \epsilon) + r(1 + 8\pi r^2 p)\epsilon')] \\ & - e^{2\lambda}(l + 8\pi r^2 p)[4r^2\omega^2(p + \epsilon)(-K + 8\pi V(p + \epsilon)) + e^\nu(-l(l+1)H_1(1 + 8\pi r^2 p)(p + \epsilon) \\ & + (p + \epsilon)((3 + l(3 + 2l))K + 8\pi p(2l(l+1)V + (4+l)r^2K) + 8\pi(2l(l+1)V - 3r^2K)\epsilon) \\ & + r(1 + 8\pi r^2 p)\epsilon K) - 2e^\nu H_0[-3(3+l)(p + \epsilon) + e^{2\lambda}(1 + 8\pi r^2 p)(p + \epsilon)(-1 - l(l+1) \\ & + 4\pi r^2(p + 3\epsilon)) - 3r\epsilon' + e^\lambda((6 + l(2 + l)^2 + 4\pi r^2((3 + 2l)p - 9\epsilon))(p + \epsilon) \\ & + r(1 + l + l^2 - 8\pi r^2 \epsilon)\epsilon')] + e^\lambda[4r^2\omega^2(-(p + \epsilon)(H_1 + (3 + l)K + 4\pi r^2 H_1(p - \epsilon) \\ & - 24\pi V(p + \epsilon))) + r(-K + 8\pi V(p + \epsilon))\epsilon'] + e^\nu((p + \epsilon)((3 + 2l(l+1)(3 + l))K \\ & + 16\pi p(l(l+1)V + (5 + 2l)r^2K) + 8\pi(2l(l+1)V - 5r^2K)\epsilon) + 2r(l + l^2 + 16\pi r^2 p)\epsilon'K \\ & \left. + l(l+1)H_1(-(4 + l + 8\pi r^2((3 + l)p - \epsilon))(p + \epsilon)) - r(l + 8\pi r^2 p)\epsilon') \right\}. \quad (3.75d) \end{aligned}$$

Como foi dito anteriormente, devemos considerar V e H_0 como combinações lineares de H_1 , K , W e X , obtidas através das equações (3.73) e (3.74).

O sistema de equações apresentado acima é manifestamente não singular exceto próximo ao centro do corpo massivo ($r \approx 0$) e será utilizado no capítulo 5 quando estudarmos os modos quasi-normais de estrelas de nêutrons no domínio das frequências.

Para concluir esta seção, vamos descrever uma segunda formulação alternativa, adaptada ao tratamento no domínio temporal, que também será utilizada no capítulo 5. Nesta formulação, desenvolvida por G. Allen, N. Andersson, K. Kokkotas e B. Schutz [57], obteremos um conjunto de equações de onda descrevendo ondas gravitacionais acopladas a ondas acústicas no fluido estelar.

As equações perturbadas de Einstein e as equações de movimento do fluido podem ser manipuladas a fim de gerar um conjunto de equações de evolução ainda mais reduzido. O espaço-tempo e as perturbações do fluido serão modelados por essas equações. Vamos definir, primeiramente, duas funções que descrevem o espaço tempo: $F(r, t)$ e $S(r, t)$. Elas estão relacionadas às funções padrão $K(t, r)$ e $H_0(t, r)$ por

$$F = rK; \quad (3.76a)$$

$$S = e^\nu \frac{(H_0 - K)}{r}. \quad (3.76b)$$

A terceira variável caracteriza o fluido e é definida como:

$$H(t, r) = \frac{\delta p}{p + \epsilon}, \quad (3.77)$$

sendo interpretada como a entalpia relativística perturbada. Esta variável claramente está definida apenas dentro da estrela, isto é, para $r < R$. Além, disso, nesta formulação, as variáveis do fluido, δp e $\delta \epsilon$, são relacionadas não através do índice adiabático e da primeira lei da termodinâmica, mas a partir da velocidade do som:

$$\delta p = C_s^2 \delta \epsilon, \quad (3.78)$$

onde $C_s^2 \equiv dp/d\epsilon$ é o quadrado da velocidade do som no fluido.

As equações para as funções métricas F e S vêm das componentes (r, r) e (θ, θ) das equações perturbadas de Einstein, respectivamente, e são dadas por (ver *notebook* [28])⁶:

$$\begin{aligned} \ddot{F} = & \frac{1}{C_s^2} [8e^\nu \pi r (C_s^2 - 1)(p + \epsilon) C_s^2] H + [-2e^{-\lambda} + 8\pi r^2 (p + \epsilon)] S + \frac{e^{\nu-\lambda}}{r^2} [-1 - e^\lambda (-1 + l + l^2 \\ & - 4\pi r^2 (p + 3\epsilon))] F + \frac{e^{\nu-\lambda}}{r} [-1 + e^\lambda (1 + 4\pi r^2 (p - \epsilon))] F' + e^{\nu-\lambda} F''; \end{aligned} \quad (3.79a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{S} = & \frac{e^{\nu-\lambda}}{r^4} \{ e^\nu [7 + e^{2\lambda} (1 + 8\pi r^2 p)^2 - 8e^\lambda (1 + 2\pi r^2 (p - \epsilon))] F + r^2 [-1 - e^\lambda (-1 + l + l^2 \\ & - 4\pi r^2 (3p + \epsilon))] S + r^3 [-1 + e^\lambda (1 + 4\pi r^2 (p - \epsilon))] S' + r^4 S'' \}. \end{aligned} \quad (3.79b)$$

Percebemos que a equação para S é uma equação de onda sem dependência explícita nas perturbações do fluido, mas acoplada a ele através de F . Além disso, note que S e F são ambas funções perturbativas definidas tanto dentro da estrela quanto no vácuo exterior.

Por fim, a equação que governa a variável de fluido, H , é encontrada através de $\delta(\nabla_\mu T_0^\mu) = 0$ e tem a forma (conforme calculado no *notebook* [28])⁷:

$$\begin{aligned} \ddot{H} = & \frac{1}{4r^3} \{ 4re^\nu [4\pi r^2 (p + \epsilon) - C_s^2 (1(1 + 1) - 12\pi r^2 (p + \epsilon))] H + e^{\nu-\lambda} [1 + C_s^2 + 2e^{2\lambda} (1 + 8\pi r^2 p)^2 \\ & - e^\lambda (3 + 24\pi r^2 p + C_s^2 (1 + 8\pi r^2 (7p + 2\epsilon)))] F + r^2 e^{-\lambda} [2C_s^2 + e^{2\lambda} (1 + C_s^2) (1 + 8\pi r^2 p)^2 \\ & - e^\lambda (1 + 8\pi r^2 p + C_s^2 (3 + 8\pi r^2 (9p + 2\epsilon)))] S + re^{\nu-\lambda} (C_s^2 - 1) [-1 + e^\lambda (1 + 8\pi r^2 p)] F' \\ & + 2r^2 e^{\nu-\lambda} [1 + C_s^2 + e^\lambda (-1 - 8\pi r^2 p + C_s^2 (3 + 8\pi r^2 (2p - \epsilon)))] H' - r^3 e^{-\lambda} (-1 + C_s^2) [-1 \\ & + e^\lambda (1 + 8\pi r^2 p)] S' + 4r^3 e^{\nu-\lambda} C_s^2 H' \}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Outra importante quantidade surge a partir da componente (t, t) da equação de Einstein pertur-

⁶O mesmo sistema de equações apresentado no artigo [57] possui sinais divergentes. Como os cálculos a seguir estão coerentes, pensamos em se tratar apenas de erros de digitação no artigo mencionado. Os erros são apontados no *notebook* [28].

⁷A mesma equação, para \ddot{H} , presente no artigo [57] possui sinais divergentes. Como os cálculos a seguir estão coerentes, pensamos em se tratar apenas de erros de digitação no artigo mencionado. A inconsistência é apontada no *notebook* [28].

bada e é conhecida como vínculo hamiltoniano:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} := & \frac{e^{\nu-\lambda}}{r} \{ [-1 + e^\lambda(1 + 4\pi r^2(p + \epsilon))]F + F'' \} - \frac{e^\nu}{r^2} (m + 4\pi p r^3)F' + \frac{e^\nu}{r^3} [12\pi r^3\epsilon - m - (l + l^2)r]F \\ & - r e^{-\lambda} S' + [16\pi r^3(p + \epsilon) - (l + l^2 + 4)r + 8m] \frac{S}{2r} + \frac{e^\nu}{C_s^2} 8\pi r(p + \epsilon)H = 0. \end{aligned} \quad (3.81)$$

De fato, as equações de Einstein se dividem em equações de evolução (apresentadas anteriormente) e equações de vínculo (como $\mathcal{H} = 0$). É possível mostrar que, se $\mathcal{H} = 0$ em $t = 0$ as equações de evolução garantem que $\mathcal{H} = 0$ em tempos posteriores [58]. Por isso, a princípio basta impor que o vínculo hamiltoniano seja satisfeito pela condição inicial. No entanto, no procedimento de evolução numérica das equações de perturbação, é interessante monitorar o comportamento de \mathcal{H} , pois seu valor é uma medida indireta do erro numérico. Na seção que aborda o cálculo dos modos quasi-normais de uma estrela de nêutrons no domínio das frequências, Sec. 5.3, iremos explorar essa relação em maior detalhe.

3.5.3 Perturbações Polares no Vácuo

Analogamente ao realizado na seção 3.4.2, vamos analisar o comportamento das equações para H_1 (3.75a), K (3.75b), W (3.75c) e X (3.75d) no meio externo ao corpo pulsante. No entanto, desta vez, já vamos assumir o caso em que a perturbação tem uma dependência temporal harmônica, $\propto e^{i\omega t}$. Uma consequência direta dessa escolha é que, no final, encontraremos uma equação diferencial ordinária em r , e não uma equação de onda dependente de t e r , como obtivemos para a parte axial. Na região em que $r > R$ as variáveis do fluido são identicamente zero e o espaço-tempo se reduz a Schwarzschild (2.13). Isso implica que

$$\begin{aligned} p &\rightarrow 0, & \nu &\rightarrow \log(1 - 2M/r), \\ \epsilon &\rightarrow 0, & \lambda &\rightarrow -\log(1 - 2M/r). \end{aligned}$$

Uma consequência direta é que, dada a equação (3.74), temos que $X \rightarrow 0$ e $W \rightarrow 0$. Portanto, impondo os mesmos limites às funções H_1 (3.75a) e K (3.75b) temos as equações que descrevem perturbações polares no espaço-tempo de Schwarzschild (*notebook* [28]):

$$\begin{aligned} \frac{dH_1^{\text{ext}}}{dr} = & - \frac{l^3 r(r - 2M) + l^2 r(2r - M) - l(12M^2 - 11Mr + r^2) - 2r(r - 3M + r^3\omega^2)}{r(r - 2M)[6M + (l^2 + l - 2)r]} H_1 \\ & - \frac{2[9M^2 + 2(l^2 + l - 4)Mr - (l^2 + l - 2)r^2 + r^4\omega^2]}{(r - 2M)^2[6M + (l^2 + l - 2)r]} K; \end{aligned} \quad (3.82a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dK^{\text{ext}}}{dr} = & - \frac{12(l + 1)M^2 + [l(3 + l)(2l - 3) - 6]Mr - r^2[l(l^2 + l - 2) + 2r^2\omega^2]}{r(r - 2M)[6M + (l^2 + l - 2)r]} K \\ & - \frac{l(l + 1)[4M + (l^2 + l - 2)r] + 4r^3\omega^2}{2r[6M + (l^2 + l - 2)r]} H_1. \end{aligned} \quad (3.82b)$$

Introduzimos agora uma importante variável que é dada pela combinação linear de H_1 e K :

$$\Phi_Z = \frac{r^{2+l}}{3M + \frac{1}{2}(l - 1)(l + 2)} K^{\text{ext}} - \frac{(1 - 2M/r)r^{2+l}}{3M + \frac{1}{2}(l - 1)(l + 2)} H_1^{\text{ext}}. \quad (3.83)$$

Esta é a função de Zerilli, uma função que descreve perturbações polares no espaço-tempo de Schwarzschild. A partir dela, podemos escrever H_1 e K em termos apenas de Φ_Z e sua derivada; segundo as manipulações realizadas no *notebook* [28], temos:

$$H_1^{\text{ext}} = - \frac{[6M^2 + 3(l^2 + l - 2)Mr - (l^2 + l - 2)r^2] \Phi_Z - r(r - 2M) [6M + (l^2 + l - 2)r] \Phi'_Z}{r^{l+1}(2M - r) [6M + (l^2 + l - 2)r]}; \quad (3.84a)$$

$$K^{\text{ext}} = \frac{1}{2r^{l+2}} \left\{ \frac{24M^2 + 6(l^2 + l - 2)Mr + l(l^2 - 1)(l + 2)r^2}{6M + (l^2 + l - 2)r} \Phi_Z + 2r(r - 2M) \Phi'_Z \right\}. \quad (3.84b)$$

E, portanto, substituindo (3.84) na equação (3.83), a equação que descreve perturbações gravitacionais polares em termos da função de Zerilli pode ser escrita na forma:

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 \Phi_Z''(r) + \frac{2M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \Phi_Z'(r) + (\omega^2 - V_Z) \Phi_Z(r) = 0, \quad (3.85)$$

onde V_Z é o potencial de Zerilli:

$$V_Z = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{2\alpha^2(\alpha + 1)r^3 + 6\alpha^2Mr^2 + 18\alpha M^2r + 18M^3}{r^3(\alpha r + 3M)^2}, \quad (3.86)$$

com

$$\alpha = \frac{(l - 1)(l + 2)}{2}. \quad (3.87)$$

3.5.4 Relação Entre Equações Axiais e Polares

Como vimos nas seções anteriores, a equação de Regge-Wheeler (3.51) e a equação de Zerilli (3.85) descrevem as perturbações gravitacionais axiais e polares, respectivamente. No entanto, elas não são totalmente independentes. O físico S. Chandrasekhar foi um dos primeiros a perceber que as funções Φ_Z e ϕ_{RW} estavam relacionadas e que seria possível escrever uma lei de transformação entre elas. Para entender melhor o problema, o artigo [59] pode ser consultado.

Considere uma transformação do tipo

$$\phi = A\Phi_Z + B\Phi'_Z$$

$$\phi' = C\Phi_Z + D\Phi'_Z.$$

Podemos investigar se, para certos valores de A , B , C e D , a função ϕ obedece a equação de Regge-Wheeler, (3.51). De fato, é possível verificar que as duas funções se relacionam segundo a lei de transformação (conforme mostrado no *notebook* [28]):

$$\frac{2(\alpha + \alpha^2 - 3Mi\omega)}{3} \phi_{RW} = A\Phi_Z + B\Phi'_Z; \quad (3.88a)$$

$$\frac{2(2M - r)(\alpha + \alpha^2 - 3Mi\omega)}{3r} \phi'_{RW} = C\Phi_Z + D\Phi'_Z. \quad (3.88b)$$

onde

$$A = -\frac{2[18M^3 - 9M^2r - 3Mr^2\alpha(1 + \alpha) - r^3\alpha^2(1 + \alpha)]}{3r^2(3M + r\alpha)}; \quad (3.89a)$$

$$B = \frac{2M(r - 2M)}{r}; \quad (3.89b)$$

$$C = \frac{2M(2M - r)[18M^3 - 9M^2r - 6Mr^2\alpha(1 + \alpha) - 2r^3\alpha^2(1 + \alpha)]}{r^4(3M + r\alpha)^2} - 2M\omega^2; \quad (3.89c)$$

$$D = -\frac{2(2M - r)[18M^3 - 9M^2r - 3Mr^2\alpha(1 + \alpha) - r^3\alpha^2(1 + \alpha)]}{3r^2(3M + r\alpha)}. \quad (3.89d)$$

Estas equações mostram que a equação de Regge-Wheeler e a equação de Zerilli não são independentes, de forma que uma implica a outra.

Capítulo 4

Modos Quasi-Normais de Buracos Negros

Um dos aspectos mais interessantes da detecção de ondas gravitacionais é sua conexão com a existência de buracos negros. Embora existam diversas formas de identificar indiretamente um buraco negro no universo, as ondas gravitacionais emitidas durante a coalescência de um sistema binário de buracos negros, em especial no estágio pós-fusão, carregam uma rica informação sobre a identidade desses objetos.

Devido a essa importância, neste capítulo iremos introduzir o conceito de modos quasi-normais e extrair essas frequências complexas a partir da equação de Regge-Wheeler utilizando duas abordagens: a do domínio temporal [20] e do domínio das frequências [15, 60]. Por fim, vamos discutir a primeira detecção de ondas gravitacionais, observada em 2015: GW150914 [6, 61].

4.1 Definição dos Modos Quasi-Normais

Os modos quasi-normais (MQN) são soluções particulares das equações diferenciais que descrevem a evolução de perturbações em sistemas físicos como buracos negros, estrelas de nêutrons e outros objetos astrofísicos. Esses modos são chamados de “quasi-normais” porque suas frequências complexas têm uma parte real e uma parte imaginária, codificando a frequência de oscilação e a taxa de decaimento, respectivamente. A principal diferença entre um “modo normal” e um modo “quasi-normal” é que este último descreve sistemas abertos, e, dessa forma, tais modos não são estacionários. Isso reflete o fato de que o espaço-tempo de um objeto que pulsa com oscilações não radiais irradia energia para o infinito, na forma de ondas gravitacionais.

Vimos nas seções 3.4.2 e 3.5.3 que perturbações gravitacionais no espaço-tempo de Schwarzschild podem ser escritas em termos de uma única função mestre, que no caso axial é a função de Regge-Wheeler (RW) Ψ_{RW} (3.49) e no caso polar é a função de Zerilli Ψ_Z . Em ambos os casos as funções

mestre obedecem uma equação diferencial parcial de segunda ordem dada por

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi - \frac{\partial^2}{\partial r_*^2}\Psi + V(r_*)\Psi = 0. \quad (4.1)$$

Nessa equação, r_* é a coordenada tartaruga, definida pela Eq. (3.48), e que varia de $-\infty$ a ∞ , onde $-\infty$ corresponde ao horizonte de eventos do buraco negro ($r = 2M$) e ∞ ao infinito espacial ($r \rightarrow \infty$). Um gráfico para o potencial de Regge-Wheeler (3.50) e para o potencial de Zerilli (3.86) pode ser encontrado na Fig. 4.1.

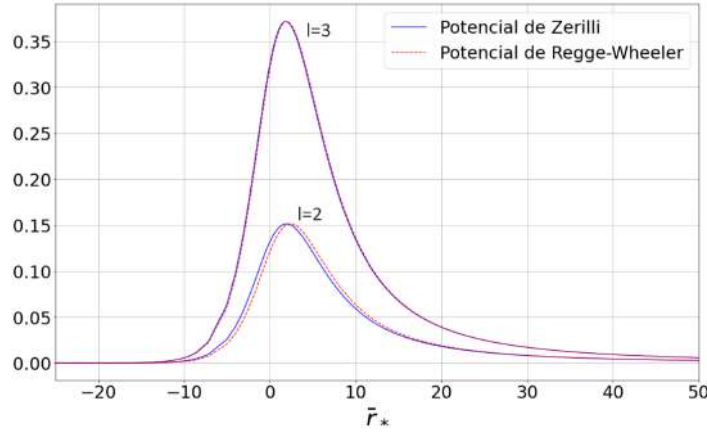


Figura 4.1: Potencial de Regge-Wheeler e Zerilli para $l = 2$ (que representa o modo quadruplar) e $l = 3$.

No caso dos buracos negros, uma oscilação amortecida pode parecer um fenômeno bastante contra-intuitivo. Ao contrário das estrelas, buracos negros não possuem material que sustente tal oscilação. Para investigar a origem desse resultado, vamos estudar as condições que permitem a existência de tais soluções. Começamos notando que tanto o potencial de Regge-Wheeler quanto o de Zerilli são positivos e satisfazem

$$V \rightarrow 0, \text{ se } r_* \rightarrow \pm\infty. \quad (4.2)$$

Dessa forma, esses potenciais não permitem estados ligados, o que torna impossível fazer uma expansão em modos normais (discretos). De acordo com o comportamento do potencial próximo aos limites $r_* \rightarrow \pm\infty$, temos que a solução geral pode ser escrita, nesses limites, como a soma de uma onda que se propaga para a esquerda e de uma onda que se propaga para a direita, ambas com velocidade $c = 1$:

$$\Psi(t, r_*) = f_A(t + r_*) + f_B(t - r_*), \text{ se } r_* \rightarrow \pm\infty, \quad (4.3)$$

onde f_A e f_B representam ondas direcionadas para dentro e direcionadas para fora, respectivamente. As condições de contorno que definem os modos quasi-normais são tais que as soluções devem ser *direcionadas para fora* no infinito ($r_* \rightarrow \infty$) e *direcionadas para dentro* no horizonte ($r_* \rightarrow -\infty$), ou seja,

$$\Psi(t, r_*) \rightarrow f_A(t + r_*), \text{ se } r_* \rightarrow -\infty, \quad (4.4a)$$

$$\Psi(t, r_*) \rightarrow f_B(t - r_*), \text{ se } r_* \rightarrow +\infty. \quad (4.4b)$$

Isso significa que não consideramos ondas incidentes do infinito (que poderiam ser consideradas em outros problemas, como o de espalhamento), e consideraremos que o horizonte de eventos absorve completamente qualquer onda incidente, que é o comportamento esperado classicamente.

Vamos considerar agora o caso em que a perturbação possui uma dependência harmônica no tempo, ou seja,

$$\Psi(t, r_*) = e^{i\omega t} \phi(r_*). \quad (4.5)$$

Inserindo essa dependência na equação (4.1), ficamos com uma equação diferencial ordinária em r_* , que tem a forma da equação (3.51) mencionada no capítulo anterior:

$$\frac{d^2}{dr_*^2} \phi + [\omega^2 - V(r_*)] \phi = 0. \quad (4.6)$$

As condições de contorno que definem os modos quasi-normais, (4.4), podem ser expressas, de forma alternativa, como condições sobre ϕ :

$$\phi \sim e^{i\omega r_*}, \quad r_* \rightarrow -\infty \quad (4.7a)$$

$$\phi \sim e^{-i\omega r_*}, \quad r_* \rightarrow +\infty. \quad (4.7b)$$

Note que a equação (4.6) é homogênea; isso significa que, se ϕ é solução, $A\phi$, com A constante, também é. Em geral, a solução de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem é determinada por duas condições de contorno, mas, por causa dessa liberdade de reescalonamento, só uma condição de contorno é necessária. Ou seja, quando fixamos A , efetivamente fixamos uma condição de contorno e só é necessário exigir mais uma. Portanto, as condições (4.7) não podem ser satisfeitas simultaneamente em geral, isto é, para valores arbitrários de ω . Consequentemente, apenas um conjunto discreto de frequências complexas ω satisfaz essas condições de contorno. Essas são as frequências dos modos quasi-normais e as funções de onda associadas ϕ , soluções da equação (4.6), são os modos quasi-normais. Nas seções 4.2 e 4.3, discutiremos duas abordagens para determinar essas frequências dos modos quasi-normais, via a evolução numérica da Eq. (4.1) (“domínio temporal”) ou através do problema de auto-valor posto em (4.6) (“domínio das frequências”).

Vale notar que uma definição alternativa, mais formal, dos modos quasi-normais pode ser dada resolvendo o problema temporal (4.1) formalmente via transformadas de Laplace e identificando os modos quasi-normais como pólos no plano $\omega \in \mathbb{C}$ da função de Green associada (ver, por exemplo, a Ref. [62]). No entanto, a definição aqui exposta, em termos das condições de contorno que definem tais modos, será suficiente para os nossos propósitos.

4.2 Domínio Temporal

No domínio temporal, estudamos o comportamento do sistema em função do tempo. Isso envolve analisar a perturbação no espaço-tempo de um buraco negro como um problema de valor inicial. Entendendo como essas perturbações se propagam e evoluem ao longo do tempo, podemos entender melhor as

propriedades dinâmicas e o comportamento desses objetos.

No caso da equação de Regge-Wheeler (3.49) derivada anteriormente, e definindo as coordenadas adimensionais

$$\bar{r} = \frac{rc^2}{GM}, \quad \bar{r}_* = \frac{r_*c^2}{GM}, \quad \bar{t} = \frac{tc^3}{GM}, \quad (4.8)$$

o sistema que estamos interessados em evoluir numericamente tem a seguinte forma:

$$\partial_{\bar{t}} \begin{bmatrix} \Psi_{RW} \\ \partial_{\bar{t}} \Psi_{RW} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{\bar{t}} \Psi_{RW} \\ \partial_{\bar{r}_*}^2 \Psi_{RW} - \bar{V}_{RW}(r) \Psi_{RW} \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

com

$$\bar{V}_{RW} = \left(1 - \frac{2}{\bar{r}}\right) \left(\frac{l(l+1)}{\bar{r}^2} - \frac{6}{\bar{r}^3}\right). \quad (4.10)$$

Em seguida, é necessário estabelecer a condição inicial, que junto às condições de contorno apresentadas na seção anterior, será utilizada para a evolução da equação de Regge-Wheeler. Em particular, vamos considerar que o primeiro pulso perturbativo, que corresponde à condição inicial, pode ser caracterizado por uma gaussiana:

$$\Psi_{RW}(\bar{t} = 0, \bar{r}_*) = e^{(\bar{r}_* - r_0)^2 / \sigma^2}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \Psi_{RW}(\bar{t} = 0, \bar{r}_*) = 0, \quad (4.11)$$

onde r_0 é o ponto onde está centrada a gaussiana e σ é a sua largura.

Agora, as condições de contorno no horizonte de eventos ($\bar{r} \rightarrow -\infty$) e no infinito espacial ($\bar{r} \rightarrow \infty$), dadas na Eq. (4.4), podem ser expressas de uma forma mais conveniente para sua implementação numérica:

$$\frac{\partial \Psi_{RW}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial \Psi_{RW}}{\partial \bar{r}_*} (\bar{r}_* \rightarrow -\infty) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Psi_{RW}}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial \Psi_{RW}}{\partial \bar{r}_*} (\bar{r}_* \rightarrow +\infty). \quad (4.12)$$

Estabelecidos os parâmetros necessários para modelar o nosso problema, podemos seguir com a resolução da equação diferencial utilizando métodos numéricos e determinar a evolução temporal de Ψ_{RW} . O método numérico utilizado para integrar o sistema na direção temporal foi o Runge-Kutta de terceira ordem. Já as derivadas espaciais do sistema (4.9) foram escritas em segunda ordem de precisão em termos de diferenças finitas centradas, isto é,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{r}_*^2} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta \bar{r}_*^2}, \quad (4.13)$$

onde $\Delta \bar{r}_*$ é o tamanho da grade espacial. A expressão (4.13) foi usada exceto nas bordas do domínio espacial, onde expressões de segunda ordem “para frente” e “para trás” foram utilizadas¹. Agora, note que o potencial de RW é dado em termos de \bar{r} . Como a equação (3.48), que dá \bar{r}_* em termos de \bar{r} , não é uma equação inversível analiticamente, usamos a interpolação pra criar um função do tipo $\bar{r}(\bar{r}_*)$. Dessa forma, podemos evoluir as equações do sistema no tempo.

A imagem 4.2 abaixo representa um diagrama espaço-temporal que ilustra a simulação realizada. A grade radial do problema numérico está espaçada por $\Delta \bar{r}_* \approx 0.3$ e a grade temporal por $\Delta \bar{t} = 0.8 \Delta \bar{r}_*$,

¹Para mais informações sobre os coeficientes das diferenças finitas consulte o artigo [63].

respeitando a condição CFL². A condição inicial é uma gaussiana com $\sigma = 1$, cujo pico está centrado em $\bar{r}_* = 20$. A figura ilustra em azul a localização aproximada da barreira de potencial. O pulso ou condição inicial se divide em dois, um que se dirige ao horizonte de eventos, outro ao infinito espacial (veja o *storyboard* 4.3 mais à frente). Um observador fixo em $\bar{r}_* = 100$ registra a amplitude da onda. Na região em que o potencial é desprezível, o pulso se propaga mantendo aproximadamente sua forma. No entanto, na região em que o potencial é relevante, existe uma probabilidade maior de reflexão, podendo haver reflexões múltiplas, conforme indicado pelas setas vermelhas. É justamente essa parcela do sinal refletida pelo potencial de Regge-Wheeler que vai carregar informações sobre os modos de oscilação do buraco negro. As fronteiras do domínio computacional são posicionadas em $\bar{r}_* = \pm 300$. Embora nessa região o potencial de Regge-Wheeler seja muito pequeno, ele não é estritamente nulo, de forma que as equações (4.12) são aproximadas. Por isso, existe a possibilidade de uma pequena reflexão espúria pelas paredes do domínio. Quando esse pulso chega ao observador, interrompemos a “coleta de dados”, como indicado pelo corte em vermelho.

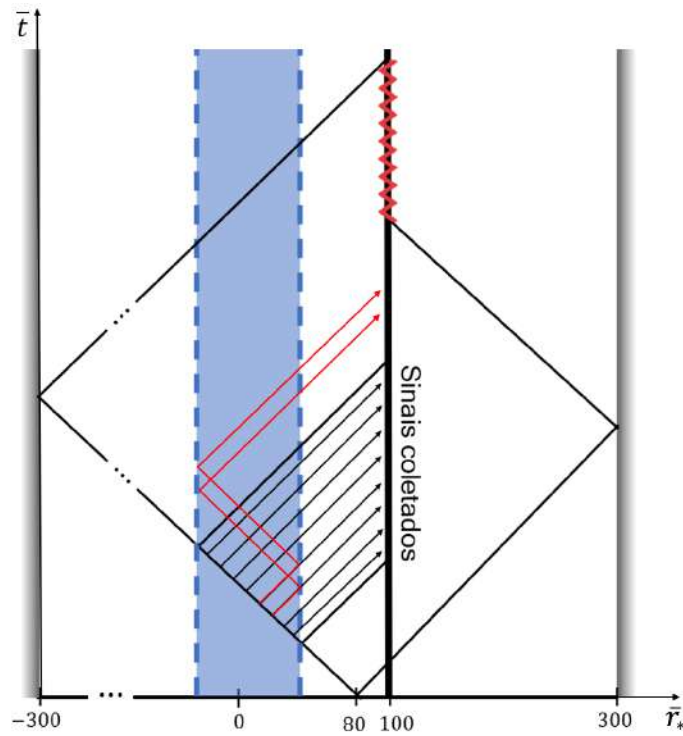


Figura 4.2: Diagrama espaço-temporal ilustrativo da simulação numérica.

A figura 4.3 mostra um *storyboard* da evolução temporal de Ψ_{RW} .

²A condição CFL (*Courant-Friedrichs-Lewy*) é uma restrição que impõe limites ao passo de tempo em simulações numéricas de equações diferenciais hiperbólicas. Ela garante que a velocidade de propagação do sinal não seja excedida pelo passo de tempo utilizado, evitando instabilidades numéricas.

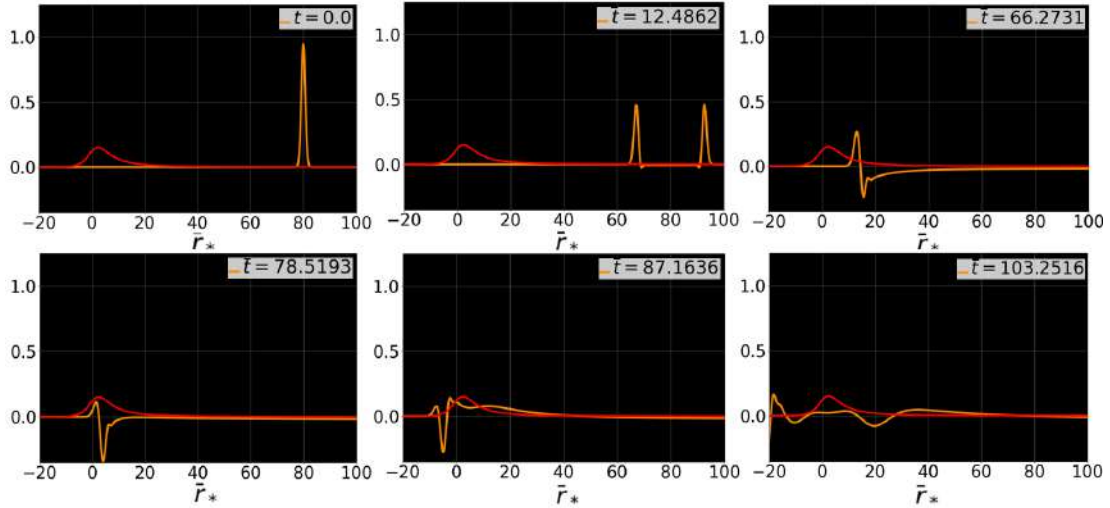


Figura 4.3: Evolução temporal da onda $\Psi_{RW}(\bar{t}, \bar{r}_*)$, representada em laranja. O potencial de Regge-Wheeler, $V_{RW}(\bar{r}_*)$, é representado em vermelho. A legenda mostra os valores de \bar{t} correspondentes.

O sinal registrado pelo observador está ilustrado na figura 4.4, tanto em uma representação linear quanto em uma representação logarítmica. A parte pontilhada contém um pico associado à passagem do primeiro pulso (aquele que não interage com o buraco negro) pelo observador. Como mostrado na figura 4.2 vamos nos ater apenas aos sinais que foram refletidos pela barreira de potencial, em especial a parte representada pela linha sólida da imagem 4.4. A separação entre esses dois tipos de sinais foi feita em $\bar{t}_0 = 190$, um limite aproximado de onde o sinal passa a ser caracterizado por apenas uma componente de frequência.

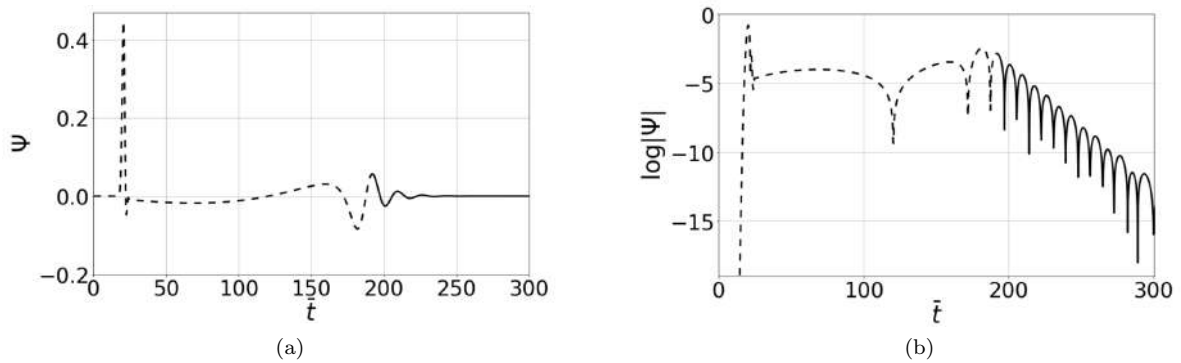


Figura 4.4: Evolução temporal da função de Regge-Wheeler para $l = 2$ na representação (a) linear e (b) logarítmica.

A característica mais marcante dessa parte do sinal é a oscilação com uma frequência bem definida e com um amortecimento exponencial, que domina a o sinal depois da passagem do pulso inicial e antes que o amortecimento torne a oscilação fraca em tempos tardios.

4.2.1 Determinando as Frequências: Transformada Discreta de Fourier

A Transformada Discreta de Fourier (DFT, do inglês *Discrete Fourier Transform*) é uma técnica utilizada para analisar o espectro de frequências de um sinal discreto no domínio temporal. Ela permite

a decomposição de um sinal em suas componentes de frequência.

A DFT é definida matematicamente da seguinte forma. Dada uma sequência de N pontos amostrados em intervalos igualmente espaçados de tempo, $t_n = n\Delta t$, denotados por $x_n = x(t_n)$, onde n varia de 0 a $N - 1$, a DFT de x_n é uma sequência complexa X_k , onde k varia de 0 a $N - 1$, e é dada pela seguinte equação [64]:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-2i\pi nk/N}. \quad (4.14)$$

No nosso caso, a quantidade x_n refere-se aos pontos que constituem o sinal captado no ponto r_{obs} em tempos discretos correspondentes ao passo da simulação.

A DFT calcula a contribuição de cada frequência no sinal da amostra. O valor X_k é uma medida da amplitude e fase da componente de frequência correspondente ao índice k , que por sua vez está relacionado à frequência f_k pelo seguinte mapeamento:

$$f_k = k \cdot f_s / N, \quad (4.15)$$

onde $f_s = 1/\Delta t$ é a frequência de amostragem, ou seja, o número de amostras por unidade de tempo. Note que X_k é um número complexo que codifica tanto a amplitude quanto a informação de fase de um componente $e^{-2i\pi nk/N}$ da função x_n . A amplitude pode ser calculada como:

$$A = |X_k| = \sqrt{\text{Re}(X_k)^2 + \text{Im}(X_k)^2}. \quad (4.16)$$

Podemos recuperar a dimensionalidade da frequência de forma que

$$f = \bar{f} \frac{c^3}{GM_\odot} \left(\frac{M_\odot}{M} \right). \quad (4.17)$$

Então, aplicando a DFT ao sinal captado pelo observador, obtemos o espectro mostrado na Fig. 4.5, onde o eixo das frequências representa a quantidade $f_\odot \equiv \bar{f}c^3/(GM_\odot)$, a frequência (em kHz) para um buraco negro de massa solar.

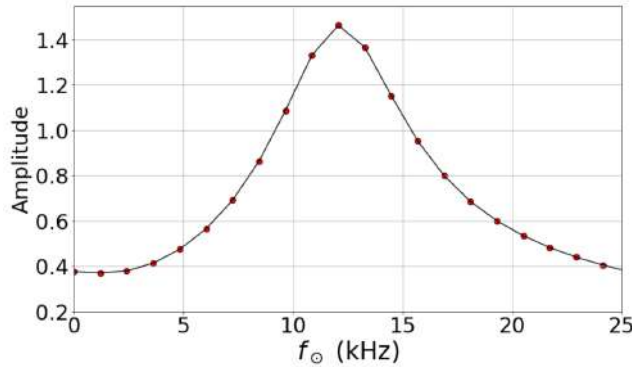


Figura 4.5: Amplitude da Transformada Discreta de Fourier do sinal captado pelo observador, $\Psi_{RW}(r_{obs})$, em função da frequência, considerando um buraco negro com massa solar.

O pico do sinal, para um buraco negro de massa arbitrária, está, portanto, em

$$f \approx 12 \text{ kHz} \left(\frac{M_\odot}{M} \right). \quad (4.18)$$

Existe uma incerteza associada à frequência que está relacionada ao tempo total do sinal $T = N\Delta t$, isto é, $\Delta f \sim 1/T$. No nosso caso, $T \approx 0.8 \text{ ms}(M/M_\odot)$ e consequentemente, $\Delta f \approx 1.2 \text{ kHz}$. Assim, a frequência f pode ser representada como $f = (12 \pm 1) \text{ kHz}(M_\odot/M)$. Essa frequência é interpretada como a frequência de oscilação do modo quasi-normal fundamental, com $l = 2$, de um buraco negro de Schwarzschild com massa M .

4.2.2 Determinando as Frequências: Método de Ajuste

Uma forma alternativa de encontrar f é através do método de ajuste, ou *fit*, que consiste em ajustar uma solução com a forma

$$\Psi(t) = Ae^{-t/\tau} \cos(\omega t + \delta) \quad (4.19)$$

aos dados coletados. Aqui, A representa a amplitude, τ o tempo de decaimento, $f = \omega/(2\pi)$ a frequência linear e δ uma constante de fase. Então, a solução genérica é ajustada de forma que obtemos o resultado apresentado na figura 4.6.

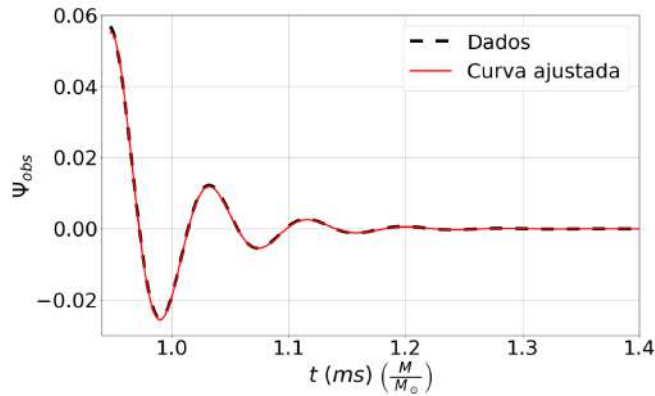


Figura 4.6: Sinal captado pelo observador de acordo com os dados calculados numericamente (preto, tracejado) e curva gerada pelo método de *fit* (vermelho).

Assim, é possível aplicar o método de *fit* ao sinal captado pelo observador, obtendo $f \approx 11.89 \text{ kHz}(M_\odot/M)$, em concordância com o resultado encontrado anteriormente. Além disso, somos capazes de extrair o tempo de decaimento do sinal, que é: $\tau \approx 0.05 \text{ ms}(M/M_\odot)$.

4.3 Domínio das Frequências

No domínio das frequências, assumimos uma dependência harmônica para a parte temporal das soluções das equações de perturbação:

$$\Psi(t, r) = e^{i\omega t} \phi(r), \quad (4.20)$$

onde $\omega \in \mathbb{C}$. Com isso, transformaremos o problema de valor inicial em um problema de autovalores para as frequências ω . Como foi dito anteriormente, a parte imaginária da frequência complexa determina a taxa de amortecimento das oscilações, enquanto a parte real representa a frequência de oscilação. Esse tipo de abordagem destaca as características espectrais dos modos, e permite uma análise mais precisa das frequências de oscilação e taxas de amortecimento.

A equação de Regge-Wheeler (3.49) pode ser escolhida como ferramenta para os cálculos da dinâmica perturbativa devido à sua simplicidade em comparação com a equação de Zerilli (3.85). Isto é possível uma vez que o espectro axial é igual ao polar no caso de um buraco negro de Schwarzschild, dada a relação entre as duas soluções descrita anteriormente em (3.88). Portanto, substituindo o potencial V_{RW} (3.50) na equação de Regge-Wheeler, encontramos:

$$r(r-2M)\phi_{RW}'' + 2M\phi_{RW}' + \left[\frac{r^3\omega^2}{r-2M} - l(l+1) + \frac{6M}{r} \right] \phi_{RW} = 0. \quad (4.21)$$

E, como discutido anteriormente, as soluções em que estamos interessados estão sujeitas às condições de contorno (4.7). Substituindo a expressão para a coordenada de tartaruga, essas condições podem ser formuladas da seguinte maneira:

$$\phi_{RW} \xrightarrow{r \rightarrow 2M} (r-2M)^{2iM\omega} \quad \text{e} \quad \phi_{RW} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} r^{-2iM\omega} e^{-i\omega r}. \quad (4.22)$$

As condições de contorno no horizonte de eventos do buraco negro e no infinito espacial podem ser incorporadas em uma representação especial da solução [60], contendo uma série de potências dada por³

$$\phi_{RW}(r) = (r-2M)^{2Mi\omega} r^{-4Mi\omega} e^{-i\omega(r-2M)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^n a_n, \quad (4.23)$$

onde a expansão se dá na variável $y \equiv 1 - 2M/r$. Inserindo esse *ansatz* na Eq. (4.21) e, após a aplicação das derivadas, realizando a substituição $r \rightarrow 2M/(1-y)$, vemos que a mesma pode ser escrita como

$$\alpha_0 a_1 + \beta_0 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n a_{n+1} + \beta_n a_n + \gamma_n a_{n-1}] y^n = 0. \quad (4.24)$$

Portanto, os coeficientes de expansão dessa série de potências são dados por uma relação de recorrência de três termos, determinada por

$$\alpha_0 a_1 + \beta_0 a_0 = 0, \quad (4.25a)$$

$$\alpha_n a_{n+1} + \beta_n a_n + \gamma_n a_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, 3... \quad (4.25b)$$

³Esta equação difere da apresentada em [60] apenas pelo fator $-\omega \rightarrow \omega$, uma vez que estamos considerando as exponenciais da dependência harmônica da forma $e^{i\omega t}$, por consistência com a convenção adotada no restante da dissertação.

onde os coeficientes são (conforme *notebook* [28])

$$\alpha_n = 1 + 2n + n^2 + 4Mi\omega + 4Mi\omega n; \quad (4.26a)$$

$$\beta_n = 3 - l(l+1) - 2n - 2n^2 - 8Mi\omega(1-2n) + 32M^2\omega^2; \quad (4.26b)$$

$$\gamma_n = n^2 + 8Mi\omega n - 16M^2\omega^2 - 4. \quad (4.26c)$$

Como fizemos anteriormente, é possível definir uma frequência adimensional reescalando ω pela massa do buraco negro, da forma $\bar{\omega} = M\omega$.

4.3.1 Determinando as Frequências: Fração Continuada

A série na solução (4.23) converge apenas para os valores de ω que correspondem às frequências quasi-normais [60]. Além disso, a condição de contorno no infinito espacial é satisfeita se os coeficientes da relação de recorrência, (4.26), satisfazem a seguinte relação de fração continuada, válida para relações de recorrência de 3 termos [65]:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} - \frac{\alpha_{n+1}\gamma_{n+2}}{\beta_{n+2} - \frac{\alpha_{n+2}\gamma_{n+3}}{\beta_{n+3} - \dots}}}. \quad (4.27)$$

Portanto, é possível obter uma equação característica para as frequências quasi-normais calculando o valor da fração continuada (4.27) em $n = 0$ e usando a equação (4.25a) como uma “condição de contorno” para $n = 0$, de forma que

$$\frac{a_1}{a_0} = -\frac{\beta_0}{\alpha_0} \quad (4.28)$$

e conseqüentemente,

$$-\frac{\beta_0}{\alpha_0} = \frac{-\gamma_1}{\beta_1 - \frac{\alpha_1\gamma_2}{\beta_2 - \frac{\alpha_2\gamma_3}{\beta_3 - \dots}}}. \quad (4.29)$$

A presente equação pode ser reescrita de uma forma mais simples na notação de frações continuadas:

$$0 = \beta_0 - \frac{\alpha_0\gamma_1}{\beta_1 - \frac{\alpha_1\gamma_2}{\beta_2 - \frac{\alpha_2\gamma_3}{\beta_3 - \dots}}} \equiv f(\omega). \quad (4.30)$$

As frequências dos modos quasi-normais são então soluções da equação $f(\omega) = 0$. Ela envolve uma fração infinita cujos elementos são funções diferentes da frequência ω , o que leva à hipótese de que a equação deva ter um número infinito de raízes.

A figura 4.7 representa a projeção em um plano de um gráfico 3D de $|f(\bar{\omega})|$ em termos de $\text{Re}(\bar{\omega})$ e $\text{Im}(\bar{\omega})$. Para construí-lo, a fração continuada (4.30) foi truncada em $n = 100$. Regiões em que $|f(\bar{\omega})|$ é máximo são representadas em tons mais claros e aquelas onde $|f(\bar{\omega})|$ é mínimo são mais escuras. Os

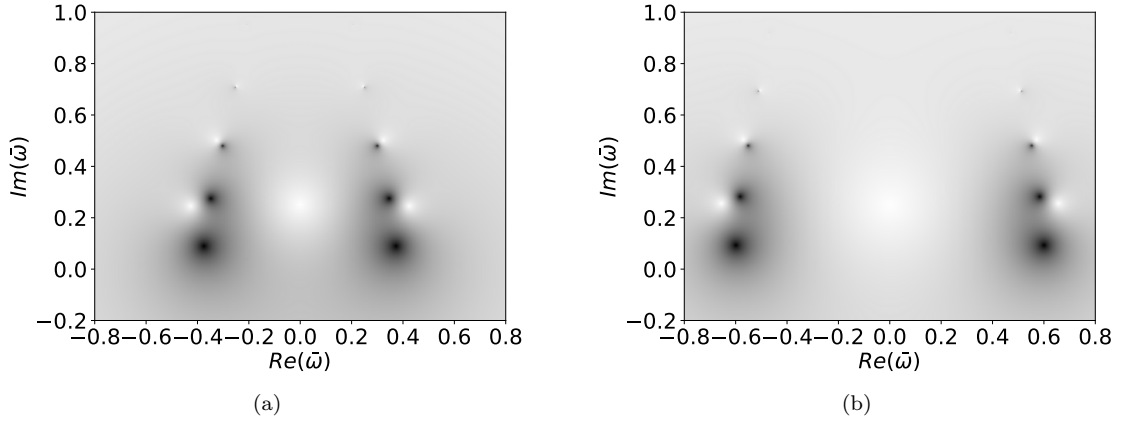


Figura 4.7: Gráfico do valor absoluto do resíduo $f(\bar{\omega})$ em termos da parte real e imaginária de $\bar{\omega}$. As regiões escuras mostram pontos em que o resíduo é mínimo e dão a localização aproximada dos modos quasi-normais para (a) $l = 2$ e (b) $l = 3$.

valores de $\bar{\omega}$ para os quais $f(\bar{\omega}) = 0$ fornecem as frequências que estamos buscando. Através dessa figura é possível obter a localização aproximada dessas raízes para $l = 2$ e $l = 3$. Dessa forma, a fim de encontrar as soluções exatas podemos utilizar um método numérico de busca de raízes, cujo valor do chute inicial é extraído por meio das coordenadas aproximadas dos pontos pretos da figura. Neste trabalho usamos a função *findroot* do pacote *mpmath* no *Python* para encontrar tais pontos.

Através do método descrito no parágrafo anterior, encontramos, então, as frequências complexas dos modos quasi-normais. A tabela 4.1 apresenta a parte real da frequência angular adimensional $\bar{\omega}_R = \text{Re}(\omega)M$, e a parte imaginária, dada pela taxa de decaimento adimensional $\bar{\omega}_I = \text{Im}(\omega)M = M/\tau$ para o modo fundamental e os modos seguintes, conhecidos como modos excitados ou harmônicos superiores. Ao lado, temos a tabela 4.2 com os respectivos valores de f em $\text{kHz}(M_\odot/M)$ e τ em $\text{ms}(M/M_\odot)$.

	$l = 2$		$l = 3$	
	$\bar{\omega}_R$	$\bar{\omega}_I$	$\bar{\omega}_R$	$\bar{\omega}_I$
0	(0.373672, 0.088962)		(0.599443, 0.092703)	
1	(0.346711, 0.273915)		(0.582643, 0.281298)	
2	(0.301053, 0.478277)		(0.552197, 0.477948)	
3	(0.251501, 0.705149)		(0.511961, 0.690337)	

Tabela 4.1: Modos quasi-normais para $l = 2$ e $l = 3$. Parte real e imaginária da frequência adimensional $\bar{\omega} = \omega M$.

	$l = 2$		$l = 3$	
	f	τ	f	τ
0	(12.074268, 0.055366)		(19.369513, 0.053132)	
1	(11.203101, 0.017982)		(18.826680, 0.017510)	
2	(9.727791, 0.010298)		(17.842852, 0.010305)	
3	(8.126625, 0.006985)		(16.542771, 0.007135)	

Tabela 4.2: Modos quasi-normais para $l = 2$ e $l = 3$. Frequência f e tempo de decaimento τ , respectivamente em unidades de $\text{kHz}(M_\odot/M)$ e $\text{ms}(M/M_\odot)$.

Perceba que a frequência para o modo fundamental que encontramos anteriormente através da análise no domínio temporal está de acordo com os dados encontrados por meio do método das frações continuadas para o domínio das frequências. Porém, em geral o método das frequências permite uma determinação mais precisa das frequências, especialmente aquelas de harmônicos superiores.

Podemos comparar os resultados obtidos com os valores de referência apresentados no artigo [60] e reproduzidos na tabela abaixo. A diferença relativa entre os valores é aproximadamente da ordem de 10^{-6} , o que indica uma concordância muito próxima entre os valores calculados.

	$l = 2$		$l = 3$			$l = 2$		$l = 3$	
	$\bar{\omega}_R$	$\bar{\omega}_I$	$\bar{\omega}_R$	$\bar{\omega}_I$		f	τ	f	τ
0	(0.373671, 0.088962)		(0.599443, 0.092703)		0	(12.074262, 0.055366)		(19.369520, 0.053132)	
1	(0.346711, 0.273915)		(0.582644, 0.281298)		1	(11.203101, 0.017982)		(18.826686, 0.017510)	
2	(0.301053, 0.478277)		(0.551685, 0.479093)		2	(9.727792, 0.010297)		(17.842623, 0.010281)	
3	(0.251505, 0.705148)		(0.511962, 0.690337)		3	(8.126756, 0.006984)		(16.542774, 0.007149)	

Tabela 4.3: Valores de referência para modos quasi-normais para $l = 2$ e $l = 3$ [60]. Para efeitos de comparação, os dados foram adaptados a fim de conter o mesmo sinal das exponenciais da dependência temporal harmônica.

4.4 Primeira Detecção de Ondas Gravitacionais: GW150914

A primeira detecção direta de ondas gravitacionais ocorreu em 2015 pelo Observatório de Ondas Gravitacionais por Interferometria Laser (LIGO) [6, 61]. As ondas gravitacionais detectadas foram geradas pela fusão de dois buracos negros com massas de cerca de $36M_\odot$ e $29M_\odot$, localizados a uma distância de aproximadamente 1.3 bilhões de anos-luz da Terra. Esse tipo de observação fornece acesso às propriedades do espaço-tempo no regime de campo forte e alta velocidade, e confirma as previsões da Relatividade Geral para a dinâmica de buracos negros perturbados.

A coalescência de dois buracos negros é dividida em três estágios [12]:

- 1º Espiralamento (*Inspiral*): Nesta fase inicial, os dois buracos negros se aproximam, em um movimento orbital cada vez mais rápido à medida que perdem energia por meio da emissão de ondas gravitacionais. O período de *inspiral* é caracterizado pelo aumento gradual da frequência e amplitude das ondas emitidas.
- 2º Fusão: À medida que os buracos negros se aproximam cada vez mais, eles eventualmente entram em uma órbita muito próxima, provocando a fusão em um único objeto. Durante esse processo o sinal aumenta em frequência e amplitude, indo de 35 Hz a 150 Hz [6] e a amplitude atinge seu máximo.
- 3º Relaxamento (*Ring-down*): Após a fusão, o buraco negro resultante passa por um período de relaxamento conhecido como *ring-down*. Durante esse estágio, o buraco negro recém-formado oscila e vibra, emitindo ondas gravitacionais em frequências específicas. Essas oscilações gradualmente diminuem até que o buraco negro alcance um estado de equilíbrio estável.

A figura 4.8 mostra uma representação esquemática desses estágios e o comportamento da frequência e amplitude do sinal GW150914.

O resultado final do evento GW150914 é consistente com a evolução de um buraco negro que exhibe oscilações amortecidas até alcançar uma configuração final estacionária de Kerr. A massa estimada deste buraco negro é $M \approx 68M_\odot$ e a frequência fundamental do modo quasi-normal, $f_{\text{Kerr}} \approx 251\text{Hz}$ [61].

A expressão (4.18) fornece a frequência fundamental de um buraco negro de Schwarzschild em termos de sua massa. No caso do buraco negro criado no evento GW150914, esse valor seria de aproximadamente $f_{\text{Sch}} \approx 176\text{Hz}$ se possuísse a mesma massa, mas não possuísse rotação expressiva. Embora a diferença entre f_{Kerr} e f_{Sch} seja significativa, é coerente com as expectativas, uma vez que o cálculo anterior foi realizado para um buraco negro de Schwarzschild, que não leva em conta efeitos de rotação.

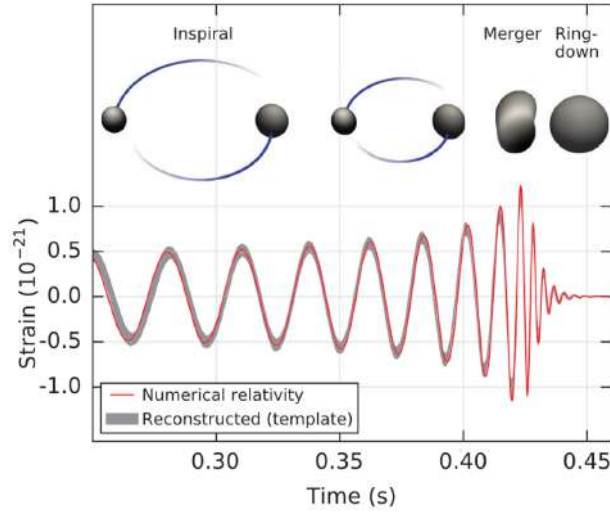


Figura 4.8: Magnitude da amplitude da onda gravitacional (*strain*) gerada a partir do evento GW150914 e projetada no detector do LIGO, de acordo com os estágios da coalescência. (Fonte: [6])

De forma semelhante ao que foi feito neste capítulo, os dados coletado pelo LIGO, nos três estágios indicados acima (*inspiral-merger-ringdown*, IMR), foram analisados conjuntamente para se extrair a frequência dominante na última etapa. A figura 4.9 mostra contornos de credibilidade, que são regiões com 90% de probabilidade de conter a frequência e o tempo de decaimento da onda. Além disso, foram realizados *fits* do sinal da fase de *ring-down*, variando o tempo inicial a fim de encontrar a faixa em que o sinal seria caracterizado por apenas uma componente de frequência. Para o tempo inicial (após a fusão) $t_0 = 1\text{ms}$ (contorno verde), a figura indica que o sinal pode estar contaminado por outras frequências. A partir de $t_0 = 3\text{ms}$ (contorno roxo), a região de maior probabilidade de frequência e tempo de decaimento exibe um comportamento mais próximo do resultado obtido pela análise do sinal completo (contorno preto), sugerindo que o sinal observado a partir desse tempo é caracterizado por apenas uma componente de frequência.

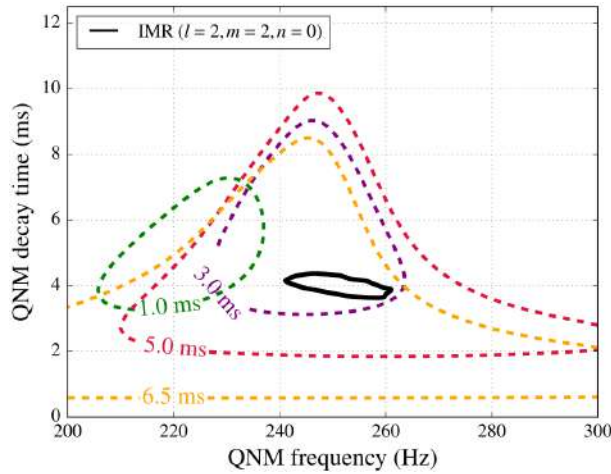


Figura 4.9: Contornos de credibilidade ou 90% de probabilidade assumindo tempos iniciais $t_0 = t_M + 1, 3, 5, 6.5\text{ ms}$, onde t_M é o tempo da fusão. A linha preta contínua mostra a região de credibilidade de 90% para a frequência e tempo de decaimento do MQN fundamental ($l = 2, m = 2, n = 0$), conforme derivado dos dados completos coletados pelo LIGO. (Fonte: [61])

Capítulo 5

Modos Quasi-Normais de Estrelas de Nêutrons

Estrelas pulsantes são importantes fontes de informação para a astrofísica. Quase todas as estrelas passam por algum tipo de pulsação durante sua evolução, desde os estágios iniciais de formação até os estágios finais, que geralmente resultam na criação de um objeto compacto, como é o caso específico abordado neste capítulo: as estrelas de nêutrons.

Conforme abordado ao longo desta dissertação, as pulsações de objetos compactos desempenham um papel crucial na astrofísica relativística, uma vez que estão intrinsecamente associadas à emissão de ondas gravitacionais. No caso das estrelas de nêutrons não é diferente, por isso, vamos discutir neste capítulo como extrair as frequências dos modos quasi-normais de estrelas de nêutrons, primeiramente no domínio das frequências [18, 56, 66, 67, 68] e, em seguida, no domínio temporal [57, 69].

5.1 Análise de Modos

Uma estrela de nêutrons não é um objeto “simples” como um buraco negro. Suas perturbações são mais complexas, podendo haver diversas famílias de modos quasi-normais. Em geral, quanto mais “física” (rotação, descontinuidades, campos magnéticos, etc.) tiver uma estrela, maior será o número de famílias de modos que podem, em princípio, compor o sinal emitido na forma de ondas gravitacionais.

O estudo de oscilações de estrelas não relativísticas (em particular, a heliosismologia, ou o estudo das pulsações solares) é um campo antigo da astrofísica e precede o tratamento de estrelas relativísticas como estrelas de nêutrons [70]. Dessa forma, muito da nomenclatura utilizada no estudo de estrelas relativísticas (como a divisão em modos f , p , g , etc.) é herdada do contexto newtoniano. Nesse contexto, as oscilações são caracterizadas por modos normais, pelo menos se desprezarmos a ação de mecanismos de dissipação como a viscosidade do fluido. No entanto, o acoplamento com a radiação gravitacional que ocorre na Relatividade Geral fornece uma forma direta de dissipação de energia e a frequência dos modos “newtonianos” é modificada, em particular adquirindo uma parte imaginária. Além disso, Kokkotas e Schutz [71] mostraram que o espaço-tempo também se comporta como uma entidade dinâmica, e que

estrelas relativísticas podem oscilar com um novo tipo de modos, sem análogo newtoniano, que são predominantemente espaço-temporais (modos w).

Portanto, oscilações de estrelas de nêutrons podem ser divididas em dois grupos principais de modos: os modos do fluido e os modos espaço-temporais. Neste trabalho, vamos estudar dois modos principais, referentes a cada um desses grupos, são eles:

(i) **Modo f**

Este é um modo característico do fluido da estrela. Para cada valor de $l \geq 2$ existe um único modo chamado modo fundamental (ou modo f), sem modos excitados ou harmônicos superiores. Em uma estrela de nêutrons típica a frequência do modo f está na faixa de 1 – 3kHz e tempo de decaimento das oscilações em torno de 100 – 500ms [72].

(ii) **Modo w**

Este é um modo característico do espaço-tempo. Ele está relacionado à curvatura do espaço-tempo e sua principal característica é a alta frequência acompanhada de um tempo de decaimento muito pequeno. Para uma típica estrela de nêutrons a frequência do modo w é algo em torno de 5 – 12kHz, ao passo que o tempo de decaimento é da ordem um décimo de milissegundo.

Maiores detalhes sobre os diferentes modos de oscilação de estrelas de nêutrons podem ser encontrados, por exemplo, nas Refs. [72, 73, 14].

5.2 Domínio das frequências

As equações diferenciais que vamos buscar resolver nesta seção foram derivadas anteriormente na seção 3.5.2 e descrevem as perturbações de estrelas de nêutrons; as Eqs. (3.75). Essas equações dependem das funções de fundo, da frequência ω e do momento angular l tendo, portanto, a estrutura $u'(r) = f(u, r, a, b)$, onde

$$\frac{du}{dr} = \begin{bmatrix} H'_1 \\ K' \\ W' \\ X' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3.75a) \\ (3.75b) \\ (3.75c) \\ (3.75d) \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} p(r) \\ \epsilon(r) \\ \nu(r) \\ \lambda(r) \\ \Gamma(r) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} \omega \\ l \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

As funções $p(r)$, $\lambda(r)$ e $\nu(r)$ são obtidas através das equações de TOV, (2.35). Resolvendo essas equações em uma grade de valores da coordenada radial, p , λ e ν se tornam funções conhecidas em todo o domínio se fizermos uma interpolação das funções integradas com a lista correspondente de valores de r . Por sua vez, a equação de estado, obtida na forma de tabelas como a tabela 2.1, estabelece uma relação entre p e ϵ , de forma que também é possível encontrar uma função interpolada do tipo $\epsilon(r) = \epsilon(p(r))$. E por fim, dada a definição do índice adiabático, Eq. (2.32), podemos, com os dados de cada equação de estado, interpolar $\log \rho$ com $\log p$ e tomar a derivada, a fim de encontrar uma função do tipo $\Gamma(r) = \Gamma(\log(p(r)))$.

A seguir, iremos analisar de forma detalhada os procedimentos para realizar a integração do sistema de equações em questão.

5.2.1 Expansão em Torno da Origem

Vamos começar analisando os pontos singulares presentes no sistema de equações (3.75). Existe um ponto singular em $r = 0$ e, para extrair as soluções físicas não singulares das equações, exigimos que as soluções admitam séries de potência nas vizinhanças desse ponto. Buscamos soluções para as equações de perturbação que tenham a forma

$$H_1(r) = H_1(0) + O(r^2), \quad (5.2a)$$

$$K(r) = K(0) + O(r^2), \quad (5.2b)$$

$$W(r) = W(0) + O(r^2), \quad (5.2c)$$

$$X(r) = X(0) + O(r^2). \quad (5.2d)$$

As condições de contorno impostas a essas constantes pela expansão das equações de perturbação são (ver *notebook* [30]):

$$H_1(0) = \frac{2}{l(l+1)} [lK(0) + 8\pi W(0)(p_0 + \epsilon_0)], \quad (5.3a)$$

$$X(0) = \frac{e^{\nu_0/2}}{6l} (p_0 + \epsilon_0) \{ -6\omega^2 W(0)e^{-\nu_0} + l[3K(0) + 8\pi W(0)(3p_0 + \epsilon_0)] \}. \quad (5.3b)$$

Note que as duas equações acima limitam o número de soluções linearmente independentes e não singulares a dois, uma vez que fixam $H_1(0)$ e $X(0)$ dada uma escolha de $K(0)$ e $W(0)$. Mais a frente veremos como determinar as constantes restantes.

As equações perturbativas dependem das funções ϵ , p , ν , λ , que também podem ser expandidas em série de Taylor, de forma que as constantes ϵ_0 , ν_0 e p_0 que aparecem em (5.3) e λ_0 são simplesmente os primeiros termos nas expansões em séries de potência como apresentado nas equações (2.37). As constantes p_0 e ϵ_0 representam os valores centrais da pressão e da densidade de energia, respectivamente. Como discutido anteriormente, p_0 é um valor arbitrário de forma que diferentes valores da pressão central geram diferentes estrelas com propriedades distintas. Como p e ϵ estão relacionados pela equação de estado, uma vez definido um valor para p_0 , ϵ_0 será dado por $\epsilon_0 = \epsilon(p_0)$. Por outro lado, o processo para obter ν_0 foi descrito na seção 2.3.4, onde também discutimos o fato de que $\lambda_0 = 0$.

5.2.2 Integração Dentro da Estrela de Nêutrons

Vamos começar integrando o sistema de equações (5.1) para a parte interna da estrela, ou seja, até $r = R$. Para isso precisamos impor certas condições de contorno. As expressões apresentadas em (5.2) representam as condições de contorno em $r = 0$. Por outro lado, a função X , dada pela Eq. (3.74), que é uma equação que relaciona as funções perturbativas V , W e H_1 e parâmetros do fluido como p e ϵ , é zero sobre a superfície. Por isso, $X(R) = 0$ representa a condição de contorno em $r = R$.

Uma propriedade fundamental do nosso sistema de equações é a sua linearidade e homogeneidade. Portanto, se u_1 e u_2 são soluções desse sistema, a combinação linear $c_1 u_1 + c_2 u_2$, com c_1 e c_2 constantes, também é uma solução válida. Por esse motivo, podemos separar nossa integração em duas etapas. A primeira é uma integração que se inicia na parte mais interna da estrela. Ela vai de um ponto muito próximo ao centro, $r_0 \gtrsim 0$, a um certo raio de encontro r_{match} . Dessa forma, a condição inicial associada a essa integração “interna” é dada a partir das equações (5.2) avaliadas em r_0 , ou seja, $u_{\text{in}} = [H_{10}, K_0, W_0, X_0]$. A segunda integração começa na parte mais externa da estrela, a superfície em $r = R$, e evolui até a região interior, parando em r_{match} . Assim, a condição inicial para essa integração é, considerando a condição de contorno para $X(R)$, $u_{\text{ext}} = [H_{1R}, K_R, W_R, 0]$. A figura 5.1 ilustra esquematicamente como é feita essa integração em duas etapas.

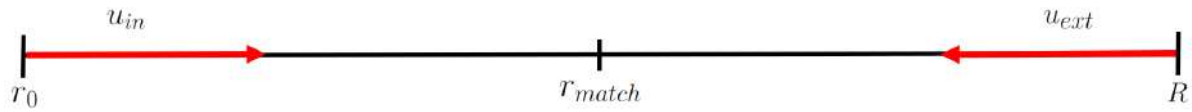


Figura 5.1: Esquema de como é feita a integração das equações que descrevem a perturbação de uma estrela de nêutrons. O ponto r_{match} , embora representado no meio do domínio de integração, pode estar localizado arbitrariamente entre r_0 e R .

A partir da condição de contorno imposta pelas equações (5.3), vemos que $H_{10} = H_1(K_0, W_0)$ e $X_0 = X(K_0, W_0)$. Dessa forma, a condição inicial u_{in} pode se expressa como

$$u_{\text{in}}(K_0, W_0) = \begin{bmatrix} H_1(K_0, W_0) \\ K_0 \\ W_0 \\ X(K_0, W_0) \end{bmatrix} = K_0 \begin{bmatrix} H_1(1, 0) \\ 1 \\ 0 \\ X(1, 0) \end{bmatrix} + W_0 \begin{bmatrix} H_1(0, 1) \\ 0 \\ 1 \\ X(0, 1) \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

e u_{ext} como

$$u_{\text{ext}}(H_{1R}, K_R, W_R) = \begin{bmatrix} H_{1R} \\ K_R \\ W_R \\ 0 \end{bmatrix} = H_{1R} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + K_R \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + W_R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Pela continuidade das soluções temos que u_{in} e u_{ext} devem ser iguais no ponto r_{match} . Isto quer dizer que

$$u_{\text{in}}|_{r_{\text{match}}} = u_{\text{out}}|_{r_{\text{match}}} \quad (5.6)$$

ou seja,

$$K_0 u_{\text{in}}(1, 0)|_{r_{\text{match}}} + W_0 u_{\text{in}}(0, 1)|_{r_{\text{match}}} = H_{1R} u_{\text{ext}}(1, 0, 0)|_{r_{\text{match}}} + K_R u_{\text{ext}}(0, 1, 0)|_{r_{\text{match}}} + W_R u_{\text{ext}}(0, 0, 1)|_{r_{\text{match}}}. \quad (5.7)$$

A expressão (5.7) representa um sistema linear de 4 equações. No entanto, nosso objetivo é determinar os valores de 5 incógnitas: K_0 , W_0 , H_{1R} , K_R e W_R . Para garantir que o sistema esteja completo, é necessário impor uma condição de normalização (arbitrária). Ao fazer isso, seremos capazes de encontrar

soluções para todas as incógnitas e obter uma descrição completa do sistema.

Conforme feito na seção 2.3.4, continuaremos a ilustrar o procedimento para uma estrela descrita por uma equação de estado gerada a partir dos dados da tabela “APR”, que para o valor de pressão central $\bar{p}_c = 5$ gera uma estrela com raio $\bar{R} \approx 0.145$. Além disso, como mencionado anteriormente, o sistema (5.7) fixa 4 das 5 constantes, deixando uma delas arbitrária. Nesse caso, escolhemos $K_0 = 1$, dado que a escolha de qualquer outra constante apenas reescalonaria todas as variáveis do sistema. Ao integrar as equações para $H(r)$, $K(r)$, $W(r)$ e $X(r)$ com $l = 2$ a partir de $r_0 = 0.0001$, utilizando o método de Runge-Kutta de 5ª ordem (RK45), e atribuindo um valor genérico para a frequência, $\bar{\omega} = 1$, com o propósito de ilustrar o procedimento, obtivemos como resultado (calculado no *notebook* [39]):

$$K_0 = 1.0000, \quad W_0 = -0.00474, \quad H_{1R} = 0.37301, \quad K_R = 0.94593, \quad W_R = -0.01206, \quad (5.8)$$

e conseqüentemente, o comportamento das funções integradas:

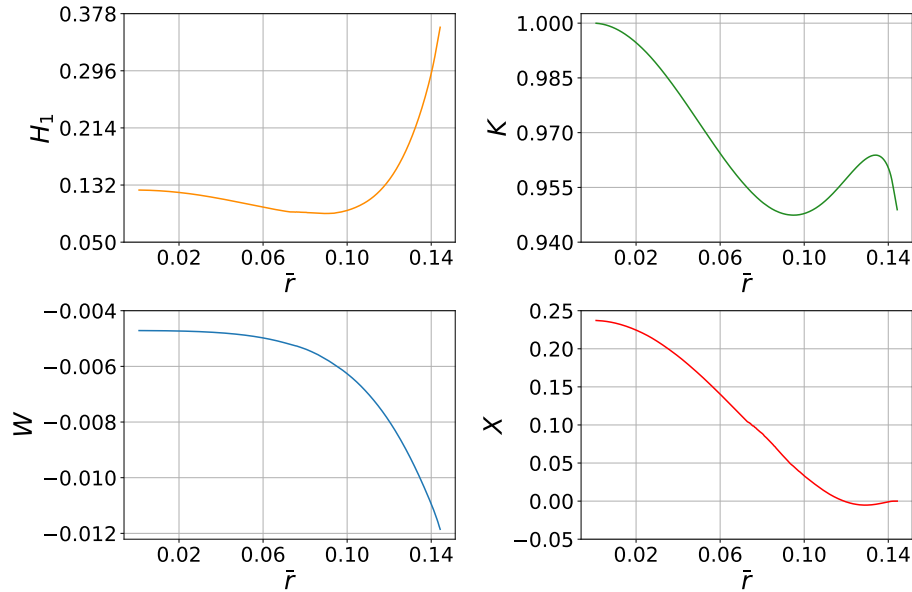


Figura 5.2: Comportamento das funções perturbadas dentro da estrela considerando $\bar{p}_c = 5$, a equação de estado APR, $l = 2$ e $\bar{\omega} = 1$.

5.2.3 Solução Externa: Relação de Recorrência

Fora da estrela, a geometria do espaço-tempo é descrita pela métrica de Schwarzschild perturbada. Na seção 3.5.3 vimos que, uma vez que X e W são funções restritas ao fluido, apenas H_1 e K estão definidas na região de vácuo externa à estrela. Essas duas funções podem ser combinadas de tal forma a dar origem a uma importante variável conhecida como função de Zerilli (3.83), já definida anteriormente. No entanto, como a função de Zerilli e a função de Regge-Wheeler estão relacionadas através das equações (3.88), podemos considerar a equação de Regge-Wheeler para descrever perturbações fora da estrela de nêutrons:

$$r(r - 2M)\phi_{RW}'' + 2M\phi_{RW}' + \left[\frac{r^3\omega^2}{r - 2M} - l(l + 1) + \frac{6M}{r} \right] \phi_{RW} = 0. \quad (5.9)$$

Além disso, a solução que desejamos encontrar depende das condições de contorno, que impomos como puramente *outgoing* no infinito espacial (4.4). Mas, dessa vez, no caso das estrelas de nêutrons, não há um horizonte de eventos onde uma condição de contorno possa ser imposta. Em vez disso, precisamos combinar as soluções dentro e fora da estrela. Portanto, utilizaremos uma representação da solução fora da estrela que contém uma série de potências em torno de um ponto intermediário regular $r = a$ [68]:

$$\phi(r) = (r - 2M)^{-2Mi\omega} e^{-i\omega r} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(1 - \frac{a}{r}\right)^n, \quad (5.10)$$

onde a é um ponto sobre a superfície ou fora da estrela ($r \geq R$) e a expansão se dá na variável $y \equiv 1 - a/r$. Vamos inserir esse *ansatz* na equação (5.9) e realizar a substituição $r \rightarrow a/(1 - y)$ de forma que, após aplicar as derivadas, a equação de Regge-Wheeler pode ser escrita como

$$\alpha_0 a_1 + \beta_0 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n a_{n+1} + \beta_n a_n + \gamma_n a_{n-1} + \delta_n a_{n-2}] y^n = 0, \quad (5.11)$$

onde para $n = 1$ surge o termo a_{-1} , que vamos considerar igual a zero. Assim, os coeficientes de expansão dessa série de potências são determinados por uma relação de recorrência de quatro termos, que é dada por:

$$\alpha_0 a_1 + \beta_0 a_0 = 0, \quad (5.12a)$$

$$\alpha_n a_{n+1} + \beta_n a_n + \gamma_n a_{n-1} + \delta_n a_{n-2} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.12b)$$

Para $n \geq 1$ os coeficientes da relação de recorrência são (ver *notebook* [30])

$$\alpha_n = n(a - 2M)(n + 1); \quad (5.13a)$$

$$\beta_n = -2n[a^2 i\omega + n(a - 3M)]; \quad (5.13b)$$

$$\gamma_n = -al(l + 1) + 6M + n(n - 1)(a - 6M); \quad (5.13c)$$

$$\delta_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 1; \\ 2M(n + 1)(n - 3) & \text{se } n > 1. \end{cases} \quad (5.13d)$$

Os coeficientes α_0 e β_0 são determinados a fim de satisfazer a condição de contorno na superfície da estrela. Vamos calculá-los a seguir.

Analisando o comportamento assintótico dos coeficientes a_n , é possível constatar que a expressão (5.10) é uniformemente convergente fora da estrela se $a > 4M$ [74]. Assim, se $R > 4M$, configuramos $a = 4M$, mas se $R \leq 4M$ precisamos integrar numericamente a equação de Regge-Wheeler de $r = R$ a $r = a(> 4M)$ a fim de encontrar os valores de $\phi_{RW}(a)$ e $\phi'_{RW}(a)$. A partir da equação (5.10), temos que

$$\phi_{RW}(a) = (a - 2M)^{-2Mi\omega} e^{-i\omega a} a_0; \quad (5.14a)$$

$$\phi'_{RW}(a) = -\left\{2Mi\omega(a - 2M)^{-2Mi\omega-1} e^{-i\omega a} + i\omega(a - 2M)^{-2Mi\omega} e^{-i\omega a}\right\} a_0 + \frac{(a - 2M)^{-2Mi\omega} e^{-i\omega a}}{a} a_1. \quad (5.14b)$$

Podemos, então, encontrar uma equação dada por $f(\phi_{RW}, \phi'_{RW})|_a = a_1/a_0$, que através da relação (5.12a), define a razão β_0/α_0 . Assim, fixando $\alpha_0 = -1$, encontramos (ver *notebook* [30])

$$\beta_0 = \frac{a_1}{a_0} = R \left(\frac{\phi'_{RW}(a)}{\phi_{RW}(a)} + \frac{i\omega a}{a - 2M} \right). \quad (5.15)$$

Conforme discutido na seção 3.5.3, a função de Zerilli pode ser expressa em termos das funções H_1^{ext} e K^{ext} para o meio externo (3.83). No entanto, como a função de Regge-Wheeler está relacionada à função de Zerilli por meio da equação (3.88), podemos determinar explicitamente as formas de $\phi_{RW}(a)$ e $\phi'_{RW}(a)$, que serão expressas em termos dos coeficientes H_{1R} e K_R , obtidos em (5.8). Dessa forma, a condição de contorno para $r = R$ é perfeitamente satisfeita entre a região interna e externa da estrela.

5.2.4 Determinando as Frequências: Fração Continuada

Uma vez que (5.12b) é uma relação de recorrência de 4 termos, a técnica da fração continuada (apresentada na seção 4.3.1) não pode ser aplicada diretamente. No entanto, estudando o caso de um buraco negro estático e carregado, Leaver [75] demonstrou que através da eliminação gaussiana é possível reduzir uma relação de recorrência de 4 termos a uma relação com apenas três termos,

$$\hat{\alpha}_n a_{n+1} + \hat{\beta}_n a_n + \hat{\gamma}_n a_{n-1} = 0, \quad (5.16)$$

definindo, para $n \geq 2$,

$$\hat{\alpha}_n = \alpha_n, \quad (5.17a)$$

$$\hat{\beta}_n = \beta_n - \frac{\hat{\alpha}_{n-1} \delta_n}{\hat{\gamma}_{n-1}}, \quad (5.17b)$$

$$\hat{\gamma}_n = \gamma_n - \frac{\hat{\beta}_{n-1} \delta_n}{\hat{\gamma}_{n-1}}, \quad (5.17c)$$

$$\hat{\delta}_n = 0. \quad (5.17d)$$

Assim, para $n = 0, 1$ os coeficientes da relação de recorrência permanecem iguais, ou seja,

$$\hat{\alpha}_n = \alpha_n, \quad \hat{\beta}_n = \beta_n \quad \text{e} \quad \hat{\gamma}_n = \gamma_n, \quad \text{se} \quad n = 0, 1 \quad (5.18)$$

e para $n \geq 2$, eles são dados pelas expressões (5.17).

Da mesma forma como fizemos na seção 4.3.1, para o caso de buracos negros, vamos obter uma equação característica para as frequências quasi-normais de uma estrela de nêutrons calculando o valor

da fração continuada em $n = 0$ e usando a equação (5.12a) como uma condição de contorno. Portanto, usando a relação de recorrência de três termos (5.16), encontramos a relação entre $\hat{\alpha}_n$, $\hat{\beta}_n$ e $\hat{\gamma}_n$ na forma de fração continuada:

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{-\hat{\gamma}_1}{\hat{\beta}_1 -} \frac{\hat{\alpha}_1 \hat{\gamma}_2}{\hat{\beta}_2 -} \frac{\hat{\alpha}_2 \hat{\gamma}_3}{\hat{\beta}_3 -} \dots, \quad (5.19)$$

que pode ser reescrita como

$$0 = \hat{\beta}_0 - \frac{\hat{\alpha}_0 \hat{\gamma}_1}{\hat{\beta}_1 -} \frac{\hat{\alpha}_1 \hat{\gamma}_2}{\hat{\beta}_2 -} \frac{\hat{\alpha}_2 \hat{\gamma}_3}{\hat{\beta}_3 -} \dots \equiv f(\omega). \quad (5.20)$$

Logo, as frequências de oscilação de uma estrela de nêutrons são obtidas resolvendo a equação $f(\omega) = 0$.

Desta vez, o procedimento utilizado para encontrar a frequência do modo fundamental dessas estrelas será diferente daquela adotada na seção 4.2.1 para os buracos negros, uma vez que a função de resíduo possui um comportamento menos intuitivo visualmente. Sabemos que a frequência de um modo quasi-normal é um parâmetro complexo, em que a parte real se refere à frequência de oscilação e a parte imaginária ao tempo de decaimento. Para iniciar o processo, criaremos uma grade de valores complexos que servirão como chutes iniciais para ω . Em seguida, usaremos um método numérico para encontrar diretamente o valor que converge para uma raiz da equação (5.20), truncada em $n = 25$.

Uma vez que a frequência linear do modo fundamental quadrupolar (modo f com $l = 2$) é da ordem de $f \in [1, 3]$ kHz e o tempo de decaimento é aproximadamente $\tau \in [100, 500]$ ms podemos construir a grade que define os chutes iniciais para $\bar{\omega}$ com base nesses limites.

A dimensionalidade da frequência linear é recuperada pela relação

$$f = \bar{f} \sqrt{G\rho_*}, \quad (5.21)$$

onde relembramos que $\rho_* = 2.7 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$ é uma densidade de calibração da ordem da densidade de saturação nuclear. E, uma vez que $f = \text{Re}(\omega)/(2\pi)$, podemos inverter a equação (5.21) para $\text{Re}(\bar{\omega})$ de forma que lista para a parte real dos chutes iniciais possui $\text{Re}(\bar{\omega}) \in [1.48, 4.43]$.

Já para a lista da parte imaginária dos chutes iniciais devemos lembrar que a parte imaginária da raiz é inversamente proporcional ao tempo de decaimento, ou seja, $\text{Im}(\omega) = 1/\tau$. Então se a dimensão do tempo de decaimento é recuperada por

$$\tau = \frac{\bar{\tau}}{\sqrt{G\rho_*}}, \quad (5.22)$$

invertendo esta relação para $\text{Im}(\bar{\omega})$, temos que a lista para a parte imaginária dos chutes iniciais é $\text{Im}(\bar{\omega}) \in [0.0004, 0.0023]$.

Combinando os valores da lista para $\text{Re}(\bar{\omega})$ com os valores da lista para $\text{Im}(\bar{\omega})$, podemos montar nossa grade de chutes iniciais e testá-los usando a função *fsolve* do *Python*, que encontra raízes da equação (5.20) próximas a um dado ponto inicial. Assim, para $l = 2$ e $\bar{p}_c = 5$, a raiz encontrada que representa a frequência complexa do modo quasi-normal fundamental (modo f) de uma estrela de nêutrons descrita pela equação de estado APR é $\bar{\omega} = 3.4921 + 0.0016i$ ¹.

¹Com um código independente escrito no Mathematica, obtemos $\bar{\omega} = 3.68502 + 0.00156728i$. Na integração interna, verificamos que o sistema é *stiff* ao redor de $r = 0$, o que torna a aplicação de métodos explícitos (como o usado no *Python*) mais propensa a erros.

Podemos recuperar a dimensionalidade da frequência de oscilação através da relação (5.21). Portanto, a frequência linear do modo f quadrupolar é

$$f_f \approx 2.35 \text{ kHz.} \quad (5.23)$$

Já a dimensão do tempo de decaimento é retomada por meio da relação (5.22), de forma que o tempo de decaimento referente a esse modo de oscilação é

$$\tau_f \approx 142 \text{ ms.} \quad (5.24)$$

O mesmo mecanismo pode ser aplicado a fim de encontrar a frequência e o tempo de decaimento do modo w . Se, para este modo, $f \in [5, 12]\text{kHz}$ e $\tau \in [0.1, 0.9]\text{ms}$, usando as mesmas relações de dimensionalidade (Eqs. (5.21) e (5.22)), a grade para os chutes iniciais das raízes combina valores de $\text{Re}(\bar{\omega}) \in [7.39, 17.75]$ e $\text{Im}(\bar{\omega}) \in [0.26, 2.35]$. Com isso, para $l = 2$ e $\bar{p}_c = 5$, a raiz encontrada que representa a frequência do modo quasi-normal espaço-temporal (modo w) para uma estrela de nêutrons descrita pela equação de estado APR (2.1) é $\bar{\omega} = 10.924 + 2.205i^2$. Logo a frequência linear correspondente ao modo w de uma estrela de nêutrons nas configurações descritas é

$$f_w \approx 7.38 \text{ kHz.} \quad (5.25)$$

e o tempo de decaimento,

$$\tau_w \approx 0.11 \text{ ms.} \quad (5.26)$$

Perceba que os valores encontrados estão de acordo com o esperado para cada modo.

No seção 5.4, discutiremos um conjunto maior de resultados, modificando a pressão central e a equação de estado.

5.3 Domínio Temporal

Agora, da mesma forma que na seção 3.5.2, vamos buscar resolver o sistema de equações que regem as perturbações de estrelas de nêutrons dependentes do tempo. Essas equações dependem das funções de fundo e do momento angular l tendo, portanto, a estrutura $\ddot{u}(t, r) = f(u'', u', u, t, r, a, l)$, onde

$$\partial_t^2 u = \begin{bmatrix} \ddot{F} \\ \ddot{S} \\ \ddot{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3.79a) \\ (3.79b) \\ (3.80) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad a = \begin{bmatrix} p(r) \\ \epsilon(r) \\ \nu(r) \\ \lambda(r) \\ C_s^2(r) \\ m(r) \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

²Com um código independente escrito no Mathematica, obtemos $\bar{\omega} = 10.937 + 2.196i$.

Vale lembrar que as funções F e S estão definidas tanto no interior da estrela quanto no espaço-tempo externo, ao passo que H é uma função restrita apenas ao fluido da estrela de nêutrons.

O processo para determinar as funções de fundo $p(r)$, $\epsilon(r)$, $\nu(r)$ e $\lambda(r)$ é o mesmo da seção anterior, 5.2. Mas agora, somado a elas, temos a velocidade do som (2.33), que é obtida a partir dos dados da equação de estado e interpolada no domínio correspondente ao interior da estrela, $C_s^2(r) = C_s^2(\epsilon(r))$. E além disso, a função aspecto de massa, que é dada em termos da função $\lambda(r)$ por (2.25).

A seguir vamos estabelecer os parâmetros necessários para modelar nosso problema e determinar a evolução temporal das equações.

5.3.1 Condições Iniciais

Nesta seção vamos especificar as condições iniciais que serão utilizadas para evoluir temporalmente o sistema de equações (5.27). Dessa vez estamos lidando com um problema bidimensional, de forma que a condição inicial percorre toda a grade radial a $t = 0$ fixo. Por simplicidade, vamos considerar apenas dados iniciais temporalmente simétricos ($\dot{F}|_{t=0} = \dot{S}|_{t=0} = \dot{H}|_{t=0} = 0$). Embora restritiva, essa simetria temporal fornece um ponto de partida útil para estudos do problema de evolução das perturbações.

Para garantir consistência com as equações de Einstein, os dados iniciais não podem ser definidos arbitrariamente, mas devem ser tais que a escolha de $\{F, S, H\}$ satisfaça que o vínculo hamiltoniano, bem como sua primeira derivada temporal, sejam zero, $\mathcal{H} = \dot{\mathcal{H}} = 0$. A condição $\dot{\mathcal{H}} = 0$ é automaticamente satisfeita se $\dot{F} = \dot{S} = \dot{H} = 0$. Apresentamos a seguir duas classes de condições iniciais, discutidas em [57], que garantem que $\mathcal{H} = 0$.

1. Primeiro vamos combinar a escolha de uma função específica para F com $H = 0$. Como foi feito para a evolução temporal das equações de perturbação de um buraco negro, para o caso das estrelas de nêutrons vamos supor que a condição inicial para a função F possa ser descrita por uma função gaussiana do tipo:

$$F(t = 0, r) = e^{(r-r_0)^2/\sigma^2}. \quad (5.28)$$

Essa escolha para F e H é conveniente uma vez que, então, só é preciso integrar uma equação diferencial de primeira ordem, o vínculo hamiltoniano \mathcal{H} (3.81), para determinar a função S correspondente. Portanto, transformando (3.81) em uma equação diferencial para a função S e impondo $H = 0$, a equação que dá a condição inicial para S , com t inicialmente fixo, fica

$$\begin{aligned} S' = & \frac{e^\nu}{r^2} \{ [-1 + e^\lambda(1 + 4\pi r^2(p + \epsilon))]F + F'' \} - \frac{e^{\nu+\lambda}}{r^3} (m + 4\pi p r^3) F' \\ & + \frac{e^{\nu+\lambda}}{r^4} [12\pi r^3 \epsilon - m - (l + l^2)r] F + \frac{e^\lambda}{2r^2} [16\pi r^3(p + \epsilon) - (l + l^2 + 4)r + 8m] S. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Abaixo a figura 5.3 representa o comportamento dessas funções na condição inicial.

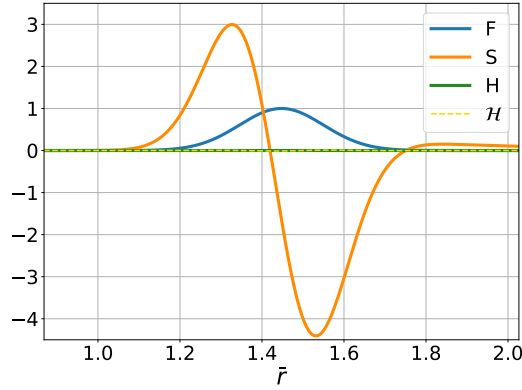


Figura 5.3: Comportamento das funções F , S e H para o modelo (1) de condições iniciais satisfazendo o vínculo hamiltoniano $\mathcal{H} = 0$. Função F representada por uma gaussiana de largura $\sigma = \bar{R} \approx 0.145$ e centrada em $\bar{r}_0 = 10\bar{R} \approx 1.45$.

2. Outra opção é tomar $F = 0$ e combinar com uma escolha específica para H . Nesse caso, uma opção para a função H é dada por [57]

$$H = C_s^2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \cos \left(\frac{\pi r}{2R} \right). \quad (5.30)$$

Como H é uma função inerente ao fluido, $H = 0$ para $r > R$. Então, a função apropriada para a condição inicial de S é obtida pela integração da equação para o vínculo hamiltoniano (3.81) com $F = 0$:

$$S' = \frac{e^\lambda}{2r^2} [16\pi r^3(p + \epsilon) - (l + l^2 + 4)r + 8m] S + \frac{e^{\nu+\lambda}}{C_s^2} 8\pi(p + \epsilon)H. \quad (5.31)$$

A figura 5.4 representa o comportamento dessas funções na condição inicial.

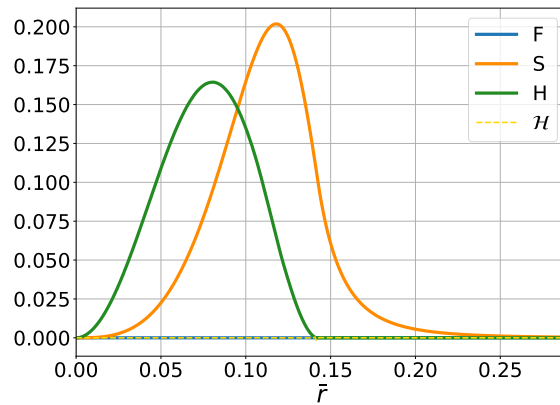


Figura 5.4: Comportamento das funções F , S e H para o modelo (2) de condições iniciais satisfazendo o vínculo hamiltoniano $\mathcal{H} = 0$.

A escolha entre a condição inicial 1 ou 2 é arbitrária. De fato, mesmo que os dados iniciais para os cenários do modelo escolhido sejam bastante diferentes, as ondas gravitacionais que surgem do sistema

durante cada evolução possuirão o mesmo espectro, não gerando, assim, nenhuma incompatibilidade. Em cada caso, integramos a equação para S (com o método de Runge-Kutta de 4^a ordem) a fim de encontrar a condição inicial completa de F , S e H em $t = 0$ para toda grade radial.

5.3.2 Evolução Temporal

Uma vez definidas as condições iniciais das equações que descrevem perturbações no espaço-tempo de uma estrela de nêutrons, podemos avançar para a resolução das equações diferenciais, utilizando métodos numéricos para determinar a respectiva evolução temporal de F , S e H .

A integração é dividida em duas regiões. A primeira, interna, que vai de um raio muito próximo de zero até o raio da estrela, e a segunda, externa, que vai do raio da estrela até um ponto suficientemente distante. Vale lembrar que, a partir de $r = R$, as equações são adaptadas de forma que p , ϵ , C_s^2 e H se tornam nulas por se tratarem de quantidades intrínsecas ao fluido. Para a evolução temporal, aplicamos o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Além disso, empregamos uma aproximação de segunda ordem para as derivadas espaciais do sistema, como na Eq. (5.27), utilizando diferenças finitas centradas. Essa estratégia é análoga àquela adotada na seção 4.2 para o caso dos buracos negros.

Para a simulação realizada, a grade temporal da integração possui $n_t = 45000$ pontos. Já a grade radial vai de $\bar{r}_i = 0.00001$ a $\bar{r}_f = 100\bar{R} \approx 14.5$. O espaçamento da grade radial é uniforme e dado em termos de um terceiro parâmetro: o número de pontos internos, dentro da estrela. Dessa forma, impondo $nr_{int} = 300$, escolhemos a grade radial espaçada por

$$\Delta\bar{r} = \frac{1}{100} \frac{\bar{r}_f - \bar{r}_i}{nr_{int} - 1} \approx 0.0005 \quad (5.32)$$

e a grade temporal por $\Delta\bar{t} = 0.7\Delta\bar{r}$, respeitando a condição CFL mencionada anteriormente.

Como vimos, a condição inicial pode ser representada pela condição 1 ou 2. Na condição inicial 1, escolhemos a gaussiana da função F com largura $\sigma = \bar{R} \approx 0.145$ e centrada em $\bar{r}_0 = 10\bar{R} \approx 1.45$. Os pulsos iniciais de F e S se dividem em dois, um que se dirige para a estrela de nêutrons, o outro ao infinito espacial. A componente do pulso que se propaga em direção à estrela atinge sua superfície de forma a perturbá-la. Em resposta, a função H descreve como essa perturbação afeta o fluido e as funções F e S propagam essa perturbação de volta ao observador distante. É justamente esse sinal causado pela perturbação de interação com a estrela que vai carregar informações sobre seus modos de oscilação. Um observador fixo em $\bar{r}_{obs} = 20\bar{R} \approx 2.89$ registra a amplitude dessas ondas. Já na condição inicial 2 uma certa perturbação intrínseca do fluido da estrela, descrita pela condição inicial da função H e da função S , provoca como consequência uma perturbação no espaço-tempo. O pulso inicial é, então, diretamente propagado de forma a atingir o observador fixo no mesmo ponto $\bar{r} \approx 2.89$.

Com o propósito de ilustrar o problema, vamos seguir considerando que o sistema é modelado pela condição inicial 1. O *storyboard* 5.5 mostra como a perturbação espaço-temporal afeta o fluido da estrela e perturba o espaço-tempo de volta. Perceba que o fluido, que estava em equilíbrio, passa a oscilar em decorrência da perturbação gravitacional e após um certo tempo começa a perder energia em forma de ondas gravitacionais, tendendo a voltar ao seu estado de equilíbrio.

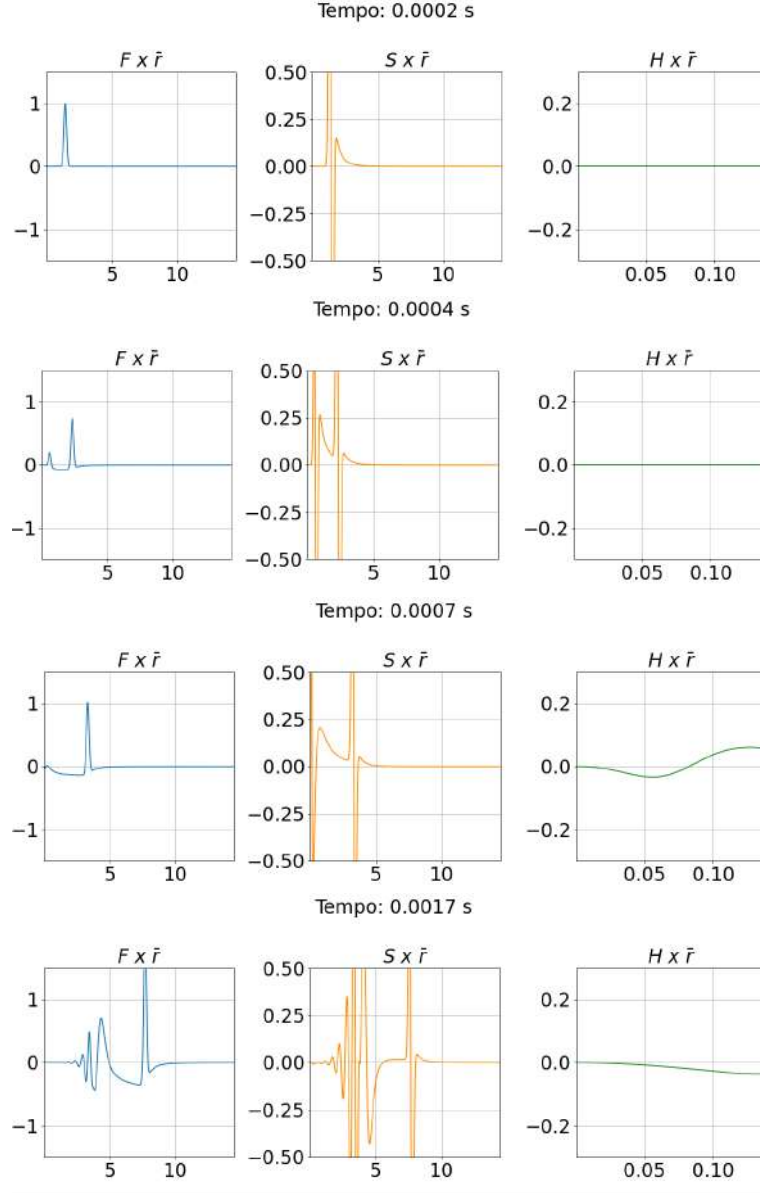


Figura 5.5: Evolução temporal das funções F , S e H considerando a condição inicial 1 e os parâmetros $nr_{int} = 300$ e $n_t = 45000$.

Podemos investigar a convergência do método no domínio temporal aplicado às estrelas de nêutrons por meio do estudo da evolução do valor médio do vínculo hamiltoniano. Conforme mencionado na seção 3.5.2, se $\mathcal{H} = 0$ em $t = 0$ as equações de evolução garantem que $\mathcal{H} = 0$ em tempos posteriores. Como estamos evoluindo uma versão aproximada das equações de Einstein, espera-se que o valor médio do vínculo hamiltoniano, ou seja,

$$\langle H \rangle(t) = \int_0^{\bar{r}_f} |H(t, \bar{r})| d\bar{r}, \quad (5.33)$$

auge devido a erros decorrentes dessa aproximação. No entanto, ele deveria sempre permanecer próximo de zero.

Realizamos testes de convergência do método mudando a resolução utilizada. A única diferença

entre diferentes simulações será o valor de nr_{int} e n_t . Conforme aumentamos nr_{int} , o número de pontos dentro da estrela aumenta e $\Delta\bar{r}$ diminui, aumentando a resolução. Consequentemente, precisamos aumentar n_t proporcionalmente, de forma a aumentar o número de pontos na grade temporal e permitir uma evolução temporal igualmente longa. Cada resolução possui os seguintes parâmetros:

	nr_{int}	n_t
Resol ₅₀	50	7500
Resol ₁₀₀	100	15000
Resol ₂₀₀	200	30000
Resol ₃₀₀	300	45000

Tabela 5.1: Dados das diferentes resoluções para teste da auto-convergência do método de evolução das perturbações dependentes do tempo. Tabela em ordem crescente de resolução.

O resultado gráfico dessa análise encontra-se na Figura 5.6. Para visualizar melhor o comportamento de $\langle H \rangle$, geramos dois gráficos, um na escala linear e outro na escala logarítmica de base 10. É possível perceber que as simulações são estáveis durante um certo intervalo de tempo, mas divergem quando o tempo aumenta, de forma que $\log_{10}\langle H \rangle$ rapidamente atinge valores $\gg 1$. Esta divergência ocorre de forma mais intensa para as resoluções baixas e menos intensa para as resoluções mais altas, e pode estar relacionada à propagação de erros numéricos, em particular da região ao redor da origem. Por outro lado, quando diminuimos o passo, a solução permanece estável por mais tempo, dando indícios de auto-convergência da evolução temporal. No entanto, para a Resol₃₀₀, a convergência satura, por razões que estão sendo investigadas. De qualquer modo, para as resoluções Resol₂₀₀ e Resol₃₀₀, é possível assegurar um intervalo de tempo suficientemente grande ($\gtrsim 2\text{ms}$) de estabilidade da simulação numérica para a extração das frequências dos modos quasi-normais da estrela. No que se segue, vamos seguir os

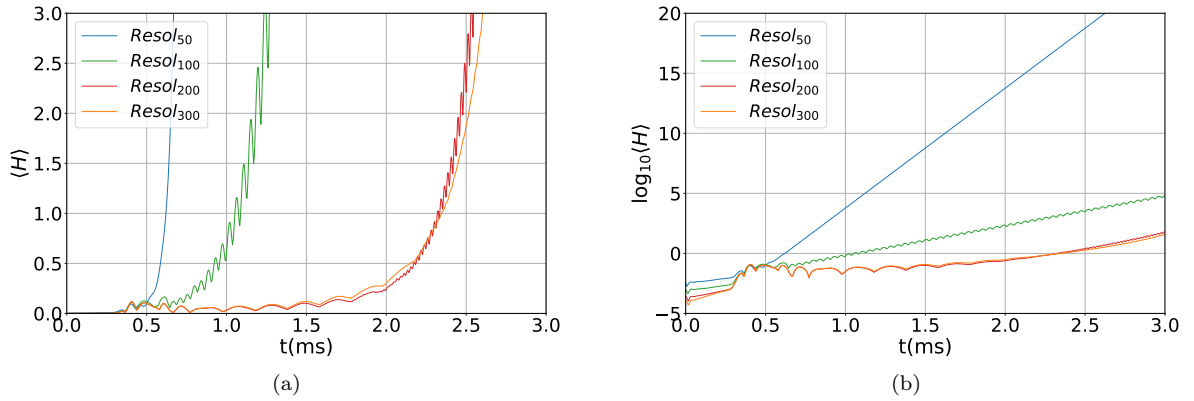


Figura 5.6: Evolução temporal do valor médio do vínculo hamiltoniano na (a) representação linear e (b) escala logarítmica para quatro diferentes resoluções.

cálculos considerando a resolução Resol₃₀₀.

A figura 5.7 mostra as ondas gravitacionais emitidas por uma estrela de nêutrons logo após ter sido atingida por uma onda incidente. Esse sinal, registrado pelo observador fixo em $\bar{r}_{\text{obs}} = 20\bar{R}$, está ilustrado tanto em uma representação linear quanto na representação logarítmica. A linha pontilhada representa a passagem do pulso da condição inicial que iniciou seu trajeto em direção ao infinito espacial. Mas, como explicado em parágrafos anteriores, vamos nos ater apenas aos sinais que foram refletidos pela

estrela (linha sólida). A separação entre esse dois tipos de sinais foi feita em $\bar{t}_0 \approx 4.3$ para ambas as funções F e S . Como H é uma função que descreve perturbações no fluido estelar, ele se restringe de r_0 à superfície da estrela, não alcançando o observador.

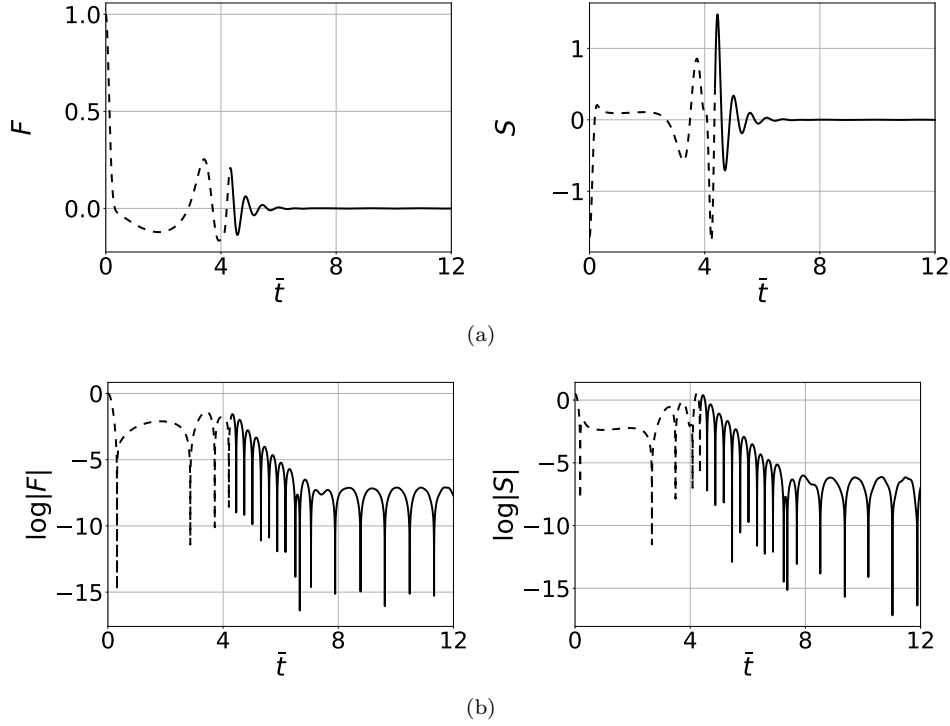


Figura 5.7: Evolução temporal das funções F_{obs} e S_{obs} , respectivamente, para $l = 2$, na representação (a) linear e (b) logarítmica para a resolução Resol_{300} .

Perceba, em 5.7b, que, após uma etapa de decaimento exponencial, o sinal parece se estabilizar com uma amplitude e frequência mais baixas. Isso significa que o sinal captado pelo observador possui mais de uma componente de frequência. Nesse caso, interpretamos que o primeiro decaimento é referente ao modo w , que, como vimos anteriormente, tem um tempo de decaimento típico de fração de milissegundo e uma frequência mais alta (período de oscilação menor \implies frequência maior). A segunda fase deve corresponder ao modo f , que possui uma frequência mais baixa (período de oscilação maior \implies frequência menor). Note que o tempo característico de decaimento do modo f é da ordem de 100 ms; portanto, na escala de tempo da simulação, ele é caracterizado por uma amplitude aproximadamente constante.

Na seção abaixo veremos como extrair as frequências dos modos quasi-normais de estrelas de nêutrons a partir do pulso coletado pelo observador.

5.3.3 Determinando as Frequências: Transformada Discreta de Fourier

O método da transformada discreta de Fourier foi explicado na seção 4.2.1 e vamos aplicá-lo novamente aqui, para o caso de estrelas de nêutrons. Quando aplicamos a DFT ao sinal captado pelo observador 5.7, obtemos, para as funções F e S , o espectro mostrado na figura 5.8, onde o eixo da frequência representa a quantidade $f = \bar{f}\sqrt{G\rho_*}$, em kHz.

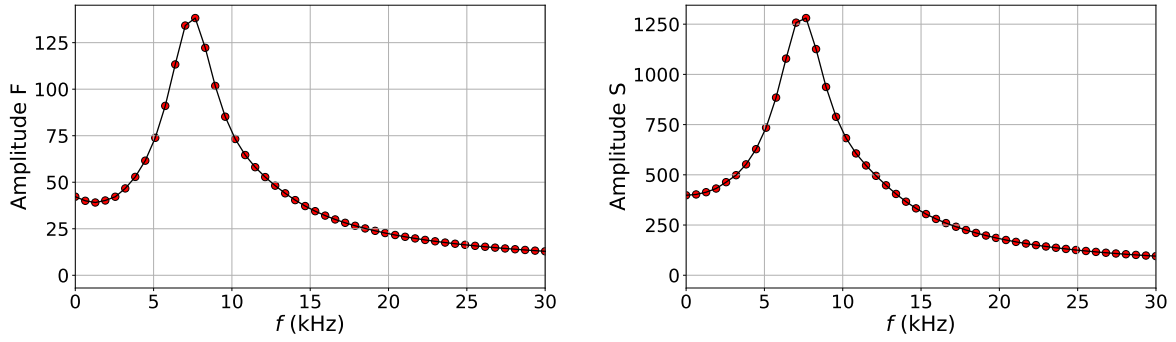


Figura 5.8: Amplitude da Transformada Discreta de Fourier do sinal captado pelo observador para F e S , em função da frequência, considerando uma estrela de nêutrons com $\bar{p}_c = 5$ descrita pela equação de estado APR e uma perturbação com $l = 2$.

Como esperado, o pico do sinal para ambas as funções F e S ocorre no mesmo ponto:

$$f_w \approx 7.6 \text{ kHz}, \quad (5.34)$$

que interpretamos como a frequência do modo w , com $l = 2$, de uma estrela de nêutrons com $\bar{p}_c = 5$ descrita pela equação de estado APR. Uma vez que as equações para F e S são acopladas, é natural esperar que concordem nas frequências características de oscilação, e que a única diferença na DFT seja a amplitude das diferentes componentes de frequência.

O valor encontrado (5.34) representa a frequência de oscilação aproximada para o modo w . O fato de que este é o modo mais excitado na nossa simulação é consistente com o fato de termos usado a condição inicial 1, que escolhemos anteriormente para seguir com um exemplo de evolução. Uma vez que essa condição representa uma perturbação no espaço-tempo que deforma o fluido da estrela, era esperado que o modo predominante do sinal captado pelo observador fosse de fato um modo espaço-temporal.

A incerteza associada a essa frequência se relaciona ao tempo total T do sinal: $\Delta f \approx 1/T$. Como para estas configurações $T \approx 6.5$ ms, temos que $\Delta f \approx 0.2$ kHz. Assim, a frequência de oscilação do modo w com $l = 2$ de uma estrela de nêutrons com $\bar{p}_c = 5$ e descrita pela equação de estado APR (2.1) é $f_w = (7.6 \pm 0.2)\text{kHz}$.

5.3.4 Determinando as Frequências: Método de Fit

Esta é uma forma alternativa para encontrar as frequências de oscilação para estrelas de nêutrons. Conforme feito para o caso de buraco negro na seção 4.2.2, vamos ajustar a solução

$$\Psi(t) = Ae^{-t/\tau} \cos(\omega t + \delta) \quad (5.35)$$

aos dados do sinal coletado pelo observador (figura 5.7). Novamente, A representa a amplitude, τ o tempo de decaimento, $f = \omega/(2\pi)$ a frequência e δ uma constante de fase. Então, a solução geral é ajustada de forma que obtemos o resultado apresentado na figura 5.9.

Assim, através do método de ajuste, obtemos a frequência e o tempo de decaimento do modo w

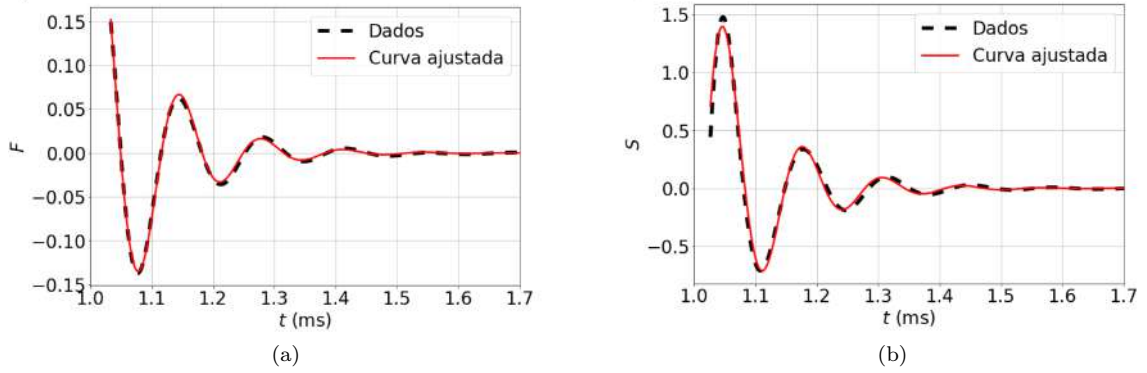


Figura 5.9: Sinal captado pelo observador para as funções (a) F e (b) S . Dados numéricos em linha tracejada preta e curva gerada pelo método de *fit* em vermelho para ambos casos.

para a função F e S ,

$$f_w \approx 7.51 \text{ kHz} \text{ e } \tau_w \approx 0.09 \text{ ms} . \quad (5.36)$$

Ainda é possível estender a solução (5.35) a fim de encontrar frequências de modos subdominantes, no nosso caso, o modo f . Para isso, usamos o método de ajuste para soluções do tipo

$$\Psi(t) = \sum_{n=0}^{n_{\max}} A_n e^{-t/\tau_n} \cos(\omega_n t + \delta_n), \quad (5.37)$$

onde $n = 0$ corresponde ao modo w (encontrado anteriormente) e $n = 1, 2, \dots$ se referem aos outros modos que compõe o sinal. Inserindo uma componente adicional ($n_{\max} = 1$), encontramos $f_f \approx 2.39 \text{ kHz}$, que corresponde aproximadamente à frequência do modo f com $l = 2$.

Todos esses valores estão em concordância com aqueles obtidos por meio da Transformada Discreta de Fourier, aqui no domínio temporal (conforme discutido na seção 5.3.3), e também com os valores obtidos no domínio das frequências (como explorado na seção 5.2.4).

5.4 Resultados para Diferentes Equações de Estado

Nas seções anteriores, ilustramos o procedimento para calcular os modos de oscilação de estrelas de nêutrons para uma dada equação de estado (APR) e uma estrela com massa e raio bem definidos ($R = 10.22 \text{ km}$ e $M = 2.15 M_{\odot}$, o que corresponde a uma pressão central adimensional $\bar{p}_c = 5$). Nesta seção, vamos estender esse cálculo para uma sequência de estrelas descritas por esta e outras equações de estado, em particular, as equações de estado MPA1, MS1 e WFF1, introduzidas na seção 2.3.3.

No que se segue, focaremos no modo f , com $l = 2$. Simulações numéricas da fusão de sistemas binários de estrelas de nêutrons indicam que as ondas gravitacionais emitidas pela estrela que se forma como resultado da fusão possui um pico característico que corresponde à excitação do modo fundamental quadrupolar [76, 77]. Este é, portanto, o mais relevante do ponto de vista da detecção de ondas gravitacionais.

Na figura 5.10, mostramos a frequência do modo f com $l = 2$ para estrelas com diferentes (a)

compacidades e (b) densidades médias descritas por quatro equações de estado distintas. As estrelas foram escolhidas de forma que tivessem massas entre $1M_{\odot}$ e a massa máxima permitida por cada equação de estado (ver Figura 2.1).

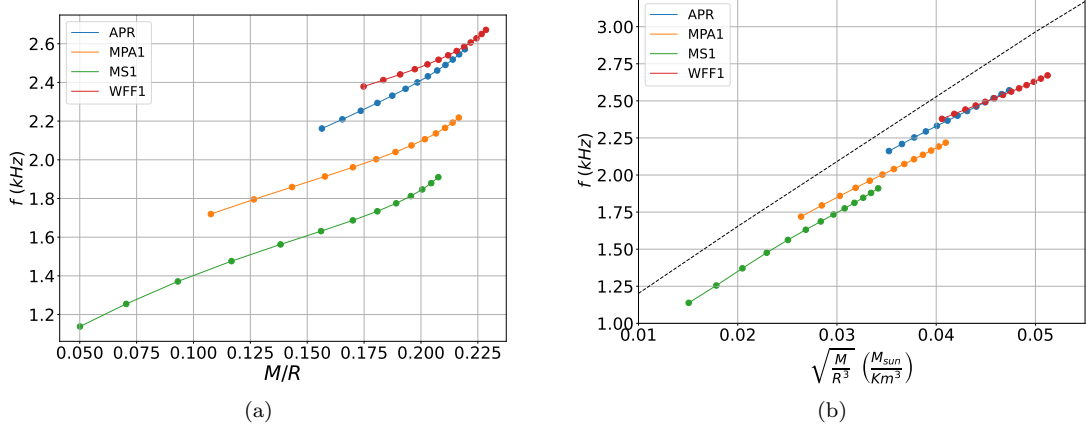


Figura 5.10: Frequência do modo fundamental quadrupolar para estrelas de nêutrons com diferentes (a) compacidades (M/R) e (b) densidades médias $[(M/M_{\odot})/(R/\text{km})^3]$, descritas pelas equações de estado APR, MPA1, MS1 e WFF1. (Dados obtidos a partir de um código alternativo no *Mathematica* (também gerado durante este projeto) que apresentou maior precisão quando comparado aos dados obtidos pelo código em *Python*.)

Andersson e Kokkotas [73], examinando diferentes famílias de modos (f , w e p^3) para diferentes equações de estado, propuseram uma série de relações empíricas para a frequência desses modos, e que podem ser usadas para fornecer estimativas de propriedades da estrela oscilante (como seu raio), caso tais modos sejam ser observados. Em particular, propuseram o seguinte ajuste linear entre a frequência do modo f e a densidade média da estrela [14]:

$$\omega_f(\text{kHz}) \approx 0.78 + 1.635 \left[\left(\frac{M}{1.4M_{\odot}} \right) \left(\frac{10\text{km}}{R} \right)^3 \right]^{1/2}. \quad (5.38)$$

No painel (b) da Figura 5.10, essa relação é exibida juntamente com as previsões das quatro equações de estado analisadas no trabalho. Podemos ver que a relação (calibrada para um conjunto distinto de equações de estado) superestima as frequências previstas para as equações de estado analisadas aqui.

³Os modos p são dados pelos modos de pressão. Nesse caso, pressão é uma força restauradora e esses modos basicamente descrevem ondas acústicas dentro da estrela.

Capítulo 6

Conclusão e perspectivas

O estudo dos modos quasi-normais de objetos compactos é um campo de pesquisa em constante desenvolvimento. À medida que a compreensão das equações de estado da matéria nuclear e das propriedades desses objetos melhora, os resultados das simulações numéricas são comparados com observações astronômicas, permitindo um refinamento contínuo dos modelos teóricos. Essa tópico tem fornecido uma visão mais profunda do espaço-tempo de buracos negros e das propriedades de estrelas de nêutrons e é fundamental para a compreensão não só dos fenômenos astrofísicos que envolvem esses objetos, como da teoria da Relatividade Geral como um todo.

Nesta dissertação exploramos a teoria dos modos quasi-normais para estrelas de nêutrons e buracos negros. Foi possível gerar uma série de códigos em *Python* e *Mathematica* [26] que estabelecem as configurações de fundo, formulam as equações baseadas na teoria de perturbação e, por fim, permitem extrair a frequência de oscilação e o respectivo tempo de decaimento que caracterizam as ondas gravitacionais emitidas pela pulsação não radial dessas classes de objetos compactos.

No capítulo 2, nós descrevemos as soluções de equilíbrio para estrelas de nêutrons e buracos negros. Encontramos a métrica do espaço-tempo esfericamente simétrico e estático que compõe a solução completa de vácuo para um buraco negro. Já para as estrelas de nêutrons, além da solução de vácuo, aplicamos a teoria de fluidos perfeitos a fim de estudar sua estrutura interna. Assim, reproduzimos as equações de TOV, que, alinhadas à uma descrição da composição microfísica do fluido, dada pela equação de estado, determinam a estrutura interna da estrela. Neste trabalho, utilizamos quatro equações de estado nucleares: APR [47], MPA1 [48], MS1 [49] e WFF1 [50] e, para cada uma delas, estudamos o comportamento da pressão, índice adiabático e velocidade do som em função da densidade de energia. Por fim, escolhendo a equação de estado APR, calculamos as propriedades associadas a uma estrela de nêutrons descrita por ela e descrevemos as condições de contorno na origem e na superfície para obtermos a solução de equilíbrio de uma estrela de nêutrons.

O capítulo 3 destinou-se ao estudo da teoria de perturbações. A decomposição em harmônicos esféricos (escalares, vetoriais e tensoriais) foi um passo preliminar que permitiu separar a parte angular da parte temporal/radial das equações de campo de Einstein, usadas para descrever perturbações gravitacionais. Por sua vez, a matriz de perturbação foi simplificada através da escolha do calibre de Regge-Wheeler,

que fixou o sistema de coordenadas utilizado. Uma consequência da separação em harmônicos esféricos é a separação dessa matriz de perturbação em componentes axiais e polares. Para ambas fomos capazes de encontrar as equações de movimento que descrevem perturbações em um objeto compacto. A versão dessas equações para o vácuo foi adaptada apenas considerando a métrica de Schwarzschild e o tensor de energia-momento igual a zero. Das perturbações axiais no vácuo encontramos a equação de Regge-Wheeler, usada pra estudar os MQNs de buracos negros no capítulo 4, e das perturbações polares no vácuo extraímos a equação de Zerilli, que no fim pode ser escrita em termos da função de Regge-Wheeler, e vice-versa. As densas equações apresentadas nesse capítulo foram derivadas em *notebooks* do *Mathematica* [27, 28, 29, 30], a partir dos quais fomos capazes de identificar alguns *typos* correspondentes às equações de movimento polares mostradas no artigo [56]. Além disso, desenvolvemos códigos em *Python* com algumas das equações diferenciais encontradas nesse capítulo e que foram resolvidas nos capítulos 4 e 5.

A análise dos MQNs começou no capítulo 4 para os buracos negros. O estudo se baseou em duas abordagens principais. A primeira é no domínio temporal. Fazendo a evolução temporal das equações dependentes do tempo encontradas no capítulo 3, fomos capazes de entender as propriedades dinâmicas e o comportamento de um buraco negro perturbado. Para esse estudo, desenvolvemos um código em *Python* e, das simulações realizadas, pudemos extrair a frequência de oscilação e o tempo de decaimento do modo quasi-normal de um buraco negro de massa M de duas formas diferentes. Para isso, utilizamos em [32] o método de Transformada Discreta de Fourier, e, de forma complementar, o método de ajuste. O valor encontrado foi $f \approx 12$ kHz (M_\odot/M) para a frequência linear e $\tau \approx 0.05$ ms (M_\odot/M) para o tempo de decaimento. A outra abordagem diz respeito ao domínio das frequências, onde impusemos uma dependência harmônica no tempo. Nesse caso, também desenvolvemos códigos em *Python* a fim de extrair os MQNs [31]. Usamos o método de frações continuadas, que possibilitou encontrar a frequência e o tempo de decaimento do modo quasi-normal fundamental e dos harmônicos superiores. Encontramos os valores $f \approx 12.074268$ kHz (M_\odot/M) e $\tau \approx 0.055366$ ms (M_\odot/M) para o modo fundamental com $l = 2$ e $f \approx 19.369513$ kHz (M_\odot/M) e $\tau \approx 0.053132$ ms (M_\odot/M) para o modo fundamental com $l = 3$. Ficou claro ao longo da análise que, embora o domínio temporal proporcione um maior *insight* físico sobre o comportamento das funções e do corpo oscilante, o domínio das frequências promove uma maior precisão nos valores das frequências dos MQNs. Ao final deste capítulo, fizemos uma breve discussão acerca da primeira detecção de ondas gravitacionais realizada pelo LIGO [7, 61].

Por último, no capítulo 5 calculamos os MQNs de uma estrela de nêutrons. Dessa vez, o sinal emitido pelas perturbações não radiais é claramente composto por mais de uma componente de frequência, no nosso caso os modos mais relevantes foram o modo f e o modo w . Mais uma vez, a análise foi feita para os dois domínios: domínio temporal e domínio das frequências. Para resolver as equações diferenciais no domínio das frequências utilizamos as equações de movimento polares encontradas no capítulo 3 e empregamos as condições de contorno na origem e na superfície definidas no capítulo 2. Desenvolvemos um código em *Python* que resolve tais equações e fornece as frequências dos dois modos, f e w . O método de extração dos MQNs foi, novamente, a fração continuada (calculada no *notebook* [33]), mas dessa vez precisamos realizar um processo de eliminação gaussiana a fim de reduzir a relação de recorrência de 4

para 3 termos. Os valores encontrados para uma estrela com $\bar{p}_c = 5$, descrita pela equação de estado APR e com $l = 2$ foram $f_f \approx 2.35$ kHz e $\tau_f \approx 142$ ms para a frequência linear e o tempo de decaimento do modo f e $f_w \approx 7.38$ kHz e $\tau_w \approx 0.11$ ms para o modo w . No domínio temporal, desenvolvido no *notebook* [34], usamos as equações de movimento polares dependentes do tempo e, dada uma condição inicial, fizemos a evolução temporal das funções que descrevem a perturbação. Isso permitiu comprovar as previsões feitas para o comportamento das funções, como o fato de uma perturbação no fluido poder excitar e ser excitada por perturbações gravitacionais. O último código desenvolvido para este trabalho é referente à extração dos MQNs da estrela de nêutrons no domínio temporal. Nele, utilizamos o método da DFT e de ajuste a fim de encontrar os modos de oscilação da estrela. A DFT foi capaz de fornecer a frequência do modo w : $f_w \approx 7.65$ kHz com $\tau_w \approx 0.09$ ms. Pelo método de *fit* esse valor foi $f_w \approx 7.51$ kHz e $\tau_w \approx 0.09$ ms. A frequência linear do modo f foi estimada impondo mais uma componente de frequência na onda genérica, de forma que encontramos $f_f \approx 2.39$ kHz. Similar ao caso dos buracos negros, o domínio das frequências forneceu uma maior precisão dos dados quando comparado ao domínio temporal. A última seção desse capítulo é destinada ao estudo da frequência do modo f dadas diferentes equações de estado.

Existem diversas extensões possíveis para o trabalho apresentado aqui. Entre elas, destacam-se a exploração de outras famílias de modos quasi-normais e o estudo de uma gama maior de equações de estado. Além disso, de forma mais concreta, ainda é possível gerar simulações mais estáveis e precisas para as perturbações de estrelas de nêutrons (no domínio temporal) e melhorar a determinação dos modos no domínio das frequências, possivelmente por meio da implementação de um método implícito mais adequado ao sistema. Como aplicação das técnicas desenvolvidas aqui, espera-se investigar futuramente se os resultados encontrados em [78] podem ser estendidos para englobar certos modos de oscilação de estrelas de nêutrons. Nesse artigo, mostrou-se que a razão entre a pressão e a densidade de energia no centro da estrela, isto é, p_c/ϵ_c , possui uma forte correlação (ou melhor, uma relação fracamente dependente da equação de estado) com certas propriedades macroscópicas como a compacidade, o momento de inércia e a deformabilidade por forças de maré. Esperamos investigar se relações semelhantes podem ser obtidas entre p_c/ϵ_c e a frequência de certos modos quasi-normais.

Conforme a sensibilidade dos detectores de ondas gravitacionais é aprimorada e novos eventos são observados, surgem novos testes cada vez mais precisos da Relatividade Geral [79, 80, 81], buscando por qualquer desvio ou anomalia que possa levar a uma nova compreensão da gravidade.

Referências Bibliográficas

- [1] Alho, A., Natário, J., Pani, P., & Raposo, G. (2022). Compactness bounds in general relativity. *Physical Review D*, 106(4), L041502.
- [2] Wald, R. M. *General relativity*. 1 ed. Chicago: University of Chicago press, 1984.
- [3] Potekhin, A. Y. (2010). The physics of neutron stars. *Physics-Uspekhi*, 53(12), 1235.
- [4] Timlin, J. (2013). Neutron Degeneracy Pressure. *Quantum Mechanics II*, Spring.
- [5] Weiss, R. (2018). Nobel Lecture: LIGO and the discovery of gravitational waves I. *Reviews of Modern Physics*, 90(4), 040501.
- [6] Abbott, B. P., Abbott, R., Abbott, T. D., Abernathy, M. R., Acernese, F., Ackley, K., ... & Cavalieri, R. (2016). Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, 116(6), 061102.
- [7] Scientific, L. I. G. O., Vecchio, A., Schmidt, P., Stops, D., Prokhorov, L., Pratten, G., ... & Virgo Collaboration. (2022). GWTC-3: compact binary coalescences observed by LIGO and Virgo during the second part of the third observing run. *The Astrophysical Journal*.
- [8] Acernese, F. A., Agathos, M., Agatsuma, K., Aisa, D., Allemandou, N., Allocca, A., ... & Meidam, J. (2014). Advanced Virgo: a second-generation interferometric gravitational wave detector. *Classical and Quantum Gravity*, 32(2), 024001.
- [9] Shinkai, H., & Shoda, A. (2019). KAGRA: 2.5 Generation Interferometric Gravitational Wave Detector. *Nature Astronomy*, v. 3, n. 1, p. 35-40.
- [10] Sathyaprakash, B., Abernathy, M., Acernese, F., Ajith, P., Allen, B., Amaro-Seoane, P., ... & Palomba, C. (2012). Scientific objectives of Einstein telescope. *Classical and Quantum Gravity*, 29(12), 124013.
- [11] Hall, E. D. (2022). Cosmic Explorer: A next-generation ground-based gravitational-wave observatory. *Galaxies*, 10(4), 90.
- [12] Stergioulas, N., Bauswein, A., Zagkouris, K., & Janka, H. T. (2011). Gravitational waves and non-axisymmetric oscillation modes in mergers of compact object binaries. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 418(1), 427-436.

- [13] Nollert, H. P. (1999). Quasinormal modes: the characteristic 'sound' of black holes and neutron stars. *Classical and Quantum Gravity*, 16(12), R159.
- [14] Kokkotas, K. D., & Schmidt, B. G. (1999). Quasi-normal modes of stars and black holes. *Living Reviews in Relativity*, 2, 1-72.
- [15] Regge, T., & Wheeler, J. A. (1957). Stability of a Schwarzschild singularity. *Physical Review*, 108(4), 1063.
- [16] Zerilli, F. J. (1970). Gravitational field of a particle falling in a Schwarzschild geometry analyzed in tensor harmonics. *Physical Review D*, 2(10), 2141.
- [17] Vishveshwara, C. V. (1970). Scattering of gravitational radiation by a Schwarzschild black-hole. *Nature*, 227(5261), 936-938.
- [18] Thorne, K. S., & Campolattaro, A. (1967). Non-radial pulsation of general-relativistic stellar models. I. Analytic analysis for $L_i = 2$. *Astrophysical Journal*, vol. 149, p. 591, 149, 591.
- [19] Thorne, K. S. (2000). Probing black holes and relativistic stars with gravitational waves. In *Black Holes and the Structure of the Universe* (pp. 81-118).
- [20] Berti, E., Cardoso, V., & Starinets, A. O. (2009). Quasinormal modes of black holes and black branes. *Classical and Quantum Gravity*, 26(16), 163001.
- [21] Abbott, R., Abbott, T. D., Abraham, S., Acernese, F., Ackley, K., Adams, A., ... & Brillet, A. (2021). Tests of general relativity with binary black holes from the second LIGO-Virgo gravitational-wave transient catalog. *Physical review D*, 103(12), 122002.
- [22] Ursi, A. L. E. S. S. A. N. D. R. O., Verrecchia, F., Piano, G., Casentini, C. L. A. U. D. I. O., Tavani, M. A. R. C. O., Bulgarelli, A. N. D. R. E. A., ... & Rappoldi, A. (2022). AGILE Observations of the LIGO-Virgo Gravitational-wave Events of the GWTC-1 Catalog. *The Astrophysical Journal*, 924(2), 80.
- [23] Abbott, R., Abbott, T. D., Abraham, S., Acernese, F., Ackley, K., Adams, A., ... & Brooks, A. F. (2021). GWTC-2: compact binary coalescences observed by LIGO and Virgo during the first half of the third observing run. *Physical Review X*, 11(2), 021053.
- [24] Abbott, R., Abbott, T. D., Acernese, F., Ackley, K., Adams, C., Adhikari, N., ... & Brinkmann, M. (2021). GWTC-2.1: Deep extended catalog of compact binary coalescences observed by LIGO and Virgo during the first half of the third observing run. *arXiv preprint arXiv:2108.01045*.
- [25] Scientific, L. I. G. O., Vecchio, A., Schmidt, P., Stops, D., Prokhorov, L., Pratten, G., ... & Virgo Collaboration. (2022). GWTC-3: compact binary coalescences observed by LIGO and Virgo during the second part of the third observing run. *The Astrophysical Journal*.
- [26] Nunes, I. & Mendes, R. (2023), Repositório Perturbations , <https://github.com/RG-UFF/Perturbations/tree/main>

- [27] Nunes, I. & Mendes, R. (2023), Axial_perturbation.nb , https://github.com/RG-UFF/Perturbations/blob/main/Mathematica/Axial_perturbations.nb
- [28] Nunes, I. & Mendes, R. (2023), Polar_perturbations.nb , https://github.com/RG-UFF/Perturbations/blob/main/Mathematica/Polar_perturbations.nb
- [29] Nunes, I. & Mendes, R. (2023), MQNSofBN.nb , <https://github.com/RG-UFF/Perturbations/blob/main/Mathematica/QNMofBH.nb>
- [30] Nunes, I. & Mendes, R. (2023), MQNSofNS.nb , <https://github.com/RG-UFF/Perturbations/blob/main/Mathematica/QNMofNS.nb>
- [31] Nunes, I. & Mendes, R. (2023), BN-DomFreq.ipynb , <https://github.com/RG-UFF/Perturbations/blob/main/Python/BN-DomFreq.ipynb>
- [32] Nunes, I. & Mendes, R. (2023), BN-DomTemp.ipynb , <https://github.com/RG-UFF/Perturbations/blob/main/Python/BN-DomTemp.ipynb>
- [33] Nunes, I. & Mendes, R. (2023), EN-DomFreq.ipynb , <https://github.com/RG-UFF/Perturbations/blob/main/Python/EN-DomFreq.ipynb>
- [34] Nunes, I. & Mendes, R. (2023), EN-DomTemp.ipynb , <https://github.com/RG-UFF/Perturbations/blob/main/Python/EN-DomTemp.ipynb>
- [35] Nunes, I. & Mendes, R. (2023), ContFrac_EN.py , https://github.com/RG-UFF/Perturbations/blob/main/Python/ContFrac_EN.py
- [36] Nunes, I. & Mendes, R. (2023), Eq_timeD.py , https://github.com/RG-UFF/Perturbations/blob/main/Python/Eq_timeD.py
- [37] Nunes, I. & Mendes, R. (2023), Eq_freqD.py , https://github.com/RG-UFF/Perturbations/blob/main/Python/Eq_freqD.py
- [38] Nunes, I. & Mendes, R. (2023), EOS.py , <https://github.com/RG-UFF/Perturbations/blob/main/Python/EOS.py>
- [39] Nunes, I. & Mendes, R. (2023), rhs_freqD2.py , https://github.com/RG-UFF/Perturbations/blob/main/Python/rhs_freqD2.ipynb
- [40] Nunes, I. & Mendes, R. (2023), background.py <https://github.com/RG-UFF/Perturbations/blob/main/Python/background.py>
- [41] Nunes, I. & Mendes, R. (2023), RK.py <https://github.com/RG-UFF/Perturbations/blob/main/Python/RK.py>
- [42] Nunes, I. & Mendes, R. (2023), constants.py <https://github.com/RG-UFF/Perturbations/blob/main/Python/constants.py>

- [43] Schutz, B. *A first course in general relativity*. 2nd ed. New York: Cambridge university press, 2009.
- [44] Tolman, R. C. (1939). Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid. *Physical Review*, 55(4), 364.
- [45] Oppenheimer, J. R., & Volkoff, G. M. (1939). On massive neutron cores. *Physical Review*, 55(4), 374.
- [46] Chamel, N., & Haensel, P. (2008). Physics of neutron star crusts. *Living Reviews in relativity*, 11, 1-182.
- [47] Akmal, A., Pandharipande, V. R., & Ravenhall, D. A. (1998). Equation of state of nucleon matter and neutron star structure. *Physical Review C*, 58(3), 1804.
- [48] M  ther, H., Prakash, M., & Ainsworth, T. L. (1987). The nuclear symmetry energy in relativistic Brueckner-Hartree-Fock calculations. *Physics Letters B*, 199(4), 469-474.
- [49] Mueller, H., & Serot, B. D. (1996). Relativistic mean-field theory and the high-density nuclear equation of state. *Nuclear Physics A*, 606(3-4), 508-537.
- [50] Wiringa, R. B., Fiks, V., & Fabrocini, A. (1988). Equation of state for dense nucleon matter. *Physical Review C*, 38(2), 1010.
- [51] CompOSE, CompStar Online Supernovae Equations of State. <https://compose.obspm.fr/>
- [52] Shapiro, S. L., & Teukolsky, S. A. *Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects*. 1 ed. New York: Wiley-VCH, 1983.
- [53] Clarke, C., & Carswell, B. (2007). Principles of astrophysical fluid dynamics. *Cambridge University Press*.
- [54] Douchin, F., & Haensel, P. (2001). A unified equation of state of dense matter and neutron star structure. *Astronomy & Astrophysics*, 380(1), 151-167.
- [55] Headrick, M. (2023), *Mathematica packages*. <https://people.brandeis.edu/~headrick/Mathematica/>
- [56] Detweiler, S., & Lindblom, L. (1985). On the nonradial pulsations of general relativistic stellar models. *The Astrophysical Journal*, 292, 12-15.
- [57] Allen, G., Andersson, N., Kokkotas, K. D., & Schutz, B. F. (1998). Gravitational waves from pulsating stars: Evolving the perturbation equations for a relativistic star. *Physical Review D*, 58(12), 124012.
- [58] Baumgarte, T. W., & Shapiro, S. L. (2010). *Numerical relativity: solving Einstein's equations on the computer*. Cambridge University Press.
- [59] Chandrasekhar, S. (1975). On the equations governing the perturbations of the Schwarzschild black hole. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 343(1634), 289-298.

- [60] Leaver, E. W. (1985). An analytic representation for the quasi-normal modes of Kerr black holes. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 402(1823), 285-298.
- [61] Scientific, L. I. G. O., Collaborations, V., Abbott, B. P., Abbott, R., Abbott, T. D., Abernathy, M. R., ... & Cepeda, C. B. (2016). Tests of general relativity with GW150914. *Physical review letters*, 116(22), 221101.
- [62] Nollert, H. P., & Schmidt, B. G. (1992). Quasinormal modes of Schwarzschild black holes: Defined and calculated via Laplace transformation. *Physical Review D*, 45(8), 2617.
- [63] Fornberg, B. (1988). Generation of finite difference formulas on arbitrarily spaced grids. *Mathematics of computation*, 51(184), 699-706.
- [64] Pfister, H. (2017). Discrete-Time Signal Processing. *Lecture Note*, pfister. ee. duke. edu/courses/ece485/dtsp. pdf.
- [65] Gautschi, W. (1967). Computational aspects of three-term recurrence relations. *SIAM review*, 9(1), 24-82.
- [66] Andersson, N., Kokkotas, K. D., & Schutz, B. F. (1995). A new numerical approach to the oscillation modes of relativistic stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 274(4), 1039-1048.
- [67] Chirenti, C., Silveira, P. R., & Aguiar, O. D. (2012). Non-radial oscillations of neutron stars and the detection of gravitational waves. In *International Journal of Modern Physics: Conference Series* (Vol. 18, pp. 48-52). *World Scientific Publishing Company*.
- [68] Leins, M., Nollert, H. P., & Soffel, M. H. (1993). Nonradial oscillations of neutron stars: A new branch of strongly damped normal modes. *Physical Review D*, 48(8), 3467.
- [69] Kind, S., Ehlers, J., & Schmidt, B. G. (1993). Relativistic stellar oscillations treated as an initial value problem. *Classical and Quantum Gravity*, 10(10), 2137.
- [70] Cox, J. P. *Theory of Stellar Pulsation*. Princeton: Princeton University Press, 2017.
- [71] Kokkotas, K. D., & Schutz, B. F. (1992). W-modes: a new family of normal modes of pulsating relativistic stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 255(1), 119-128.
- [72] Maggiore, M. (2018). *Gravitational Waves: Volume 2: Astrophysics and Cosmology*. Oxford University Press.
- [73] Andersson, N., & Kokkotas, K. D. (1998). Towards gravitational wave asteroseismology. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 299(4), 1059-1068.
- [74] Benhar, O., Berti, E., & Ferrari, V. (1999). The imprint of the equation of state on the axial w-modes of oscillating neutron stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 310(3), 797-803.

- [75] Leaver, E. W. (1990). Quasinormal modes of Reissner-Nordström black holes. *Physical Review D*, 41(10), 2986.
- [76] Bauswein, A., & Janka, H. T. (2012). Measuring neutron-star properties via gravitational waves from neutron-star mergers. *Physical review letters*, 108(1), 011101.
- [77] Bauswein, A., Janka, H. T., Hebeler, K., & Schwenk, A. (2012). Equation-of-state dependence of the gravitational-wave signal from the ring-down phase of neutron-star mergers. *Physical Review D*, 86(6), 063001.
- [78] Saes, J. A., & Mendes, R. F. (2022). Equation-of-state-insensitive measure of neutron star stiffness. *Physical Review D*, 106(4), 043027.
- [79] Baker, J. G., Centrella, J., Choi, D. I., Koppitz, M., & van Meter, J. (2006). Gravitational-wave extraction from an inspiraling configuration of merging black holes. *Physical Review Letters*, 96(11), 111102.
- [80] Pretorius, F. (2005). Evolution of binary black-hole spacetimes. *Physical review letters*, 95(12), 121101.
- [81] Campanelli, M., Lousto, C. O., Marronetti, P., & Zlochower, Y. (2006). Accurate evolutions of orbiting black-hole binaries without excision. *Physical Review Letters*, 96(11), 111101.