



INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

GABRIEL DE OLIVEIRA ESTEVES DIAS

ANÁLISE EXPERIMENTAL DO
ASTIGMATISMO EM UMA CAVIDADE
DOBRADA

NITERÓI

2023

GABRIEL DE OLIVEIRA ESTEVES DIAS

ANÁLISE EXPERIMENTAL DO
ASTIGMATISMO EM UMA CAVIDADE
DOBRADA

Dissertação apresentada ao programa de
pós-graduação em Física da Universidade
Federal Fluminense como requisito para
obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo
Rodrigues de Souza

NITERÓI

2023

Ficha catalográfica automática - SDC/BIF
Gerada com informações fornecidas pelo autor

E79a Esteves Dias, Gabriel de Oliveira
Análise experimental do astigmatismo em uma cavidade
dobrada / Gabriel de Oliveira Esteves Dias. - 2023.
88 f.: il.

Orientador: Carlos Eduardo Rodrigues de Souza.
Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,
Instituto de Física, Niterói, 2023.

1. Cavidade óptica. 2. Astigmatismo. 3. Produção
intelectual. I. Souza, Carlos Eduardo Rodrigues de,
orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de
Física. III. Título.

CDD - XXX

Gabriel de Oliveira Esteves Dias

**ANÁLISE EXPERIMENTAL DO ASTIGMATISMO EM UMA CAVIDADE
DOBRADA**

Dissertação submetida ao curso de pós-graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Física.

Aprovado em: 19/09/2023.

BANCA AVALIADORA

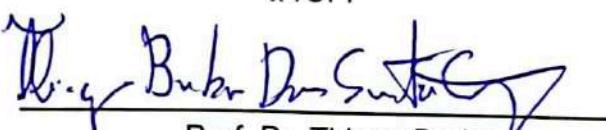
Membros titulares



Prof. Dr. Carlos Eduardo Rodrigues de
Souza
(Orientador)
IF/UFF



Prof. Dr. Ladálio da Silva
IF/UFF



Prof. Dr. Thiago Barbosa
dos Santos Guerreiro
PUC-RIO

Dedicatória: Dedico a minha mãe por
todo esforço e trabalho, para que fosse
possível eu chegar até aqui.

AGRADECIMENTOS

Eu gostaria de agradecer primeiramente a Deus, por me dar forças, tanto físicas quanto psicológicas, para conseguir chegar até aqui, nunca me desamparando.

Depois gostaria de agradecer a minha mãe, por todos seus ensinamentos de vida, pela mulher forte que ela é, seus sacrifícios até hoje para que eu tivesse uma educação de qualidade e fosse capaz de chegar até aqui, por todo seu apoio e seu amor incondicional. Obrigado mãe!

Gostaria de agradecer também a minha irmã, por sempre se preocupar comigo e querer me ver bem, mesmo sendo nova demais para entender os desafios que a faculdade e a vida adulta nos trás, ela se esforçava para tentar me ajudar de alguma forma.

Gostaria de agradecer ao meu orientador, Carlos Eduardo, por me aceitar como orientando, por sua paciência, empenho em me ajudar, por todos os seus ensinamentos, por toda a sua compreensão, por seu empenho e horas dedicadas a esse trabalho.

Queria agradecer aos meus colegas de laboratório por todos os conhecimentos transmitidos, tanto experimentais quanto teóricos e por todas as ajudas.

Gostaria de agradecer aos meus amigos, Mariana (Pudim), Yngrid, Dayvid e Keyla pela amizade, pelos vários momentos que contribuíram em minha formação e por toda ajuda em momentos de dificuldades me dando forças e pelos vários momentos de risada.

Queria agradecer também a minha namorada, Francine, que entrou na minha vida no meio dessa caminhada do mestrado. Obrigado por me ensinar tanto, por momentos em que eu conseguia encontrar paz, no meio do turbilhão de coisas que acontecia, pelas risadas, roles aleatórios e principalmente agora nessa etapa final do mestrado por acreditar em mim, quando muitas vezes eu mesmo não acreditava, você estava lá para falar que eu era capaz e nunca duvidou disso.

E por último, mas não menos importante, meu agradecimento à alguns professos-

res que tive ao longo da minha trajetória até aqui, que muitas vezes me inspiraram e me incentivaram, principalmente aqueles no qual foi possível quebrar a barreira professor/aluno e criar uma amizade.

O caminho acadêmico em física não é fácil, onde dediquei incontáveis horas, onde me privei da companhia dos meus amigos e da minha família, espero que possam compreender isso. Obrigado por todo apoio!

A Matemática é o alfabeto no qual Deus
escreveu o Universo.

Galileu Galilei

RESUMO

Esta dissertação aborda o astigmatismo em uma cavidade óptica dobrada (que tem a forma da letra V) como uma possível aplicação na montagem de um Oscilador Paramétrico Óptico (OPO) para a produção de feixes com momento angular orbital (MAO). Apresenta-se uma descrição teórica da dinâmica dessa cavidade dobrada e uma caracterização do astigmatismo. Com base na propagação dos modos paraxiais Hermite-Gauss de ordem superior e nas condições de ressonância, propõe-se um método para quantificação do astigmatismo nessa cavidade. Nesta linha, apresenta-se também os resultados experimentais compatíveis com a descrição teórica realizada e que permitem uma caracterização do astigmatismo em uma cavidade montada no Laboratório de Óptica Quântica da UFF. Explorando as condições geométricas da cavidade como o ângulo de dobradura e a curvatura do espelho, aliados à propagação da luz em um cristal não linear KTP, apresenta-se também uma proposta experimental de uma cavidade óptica dobrada para transmissão de feixes com MAO.

Palavras-chave: Cavidade Óptica; Astigmatismo; Momento Angular Orbital da luz; Oscilador Paramétrico Óptico.

ABSTRACT

This dissertation deals with astigmatism in a folded optical cavity (shaped like the letter V) as a possible application in the assembly of an Optical Parametric Oscillator (OPO) for the production of beams with orbital angular momentum (OAM). A theoretical description of the dynamics of this folded cavity and a characterization of astigmatism are presented. Based on the propagation of higher-order Hermite-Gauss paraxial modes and resonance conditions, a method for quantifying astigmatism in this cavity is proposed. In this vein, we also present experimental results that are compatible with the theoretical description and that allow a characterization of astigmatism in a cavity set up in the Quantum Optics Laboratory at UFF. Exploring the geometric conditions of the cavity, such as the bending angle and the curvature of the mirror, together with the propagation of light in a non-linear KTP crystal, we also present an experimental proposal for a bent optical cavity for transmitting beams with MAO.

Keywords: Optical Cavity; Astigmatism; Orbital Angular Momentum of light; Optical Parametric Oscillator.

LISTA DE FIGURAS

1	Representação da propagação longitudinal do feixe gaussiano e seus parâmetros.	23
2	À esquerda: Representação do perfil de intensidade transverso do feixe gaussiano, onde a intensidade é máxima em $r = 0$ e tende a zero conforme r cresce. À direita: Representação da superfície de intensidade do feixe gaussiano.	23
3	Comportamento do raio de curvatura $R(z)$ das frentes de onda do feixe gaussiano com relação a distância z ao longo do eixo de propagação.	25
4	Representação pictórica do perfil de intensidade transverso dos modos: à esquerda o modo Hermite-Gauss e à direita o modo Laguerre-Gauss.	28
5	Frente de onda helicoidal de um feixe que carrega momento angular orbital se propagando.	30
6	(a) Decomposição dos modos $LG_0^{\pm 1}$ em termos dos modos HG ; (b) Decomposição dos modos HG inclinados de $\pm 45^\circ$ em termos dos modos HG	31
7	Representação pictórica da propagação longitudinal de um feixe gaussiano com astigmatismo causado por uma lente cilíndrica e representação do perfil transversal elíptico.	33
8	Esquema de traçado de raios da formação de uma imagem a partir de uma lente convergente.	34
9	Exemplo de matrizes $ABCD$ de três casos diferentes. <i>a</i>) Propagação livre; <i>b</i>) Incidência normal em um espelho curvo; <i>c</i>) Incidência com ângulo arbitrário em um espelho curvo, onde $R_{ef} = R \cos \theta$ na direção plano de incidência e $R_{ef} = R / \cos \theta$ na direção do plano perpendicular ao plano de incidência.	36
10	Exemplo de cavidades ópticas. <i>a</i>) Cavidade linear com dois espelhos planos; <i>b</i>) Cavidade linear com dois espelhos curvos; <i>c</i>) Cavidade em anel do tipo Bow-Tie.	38

11	Esquema simplificado de uma cavidade de Fabry-Pérot composta de dois semi espelhos planos, M_1 e M_2 , e um índice de refração n entre os espelhos, onde uma onda plana incide em um ângulo θ' sofrendo diversas reflexões e transmissões nos espelhos.	39
12	Esquema para dedução da diferença de caminho.	40
13	Picos de transmissão para uma cavidade Fabry-Pérot para três valores de R diferentes.	42
14	Reapresentação do FSR ($\Delta\nu$) e da largura de linha ($\delta\nu$) nos picos de ressonância.	43
15	Representação pictórica de uma cavidade linear formada por dois espelhos curvos de raio R	46
16	Posição das frequências de ressonância de uma cavidade linear.	48
17	Exemplo de uma cavidade dobrada composta por três espelhos: dois planos M_1 , M_3 e um curvo M_3 ; e duas cinturas: w_1 e w_2	49
18	Simulação do comportamento das cinturas w_1 e w_2 com relação a l_1 para a cavidade dobrada.	51
19	Comportamento das cinturas w_1 (mais acima) e w_2 (mais abaixo) em função de θ , para as direções x e y , referente a uma cavidade dobrada com $l_1 = 1125\ mm$, $l_2 = 1250\ mm$ e $R = 2000\ mm$	53
20	Representação dos parâmetros $z - z_x$ e $z - z_y$ na cavidade dobrada.	54
21	Simulação do comportamento das frequências de ressonância para a cavidade dobrada. A escala horizontal está em unidades do <i>FRS</i>	57
22	Comportamento da separação dos picos de ressonância dos modos HG_{01} e HG_{10} em função de θ para uma cavidade dobrada com $l_1 = 1125\ mm$, $l_2 = 1250\ mm$ e $R = 2000\ mm$. A escala vertical está em unidades do <i>FRS</i>	57
23	Exemplo de OPO formado por uma cavidade linear composta por dois semi-espelhos e um cristal não linear. Na figura, é retratado um feixe laser verde de bombeio com comprimento de onda $532\ nm$ sendo convertido em dois feixes infravermelhos, com comprimento de onda $1064\ nm$, através da CPD.	59

24 A esquerda, representação da cavidade dobrada com dois cristais, um em cada cintura. A direita, representação da cavidade equivalente considerando os caminhos ópticos de difração, onde $i = (e, o)$.	61
25 Simulação da relação entre l_1 e θ , considerando $\Delta\Phi^e = \Delta\Phi^o = 0$. Em azul: o comportamento de θ para a polarização extraordinária; Em laranja: o comportamento de θ para a polarização ordinária; Em vermelho: ponto de cruzamento entre as retas, onde ocorre $\Delta\Phi^e = \Delta\Phi^o = 0$ simultaneamente.	63
26 Representação da cavidade dobrada com os parâmetros que leva à compensação do astigmatismo dos feixes convertidos.	63
27 Imagem meramente ilustrativa do layout da cavidade dobrada, formada por dois semi-espelhos planos (M_1 e M_3) e um curvo (M_2) e um PZT acoplado ao semi-espelho M_2 e cinturas características w_1 e w_2 .	66
28 Comportamento de w_1 em função de l_1 . Em vermelho: ponto referente a $l_1 = 1125 \text{ mm}$ e $w_1 = 343,3 \mu\text{m}$	67
29 a) esquema experimental do método da faca; b) Intensidades medidas no detector conforme a lâmina corta o feixe.	68
30 Caracterização experimental da cintura w_0	69
31 Esquema ilustrativo de um sistema de lentes com distâncias focais f_2 e f_3 para realização do acordo de modos.	70
32 Simulação da posição das lentes (em vermelho), para que ocorra o acordo de modo da cintura do feixe (em amarelo), com a cintura exigida pela cavidade (em azul), em uma distância de 1500 cmm de w_0 (origem do eixo z).	70
33 Ilustração do aparato experimental, onde é mostrado os principais elementos usados para montagem da cavidade.	71
34 Montagem experimental do espelho curvo, sobre um estágio giratório, utilizado na cavidade dobrada.	74
35 Adaptação feita na cavidade afim de que fosse possível a obtenção de resultados para ângulos maiores que $7,5^\circ$.	76

36 Imagem retirada da tela do osciloscópio, contendo o sinal de rampa enviado ao PZT (em amarelo) e os picos de transmissão de intensidade da cavidade (em azul), juntamente com as imagens de identificação dos picos de interesse, coletadas através da câmera CCD.	77
37 Variação da diferença de frequência de ressonância $\Delta\nu$, entre os modos HG_{01} e HG_{10} com relação ao ângulo de inclinação θ do espelho curvo presente na cavidade dobrada. Em vermelho os pontos teóricos e em azul os pontos experimentais.	78
38 Relação entre as diferenças de frequência de ressonância $\Delta\nu(teo)$ e $\Delta\nu(exp)$, ajustado a uma linha de tendência com equação dada por $(0, 9407 \pm 0, 0713) x - (0, 0046 \pm 0, 0039)$ obtida a parir dos pontos do gráfico.	79

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BS	Beam Splitter
CCD	Charge Coupled Device
CPD	Conversão Paramétrica Descendente
EPR	Einstein-Poldoski-Rosen
FSR	Free Spectral Range
HG	Hermite-Gauss
HR	High Reflection
LG	Laguerre-Gauss
LOQ	Laboratório de Óptica Quântica
MAO	Momento Angular Orbital
OPO	Oscilador Paramétrico Óptico
PBS	Polarization Beam Splitter
PZT	Piezoelétrica

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS	18
2.1	Descrição da luz como onda Eletromagnética	18
2.2	Equação Paraxial	20
2.3	Modo Fundamental	21
2.3.1	Parâmetros de um feixe gaussiano	23
2.4	Modos Paraxiais	26
2.4.1	Modos Hermite-Gaussianos	27
2.4.2	Modos Laguerre-Gaussianos	28
2.4.3	Conversão de modos	30
2.5	Feixes Astigmáticos	31
2.6	Matriz ABCD	33
2.6.1	Aplicação de matrizes ABCD em feixes gaussianos	36
3	CAVIDADES ÓPTICAS	38
3.1	Cavidade de Fabry-Pérot	38
3.1.1	Intensidade Transmitida	41
3.1.2	Intervalo Espectral Livre, Largura de Linha, Finesse	42
3.2	Cavidades ópticas e feixes gaussianos	44
3.2.1	Estabilidade da Cavidade Óptica	45
3.3	Frequência de ressonância	47
4	CAVIDADE DOBRADA: UMA PROPOSTA PARA MEDIDA DO ASTIGMATISMO	49
4.1	Descrição da cavidade dobrada	49
4.2	Astigmatismo na Cavidade	51
4.2.1	Astigmatismo em função da abertura da cavidade	52
4.2.2	Caracterização do astigmatismo na cavidade óptica dobrada.	53

5	COMPENSAÇÃO DO ASTIGMATISMO DE MEIOS NÃO LINEARES	58
5.1	Compensação do astigmatismo proveniente do cristal com o uso da ca- vidade dobrada	59
6	VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL DO ASTIGMATISMO EM UMA CAVIDADE DOBRADA	65
6.1	Acordo de Modos em uma cavidade óptica	65
6.2	Montagem experimental da cavidade óptica dobrada	71
6.2.1	Aparato Experimental	72
6.2.2	Construção da Cavidade	73
6.3	Obtenção dos Resultados	75
7	RESULTADOS E ANÁLISES	77
8	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS	80
	REFERÊNCIAS	81
	APÊNDICES	84
A	INTENSIDADE TRANSMITIDA	84
B	CALCULO DAS PORCENTAGENS DE CORTE DO FEIXE	85

1 INTRODUÇÃO

Ao longo dos anos, a exigência para a troca de dados e processamento de informações tornou-se cada vez mais intensa e junto a isso, a necessidade de que o processamento desses dados seja cada vez mais rápida. A partir dessa necessidade, a luz e suas propriedades quânticas vem sendo objetos de estudo para implementação de sistemas quânticos de informação, como proposto por Feynman em 1982 [1]. Algumas das tecnologias que vem avançando em seu desenvolvimento e que frequentemente são baseados em estados quânticos do campo eletromagnético são a criptografia quântica [2], teletransporte quântico [3] e também os computadores quânticos [3]. As pesquisas em Óptica Quântica caminham em direção do processamento, da compactação, transporte e armazenamento de informações e assim utilizá-las com o objetivo de se ter um computador quântico que lide com problemas intratáveis por computadores clássicos [3].

Uma ferramenta bastante usada em protocolos de informação é o momento angular orbital (MAO), transportado por vórtices paraxiais presentes em feixes lasers, usualmente descritos na base dos modos Laguerre-Gauss (LG_p^l) [4]. Sua combinação com outros graus de liberdade, como a polarização, dão origem às aplicações em teletransporte e criptografia quântica [5, 6, 7] conforme apontado acima. Uma forma de produção do emaranhamento entre o MAO e a polarização é através da conversação paramétrica descendente (CPD), que acontece através de um meio não linear (um cristal, por exemplo). Quando a CPD ocorre dentro de um ressonador óptico (também conhecido como cavidade óptica), obtém-se um Oscilador Paramétrico Óptico (OPO). Um dispositivo proposto originalmente por Kroll [8] em 1962 e construído por Giordmaine e Miller [9] em 1965. O OPO é capaz de produzir um par de feixes gêmeos intensos emaranhados em quadraturas com polarizações diferentes (sinal e complementar).

Contudo, um aspecto proveniente do meio não linear é a ocorrência de astigmatismo nos feixes. O astigmatismo consiste na focalização em pontos diferentes para cada uma das direções perpendiculares à direção de propagação do feixe. Conforme

observado por M. Martinelli et al, [10] esse efeito compromete a produção de feixes em OPO com cristais tipo II. Em especial, foi realizado um trabalho experimental, em 2018 no Laboratório de Óptica Quântica (LOQ) da UFF, baseado em um OPO tipo II [11] no qual foi observada uma simetria do MAO dos feixes convertidos. Tal trabalho foi realizado numa situação experimental desafiadora requerendo ajustes no alinhamento do aparato devido ao astigmatismo. Uma extensão natural desse trabalho seria a continuidade do estudo da dinâmica dos modos *LG* de ordens superiores [12] que poderia ser feita com uma abordagem mais específica do astigmatismo na cavidade do OPO.

Dessa dificuldade surgiu a ideia do tema central dessa dissertação de encontrar maneiras de construir OPO's que permitam a oscilação de feixes com MAO, mesmo em presença de astigmatismo.

O astigmatismo produzido pelo cristal não linear não constitui um parâmetro de controle na realização experimental, logo não sendo de fácil ajuste nas experiências com cavidades ópticas. Todavia, observamos que cavidades ópticas não lineares (cavidades dobradas tipo as bem conhecidas Cavidades Bow-Tie) podem produzir feixes astigmáticos [13]. Verificamos que o astigmatismo produzido é ajustável por meio de parâmetros geométricos da cavidade, completamente controláveis no experimento. Com isso, surgiu a proposta de utilizar o astigmatismo da cavidade dobrada para compensar o astigmatismo do cristal, habilitando então a proposta final de construção de um OPO de forma versátil, para a produção de feixes gêmeos com MAO.

De maneira a apresentar os resultados do trabalho apresentado nesta dissertação, de maneira organizada, no Capítulo 2 é apresentado os conceitos básicos importantes relacionados a propagação de ondas eletromagnéticas, para a discussão dos resultados nos capítulos subsequentes. Partiu-se das equações de Maxwell, seguindo para as possíveis soluções da equação de Helmholtz, passando pela descrição de um feixe gaussiano e outros modos paraxiais. Continuando para a descrição de um feixe astigmático. É discutido também sobre como tratar a evolução espacial para feixes gaussianos, através do formalismo de matriz *ABCD*.

No Capítulo 3, é realizada uma discussão sobre cavidades ópticas e algumas de suas propriedades e características. Passando pela descrição de uma cavidade Fabry-Pérot, assim como o comportamento dos feixes transmitidos por essa cavidade. Seguindo a discussão é apresentado como descrever a propagação de feixes gaussianos em cavidades, juntamente com como encontrar seus parâmetros de estabilidade.

No Capítulo 4, é apresentado a teoria do objeto de estudo principal desse trabalho, uma cavidade óptica dobrada. Apresenta-se uma descrição da cavidade e de seus parâmetros, seguindo para discussão da presença do astigmatismo na cavidade e de sua atuação nas frequências de ressonância para modos Hermite-Gauss de primeira ordem.

No Capítulo 5, é discutido um assunto complementar deste trabalho, o desenvolvimento teórico de um método para a compensação do astigmatismo de um OPO formado por uma cavidade dobrada e cristais não lineares. Apresentando no final parâmetros de uma cavidade capaz realizar essa compensação.

No Capítulo 6 teremos a descrição experimental da construção da cavidade óptica. Nele foi apontado os elementos ópticos e equipamentos experimentais utilizados para a construção da cavidade, assim como os procedimentos para incidência do feixe laser na cavidade e o método utilizado para a coleta de resultados.

No Capítulo 7 é discutido os resultados obtidos experimentalmente e comparando com simulações teóricas feitas a partir do que é discutido no Capítulo 4. Por fim, no Capítulo 8 finalizamos com as conclusões e perspectivas.

2 PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

Neste capítulo, inicialmente será realizada uma breve descrição da luz como uma onda eletromagnética. Seguindo, a partir das Equações de Maxwell, obteremos a equação de onda eletromagnética.

Considerando harmônica a parte temporal da equação do campo elétrico da luz, verificaremos que a mesma satisfaz à equação de Helmholtz, a qual pode ser resolvida no regime paraxial. Veremos que os feixes lasers, usados em todas etapas deste trabalho, são descritos pelos: modo fundamental, modos Hermite-Gauss (HG) e Laguerre-Gauss (LG). Por fim, será discutido o formalismo matemático utilizado para descrever a propagação desses feixes através de objetos ópticos e como sua forma é alterada.

2.1 DESCRIÇÃO DA LUZ COMO ONDA ELETROMAGNÉTICA

As equações de Maxwell, como são conhecidas, são um conjunto de quatro equações formado pela lei de Gauss da eletrostática e da magnetoestática, pela lei de Faraday e pela lei de Ampère-Maxwell. Através delas, James Clerk Maxwell, trouxe uma grande mudança de pensamento com relação a natureza da luz, pois o mesmo, por meio de seu trabalho, mostrou que a luz se comportaria como uma onda eletromagnética. Essas equações estão escritas abaixo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Lei de Gauss}) \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Lei de Gauss na magnetostática}) \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Lei de Faraday}) \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Lei de Ampère-Maxwell}). \quad (2.4)$$

Elas são um conjunto de quatro equações diferenciais parciais de primeira ordem, onde \vec{E} e \vec{B} são os vetores de campo elétrico e magnético, respectivamente, ρ é a densidade volumétrica de cargas do meio, ϵ_0 é a constante de permissividade do

vácuo, μ_0 a constante de permeabilidade do vácuo e \vec{J} é o vetor densidade de corrente elétrica. Uma descrição mais aprofundada dessas equações pode ser encontrada em livros de eletromagnetismo [14].

A partir dessas equações é possível fazer algumas manipulações matemáticas, na linguagem matemática moderna, e assim, chegar na equação da onda eletromagnética. A fim de facilitar essas manipulações, consideraremos um sistema em um meio isotrópico, sem a presença de cargas e densidade de corrente, de tal forma que $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$. Com isso, aplicando a operação do rotacional na Equação 2.3 encontra-se:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}). \quad (2.5)$$

Usando a identidade $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$ e o fato de que estamos considerando um meio isotrópico (onde teremos $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ e $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$) obtemos:

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \\ \Rightarrow \nabla^2 \vec{E} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

De maneira análoga, podemos obter a mesma equação para o campo magnético:

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (2.7)$$

Essas equações diferenciais de segunda ordem, que descrevem a dinâmica da radiação eletromagnética, têm a forma de equações de onda. Sendo assim, Maxwell concluiu que tanto o campo elétrico quanto o campo magnético podem ter formas ondulatórias com uma velocidade de propagação $v = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$. Fazendo a substituição dos valores de μ_0 e ε_0 encontra-se uma velocidade muito próxima a velocidade da luz medida por Armand Fizeau [15] em seu experimento da roda dentada.

Para o estudo da propagação da luz, é possível escolher um desses campos como referência, usualmente, na literatura, sendo escolhido o campo elétrico. Essa convenção acontece por conta dos sistemas de detecção, que realizam as medidas através da ação da força elétrica exercida sobre eles.

2.2 EQUAÇÃO PARAXIAL

De maneira a encontrarmos uma solução para Equação 2.6, que descreve a propagação de um feixe monocromático e pouco divergente (análogo ao feixe de um laser), vamos considerar um campo elétrico da seguinte forma:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E(\vec{r})e^{-i\omega t}, \quad (2.8)$$

composta de uma parte espacial ($E(\vec{r})$) ligada a amplitude complexa da onda e uma parte temporal harmônica ($e^{-i\omega t}$), com frequência ω , relacionada a fase da onda. Substituindo a Equação 2.8 na Equação 2.6, encontramos a equação de ondas na forma reduzida, envolvendo apenas coordenadas espaciais. Esta equação é conhecida como equação de Helmholtz, dada por:

$$\nabla^2 E + k^2(\vec{r})E = 0, \quad (2.9)$$

onde $k^2 = \mu\epsilon\omega^2$, podendo depender de r , caso seja considerado um meio tipo lente. A fim de simplificar as contas, vamos considerar que o meio é homogêneo, de forma que k seja constante¹, não variando com r . Como o Laplaciano na Equação 2.8 não envolve termo temporal e considerando que a onda tem seu fluxo de energia predominantemente ao longo do eixo z de propagação, é possível considerar a seguinte solução para a equação acima:

$$E = \psi(x, y, z)e^{-ikz}, \quad (2.10)$$

onde e^{-ikz} é uma fase longitudinal, que carrega a dependência espacial "rápida" e $\psi(x, y, z)$ é o termo com dependência longitudinal e transversal, sendo assim ele específica a estrutura transversa do feixe.

Esta estrutura transversa possui uma variação lenta ao longo de z , isso significa que em um deslocamento da ordem do comprimento de onda ($\Delta z = \lambda$), a função tem uma variação muito menor que ela mesma ($\Delta\psi \ll \psi$). Considerando um feixe razoavelmente colimado esta variação acaba sendo lenta quando comparada ao termo de fase longitudinal. Resumindo, a função que descreve a variação transversa muda pouco em distâncias da ordem do comprimento de onda.

¹As contas mais detalhadas para o termo $k^2(r)$ podem ser encontradas em [15]

A substituição da Equação 2.10 na equação de Helmholtz 2.9, produz:

$$\nabla^2\psi(x, y, z) + 2ik\nabla\psi(x, y, z) = 0. \quad (2.11)$$

A variação lenta de $\psi(x, y, z)$ em torno do eixo z , pode ser expressa matematicamente por meio da aproximação paraxial:

$$\left| \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \right| \text{ e } 2k \left| \frac{\partial\psi}{\partial z} \right|. \quad (2.12)$$

Desta forma, o termo da derivada de segunda ordem, com relação a z , pode ser desprezado. Assim, a Equação 2.11 se reduz a:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + 2ik\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0. \quad (2.13)$$

Essa equação é conhecida como equação paraxial. A partir dela podemos encontrar famílias de soluções que descrevem a propagação de feixes lasers.

2.3 MODO FUNDAMENTAL

A Equação 2.13 pode ser resolvida de diversas formas. Primeiramente vamos discutir uma das possíveis soluções dessa equação. Uma solução bastante usada é a referente ao feixe gaussiano (modo fundamental), essa solução aparece para o caso de tomarmos o Laplaciano em coordenadas cilíndricas, com uma simetria azimutal, na equação paraxial. Essa solução é bastante conveniente para descrição de feixes de lasers comerciais. Portanto, em coordenadas cilíndricas o Laplaciano tem a seguinte forma:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (2.14)$$

levando em conta a simetria azimutal, o termo da derivada em relação a ϕ pode ser descartado, assim o Laplaceano toma a seguinte forma:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla_\perp^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.15)$$

É possível, então, reescrever a equação paraxial (2.13) da seguinte maneira:

$$\nabla_\perp^2\psi + 2ik\frac{\partial\psi}{\partial z}. \quad (2.16)$$

A solução da Equação 2.16 não é simples, mas conforme as referências [15, 16, 17] mostram, podemos tomar uma solução tentativa que possui a seguinte forma:

$$\psi(r, z) = \psi_0 \exp \left\{ -i \left[P(z) + \frac{Q(z)r^2}{2} \right] \right\}, \quad (2.17)$$

onde $P(z)$ e $Q(z)$ são funções complexas. A partir dessa solução, é possível chegar na equação do campo E que descreve como a estrutura transversa do feixe gaussiano se comporta ao longo do eixo z [16] tal que,

$$\begin{aligned} E(r, z) &= E_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp \left\{ -i[kz - \phi(z)] - r^2 \left(\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2R(z)} \right) \right\} \\ k &= \frac{2\pi n}{\lambda} \\ r^2 &= x^2 + y^2, \end{aligned} \quad (2.18)$$

de maneira que $w(z)$ descreve largura transversal do feixe, $R(z)$ o raio de curvatura da frente de onda do feixe e $\phi(z)$ é referente fase de Gouy. Na Figura 1 é apresentado o perfil de propagação do feixe.

O perfil de intensidade transverso ao longo da direção de propagação z , desse campo, pode ser encontrado usando o fato de que $I(r, z) = |E(r, z)|^2$, assim:

$$\begin{aligned} I(r, z) &= I_0 \left(\frac{w_0}{w(z)} \right)^2 \exp \left\{ -\frac{2r^2}{w^2(z)} \right\} \\ I_0 &= |E_0|^2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Da equação Equação 2.19 observa-se que ela é uma função gaussiana (apresenta a forma Ae^{-cx^2}), a partir da qual é possível observar que a intensidade de um feixe gaussiano cai conforme nos afastamos do centro, e que para $r = 0$ temos a máxima intensidade do feixe. A Figura 1 ilustra o padrão transversal da intensidade e como ele varia com r .

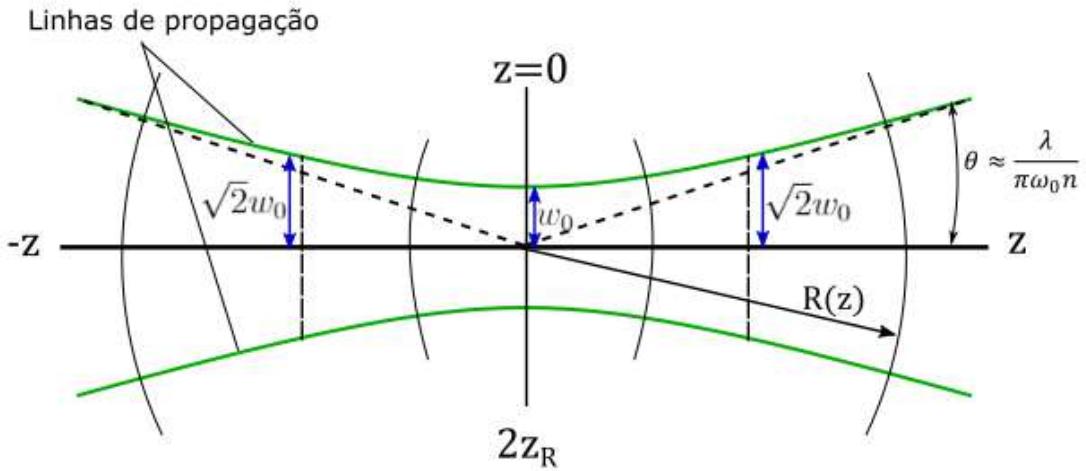


Figura 1: Representação da propagação longitudinal do feixe gaussiano e seus parâmetros.

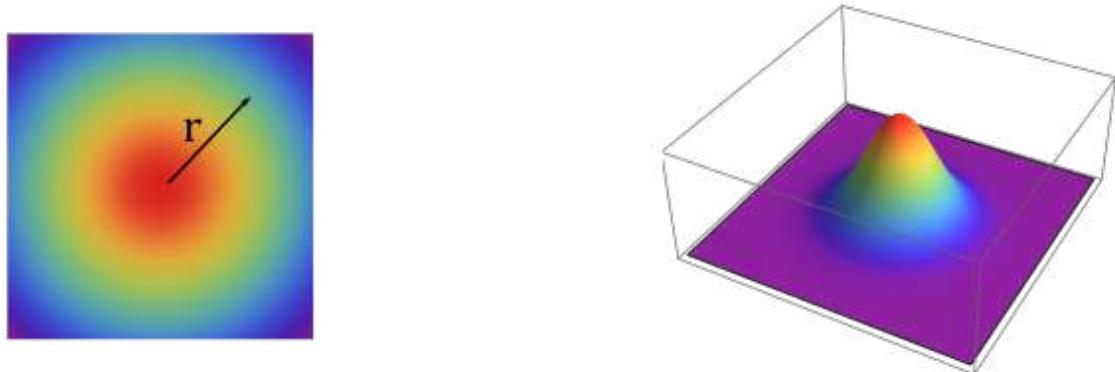


Figura 2: À esquerda: Representação do perfil de intensidade transverso do feixe gaussiano, onde a intensidade é máxima em $r = 0$ e tende a zero conforme r cresce. À direita: Representação da superfície de intensidade do feixe gaussiano.

2.3.1 Parâmetros de um feixe gaussiano

O feixe gaussiano é de grande relevância porque corresponde ao principal tipo de luz emitida por lasers em laboratórios de pesquisa. Na equação que o descreve temos a presença de certos parâmetros físicos que o caracterizam, os quais são de grande importância para tratá-lo de forma teórica e experimental. A Figura 1 ilustra alguns

desses parâmetros com relação a propagação do feixe.

- Largura transversal

A largura transversal do feixe, tem sua evolução ao longo do eixo z , como pode ser observada na Figura 1. Ela é matematicamente descrita por:

$$w^2(z) = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2 n} \right)^2 \right]. \quad (2.20)$$

Na posição $z = 0$, o feixe apresenta o que é chamado waist (cintura), representado por w_0 , onde ele possui sua menor largura. É perceptível que no plano $z = 0$, temos a maior intensidade do feixe, basta substituir a Equação 2.20 em 2.19 e encontramos que $I = I_0$ em $r = 0$. As linhas verdes presentes na Figura 1 que limitam o feixe, são descritas pelo caso no qual $r = w(z)$ e a partir da Equação 2.19 obtém-se $I = I_0 \left(\frac{w_0}{w(z)} \right)^2 \frac{1}{e^2}$, apontando o lugar geométrico, cuja a intensidade cai por um fator $1/e^2$ ($\approx 13,5\%$) em cada plano z .

- Distância de Rayleigh

Ele é um parâmetro do feixe gaussiano, definido como:

$$z_R \equiv \frac{\pi w_0^2 n}{\lambda}. \quad (2.21)$$

Na posição onde temos $z = z_R$, obtemos uma largura do feixe $w(z_R) = \sqrt{2}w_0$ e o raio de curvatura vale $R(z_R) = 2z_R$. É possível interpretar esse parâmetro como sendo o que define uma distância, medida a partir da cintura do feixe, onde o feixe ainda se apresenta colimado (não houve grande divergência).

- Raio de curvatura

A frente de onda do feixe gaussiano apresenta um raio de curvatura $R(z)$ que varia com a propagação do feixe, essa dependência em z é dada por:

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2 n}{\lambda z} \right)^2 \right]. \quad (2.22)$$

É interessante notar que para $z \rightarrow 0$ e para $z \rightarrow \infty$ o raio de curvatura também tende ao infinito, fazendo com que a frente de onda do feixe se assemelhe a uma frente de onda plana. Para o caso de $z = z_R$, teremos o raio de curvatura mínimo do feixe $R(z_R) = 2z_R$. O comportamento do raio de curvatura é representado na Figura 3.

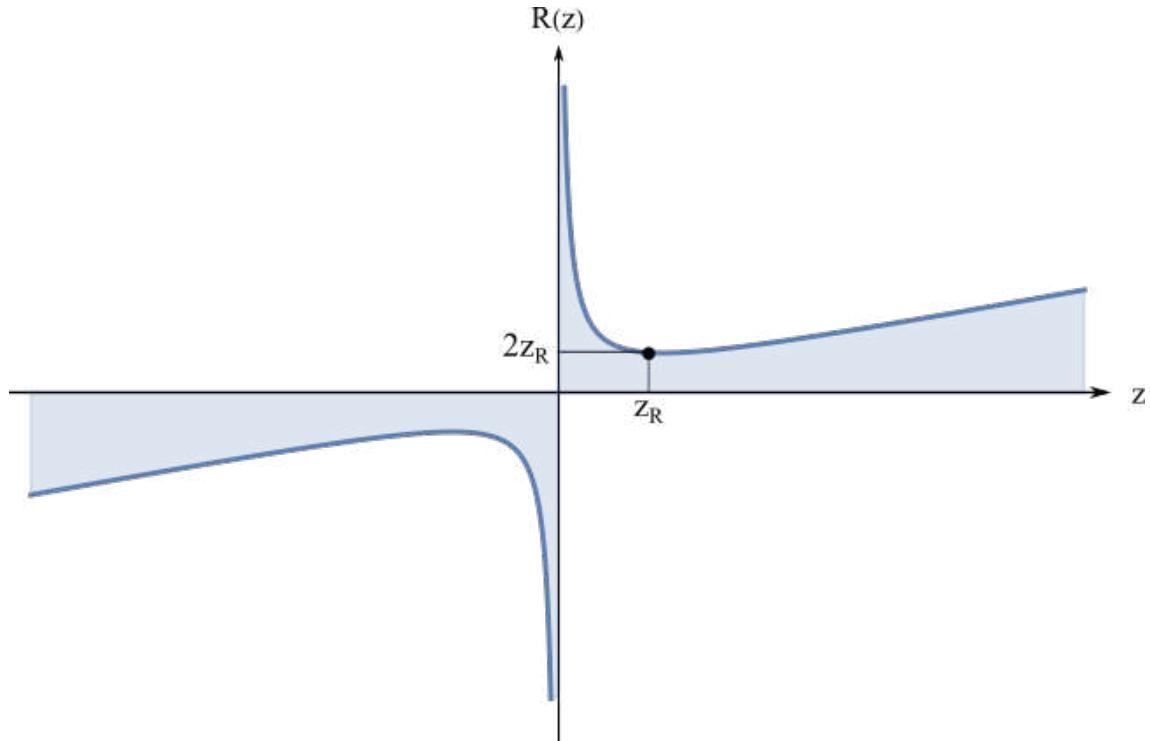


Figura 3: Comportamento do raio de curvatura $R(z)$ das frentes de onda do feixe gaussiano com relação a distância z ao longo do eixo de propagação.

- Divergência

A partir da Equação 2.20 é notável que a largura do feixe diverge conforme o feixe se propaga na direção z . Tomando a distância de Rayleigh como referência, já que conhecemos o comportamento da largura a essa distância, e considerando um $z \gg z_R$ a Equação 2.20 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$w(z) \approx w_0 \frac{z}{z_R}. \quad (2.23)$$

Da trigonometria podemos escrever que:

$$\tan \theta = \frac{w_0 z / z_R}{z} = \frac{w_0}{z_R}, \quad (2.24)$$

levando em conta o limite para ângulos pequenos e usando a Equação 2.21 é obtido:

$$\theta \approx \frac{\lambda}{\pi w_0 n}, \quad (2.25)$$

essa é a relação que fornece o ângulo de divergência do feixe gaussiano.

- Fase de Gouy

A fase de Gouy é compreendida como a diferença de fase entre uma onda plana e um feixe, quando o mesmo passa por um ponto focal [18]. Ela é descrita da seguinte forma:

$$\phi(z) = \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_R} \right), \quad (2.26)$$

O efeito dela é acrescentar uma mudança de fase acumulativa de $\pi/2$ em cada lado da cintura do feixe, ocorrendo entre os limites $z \rightarrow -\infty$ e $z \rightarrow +\infty$ [19]. A fase de Gouy adquire um papel importante quando há o interesse em determinar as frequências de ressonância de uma cavidade óptica [20].

- Raio de curvatura complexo

O raio de curvatura complexo é definido da seguinte maneira:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi n w^2(z)}. \quad (2.27)$$

Ele é um artifício matemático, para descrever ao mesmo tempo o raio de curvatura do feixe gaussiano (parte real) e a largura do feixe (sua parte imaginária). Usando as Equações 2.20, 2.21 e 2.22, o raio complexo pode ser reescrito na forma:

$$q(z) = z + iz_R. \quad (2.28)$$

Esse parâmetro é bastante útil quando é preciso descrever a propagação do feixe gaussiano através de elementos ópticos no formalismo matricial, que vai ser mostrado ainda nesse capítulo nas seções posteriores.

2.4 MODOS PARAXIAIS

A Equação 2.18, que descreve a propagação do feixe gaussiano mostrado anteriormente, também é conhecida como modo fundamental. O nome, provém do fato

que essa equação descreve a solução mais fundamental de uma família de soluções da equação paraxial (2.13). Nesta seção serão apresentados dois conjuntos de soluções particulares para a equação paraxial. Soluções essas conhecidas como modos transversos de propagação da luz.

2.4.1 Modos Hermite-Gaussianos

É possível encontrar uma solução mais geral para equação paraxial (2.16). Para obtê-la é usada uma solução tentativa, com base na solução tentativa que foi proposta anteriormente na Seção 2.3 para o modo fundamental (Equação 2.17) com a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z) &= \psi_0 X \left[\sqrt{2} \frac{x}{w(z)} \right] Y \left[\sqrt{2} \frac{y}{w(z)} \right] \times \\ &\times \exp \left\{ -i \left[Z(z) + \frac{Q(z)(x^2 + y^2)}{2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde X , Y e Z são funções reais. Aplicando essa solução em 2.16, considerando o operador ∇_{\perp}^2 em coordenadas cartesianas (x e y) e usando o método de separação de variáveis [20], encontra-se a solução conhecida como modos de Hermite-Gauss: [16]

$$\begin{aligned} \psi_{m,n} &= E_{m,n}(x, y, z) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} H_m \left[\sqrt{2} \frac{x}{w(z)} \right] H_n \left[\sqrt{2} \frac{y}{w(z)} \right] \times \\ &\times \exp \left\{ -(x^2 + y^2) \left(\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2R(z)} \right) - ikz + i(m + n + 1)\phi_{mn}(z) \right\}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Nesta expressão acima $w(z)$, $R(z)$ e $\phi(z)$ foram definidos nas Equações 2.20, 2.22 e 2.26. As funções H_m e H_n são conhecidas como polinômios de Hermite, que aparece de forma comum no tratamento do sistema de um oscilador harmônico quântico, esses polinômios são dados por [21]:

$$H_j(x) = (-1)^j e^{x^2} \frac{d^j}{dx^j} e^{x^2}. \quad (2.31)$$

A Equação 2.30 dá origem a um conjunto de soluções para a Equação 2.9 indexadas por m e n . Uma forma de classificar esse conjunto de soluções é através da ordem dos modos dada por $N = m + n$. Note que o modo de ordem $N = 0$ ($m = 0, n = 0$) retoma a solução do modo fundamental (Equação 2.18), mostrando

que ele é a solução mais fundamental, como foi mencionado anteriormente. Estas soluções formam uma base completa e ortogonal de funções, sendo capaz de descrever qualquer feixe luminoso.

De forma geral, essas soluções são conhecidas como feixes Hermite-Gauss (HG_{mn}). O nome vem pelo fato de que os perfis de intensidade transversos desses modos ($I_{m,n} = |E_{m,n}|^2$) consiste de um termo gaussiano modulado pelos polinômios de Hermite, da seguinte forma: [20]:

$$I(r, z) = I_0 \left(\frac{w_0}{w(z)} \right)^2 H_m^2 \left[\sqrt{2} \frac{x}{w(z)} \right] H_n^2 \left[\sqrt{2} \frac{y}{w(z)} \right] \exp \left\{ -\frac{2(x^2 + y^2)}{w^2(z)} \right\}. \quad (2.32)$$

Os perfis de intensidade para o modo de ordem zero e para alguns modos de ordem superior podem ser vistos na Figura 4.

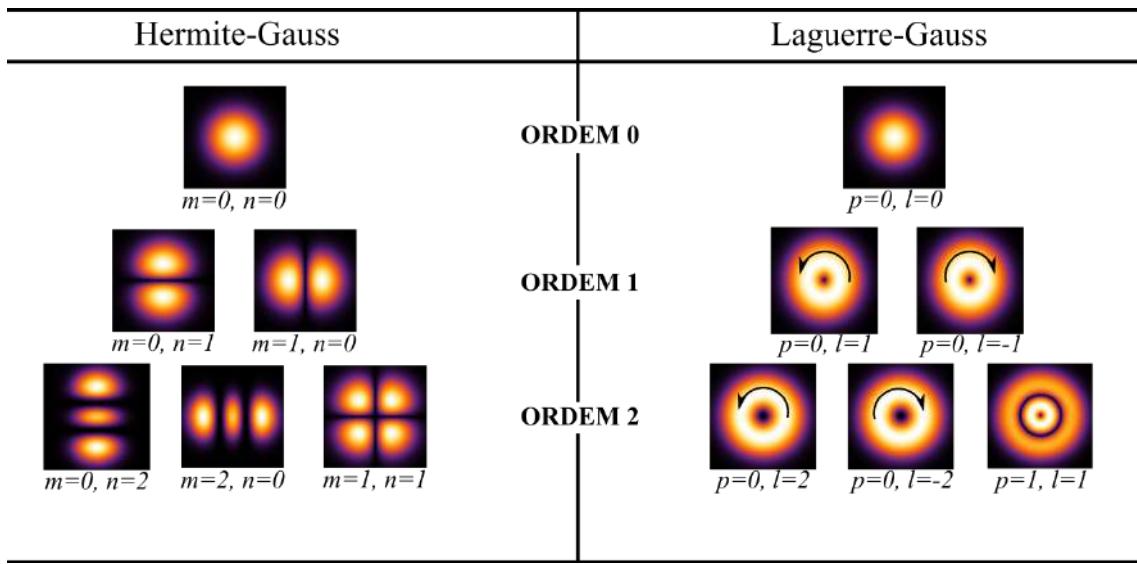


Figura 4: Representação pictórica do perfil de intensidade transverso dos modos: à esquerda o modo Hermite-Gauss e à direita o modo Laguerre-Gauss.

2.4.2 Modos Laguerre-Gaussianos

Outra solução para equação paraxial (2.13) é obtida ao resolver a equação em coordenadas cilíndricas.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0. \quad (2.33)$$

A solução da Equação 2.33 gera os modos Laguerre-Gauss (LG_p^l) descritos por [20]:

$$\psi_p^l = E_p^l(r, \phi, z) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} \left(\frac{r}{w(z)} \right)^{|l|} L_p^l \left[\frac{2r^2}{w^2(z)} \right] \exp \left\{ -\frac{r^2}{w^2(z)} - ik \frac{r^2}{2R(z)} - ikz - il\phi + i\phi_{pl}(z) \right\}. \quad (2.34)$$

Onde L_p^l são conhecidos como polinômios de Laguerre, dados por [21]:

$$L_n^m(x) = e^x \frac{x^{-m}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+m}). \quad (2.35)$$

Para este caso dos modos LG_p^l , a fase de Gouy é dado por:

$$\phi_{pl}(z) = (2p + |l| + 1) \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right). \quad (2.36)$$

A ordem dos modos LG_p^l é dada por $N = 2p + |l|$. Importante mencionar que para $N = 0$, recaímos no modo fundamental, como mostra a Figura 4. O índice $p \geq 0$ representa a ordem radial, associado ao número de anéis que aparece no perfil de intensidade do modo LG . O número inteiro l é conhecido com índice azimutal², que está ligado a dependência azimutal da fase do feixe [22]. O termo da fase azimutal, $e^{-il\phi}$ quando $l \neq 0$, está relacionado com a direção do vetor de onda do feixe, que apresentará uma singularidade de fase, fazendo com que a frente de onda do feixe apresente um formato helicoidal, dessa forma carregando o momento angular orbital do feixe, esse formato pode ser visto na Figura 5. Essa singularidade aparecerá no perfil de intensidade do feixe como um vórtice óptico no centro do mesmo, tendo uma região sem a presença de luz e o tamanho dela está associada ao índice $|l|$, como também é ilustrado na Figura 4. Os demais parâmetros da Equação 2.34 têm os mesmos significados já mostrados anteriormente.

²Na literatura, também é encontrado como *helicidade* ou *carga topológica*.

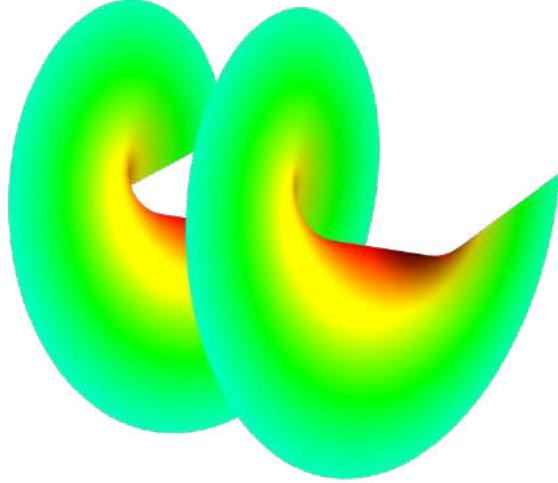


Figura 5: Frente de onda helicoidal de um feixe que carrega momento angular orbital se propagando.

2.4.3 Conversão de modos

Os modos HG e LG formam bases completas e ortogonais, dessa forma é possível descrever qualquer feixe em meios homogêneos em termos desses modos. Sendo assim, é possível escrever um modo LG_p^l na base dos modos HG_{mn} (e vice-versa), onde elementos de mesma ordem em uma família se relacionam apenas com elementos da mesma ordem da outra família.

A partir da relação entre os polinômios de Hermite e Laguerre [23], se faz possível decompor um modo LG em um conjunto de modos HG , de mesma ordem, da seguinte forma:

$$\psi_{mn}^{LG}(x, y, z) = \sum_{k=0}^n i^k b(m, n, k) \psi_{N-k, k}^{HG}(x, y, z), \quad (2.37)$$

onde os coeficientes $b(m, n, k)$ reais, são dados por:

$$b(m, n, k) = \left[\frac{(N-k)!k!}{2^N m! n!} \right]^{1/2} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k} [(1-t)^m (1+t)^n] |_{t=0}. \quad (2.38)$$

Em particular, tomando os modos LG_p^l de primeira ordem, eles podem ser escritos

como uma combinação dos modos HG_{10} e HG_{01} , através da relação da Equação 2.37 como:

$$LG_0^{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{10} \pm HG_{01}). \quad (2.39)$$

É interessante que um modo HG de primeira ordem, inclinado a 45° com relação aos eixos coordenados, pode ser decomposto em termos de modos HG de primeira ordem, a partir da seguinte relação:

$$\psi_{mn}^{HG} \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}}, z \right) = \sum_{k=0}^n i^k b(m, n, k) \psi_{N-k, k}^{HG}(x, y, z). \quad (2.40)$$

Dessa forma, o modo HG de primeira ordem, inclinado a $\pm 45^\circ$, é decomposto em termos de modo HG de primeira ordem como:

$$HG^{\pm 45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{10}) \pm (HG_{01}). \quad (2.41)$$

A Figura 6 traz uma representação pictórica das Equações 2.39 e 2.41.

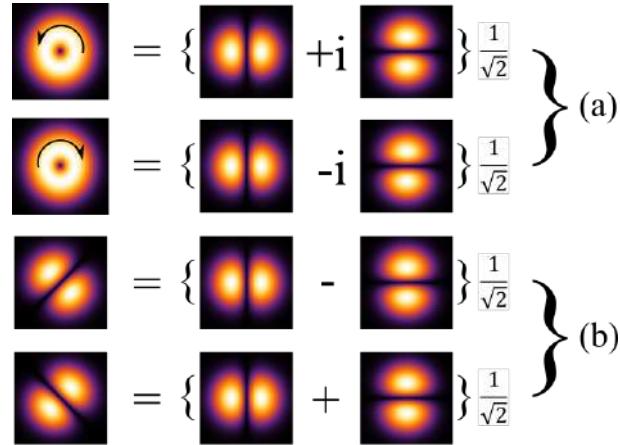


Figura 6: (a) Decomposição dos modos $LG_0^{\pm 1}$ em termos dos modos HG ; (b) Decomposição dos modos HG inclinados de $\pm 45^\circ$ em termos dos modos HG .

2.5 FEIXES ASTIGMÁTICOS

O efeito do astigmatismo consiste em uma deformação de um feixe luminoso na direção transversal ao eixo de propagação. Isso ocorre devido ao fato que o feixe luminoso apresenta pontos focais diferentes para cada direção transversal a direção

de propagação. Esse efeito pode ser observado, conforme ilustrado na Figura 7. Na ilustração em questão, um feixe gaussiano simétrico atravessa uma lente cilíndrica que o deforma, comprimindo-o ao longo da direção x [16]. Esse efeito pode ser causado de forma análoga por uma lente esférica inclinada em relação ao plano de propagação.

O astigmatismo pode ser descrito na equação de propagação do feixe considerando que a função $Q(z)$ que aparece na solução tentativa 2.29 seja diferente para as direções x e y conforme o feixe se propaga em z . Assim, a solução tentativa fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z) &= \psi_0 X \left[\sqrt{2} \frac{x}{w_x(z)} \right] Y \left[\sqrt{2} \frac{y}{w_y(z)} \right] \times \\ &\times \exp \left\{ -i \left[Z(z) + \frac{Q_x(z)x^2}{2} + \frac{Q_y(z)y^2}{2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Realizando cálculos de forma análoga aos feitos em [16] e [20], encontra-se a seguinte expressão para a propagação do feixe:

$$\begin{aligned} E_{m,n}(x, y, z) &= E_0 \frac{\sqrt{w_{0x}w_{0y}}}{\sqrt{w_x(z)w_y(z)}} H_m \left[\sqrt{2} \frac{x}{w_x(z)} \right] H_n \left[\sqrt{2} \frac{y}{w_y(z)} \right] \\ &\exp \left\{ -x^2 \left(\frac{1}{w_x^2(z)} + \frac{ik}{2R_x(z)} \right) - y^2 \left(\frac{1}{w_y^2(z)} + \frac{ik}{2R_y(z)} \right) \right\} \\ &\exp \left\{ -ikz + i \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \phi_x(z) + \left(n + \frac{1}{2} \right) \phi_y(z) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.43)$$

com:

$$\begin{aligned} w_{x,y}^2(z) &= w_{0x,y}^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda(z - z_{x,y})}{\pi w_{0x,y}^2 n} \right)^2 \right] \\ R_{x,y}(z) &= z \left[1 + \left(\frac{\pi w_{0x,y}^2 n}{\lambda(z - z_{x,y})} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

As fases de Gouy para as duas direções nessa situação tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \phi_x(z) &= \tan^{-1} \left(\frac{z - z_x}{z_{Rx}} \right) \\ \phi_y(z) &= \tan^{-1} \left(\frac{z - z_y}{z_{Ry}} \right) \end{aligned} \quad (2.45)$$

com:

$$z_{R_{x,y}} = \frac{\pi w_{0x,y}^2 n}{\lambda} \quad (2.46)$$

Abaixo temos a Figura 7 que ilustra a situação de um feixe com astigmatismo produzido por uma lente cilíndrica e a posição dos parâmetros do feixe.

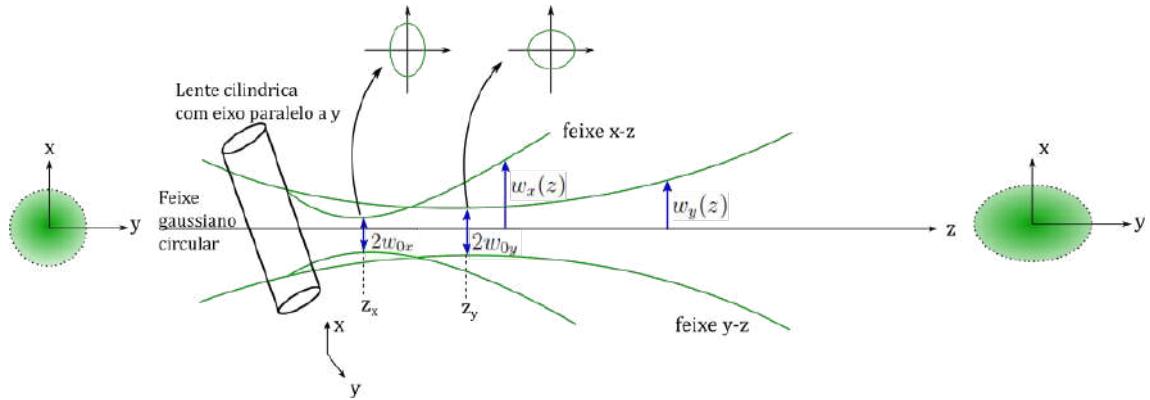


Figura 7: Representação pictórica da propagação longitudinal de um feixe gaussiano com astigmatismo causado por uma lente cilíndrica e representação do perfil transversal elíptico.

2.6 MATRIZ ABCD

O traçado de raios é um método frequentemente utilizado para realizar a descrição do comportamento da luz em sistemas ópticos. Nele, os raios luminosos (vetores perpendiculares a frente de onda) são descritos por um conjunto de parâmetros que representam a distância ao eixo óptico (y) e por um ângulo (θ) entre o eixo óptico e a linha do raio de luz. A luz, através da interação com elementos ópticos, sofre refrações e reflexões que alteram sua trajetória, que analiticamente são descritas por meio de alterações nos parâmetros y e θ (Figura 8). O tratamento analítico desses parâmetros se torna bastante complexo, envolvendo a solução de diversas equações algébricas, quando o sistema óptico possui muitos elementos. Todavia, os cálculos podem ser extremamente simplificados se as equações algébricas forem mapeadas em vetores matriciais e os elementos ópticos em matrizes, dessa forma a descrição da propagação da luz e formação de imagens pode ser resumir em um simples produto de matrizes que pode ser efetuado computacionalmente. Esse mapeamento constitui o que é chamado de óptica matricial [20].

De forma simples e considerando a aproximação paraxial (onde $\sin \theta = \tan \theta \approx \theta$,

para ângulos pequenos em relação ao eixo óptico), a ideia desse formalismo pode ser vista através da formação de imagens por uma lente convergente e ilustrado na Figura 8.

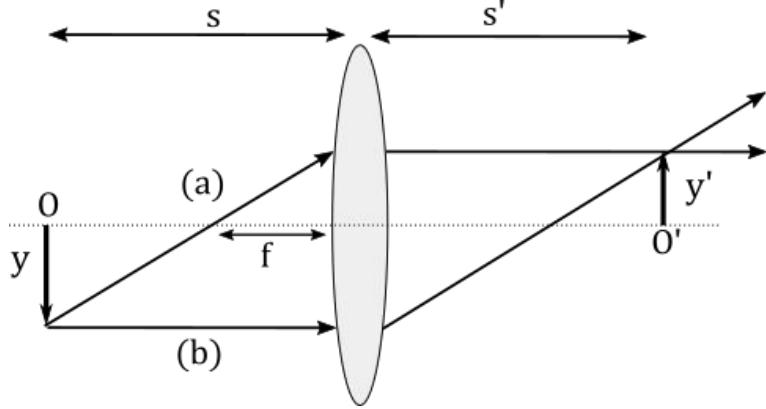


Figura 8: Esquema de traçado de raios da formação de uma imagem a partir de uma lente convergente.

Na Figura 8, o raio luminoso (a) que sai do objeto O e incide na lente, passando pelo foco f com altura y' e com um ângulo $\theta_i^{(a)} = \tan^{-1} \frac{y'}{f} \approx \frac{y'}{f}$, emerge da lente com altura y' e $\theta_e^{(a)} = 0$ [15]. Com isso, é possível formar o seguinte sistema de equação matricial, onde temos uma matriz N que transforma os parâmetros iniciais do feixe (a):

$$\begin{pmatrix} y' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ y'/f \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

abrindo a Equação 2.47 caímos no seguinte sistema de equações:

$$y' = Ay' + B \frac{y'}{f} \quad (2.48a)$$

$$0 = Cy' + D \frac{y'}{f}. \quad (2.48b)$$

Agora, analisando o raio (b) que sai do objeto e incide na lente com uma altura $-y$ e um ângulo $\theta_i^{(b)} = 0$, emerge da lente com altura $-y$ e ângulo $\theta_e^{(b)} = \tan^{-1} \frac{y}{f} \approx \frac{y}{f}$, é obtida a seguinte equação matricial:

$$\begin{pmatrix} -y \\ y/f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

onde é encontrado que:

$$-y = -Ay \quad (2.50a)$$

$$\frac{y}{f} = -Cy. \quad (2.50b)$$

Das Equações 2.50a e 2.50b encontra-se $A = 1$ e $C = -1/f$, substituindo esses valores na Equação 2.48a e 2.48b, obtém-se $B = 0$ e $D = 1$, então a matriz N referente a lente, que transforma tanto o raio a quanto o raio b é dada por:

$$N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Guizando-se por esse procedimento, é possível determinar uma matriz, com coeficientes A, B, C e D para cada elemento óptico e para uma propagação livre ou por um dielétrico, o que configura o nome deste método como Método da Matriz $ABCD$.

Operacionalmente, conforme adiantado acima, um sistema óptico composto de n elementos pode ser tratado como uma única matriz,

$$N_{sis} = N_n N_{(n-1)} \dots N_1, \quad (2.52)$$

resultante da multiplicação das matrizes dos vários elementos.

Na Figura 9 são apresentados outros tipos de matrizes $ABCD$ que são de uso comum para os cálculos deste trabalho, tais como propagação livre (Figura 9a), reflexão em espelho curvo com incidência normal (Figura 9b) e reflexão com ângulo de incidência arbitrário em espelho curvo (Figura 9c).

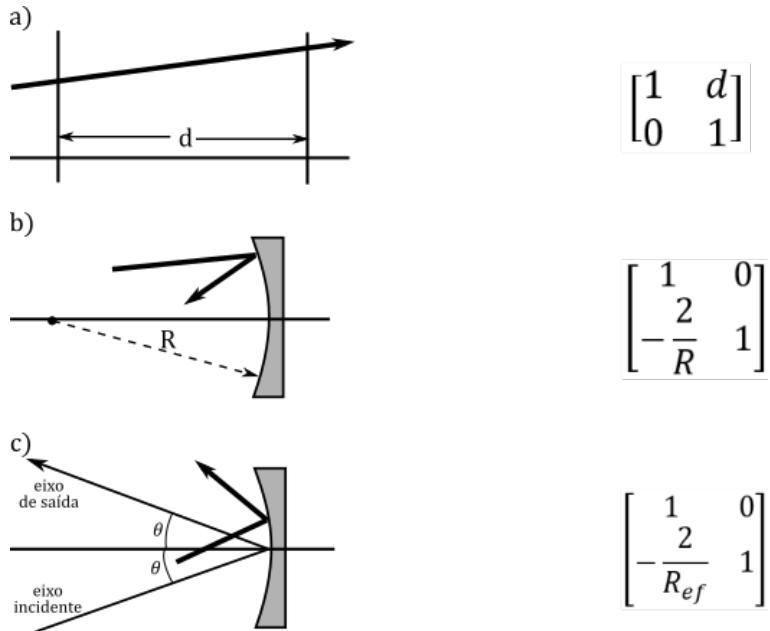


Figura 9: Exemplo de matrizes $ABCD$ de três casos diferentes. *a)* Propagação livre; *b)* Incidência normal em um espelho curvo; *c)* Incidência com ângulo arbitrário em um espelho curvo, onde $R_{ef} = R \cos \theta$ na direção plano de incidência e $R_{ef} = R / \cos \theta$ na direção do plano perpendicular ao plano de incidência.

2.6.1 Aplicação de matrizes $ABCD$ em feixes gaussianos

Na Subseção 2.3.1, quando foi discutido sobre os parâmetros do feixe gaussiano, apareceu um parâmetro denominado raio de curvatura complexo dado pela Equação 2.27. Através do raio complexo é possível descrever ao mesmo tempo o raio de curvatura (parte real) e a largura do feixe gaussiano (parte imaginária). Assim, para caracterizar o feixe gaussiano basta saber como o $R(z)$ e $w(z)$ se comportam ao longo de sua propagação [15]. Já foi comentado que o feixe gaussiano é uma onda, logo não segue os princípios da óptica geométrica. Mas como demonstrado na referência [16], o formalismo de matriz $ABCD$ pode ser aplicado para descrição da propagação do feixe gaussiano. Assim, a variação do parâmetro $q(z)$ é dada da seguinte forma:

$$q_{i+1} = \frac{Aq_i + B}{Cq_i + D}, \quad (2.53)$$

onde q_i e q_{i+1} são os parâmetros em planos consecutivos perpendiculares ao eixo óptico e os parâmetros A, B, C e D são os elementos da matriz resultante da mul-

tiplicação das matrizes dos elementos óptico. O feixe gaussiano evolui no caminho entre o plano q_i e q_{i+1} de forma que se são conhecidos R e w em q_i , e determinados os elementos da matriz $ABCD$, é possível encontrar R e w em q_{i+1} (a parte real do lado direito da Equação 2.53 é referente a R e a parte imaginária referente a w).

3 CAVIDADES ÓPTICAS

Cavidades ópticas são dispositivos geralmente compostos de espelhos e lentes e destinados ao confinamento e amplificação da intensidade da luz em determinada região do espaço [15]. Elas constituem dispositivos de fundamental importância na física do Laser e nas Ópticas Não linear e Quântica. Nessas áreas, normalmente deseja-se estudar processos da interação da luz com a matéria, onde é investigado efeitos ópticos perceptíveis apenas quando a luz é muito intensa [24].

Existem diversas configurações de cavidades, das quais três são ilustradas na Figura 10. Dizemos que elas estão em ressonância quando a luz incidente é inteiramente transmitida, quando há uma interferência construtiva entre os refletidos dentro da cavidade [16]. No caso de cavidades lineares, Figuras 10a e 10b, a condição de ressonância é satisfeita se o perímetro (distância entre os espelhos) for múltiplo de $\lambda/2$. Cavidades em anel, como a cavidade Bow-tie, ilustrada na Figura 10c, a condição é satisfeita quando o perímetro é múltiplo inteiro de λ . Essa característica das cavidades ópticas, acaba sendo uma ferramenta usada como filtro de frequências de feixes lasers [15].

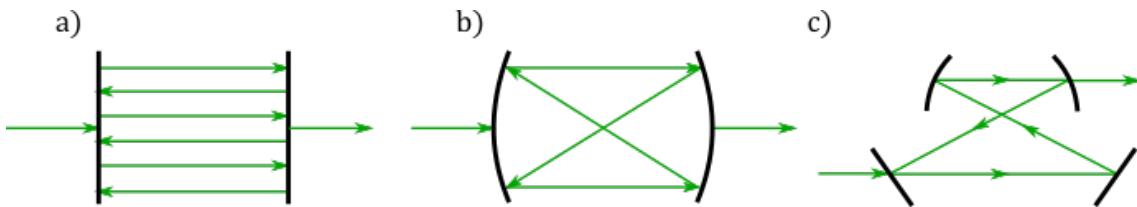


Figura 10: Exemplo de cavidades ópticas. a) Cavidade linear com dois espelhos planos; b) Cavidade linear com dois espelhos curvos; c) Cavidade em anel do tipo Bow-Tie.

3.1 CAVIDADE DE FABRY-PÉROT

A cavidade de Fabry-Pérot é um exemplo de cavidade linear mais simples, formada essencialmente por dois espelhos planos. Ela será usada como base para análise do comportamento da intensidade do feixe transmitido por uma cavidade óptica e

no intuito conhecer os parâmetros que interferem na transmissão do feixe.

Para essa análise, é considerada uma onda plana com uma amplitude de campo E_0 incidindo no espelho M_1 com ângulo θ' (o ângulo nesse caso foi considerado apenas para facilitar a visualização do campo refletido intra-cavidade) em relação à normal, como mostra a Figura 11, sofrendo tanto reflexão quanto transmissão.

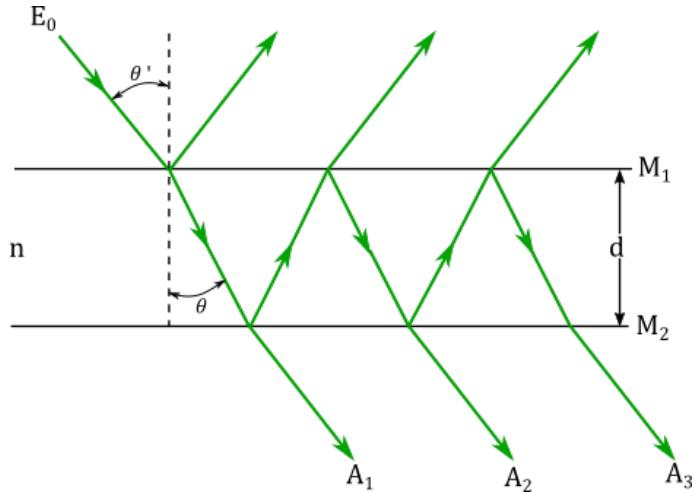


Figura 11: Esquema simplificado de uma cavidade de Fabry-Pérot composta de dois semi espelhos planos, M_1 e M_2 , e um índice de refração n entre os espelhos, onde uma onda plana incide em um ângulo θ' sofrendo diversas reflexões e transmissões nos espelhos.

A amplitude total do campo transmitido pela cavidade, E_T , é dada pela soma de todas as amplitudes transmitidos A_i , assim:

$$E_T = A_1 + A_2 + A_3 + \dots \quad (3.1)$$

Considerando que os espelhos M_1 e M_2 tem coeficientes de transmissão t_1 e t_2 e de reflexão r_1 e r_2 que devem ser contabilizados em cada amplitude conforme o feixe interage com os espelhos refletindo ou transmitindo, dessa forma é possível ver que:

$$\begin{aligned} A_1 &= t_1 t_2 E_0 \\ A_2 &= t_1 t_2 r_1 r_2 e^{i\phi} E_0 \\ A_3 &= t_1 t_2 (r_1 r_2)^2 e^{2i\phi} E_0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde ϕ é a fase adquirida pelo feixe em uma ida e volta no meio cujo índice de refração é n , então E_t pode ser escrito da seguinte forma:

$$E_T = t_1 t_2 E_0 (1 + r_1 r_2 e^{i\phi} + (r_1 r_2)^2 e^{2i\phi} + \dots) = t_1 t_2 E_0 \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2 e^{i\phi})^n. \quad (3.3)$$

O somatório presente na Equação 3.3, consiste de uma série geométrica convergente¹, assim o campo total transmitido pode ser reescrito como:

$$E_T = \frac{t_1 t_2 E_0}{1 - r_1 r_2 e^{i\phi}}. \quad (3.4)$$

O cálculo para o campo refletido pode ser feito de forma análoga.

A diferença de fase ϕ pode ser expressa a partir da diferença de caminho ΔL entre duas reflexões consecutivas, realizadas pelo feixe dentro da cavidade [15]:

$$\phi = \frac{2\pi(\Delta L)n}{\lambda}. \quad (3.5)$$

A diferença de caminho pode ainda ser expressa com base na geometria da cavidade. Isso pode ser visto usando a Figura 12 como guia, dessa forma é possível inferir que $\Delta L = AB + BC$, onde $AB = \frac{d \cos 2\theta}{\cos \theta}$ e $BC = \frac{d}{\cos \theta}$, dessa forma encontra-se $\Delta L = 2d \cos \theta$ de maneira que:

$$\phi = \frac{4\pi n d \cos \theta}{\lambda}. \quad (3.6)$$

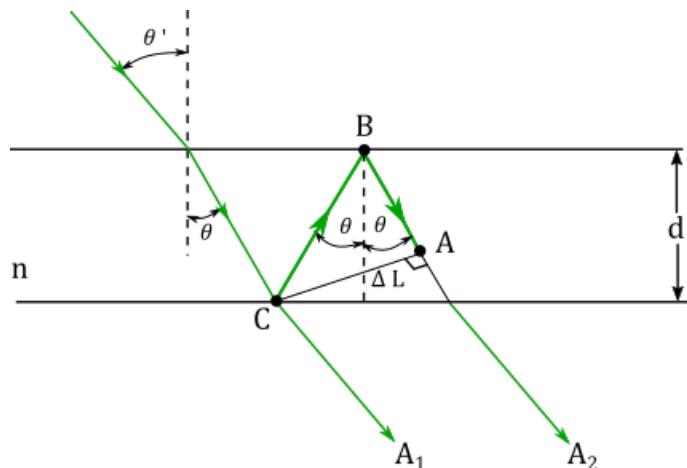


Figura 12: Esquema para dedução da diferença de caminho.

¹ $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, se e somente se $|q| < 1$

3.1.1 Intensidade Transmitida

A intensidade do campo transmitido pode ser encontrada a parti do fato que $I_T = |E_T|^2$. Após um algebrismo exposto no Apêndice A, encontramos:

$$I_T = \frac{T_1 T_2}{(1 - \sqrt{R_1 R_2})^2 + 4\sqrt{R_1 R_2} \sin^2(\phi/2)} I_0, \quad (3.7)$$

onde $I_0 = |E_0|^2$ é a intensidade incidente do feixe, $R_i = |r_i|^2$ e $T_i = |t_i|^2$ ($i = 1, 2$) são as frações de intensidade refletida e transmitida em cada espelho, também conhecidas na literatura como reflectância e transmitância [25].

De forma a simplificar a analise aqui nesse texto, consideramos que os dois espelhos têm coeficientes de transmissão e reflexão iguais, de tal forma que $t_1 t_2 = T$, $r_1 r_2 = R$ e não havendo absorção. Assim, pela conservação de energia, $R + T = 1$. Portanto:

$$I_t = \frac{I_0}{1 + \mathcal{F} \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}, \quad (3.8)$$

em que $\mathcal{F} = 4R/(1 - R)^2$ é conhecido como coeficiente de finesse. A Equação 3.8 descreve a intensidade transmitida pela cavidade, ela é conhecida como função de Airy. Na Figura 13 é possível ver uma simulação do comportamento dessa função, ela foi obtida através de um simples programa, feito pelo autor desse trabalho, no Wolfram Mathematica. Quando $\phi = 2m\pi$, com m sendo um número inteiro, a função apresenta os picos de máximo e para $\phi = (2m + 1)\pi$, com m também sendo um número inteiro ela apresenta seus pontos de mínimo. Logo, a distância entre dois picos de ressonância é $\Delta\phi = 2\pi$. Observa-se que para valores diferentes de R , consequentemente de \mathcal{F} a largura dos picos de ressonância também muda na Figura 13.

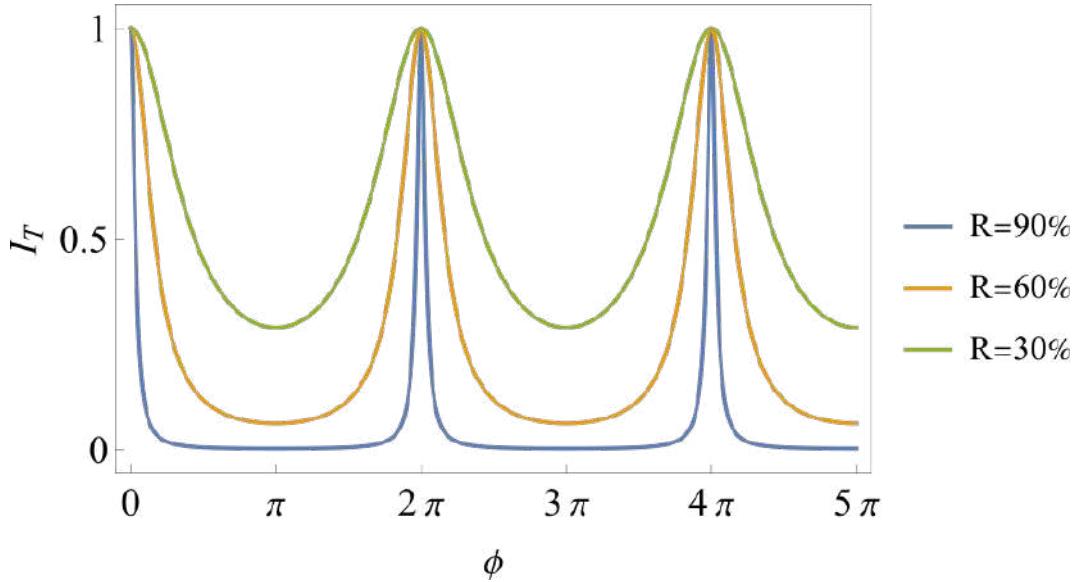


Figura 13: Picos de transmissão para uma cavidade Fabry-Pérot para três valores de R diferentes.

3.1.2 Intervalo Espectral Livre, Largura de Linha, Finesse

A função de Airy pode ser escrita em termos da frequência do feixe que interage com a cavidade. para ver isso basta analisar a Equação 3.6 e usar que $\lambda = c/\nu$, obtendo:

$$\phi = \frac{4\pi\nu nd \cos \theta}{c}, \quad (3.9)$$

substituindo a Equação 3.9 em 3.8 teremos a função da intensidade transmitida em termos de ν :

$$I_t = \frac{I_0}{1 + \mathcal{F} \sin^2 \left(\frac{2\pi\nu nd \cos \theta}{c} \right)}. \quad (3.10)$$

A frequência de ressonância ocorre quando o argumento da função \sin^2 na Equação 3.10 é $m\pi$. Dessa forma,

$$\nu_m = \frac{mc}{2nd \cos \theta}. \quad (3.11)$$

Com isso, a distância entre dois picos consecutivos, também conhecida como intervalo espectral livre (FSR do inglês *free spectral range*) é obtida por:

$$\Delta\nu \equiv \nu_{m+1} - \nu_m = \frac{c}{2nd \cos \theta}. \quad (3.12)$$

Como mostra a Figura 14.

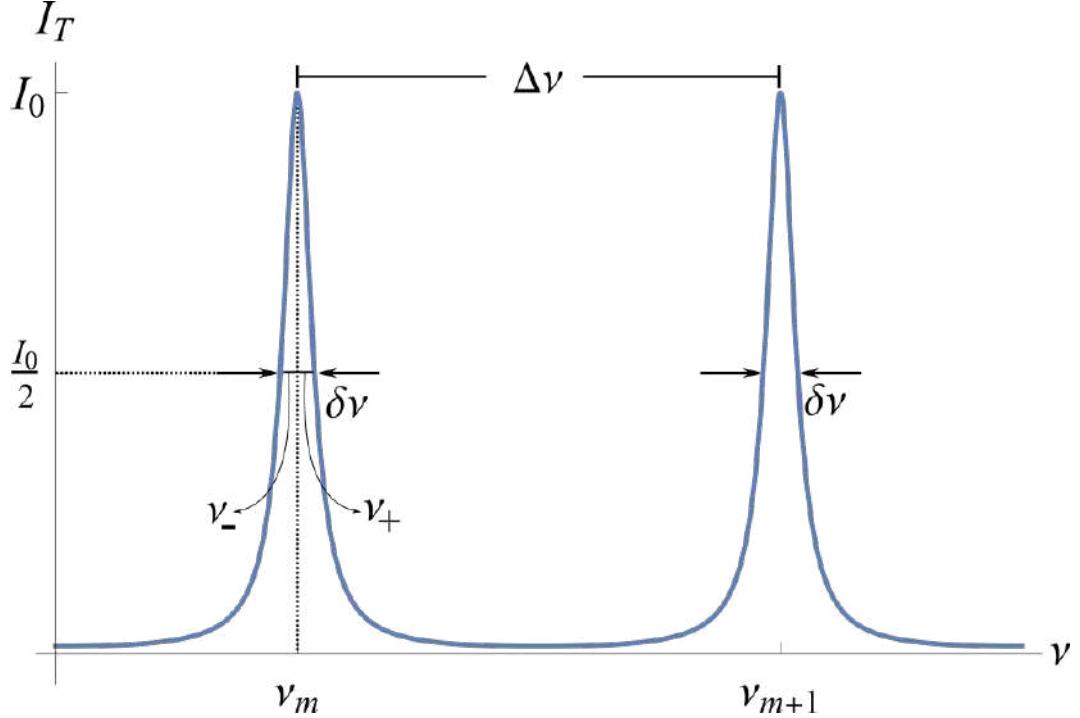


Figura 14: Reapresentação do FSR ($\Delta\nu$) e da largura de linha ($\delta\nu$) nos picos de ressonância.

Levando em conta a situação em que a onda incide perpendicularmente à superfície dos espelhos, ou seja, $\theta = 0$ a Equação 3.12 pode ser reescrita como:

$$\Delta\nu \equiv \nu_{m+1} - \nu_m = \frac{c}{2nd}. \quad (3.13)$$

A largura de linha (ou largura de banda) corresponde a largura a meia altura do pico de ressonância. A meia altura do pico de ressonância, teremos metade da intensidade transmitida ($I_T/2$), de forma que isso venha à ocorrer, é necessário que:

$$\mathcal{F} \sin^2 \left(\frac{2\pi nd\nu \cos \theta}{c} \right) = 1. \quad (3.14)$$

Esse resultado fornece dois valores de frequências vizinhas ao máximo, que fornecem metade da intensidade do pico de ressonância.

$$\nu = \pm \frac{c}{2\pi nd\nu \cos \theta} \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{F}}} \right). \quad (3.15)$$

Portanto a largura do pico $\delta\nu$ é dada por:

$$\delta\nu = \nu_+ - \nu_- = 2 \frac{c}{2\pi nd \cos \theta} \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{F}}} \right), \quad (3.16)$$

usando a Equação 3.13 a largura a meia altura é reescrita como:

$$\Delta\nu_{1/2} = \frac{2}{\pi} \Delta\nu \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{F}}} \right). \quad (3.17)$$

A finesse constitui um fator de qualidade da cavidade óptica, ou seja, quanto estreito é o pico de transmissão. Quanto maior a finesse, maior será o fator de qualidade da cavidade, significando que o pico de transmissão é mais estreito. Essa constante geralmente é obtida experimentalmente. Ela definida como sendo a razão entre o FSR ($\Delta\nu$) e a largura de linha ($\delta\nu$):

$$F = \frac{\Delta\nu}{\delta\nu} \quad (3.18)$$

Usando as Equações 3.13 e 3.17 é possível chegar a uma relação entre \mathcal{F} e F :

$$F = \frac{\pi}{2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{F}}} \right)}. \quad (3.19)$$

A partir desta equação nota-se que F depende somente das características dos espelhos da cavidade, já que \mathcal{F} depende do coeficiente de reflectância R . A finesse é obtida experimentalmente de forma direta por meio de um osciloscópio, quando este encontra-se ligado a um fotodetector que capta a luz transmitida pela cavidade.

3.2 CAVIDADES ÓPTICAS E FEIXES GAUSSIANOS

Um problema encontrado em cavidades ópticas diz respeito a sua estabilidade, que está ligada com as perdas experimentadas pela luz em uma volta completa através da cavidade. No caso ideal, de uma cavidade estável, o feixe sempre retorna a um ponto inicial com as mesmas condições iniciais. Cavidades formadas por espelhos planos tendem a ser bastante sensíveis (instáveis), pois sua condição de estabilidade requer que o feixe seja perfeitamente colimado, que na prática não ocorre. Além disso qualquer desalinhamento nos espelhos faz com que a luz escape da cavidade após poucas reflexões. O problema da estabilidade sempre deve receber atenção no estudo de cavidades, tornando-se mais complicado no estudo de cavidades mais complexas, geralmente formada por mais de dois espelhos. Todavia, a partir de

agora, veremos um formalismo matemático que leva em conta a propagação dos feixes gaussianos em sistemas periódicos (como em cavidades ópticas) permitindo assim, encontrar suas condições de estabilidade.

3.2.1 Estabilidade da Cavidade Óptica

Conforme foi visto acima, em uma cavidade óptica a luz fica confinada sempre retornando ao seu ponto inicial nas mesmas condições. Tendo isso em mente é possível usar o formalismo apresentado na Subseção 2.6.1, para calcular os parâmetros que a cavidade, por sua geometria, impõe para o feixe em seu interior, como por exemplo a cintura (w) que a cavidade comporta. Para obter tais informações, se faz necessário o uso do conceito do raio complexo e sua relação com os elementos da matriz $ABCD$ referente a evolução da luz na cavidade óptica. Em resumo, em um dado plano c , temos q_c , e após uma volta completa na cavidade, deve-se voltar a encontrar q_c , assim:

$$q_c = \frac{Aq_c + B}{Cq_c + D} \quad (3.20)$$

onde A, B, C e D são os termos da matriz resultante da multiplicação das matrizes referentes ao percurso do feixe saindo do plano, onde se tem o parâmetro q_c e voltando a ele depois de percorrer toda a cavidade. Tomando como exemplo o caso de uma cavidade linear, Figura 15, a seguinte multiplicação de matrizes descreve o caminho percorrido pelo feixe:

$$N_{ABCD} = N_5 N_4 N_3 N_2 N_1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

de maneira que N_1 é referente à propagação do ponto q_c até o espelho curvo M_2 , N_2 é a matriz referente à reflexão no espelho curvo M_2 , N_3 é referente à propagação do feixe saindo de M_2 até M_1 , a matriz N_4 é referente a reflexão no espelho curvo M_1

e o caminho é fechado com a matriz N_5 que dá a propagação do espelho curvo M_1 até o ponto q_c .

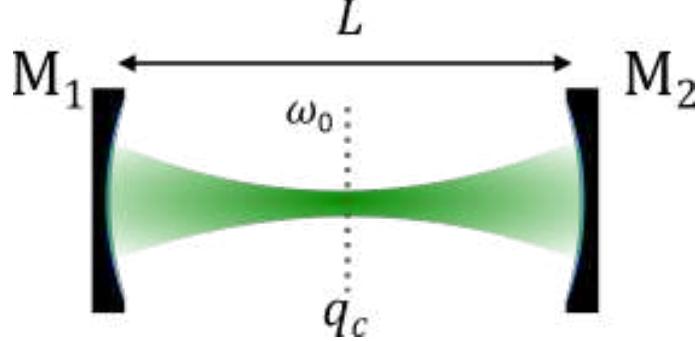


Figura 15: Representação pictórica de uma cavidade linear formada por dois espelhos curvos de raio R .

Resolvendo a Equação 3.20 para $1/q_c$, encontra-se:

$$\frac{1}{q_c} = \frac{(D - A) \pm \sqrt{(D - A)^2 + 4BC}}{2B}. \quad (3.22)$$

Agora usando a propriedade de que a matriz $ABCD$ que descreve o sistema deve ser unitária ($AD - BC = 1$) [15, 16, 17] a Equação 3.22 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{q_c} = \frac{(D - A)}{2B} \pm i \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{D+A}{2}\right)^2}}{B}. \quad (3.23)$$

e a partir da equação Equação 2.27 é possível ver que:

$$\begin{aligned} \frac{(D - A)}{2B} \pm i \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{D+A}{2}\right)^2}}{B} &= \frac{1}{R_c} - i \frac{\lambda}{\pi w_c^2 n}, \\ R_c &= \frac{2B}{D - A}, \\ w_c &= \left(\frac{\lambda}{\pi n}\right)^2 \frac{|B|^{1/2}}{\left[1 - \left(\frac{D+A}{2}\right)^2\right]^{1/4}}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Assim, w_c é a cintura que se adapta à cavidade. Para que a cavidade seja estável, w_c tem que ser real, de tal forma que a condição de estabilidade de uma cavidade genérica é dada por:

$$\left| \frac{D + A}{2} \right| \leq 1. \quad (3.25)$$

Note que o valor da cintura aceita pela cavidade, juntamente com sua estabilidade, estão diretamente relacionadas aos parâmetros geométricos da cavidade, como por exemplo, seu comprimento total e o raio de curvatura do espelho curvo.

3.3 FREQUÊNCIA DE RESSONÂNCIA

A analise das frequências de ressonância para uma cavidade, já foi feita para a cavidade de Fabry-Pérot (Seção 3.1), mas lá foi considerado ondas planas. Agora iremos considerar um feixe Gaussiano, mas não somente o modo fundamental, vamos usar um feixe descrito pela Equação 2.30 referente aos modos Hermite-Gauss, já que essa é uma solução mais geral que abrange o modo fundamental e modos de ordem superiores.

Como mostrado na seção anterior, para que o haja a estabilidade, o feixe deve se auto reproduzir geometricamente (manter o mesmo raio R e cintura w) após uma volta completa. Outra consideração importante é em relação a frequência de ressonância da cavidade. Para que se tenha uma cavidade ressoante o feixe intra-cavidade deve ganhar uma diferença de fase múltipla de 2π após uma volta completa, havendo assim uma interferência construtiva [16]. A fase do modo Hermite-Gauss é dada por:

$$\eta_{mn}(z) = kz - (m + n + 1)\phi_{mn}(z), \quad (3.26)$$

onde kz é referente a fase longitudinal do feixe e $\phi_{mn}(z) = \tan^{-1}(z/z_R)$ a fase de Gouy.

Então, a diferença de fase expressa pela Equação 3.26 deve ser um múltiplo de 2π , considerando apenas meia volta a diferença será múltipla de π . Para o caso da cavidade linear que está sendo tratado aqui, meia volta é o mesmo que andar o comprimento L da cavidade, onde o espelho M_1 está na posição z_1 e o M_2 na posição z_2 . Assim:

$$\eta_{mn}(z = z_2) - \eta_{mn}(z = z_1) = q\pi, \quad (3.27)$$

onde q é um número inteiro e representa a ordem longitudinal da ressonância. Subs-

tituindo a Equação 3.26 na 3.27, obtém-se:

$$k_q L - (m + n + 1) \left[\tan^{-1} \left(\frac{z_2}{z_R} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{z_1}{z_R} \right) \right] = q\pi, \quad (3.28)$$

em que $z_2 - z_1 = L$. Usando $k_q = \frac{2\pi n \nu_q}{c}$ e isolando ν_q , encontramos:

$$\nu_q = \frac{c}{2nL} \left\{ q + \frac{1}{\pi} (m + n + 1) \left[\tan^{-1} \left(\frac{z_2}{z_R} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{z_1}{z_R} \right) \right] \right\}. \quad (3.29)$$

Essa equação fornece as frequências de ressonância para os modos transmitidos pela cavidade. Tomando-se a diferença entre dois modos de ordens longitudinais consecutivas transmitidas pela cavidade, é possível ver que:

$$\nu_{q+1} - \nu_q = \Delta\nu = \frac{c}{2nL}. \quad (3.30)$$

Isso significa que a distância entre dois modos consecutivos de mesma ordem é igual ao FSR que é a distância entre dois picos de transmissão (de mesma ordem) de uma cavidade óptica (representado na), como foi mostrado na Subseção 3.1.2.

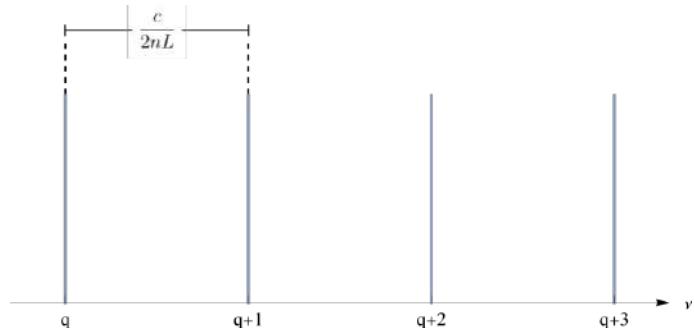


Figura 16: Posição das frequências de ressonância de uma cavidade linear.

4 CAVIDADE DOBRADA: UMA PROPOSTA PARA MEDIDA DO ASTIGMATISMO

Neste capítulo será apresentado o estudo teórico principal desse trabalho, a análise da presença do astigmatismo e uma forma de medi-lo em uma cavidade linear dobrada (Figura 17). Primeiramente será feita uma análise dos parâmetros necessários para se ter uma cavidade estável, a partir do formalismo de matriz $ABCD$ (Subseção 3.2.1) e como introduzir a contabilização do astigmatismo nesses parâmetros. Seguindo, será exposto como analisar a presença do astigmatismo e contabiliza-lo, através dos picos de ressonância da cavidade para modos Hermite-Gaus. As simulações teóricas presentes nesse capítulo, foram feitas já considerando os parâmetros usados na construção experimental da cavidade, que será descrita no próximo capítulo.

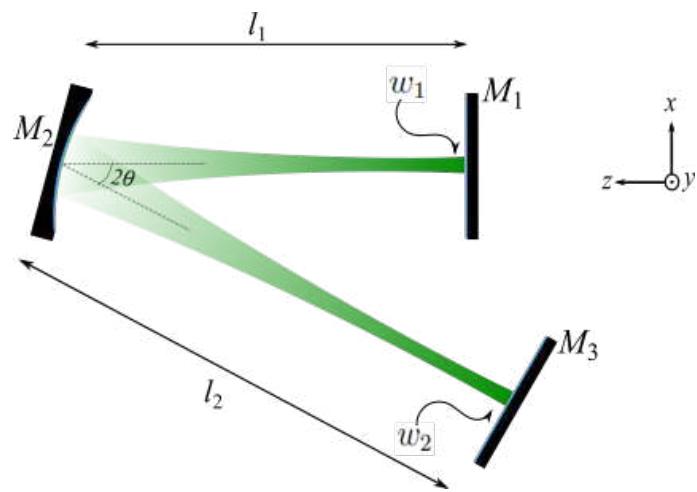


Figura 17: Exemplo de uma cavidade dobrada composta por três espelhos: dois planos M_1 , M_3 e um curvo M_2 ; e duas cinturas: w_1 e w_2 .

4.1 DESCRIÇÃO DA CAVIDADE DOBRADA

A cavidade óptica de interesse nesse trabalho, mencionada anteriormente como cavidade dobrada, também conhecida como cavidade em "V", é composta por três espelhos, sendo dois planos M_1 e M_3 e um curvo M_2 . Ela é composta por dois braços l_1 e l_2 . Devido a sua geometria, se faz presente duas cinturas na cavidade

w_1 e w_2 , localizados nas faces de M_1 e M_2 respectivamente, como é mostrado na Figura 17. Para encontrar as cinturas permitidas pela cavidade, relacionadas com os parâmetros geométricos da mesma, afim de que se tenha estabilidade, será utilizado o formalismo de matrizes $ABCD$ análogo ao demonstrado na Subseção 3.2.1 para cavidade linear.

Partindo do espelho M_1 , o feixe tem uma propagação livre com uma distância l_1 , reflete no espelho curvo, realiza outra propagação de distância l_2 , reflete no espelho M_2 e realiza o caminho de volta até o espelho M_1 , fechando uma volta completa. Dessa forma a multiplicação de matrizes que descreve esse caminho é dada por:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

A partir dos parâmetros da matriz resultante da Equação 4.1 é possível calcular o valor da cintura w_1 , a partir da Equação 3.24.

Para o caso da cintura w_2 é possível fazer o mesmo raciocínio feito para w_1 ou o seguinte raciocínio: Primeiro considera-se uma propagação de w_1 até w_2 , cuja a multiplicação de matrizes será dada por:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Usando a Equação 2.53 que relaciona o raio complexo e os parâmetros da matriz resultante, teremos que:

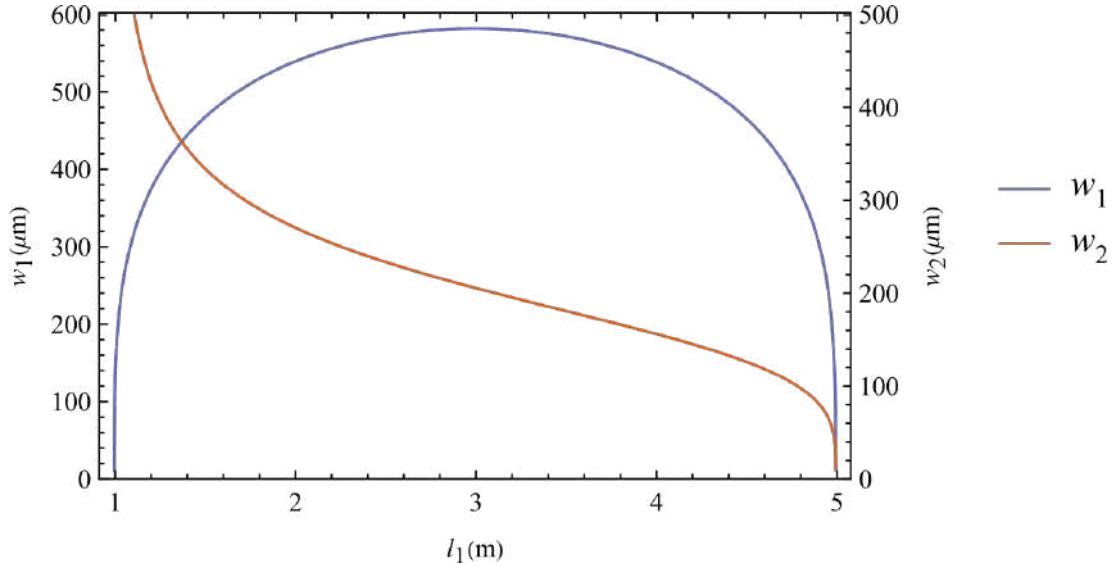
$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}, \quad (4.3)$$

onde q_1 é o raio complexo a cintura w_1 e q_2 referente a w_2 . Resolvendo a equação acima para w_2 encontra-se:

$$w_2 = \sqrt{-\frac{\lambda}{n\pi \operatorname{Im} \left(\frac{Cq_1 + D}{Aq_1 + B} \right)}}. \quad (4.4)$$

Em resumo, é possível obter a relação das cinturas em função de um dos parâmetros da cavidade (l_1 por exemplo), mantendo os outros fixos, como mostra a

Figura 18.

Figura 18: Simulação do comportamento das cinturas w_1 e w_2 com relação a l_1 para a cavidade dobrada.

4.2 ASTIGMATISMO NA CAVIDADE

Com base na figura 17 o feixe laser ao entrar na cavidade possui um perfil simétrico no seu plano transversal. O feixe propaga propaga até o espelho curvo, sendo refletido astigmático. Por conta do espelho curvo apresentar uma inclinação, o feixe é refletido com raios de curvatura diferentes para direção do plano de incidência (plano tangencial xz) e para direção perpendicular a esse plano (plano sagital yz), causando assim o astigmatismo.

É possível analisar a presença desse efeito na cavidade de duas formas. A primeira é na deformação espacial das cinturas do feixe intra-cavidade, adquirindo um formato elíptico (como mostrado em Figura 7). A segunda, é através das frequências de ressonância para modos de ordem superior.

4.2.1 Astigmatismo em função da abertura da cavidade

A obtenção da matriz resultante para a cavidade dobrada, implementando o efeito astigmático provocado pelo espelho curvo inclinado, é o mesmo usado na Seção 4.1 para a matriz resultante da propagação do feixe intra-cavidade. Agora será considerado que o espelho curvo apresenta distâncias focais distintas, para o plano tangencial (xz) e o plano sagital (yz), devido sua inclinação [19] [26]. Com isso em mente, as distâncias focais para cada plano serão dadas por:

$$f_{tangencial} = \frac{R \cos \theta}{2}, \quad (4.5)$$

$$f_{sagital} = \frac{R}{2 \cos \theta}. \quad (4.6)$$

A partir disso, as matrizes referentes a reflexão no espelho curvo para cada plano tomam a seguinte forma:

$$M_{tangencial} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R \cos \theta} & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

$$M_{sagital} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2 \cos \theta}{R} & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Em resumo, para cada plano teremos uma matriz resultante diferente, sendo assim valores de cinturas diferentes. A cavidade apresenta pelo menos três graus de liberdade, dois ligados aos comprimentos l_1 , l_2 e o outro ao ângulo θ , de forma que é necessário fixar pelo menos dois desses parâmetros e a partir disso, analisar o comportamento da cintura em função do parâmetro livre. Tendo as matrizes resultantes e definindo a priori os parâmetros l_1 e l_2 é possível simular w_1 e w_2 e analisar o efeito do astigmatismo da cavidade com a variação de θ . Na Figura 19, gerada por um programa desenvolvido pelo autor desse trabalho, é possível observar o comportamento das cinturas em função de θ .

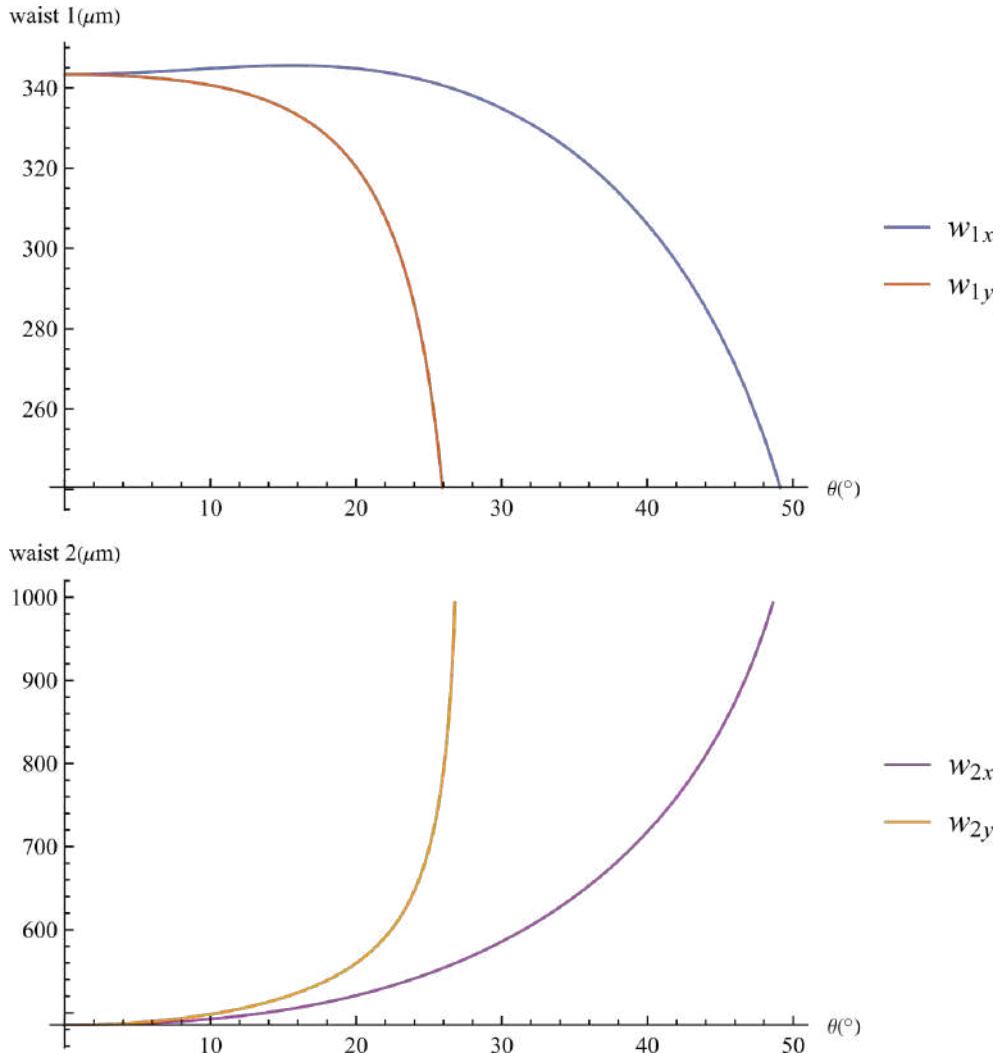


Figura 19: Comportamento das cinturas w_1 (mais acima) e w_2 (mais abaixo) em função de θ , para as direções x e y , referente a uma cavidade dobrada com $l_1 = 1125\text{ mm}$, $l_2 = 1250\text{ mm}$ e $R = 2000\text{ mm}$.

Nota-se que para $\theta = 0^\circ$ as cinturas para os dois planos são iguais, não havendo a presença do astigmatismo. Conforme, θ aumenta o efeito se torna cada vez mais visível.

4.2.2 Caracterização do astigmatismo na cavidade óptica dobrada.

A condição de ressonância, como já mencionada anteriormente, está ligada ao fato do feixe gaussiano realizar uma volta completa dentro da cavidade, de forma que adquire uma fase de 2π [16]. Dessa forma, de maneira análoga ao feito para a

cavidade linear (considerando metade da propagação) a condição é dada por:

$$\delta(L) - \delta(0) = q\pi. \quad (4.9)$$

Primeiramente, partindo do termo de fase para um feixe astigmático, presente na Equação 2.43, é possível verificar que a fase total é dada por:

$$\delta_{mn}(z) = kz - \left(m + \frac{1}{2}\right) \tan^{-1} \left(\frac{z - z_x}{z_{Rx}}\right) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \tan^{-1} \left(\frac{z - z_y}{z_{Ry}}\right), \quad (4.10)$$

onde o primeiro termo é referente a fase longitudinal e os outros dois referentes a fase de Gouy.

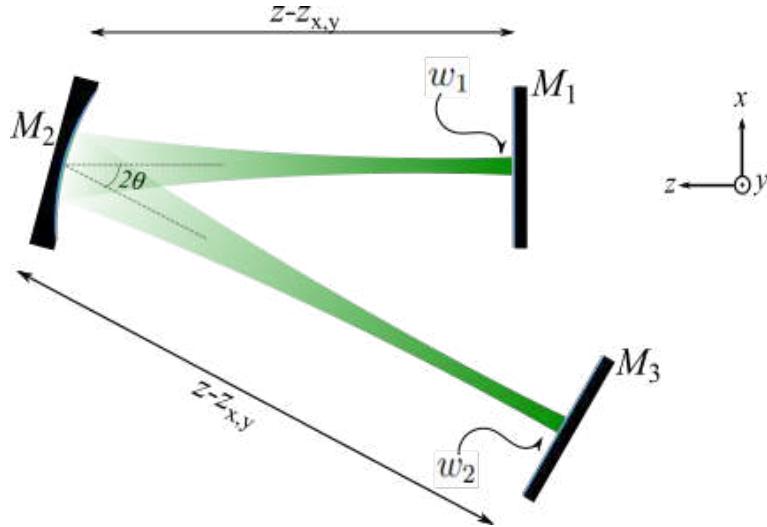


Figura 20: Representação dos parâmetros $z - z_x$ e $z - z_y$ na cavidade dobrada.

Considerando a evolução de um feixe dentro de uma cavidade os termos $z - z_x$ e $z - z_y$ são equivalentes a distância das cinturas até o espelho curvo (Figura 20) e z_{Rx} e z_{Ry} podem ser definidos como [27]:

$$z_{Rx,y} = \left[\frac{(l_1 - f_{x,y})f_{x,y}^2}{l_2 - f_{x,y}} - (l_1 - f_{x,y})^2 \right]^{1/2}. \quad (4.11)$$

Para o caso da cavidade dobrada, que como já visto, tem duas cinturas, teremos um termo referente a fase de Gouy para cada cintura: um referente a distância da cintura w_1 até o espelho curvo e o outro referente a distância da cintura w_2 até o espelho curvo. Dessa forma, a Equação 4.10 pode ser reescrita para cavidade

dobrada como:

$$\begin{aligned}\delta_{mn}(z) = kz & - \left(m + \frac{1}{2}\right) \left[\tan^{-1} \left(\frac{l_1}{z_{Rx1}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{l_2}{z_{Rx2}} \right) \right] \\ & - \left(n + \frac{1}{2}\right) \left[\tan^{-1} \left(\frac{l_1}{z_{Ry1}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{l_2}{z_{Ry2}} \right) \right].\end{aligned}\quad (4.12)$$

A condição de ressonância para fase δ acumulada em meia volta na cavidade começando de w_1 e terminando em w_2 é dada por:

$$\begin{aligned}kL & - \left(m + \frac{1}{2}\right) \left[\tan^{-1} \left(\frac{l_1}{z_{R1x}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{l_2}{z_{R2x}} \right) \right] \\ & - \left(n + \frac{1}{2}\right) \left[\tan^{-1} \left(\frac{l_1}{z_{R1y}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{l_2}{z_{R2y}} \right) \right] = q\pi.\end{aligned}\quad (4.13)$$

A fim de simplificar a expressão, será adotado que o termo da fase de Gouy para as direções x e y serão chamados de ϕ_x e ϕ_y respectivamente, assim:

$$kL - \left(m + \frac{1}{2}\right) \phi_x - \left(n + \frac{1}{2}\right) \phi_y = q\pi. \quad (4.14)$$

Usando-se a definição do vetor de onda $k = 2\pi n_0 \nu / c$ e isolando ν , encontra-se que:

$$\nu_q^{(m,n)} = q \frac{c}{2n_0 L} + \frac{c}{2n_0 L} \frac{1}{\pi} \left[\left(m + \frac{1}{2}\right) \phi_x + \left(n + \frac{1}{2}\right) \phi_y \right]. \quad (4.15)$$

Considerando a definição de FSR (Equação 3.13) encontra-se que:

$$\nu_q^{(m,n)} = \Delta\nu_{FSR} \left\{ q + \frac{1}{\pi} \left[\left(m + \frac{1}{2}\right) \phi_x + \left(n + \frac{1}{2}\right) \phi_y \right] \right\}. \quad (4.16)$$

Essa equação fornece as frequências de ressonância para os modos transmitidos pela cavidade dobrada. Nota-se que para o modo gaussiano ($m = 0$ e $n = 0$) tomando a diferença entre dois modos de ordens longitudinais consecutivas transmitidos pela cavidade, é possível ver que:

$$\nu_{q+1}^{(0,0)} - \nu_q^{(0,0)} = \Delta\nu_{FSR}. \quad (4.17)$$

Isso significa que a distância entre dois modos consecutivos de mesma ordem é igual ao FSR que é a distância entre dois picos de transmissão (de mesma ordem) de uma cavidade óptica, como foi mostrado em Seção 3.3.

Uma peculiaridade surge considerando modos de ordem superior: dois modos de mesma ordem podem ter frequências de ressonância diferentes. Em particular, para modos de ordem $N = 1$ onde é possível ter $m = 1$ e $n = 0$ ou $m = 0$ e $n = 1$, verifica-se que a diferença de frequência entre os modos HG_{01} e HG_{10} para uma mesma ordem longitudinal q ,

$$\nu_q^{(0,1)} - \nu_q^{(1,0)} = \frac{\Delta\nu_{FSR}}{\pi} (\phi_y - \phi_x), \quad (4.18)$$

não é nula, implicando em frequências de ressonâncias deslocadas para os modos de primeira ordem.

Observa-se que, caso os valores de ϕ_x e ϕ_y fossem iguais, caso onde não haverá presença do astigmatismo, essa diferença de frequência de ressonância seria zero. Dessa forma, é notório que o efeito do astigmatismo se faz presente através do termo referente a fase Gouy. Assim como a separação entre as cinturas para cada direção aumenta, conforme aumenta o ângulo θ (Figura 19) a separação entre as frequências de ressonância dos modos HG_{10} e HG_{01} também aumenta com θ por conta da dependência de $z_{Rx,y}$ em relação a esse parâmetro.

Na Figura 21, é apresentada uma simulação de um espectro, calculado a partir da Equação 4.18 em um programa desenvolvido pelo autor desse trabalho no software Wolfram Mathematica, representando as frequências de ressonância dos modos de ordem zero HG_{00} e dos modos HG_{10} e HG_{01} e na Figura 22 como a separação entre as ressonâncias desses modos se comportam em função de θ , logo relacionada ao astigmatismo.

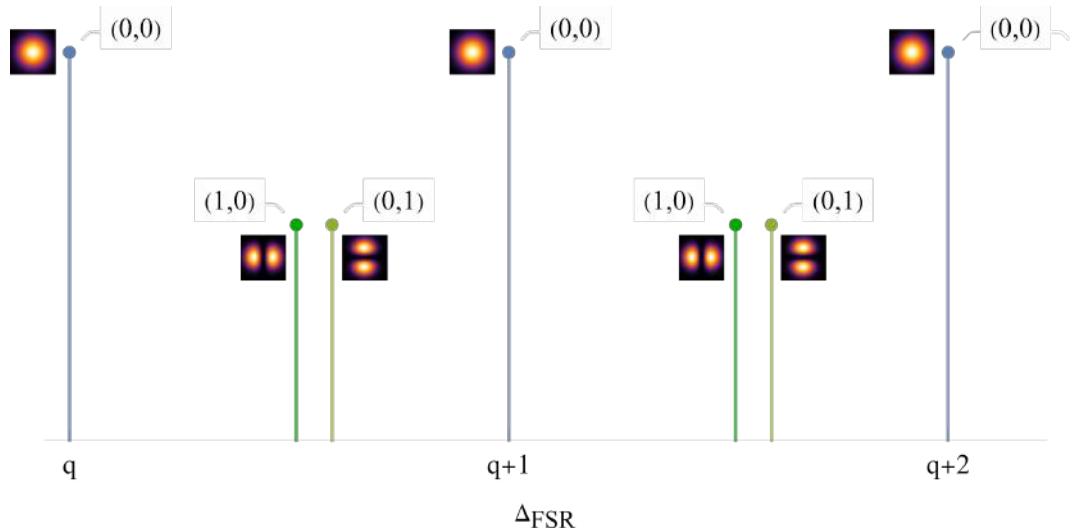


Figura 21: Simulação do comportamento das frequências de ressonância para a cavidade dobrada. A escala horizontal está em unidades do *FRS*.

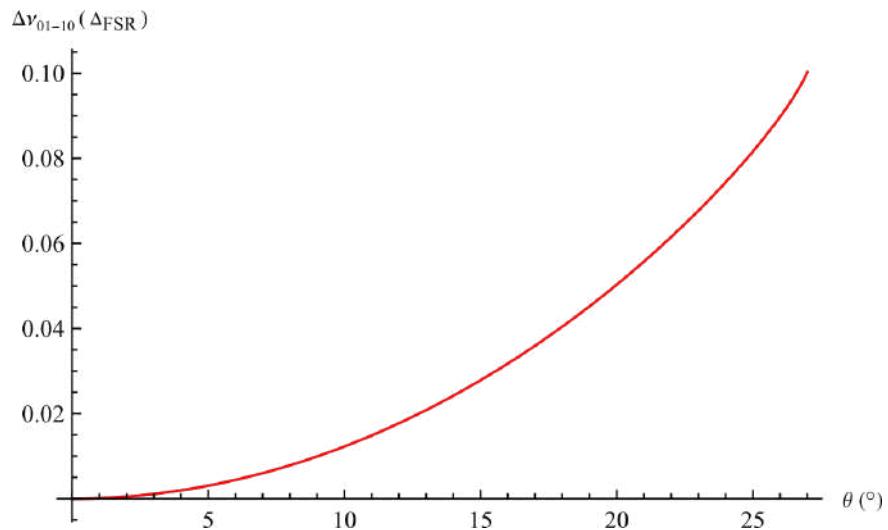


Figura 22: Comportamento da separação dos picos de ressonância dos modos HG_{01} e HG_{10} em função de θ para uma cavidade dobrada com $l_1 = 1125\text{ mm}$, $l_2 = 1250\text{ mm}$ e $R = 2000\text{ mm}$. A escala vertical está em unidades do *FRS*.

5 COMPENSAÇÃO DO ASTIGMATISMO DE MEIOS NÃO LINEARES

Com base nas discussões feitas anteriormente, referente às propriedades dos feixes gaussianos e sua evolução em sistemas ópticos, neste capítulo daremos prosseguimento a um assunto complementar deste trabalho de dissertação, estudo da transmissão de feixes com Momento Angular Orbital por uma cavidade dobrada com cristal não linear.

A proposta de estudo da transmissão de MAO em cavidades ópticas vem da perspectiva de construção de Osciladores Paramétricos Ópticos (OPOs) com feixes estruturados. Trata-se de um tema de desafio tecnológico que já tratado em trabalhos relacionados ao tema [28], e que aqui será abordado via o astigmatismo da cavidade.

Conforme ilustrado na Figura 23, o OPO é um dispositivo gerado a partir da combinação de uma cavidade óptica e um cristal não linear que funciona via o efeito da Conversão Paramétrica Descendente [17]. Em funcionamento, o OPO é bombeado com um feixe intenso de frequência ω_b , produzindo feixes convertidos de frequências ω_s e ω_c , tal que $\omega_b = \omega_s + \omega_c$. O desafio abordado neste projeto consiste na produção de feixes convertidos com MAO, os chamados vórtices ópticos. No regime quântico, os fôtons convertidos guardam correlações do tipo EPR (Einstein-Poldoski-Rosen) entre as quadraturas de seus campos, o que desperta o interesse para aplicações em protocolos de informação quântica em variáveis contínuas [29].

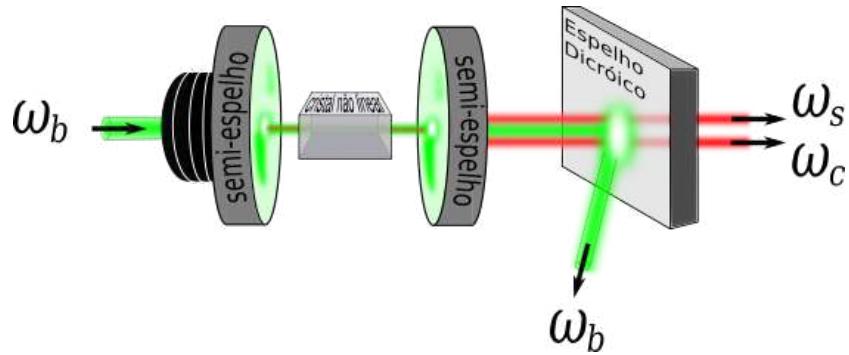


Figura 23: Exemplo de OPO formado por uma cavidade linear composta por dois semi-espelhos e um cristal não linear. Na figura, é retratado um feixe laser verde de bombeio com comprimento de onda 532 nm sendo convertido em dois feixes infravermelhos, com comprimento de onda 1064 nm , através da CPD.

O ponto de partida da presente proposta é o resultado obtido por M. Martinelli et al [10], onde foi observado que o astigmatismo do cristal dificultava a ressonância simultânea das componentes HG_{01} e HG_{10} de forma a desfavorecer a ressonância do modo $LG_0^{\pm 1}$ com MAO. Portanto, tendo em vista que o astigmatismo de cristais não-lineares provoca defasagens na propagação dos modos HG, assim como propagação dentro de uma cavidade de geometria não linear, propôs-se aqui o estudo de uma cavidade óptica dobrada em presença de cristais não-lineares, de forma compensar o astigmatismo e habilitando a cavidade a produzir/transmitir feixes LG com MAO.

5.1 COMPENSAÇÃO DO ASTIGMATISMO PROVENIENTE DO CRISTAL COM O USO DA CAVIDADE DOBRADA

No nosso estudo foi considerado um OPO tipo-II que produz feixes convertidos com polarizações ortogonais entre si. O cristal não linear possui índice de refração diferente para cada direção de polarização, de forma que os feixes convertidos acabam experimentando diferentes índices de refração ao atravessarem o cristal, daí que vem o astigmatismo causado pelos cristais não lineares [10].

Esse problema se torna bem drástico quando se tem a intenção de usar um OPO para produzir feixes convertidos com MAO's opostos. Como por exemplo a situação

em que o sinal seja LG^{+1} e o complementar seja LG^{-1} . No exemplo em questão a situação da oscilação simultânea dos feixes LG^{+1} e LG^{-1} implica também na oscilação simultânea de HG_{10} e HG_{01} para o sinal e para o complementar, efeito esse estudado que acabou sofrendo dificuldades em ser realizado, por conta do astigmatismo, em um trabalho anterior do grupo. [11].

No entanto, no nosso trabalho aqui, conforme foi adiantado, vislumbramos a utilização da cavidade óptica dobrada de forma a compensar o astigmatismo inerente de cristais e consequentemente produzir ambos os feixes convertidos com MAO's opostos.

No último capítulo verificamos que o termo da fase que contribuía para a separação dos modos de primeira ordem (causado pelo astigmatismo) foi a fase de Gouy. Dessa forma, temos como objetivo procurar uma configuração de cavidade junto com o cristal, de maneira que a diferença entre as fases de Gouy acumuladas de modos de mesma ordem seja zero, tanto para a polarização ordinária, quanto para a extraordinária e com isso obter ambas as polarizações oscilando simultaneamente com MAO. Vamos aqui nos ater aos modos de primeira ordem. Os feixes de modo LG_p^l de primeira ordem podem ser decompostos na soma de dois feixes HG_{mn} de primeira ordem, como já foi mencionado na Subseção 2.4.3.

O aparato vislumbrado consiste em uma cavidade com dois cristais rodados de 90° entre si, conforme mostrado na Figura 24. Enquanto um cristal afeta mais uma polarização do que a outra o segundo cristal faz o contrário, de forma que uma polarização não sofre mais o efeito do cristal do que a outra, de tal maneira que o astigmatismo possa ser compensado simultaneamente pela cavidade ótica. Com a inserção dos cristais, o feixe que se propaga na cavidade não irá mais percorrer efetivamente os caminhos l_1 e l_2 , mas sim caminhos ópticos de difração com valores diferentes. Sendo assim, é possível fazer alusão à cavidade com dois cristais como sendo equivalente a uma cavidade com parâmetros iguais a esses caminhos ópticos (Figura 24) que ocorrem justamente por conta dos cristais [10]. Os caminhos ópticos

equivalentes podem ser calculados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 l_{1y}^o &= l_1 - l_{c1}(1 - n_y/n^2) \\
 l_{1x}^o &= l_1 - l_{c1}(1 - 1/n_y) \\
 l_{1y}^e &= l_1 - l_{c1}(1 - n/n_x^2) \\
 l_{1x}^e &= l_1 - l_{c1}[1 - (\sin^2 \phi + n_x^2/n_z^2 \cos^2 \phi)/(n_x^2/n)]
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

e

$$\begin{aligned}
 l_{2y}^o &= l_2 - l_{c2}(1 - n_y/n^2) \\
 l_{2x}^o &= l_2 - l_{c2}(1 - 1/n_y) \\
 l_{2y}^e &= l_2 - l_{c2}(1 - n/n_x^2) \\
 l_{2x}^e &= l_2 - l_{c2}[1 - (\sin^2 \phi + n_x^2/n_z^2 \cos^2 \phi)/(n_x^2/n)],
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

onde n_x , n_y e n_z são os índices de refração do cristal referente a cada direção, os índices e e o são referentes as polarizações extraordinária e ordinária dos feixes convertidos pela CPD que ocorre no cristal do OPO e ϕ é o ângulo de corte do cristal que é encomendado junto ao fabricante, tabelado para diferentes regimes de operação em frequência do OPO. No caso do cristal KTP bombeado a 532 nm esse ângulo vale $23,5^\circ$ para uma operação próxima à degenerescência em frequência dos feixes convertidos.

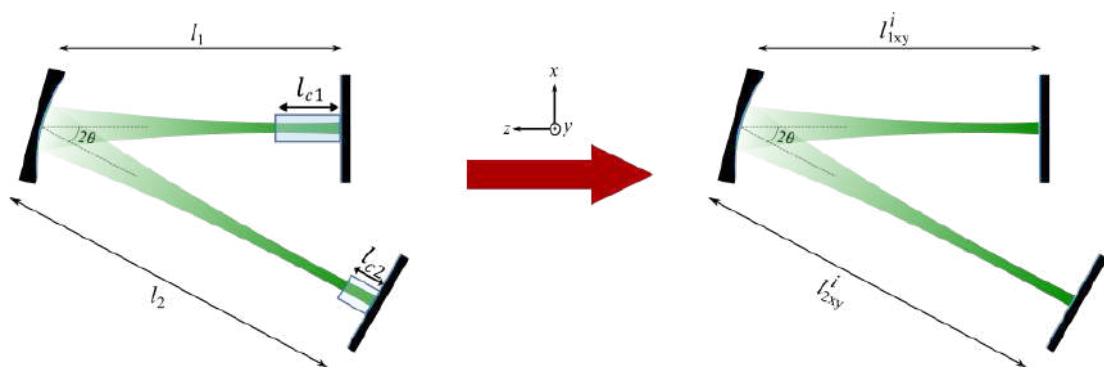


Figura 24: A esquerda, representação da cavidade dobrada com dois cristais, um em cada cintura. A direita, representação da cavidade equivalente considerando os caminhos ópticos de difração, onde $i = (e, o)$.

A fase de Gouy acumulada em meia volta completa na cavidade a partir de w_1 , levando em conta que a cavidade tem um comprimento fixo e uma dada frequência

de operação tanto para o sinal quanto para o complementar, pode ser reescrita da seguinte forma [27]:

$$\Phi_{mn}^i = \left(m + \frac{1}{2} \right) \tan^{-1} \left(\frac{z_{Rx}^i}{f_x - l_{1x}^i} \right) + \left(n + \frac{1}{2} \right) \tan^{-1} \left(\frac{z_{Ry}^i}{f_y - l_{1y}^i} \right), \quad (5.3)$$

onde $i = (o, e)$ é referente as polarizações ordinária e extraordinária. A distância de Rayleigh, z_R , para cada polarização pode ser obtida através da Equação 4.11.

$$(z_{Rx,y}^e)^2 = \frac{(l_{1x,y}^e - f_{x,y})f_{x,y}^2}{l_{2x,y}^e - f_{x,y}} - (l_{1x,y}^e - f_{x,y})^2 \quad (5.4)$$

$$(z_{Rx,y}^o)^2 = \frac{(l_{1x,y}^o - f_{x,y})f_{x,y}^2}{l_{2x,y}^o - f_{x,y}} - (l_{1x,y}^o - f_{x,y})^2. \quad (5.5)$$

Nosso interesse recai sobre a diferença entre a fase de Gouy acumulada para as duas polarizações e modos de mesma ordem consecutivos, encontrando:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi^i = \Phi_{10}^i - \Phi_{01}^i &= \tan^{-1} \left(\frac{z_{Rx}^i}{f_x - l_{1x}^i} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{z_{Ry}^i}{f_y - l_{1y}^i} \right) \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{\frac{z_{Rx}^i}{f_x - l_{1x}^i} - \frac{z_{Ry}^i}{f_y - l_{1y}^i}}{1 + \frac{z_{Rx}^i z_{Ry}^i}{(f_x - l_{1x}^i)(f_y - l_{1y}^i)}} \right). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Analisa-se a melhor configuração possível (l_1 , l_2 e θ) para que tanto $\Delta\Phi^e$ quanto $\Delta\Phi^o$ sejam (aproximadamente) nulos, indicando a condição de ressonância simultânea desejada. Considerando $\Delta\Phi^i$ para as duas polarizações indo a zero simultaneamente, é possível obter uma relação entre l_1 e θ , a partir da Equação 5.6 para cada polarização, como mostra a Figura 25.

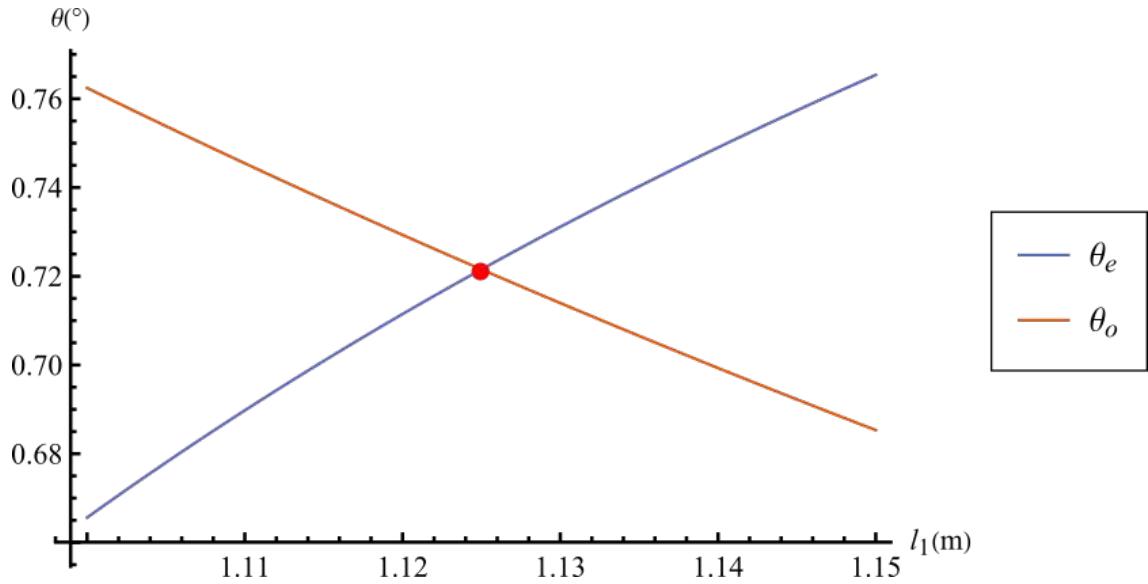


Figura 25: Simulação da relação entre l_1 e θ , considerando $\Delta\Phi^e = \Delta\Phi^o = 0$. Em azul: o comportamento de θ para a polarização extraordinária; Em laranja: o comportamento de θ para a polarização ordinária; Em vermelho: ponto de cruzamento entre as retas, onde ocorre $\Delta\Phi^e = \Delta\Phi^o = 0$ simultaneamente.

A partir disso, verifica-se que não é qualquer configuração de cavidade que se mostra útil para o nosso objetivo. Verifica-se que $\Delta\Phi^i$, para cada polarização, vai a zero simultaneamente para uma cavidade com $l_1 = 1125\text{ mm}$, $l_2 = 1250\text{ mm}$, $R = 2000\text{ mm}$, $\theta = 0,72^\circ$, $l_{c1} = 10\text{ mm}$ e $l_{c2} = 5\text{ mm}$, como ilustrado na Figura 26.

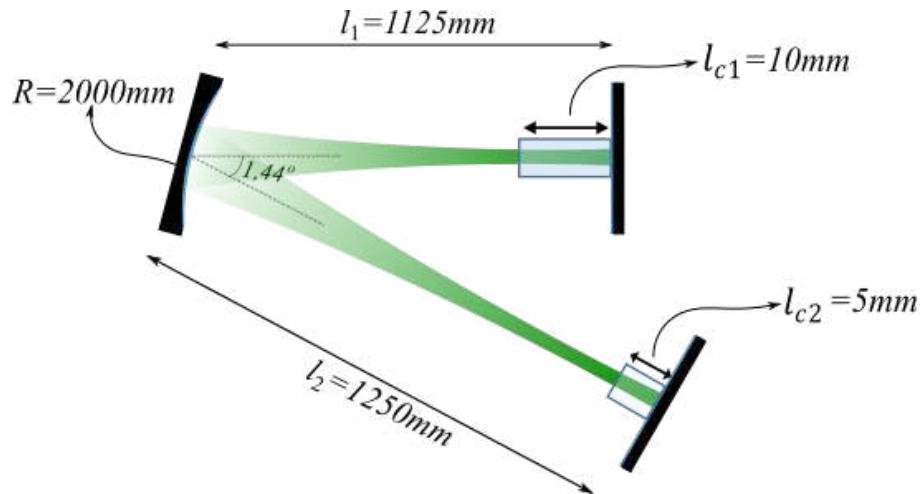


Figura 26: Representação da cavidade dobrada com os parâmetros que leva à compensação do astigmatismo dos feixes convertidos.

Assim, tal cavidade seria capaz de corrigir o astigmatismo dos feixes convertidos e com isso ter a oscilação simultânea dos mesmos com MAO. Esse resultado é bastante animador, por mostrar ser possível teoricamente a construção de OPO's com o anulamento do efeito do astigmatismo.

6 VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL DO ASTIGMATISMO EM UMA CAVIDADE DOBRADA

Neste capítulo, será apresentada uma descrição da montagem de uma cavidade óptica dobrada, abordada no Capítulo 4, que foi montada no Laboratório de Óptica Quantica (LOQ). O projeto de trabalho consistiu da montagem da cavidade e na medida experimental do astigmatismo causada pela mesma ao feixe transmitido. A análise da influência do astigmatismo nos picos transmitidos pela cavidade, foi feita a partir da montagem da cavidade para valores de θ , como será explicado mais adiante. Todo o trabalho de montagem experimental da cavidade foi realizado pelo autor desse trabalho.

6.1 ACORDO DE MODOS EM UMA CAVIDADE ÓPTICA

Já foi mostrado na Subseção 3.2.1 que cavidades ópticas tem uma cintura característica devido a sua geometria. Foi mostrado também que o feixe gaussiano, utilizado para ser injetado na cavidade, também tem uma cintura. Nesse sentido, é observado que para se obter uma cavidade alinhada e estável, antes do bom posicionamento dos espelhos da cavidade, é preciso projetar a propagação do feixe laser incidente de forma a fazê-lo coincidir (em tamanho e posição) com a cintura da cavidade. Esse procedimento de coincidência das cinturas é o que chamamos de casamento de modos, que é fundamentalmente importante para a estabilidade da cavidade.

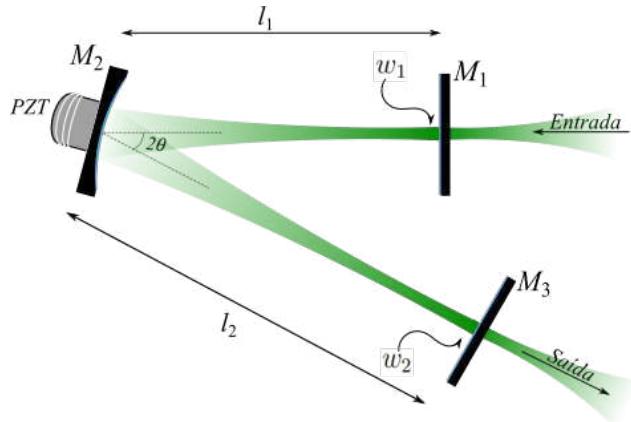


Figura 27: Imagem meramente ilustrativa do layout da cavidade dobrada, formada por dois semi-espejos planos (M_1 e M_3) e um curvo (M_2) e um PZT acoplado ao semi-espejo M_2 e cinturas características w_1 e w_2 .

Através da Figura 27 é possível vislumbrar o fato da cavidade possuir duas cinturas características. Para o acordo de modo, só há necessidade de ajustar a cintura do feixe de entrada, para cintura w_1 , pois a outra irá ser formada automaticamente na propagação do feixe dentro da cavidade. Dessa forma, o cálculo da cintura w_1 foi feito através da Equação 3.24, com o auxílio de um programa desenvolvido no Wolfram Mathematica, considerando a mesma propagação descrita pela multiplicação de matrizes da Equação 4.1. Para a realização das contas para a primeira configuração da cavidade, foram fixados o ângulo $\theta = 0.72^\circ$, o braço $l_2 = 1250\text{ mm}$ e um semi-espejo curvo com raio de curvatura $R = 2000\text{ mm}$, a partir disso foi possível simular w_1 em função de l_1 , Figura 28.

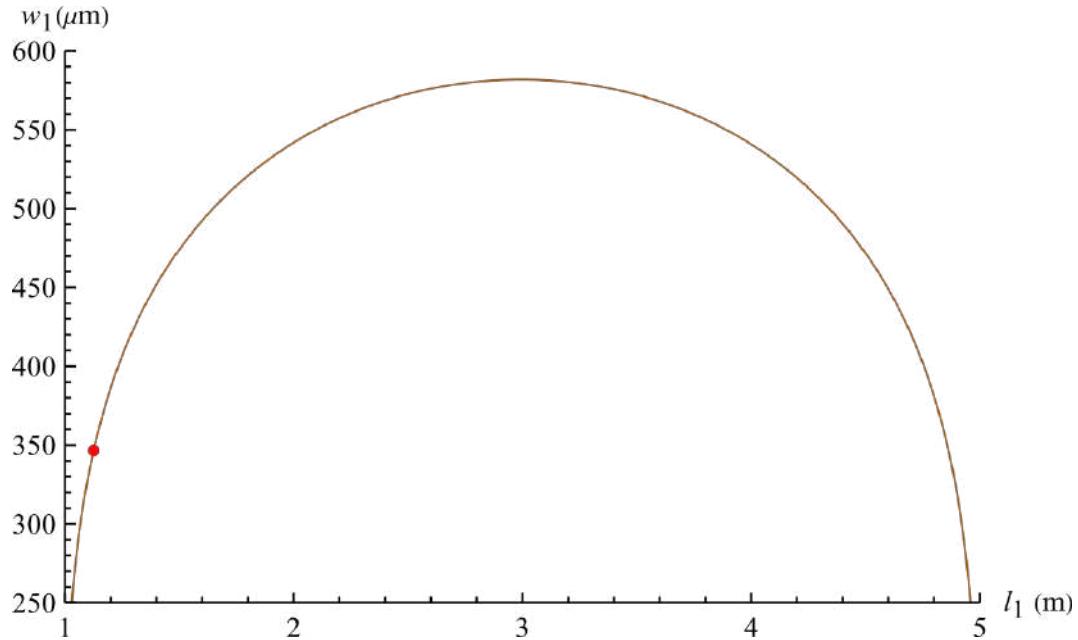


Figura 28: Comportamento de w_1 em função de l_1 . Em vermelho: ponto referente a $l_1 = 1125\text{ mm}$ e $w_1 = 343,3\text{ }\mu\text{m}$

A partir do gráfico e do espaço disponível na mesa óptica, foi selecionado $l_1 = 1125\text{ mm}$ que fornece $w_1 = 343,3\text{ }\mu\text{m}$. A cavidade ter seus braços l_1 e l_2 com valores relativamente altos, aconteceu por conta do espelho curvo utilizado ter um raio de curvatura da ordem de 2000 mm . O passo seguinte é justamente o acordo de modos, onde deve haver a modificação da cintura natural do feixe incidente. Mas para isso, é preciso saber o valor desse parâmetro.

A medição do valor é feita através de um método nomeado como método da faca. De forma simples, esse método consiste no bloqueio de parte do feixe laser, na direção perpendicular a de propagação, em diferentes pontos ao longo de seu eixo de propagação (direção z) e da análise de sua intensidade nesses pontos conforme forem ocorrendo os cortes, como mostra a Figura 29. Para um feixe gaussiano o deslocamento da lâmina na direção x , acontece até uma posição x_0 onde ocorre 84% da intensidade total transmitida pelo feixe ($P(x_0) = 0.84P_0$) e depois continuando até a posição x_1 , onde a intensidade é 16% da intensidade total transmitida ($P(x_1) = 0.16P_0$). Assim, a diferença entre x_1 e x_0 fornece o valor de $w(z)$ na posição z que ocorreu o corte, como demonstrado no APÊNDICE B. O ponto referenciado como a

origem do eixo z , para a realização dos cortes, foi escolhido como sendo a posição da lente f_1 (referenciar a figura do esquema experimental), colocada justamente para gerar uma cintura natural para o feixe. Dessa forma, foram feitos os cortes em intervalos de $2,5\text{ cm}$ (podendo ser outro valor dependendo do número de pontos que se deseje analisar). A partir desse processo é possível gerar um gráfico que relaciona a largura $w(z)$ em relação a posição z da lâmina. Fazendo um ajuste dos pontos do gráfico com a Equação 3.24, Figura 30, encontrou-se uma cintura natural de $w_0 = 31,9\text{ }\mu\text{m}$ à uma posição $z = 89,4\text{ mm}$ da posição da lente f_1 .

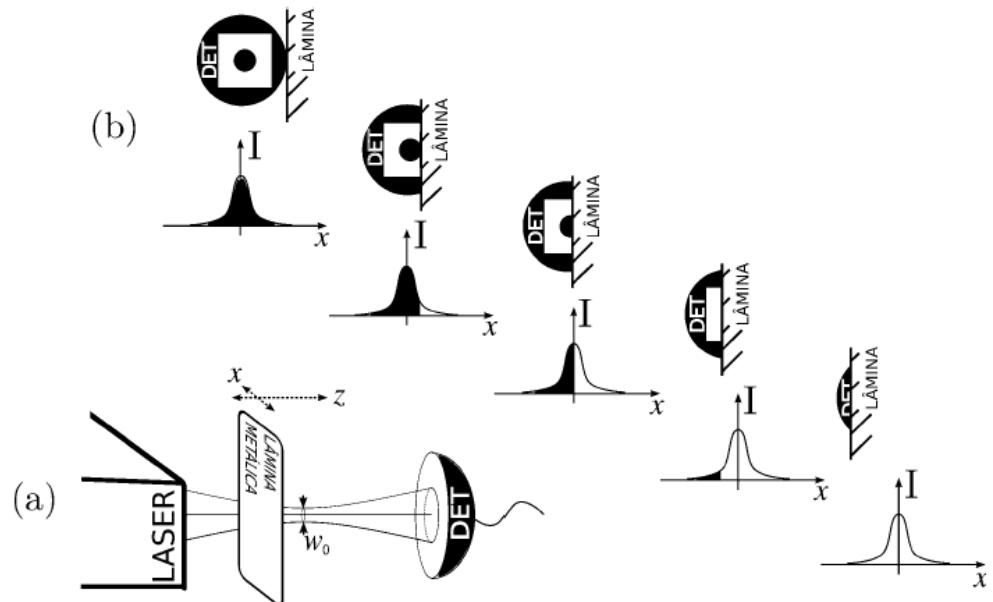


Figura 29: a) esquema experimental do método da faca; b) Intensidades medidas no detector conforme a lâmina corta o feixe.

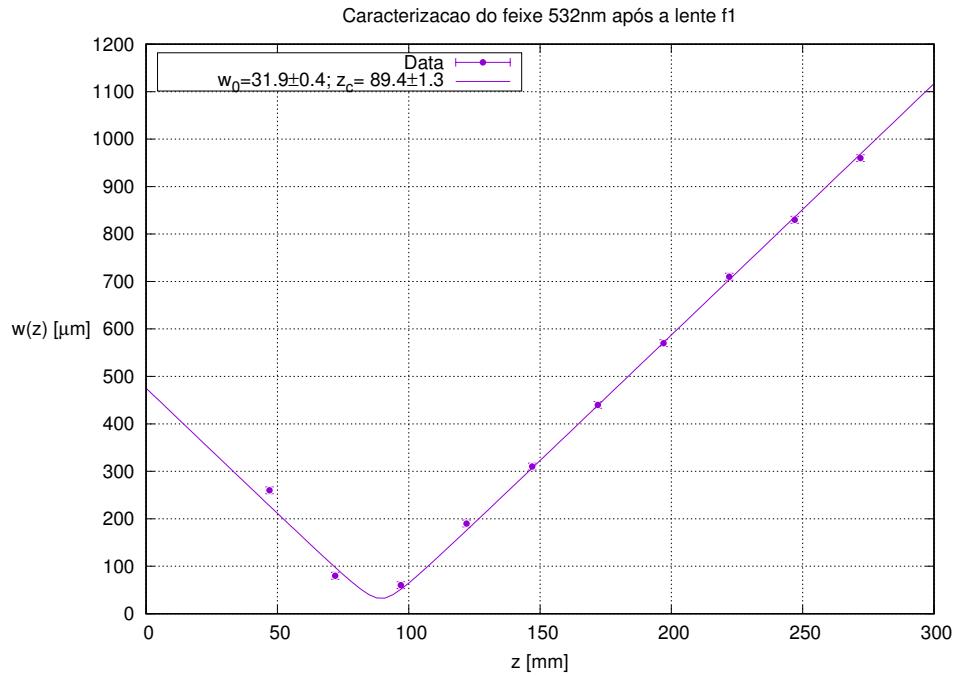


Figura 30: Caracterização experimental da cintura w_0

Posteriormente, tendo essas informações, a laboração foi a alteração de w_0 para $w_2 = 343,3 \mu m$. Essa mudança do tamanho da cintura e também a posição onde ela ocorre, é feita através da combinação de lentes convergentes, onde a distância focal de cada lente, a distância entre elas e w_0 são determinados com base no formalismo de matriz $ABCD$, através do qual é possível saber como cada lente irá alterar a cintura do feixe. De tal modo que usando a matriz resultante do sistema de lentes, atravessado pelo feixe, as Equações 2.27, 2.53 e considerando o raio de curvatura complexo q_i como sendo na posição onde w_0 ocorre e q_{i+1} na posição que w_1 ocorre, é possível encontrar essas distâncias. A Figura 31 ilustra a ideia da montagem desse sistema de lentes.

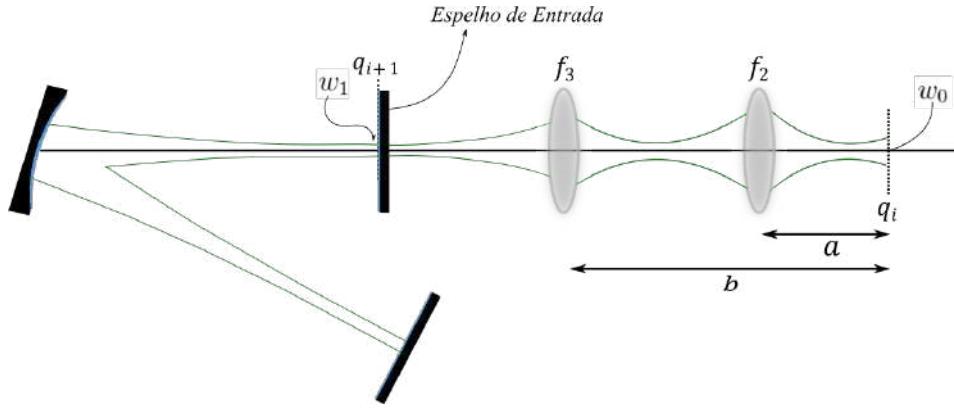


Figura 31: Esquema ilustrativo de um sistema de lentes com distâncias focais f_2 e f_3 para realização do acordo de modos.

As contas para encontrar as distâncias focais e as distâncias das lentes em relação w_0 foram esquematizadas em um programa do Wolfram Mathematica, no qual forneceu o uso de uma lente com $f_2 = 60\text{ mm}$ e outra com $f_3 = 175\text{ mm}$ com distâncias $a = 95\text{ mm}$ e $b = 451,4\text{ mm}$, respectivamente, e gerando w_1 a uma distância 1500 mm de w_0 . A Figura 32, mostra o gráfico gerado pelo programa, indicando a posição das lentes, o comportamento da largura do feixe e onde ocorre a cintura do feixe, com seu respectivo valor.

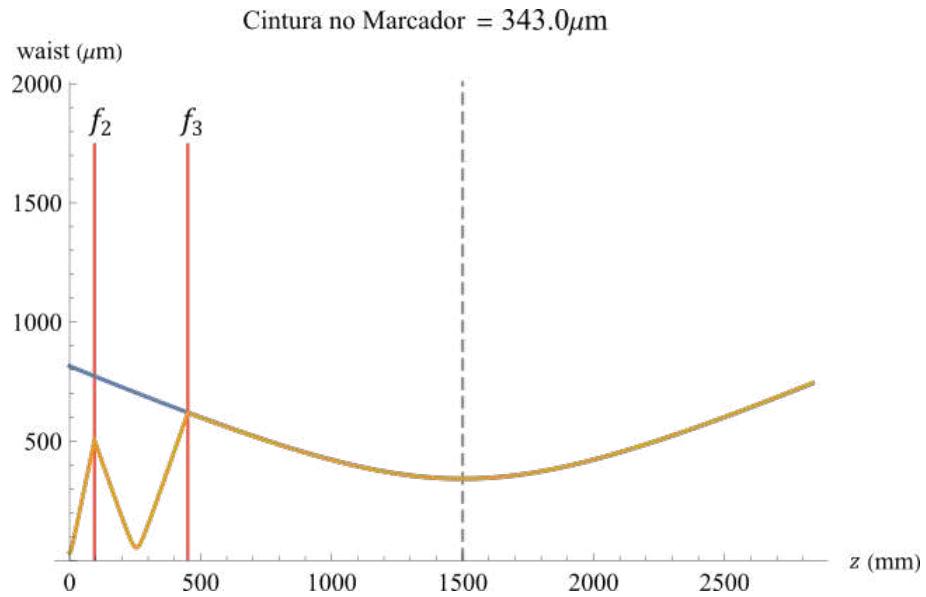


Figura 32: Simulação da posição das lentes (em vermelho), para que ocorra o acordo de modo da cintura do feixe (em amarelo), com a cintura exigida pela cavidade (em azul), em uma distância de 1500 mm de w_0 (origem do eixo z).

Tendo posicionado as lentes é novamente realizado o método da faca para conferir os resultados teóricos do programa com a realidade, garantido assim menos erros experimentais que possam prejudicar a montagem da cavidade.

6.2 MONTAGEM EXPERIMENTAL DA CAVIDADE ÓPTICA DOBRADA

Para a realização da montagem da cavidade é necessário a combinação de elementos ópticos e eletrônicos pré cavidade e pós cavidade, a fim de conduzir o feixe até a cavidade. A Figura 33 ilustra o trajeto do feixe, bem como todos os elementos ópticos e eletrônicos utilizados na montagem.

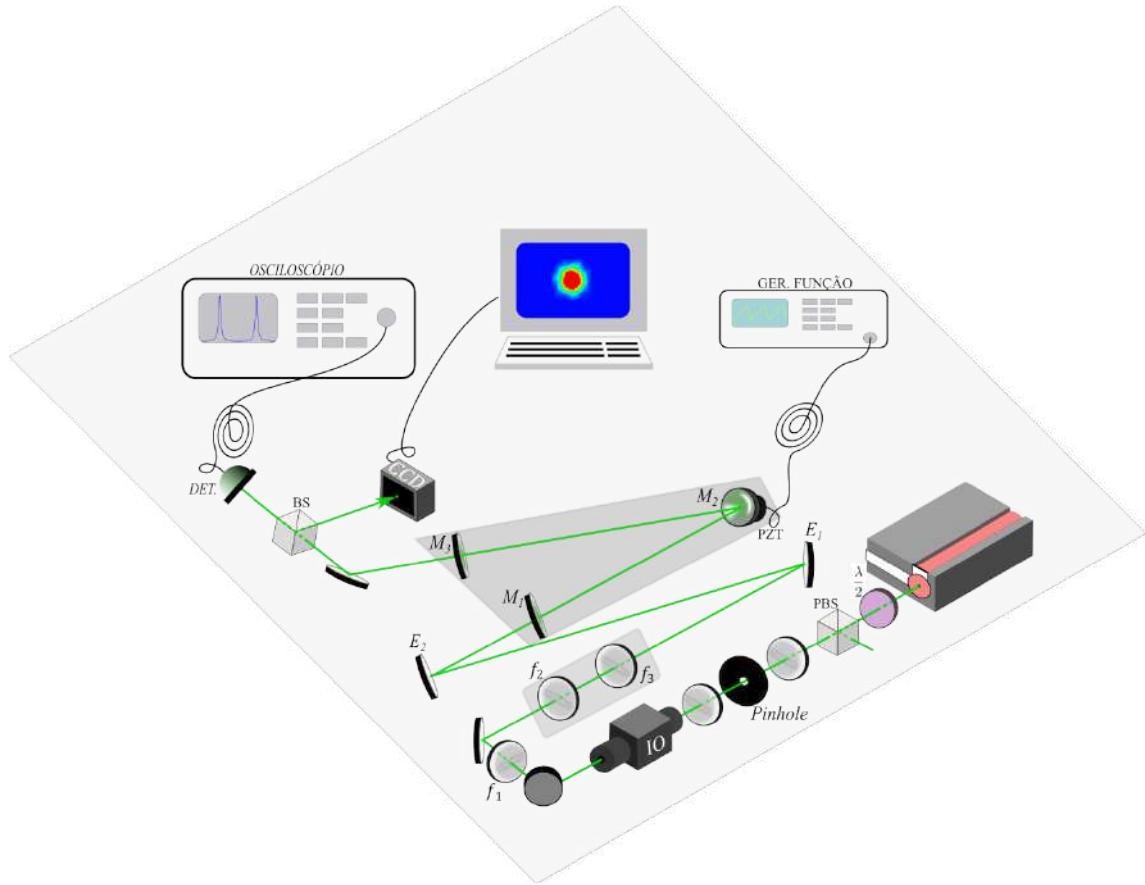


Figura 33: Ilustração do aparato experimental, onde é mostrado os principais elementos usados para montagem da cavidade.

6.2.1 Aparato Experimental

O feixe verde utilizado para o experimento é proveniente de um laser modelo Diablo (fabricante Innolight), é um laser de Nd:YAG dobrado em frequência, esse modelo produz feixes de luz verde (532 nm) com perfil transversal gaussiano. Depois de deixar o Diablo o feixe passa por uma combinação elementos ópticos, composta por uma lâmina de meia onda ($\lambda/2$) e um divisor de feixe por polarização (com a sigla PBS do inglês), que juntos tem como função o controle da intensidade do feixe incidente, a partir da mudança da angulação da lâmina.

Continuando, o feixe passa por um conjunto de lentes com um Pinhole entre elas, essa etapa foi necessária, pois o feixe que sai do aparelho não apresentava um perfil gaussiano muito limpo, contendo algumas manchas envolta. A função do Pinhole é justamente se livrar dessas manchas entorno do feixe e deixá-lo com o perfil gaussiano limpo. Em seguida o feixe passa por um isolador óptico (IO), colocado para impedir que o feixe refletido pelo semi-espelho de entrada da cavidade (M_1) volte para dentro do Diablo.

Prosseguindo, o feixe atravessa o conjunto de duas lentes convergentes (f_2 e f_3), responsáveis pelo acordo de modo. Essas lentes estão presas, cada uma, em suportes transladadores XYZ para um melhor ajuste de suas posições. Em seguida o feixe é desviado por dois espelhos planos (E_1 e E_2) para facilitar no alinhamento do feixe laser na cavidade.

Para a realização da montagem da cavidade dobrada foi utilizado três semi-espelhos, sendo os três HR (alta reflectância do inglês *high reflection*), onde dois são planos (M_1 e M_3) e um côncavo (M_2) com raio de curvatura $R = 2000\text{ mm}$, o semi-espelho côncavo foi fixado com suporte Polaris de $1/2''$ (meia polegada) produzido pela Thorlabs, que garante uma estabilidade mecânica melhor do que suportes convencionais. No semi-espelho M_2 foi acoplado um PZT (a sigla é referente a sua fórmula química $Pb[Zr_{(x)}Ti_{(1-x)}]O_3$ [30]) que consiste de uma cerâmica piezoelétrica, que tem como característica a contração e a dilatação, quando nela é aplicada uma voltagem. Sua função é dar pequenas alterações na posição do espelho

ao longo do tempo, no qual está colado, permitindo a cavidade passar por pontos de ressonância. Para aplicar a voltagem no PZT foi usado um gerador de funções, que produzindo uma voltagem de 2 V com uma frequência de 5 Hz, juntamente com um amplificador.

Após o feixe sair pelo espelho M_3 ele passa por um divisor de feixe (com a sigla BS do inglês), o qual divide o feixe em dois, cada um com metade da intensidade do feixe transmitido pela cavidade, um desses feixes vai para um detector que envia o sinal para um osciloscópio, onde é possível observar as curvas dos picos de transmissão da cavidade, e o outro feixe vai em direção a uma câmera CCD para poder ser feita a filmagem do feixe transmitido. Esse esquema experimental é ilustrado na Figura 33.

6.2.2 Construção da Cavidade

A construção da cavidade é uma parte bem delicada, pois como esta possui três espelhos, e um deles com um estágio de rotação, logo uma grande quantidade de graus de liberdade. Com isso, a montagem se mostrou bem trabalhosa no quesito alinhamento.

O primeiro espelho a ser colocado foi o espelho de entrada M_1 . O feixe transmitido por M_1 sofre muito pouco desvio com relação a inclinação desse espelho, mas no refletido, é perceptível como a inclinação do espelho interfere nele. Dessa forma, o alinhamento do espelho M_1 , consistiu em alinhar o feixe refletido, por ele, com o feixe incidente, de forma que o refletido voltasse por cima do incidente. Em seguida foi colocado o espelho M_2 , esse por sua vez foi anteriormente fixado em um estágio giratório, como mostra a Figura 34, para se ter um melhor controle do valor da inclinação desse espelho, já que se foi obtido resultados para valores diferentes de inclinação θ do espelho curvo. Em seguida é colocado o espelho M_3 , aliando-o, a fim de que o feixe refletido por ele retorne sobreposto ao feixe que chega nele, de forma a garantir que o feixe percorra o caminho da cavidade sobre ele mesmo. Sempre se deve tomar cuidado para que não haja variação na altura do feixe, mantendo-o sempre paralelo a mesa óptica em todo processo.

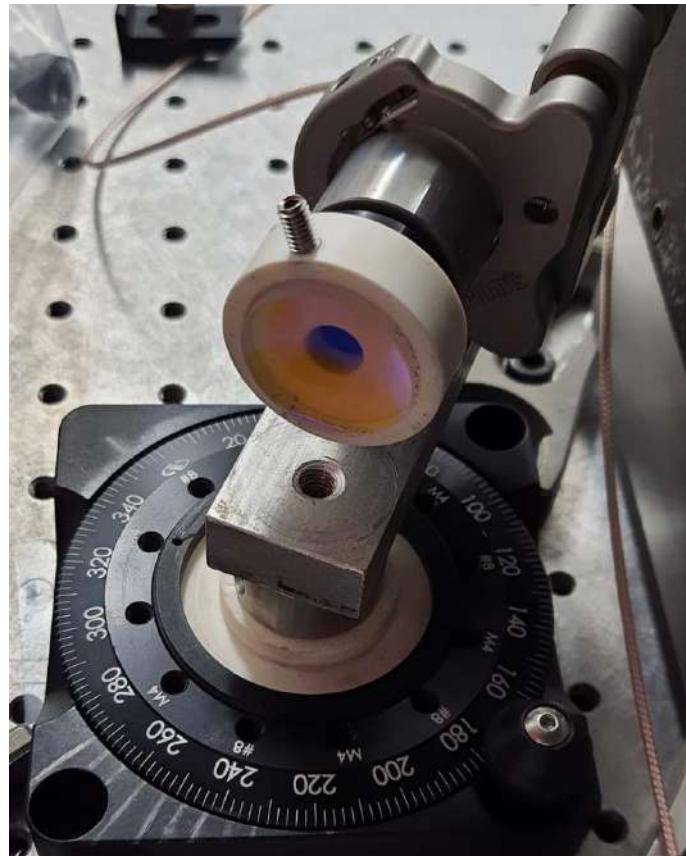


Figura 34: Montagem experimental do espelho curvo, sobre um estágio giratório, utilizado na cavidade dobrada.

Após a colocação e o alinhamento bruto dos espelhos, foram necessárias várias horas de um alinhamento fino para que a cavidade ficasse o mais próximo da ressonância. A verificação se a cavidade está bem alinhada e consequentemente em ressonância é através do osciloscópio, no qual é possível ver os picos de ressonância de transmissão da cavidade, que nada mais é que a transmissão de maior intensidade do modo fundamental (já que a cavidade foi bombeada com feixe no modo fundamental). A cavidade quando não está devidamente alinhada é possível ver picos secundários no osciloscópio, que representam modos de ordem superior sendo transmitidos pela cavidade.

6.3 OBTENÇÃO DOS RESULTADOS

Para a obtenção dos resultados com o alinhamento da cavidade, foram utilizados um detector ligado a um osciloscópio e uma câmera CCD. Eles foram utilizados para auxiliar no alinhamento e para analisar os picos de transmissão da cavidade.

Foi mostrado na Subseção 4.2.2, uma das formas de analisar a presença do astigmatismo é através da separação entre os picos de ressonância dos modos Hermite-Gauss de primeira ordem, HG_{01} e HG_{10} , já que essa separação só ocorre devido a presença do astigmatismo. Como o interesse principal desse trabalho era avaliar a presença do astigmatismo na cavidade, então tínhamos que conseguir ver a separação desses picos de ressonância e contabilizar se realmente a separação deles aumentava conforme o ângulo θ , de inclinação do espelho curvo, aumentava. O laser injetado na cavidade está no modo fundamental, logo o feixe transmitido e os picos de ressonância para a cavidade alinhada, também serão referentes ao modo fundamental, assim, para que seja possível ver os modos de primeira ordem, basta aplicar um pequeno desalinhamento através do espelho E_2 (Figura 33), tanto na horizontal, quanto na vertical, para que os dois modos de primeira ordem apareçam.

Inicialmente, a cavidade foi montada para um ângulo de $\theta = 0.67^\circ$, mas na hora de analisar os picos transmitidos no osciloscópio, não foi possível observar uma separação entre eles, mas sim uma combinação, gerando um modo Hermite-Gauss de primeira ordem inclinado a $+45^\circ$ ou -45° (como discutido na Subseção 2.4.3), dependendo de como aplicado o desalinhamento. Isso ocorreu porque a largura de linha dos picos transmitidos, desse modo, era maior que a separação entre eles. Com isso, se fez necessário começar a análise para ângulos maiores, e para isso foi preciso fazer uma adaptação na cavidade, colocando um espelho plano no percurso do braço l_2 como mostra a Figura 35.

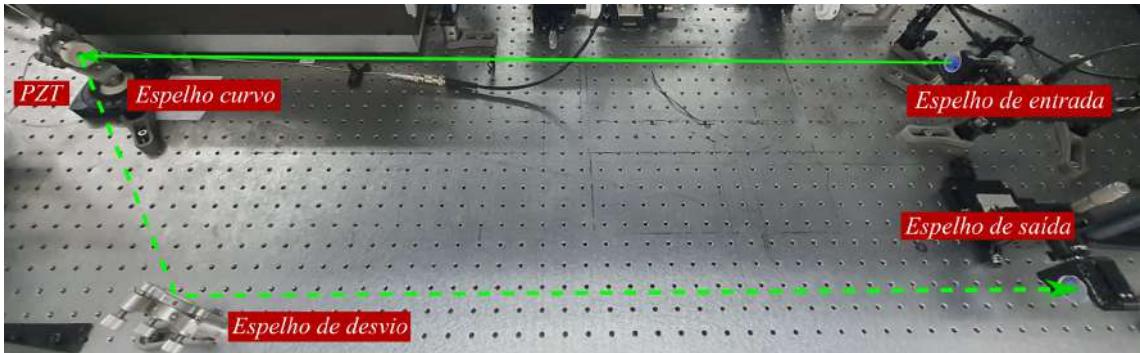


Figura 35: Adaptação feita na cavidade afim de que fosse possível a obtenção de resultados para ângulos maiores que $7,5^\circ$.

Essa adaptação se fez necessária, pois com o aumento do ângulo θ o braço l_2 transpassava os limites da mesa óptica. Mas a inserção desse espelho não prejudicou em nada a cavida com relação a mudança de seus parâmetros, já que sendo um espelho, ele nada faz além de modificar o trajeto do feixe.

Dito isso, o processo de coleta de dados para diferentes valores de θ se fez possível e com o auxílio da câmera CCD, foi feita a filmagem do feixe transmitido afim de verificar se os picos observados no osciloscópio, realmente eram os modos HG_{01} e HG_{10} .

7 RESULTADOS E ANÁLISES

Neste capítulo, será apresentado os resultados obtidos através do procedimento experimental descrito no capítulo anterior. A previsão teórica para os resultados que serão apresentados neste capítulo, foi feita através da Equação 4.18 e na Figura 22 temos o comportamento da separação dos modos *HG* de primeira ordem em função de θ , para uma cavidade com os parâmetros apresentados no capítulo anterior. Levando em conta o intervalo angular em que temos a cavidade estável (presente na Figura 19), os ângulos escolhidos para fazer a análise da separação dos picos de ressonância, foram os ângulos de 10° até 25° com intervalo de $2,5^\circ$ entre cada ângulo. Abaixo é possível ver a imagem da tela do osciloscópio, para $\theta = 25^\circ$, com a presença dos picos de ressonância.

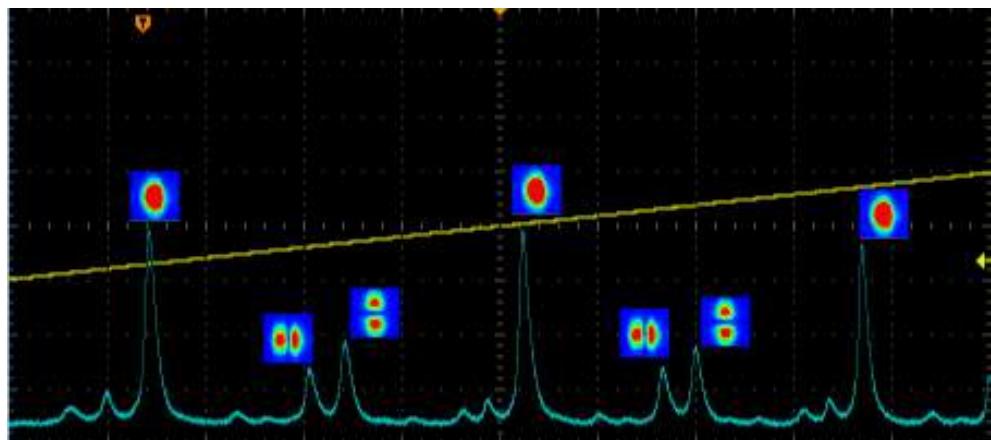


Figura 36: Imagem retirada da tela do osciloscópio, contendo o sinal de rampa enviado ao PZT (em amarelo) e os picos de transmissão de intensidade da cavidade (em azul), juntamente com as imagens de identificação dos picos de interesse, coletadas através da câmera CCD.

As distâncias entre os picos de primeira ordem, foi coletada utilizando um recurso do próprio osciloscópio, onde ele nos fornece a distância entre dois pontos, selecionados com auxílio de cursores na tela do aparelho. Abaixo é apresentada uma tabela contendo os valores, teórico e experimental, de separação entre os modos *HG* de primeira ordem, referente a cada valor de θ usado.

$\theta(^{\circ})$	$\Delta\nu_{01-10}$ (teo)	$\Delta\nu_{01-10}$ (exp)
10°	0,0122593	0,0232998
12,5°	0,0192257	0,0241434
15°	0,0278251	0,0344082
17,5°	0,0381344	0,0383501
20°	0,0502843	0,0640331
22,5°	0,0645312	0,0710753
25°	0,0815710	0,0916129

Tabela 1: Distância entre as frequências de ressonância ν dos modos HG_{01} e HG_{10} , para diferentes valores de θ , obtidas através da Equação 4.18 (teo) e através de imagens colhidas no osciloscópio (exp).

Os resultados presentes na Tabela 1 foram dispostos em um gráfico, apresentado na Figura 37, no qual é possível ver que o comportamento dos dados experimentais, segue o comportamento previsto pela teoria discutida na Subseção 4.2.2.

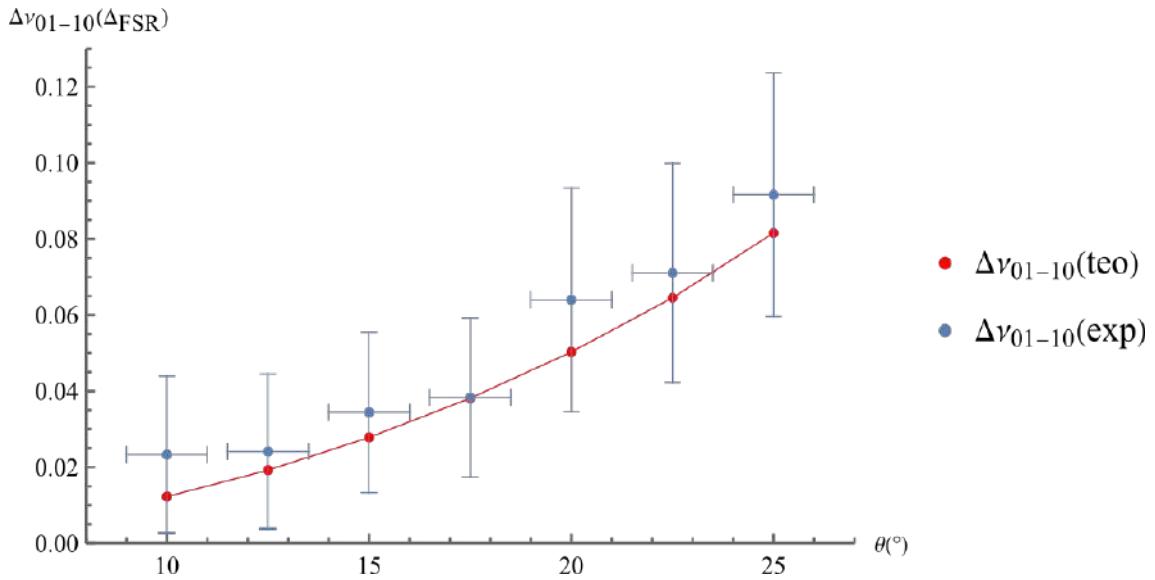


Figura 37: Variação da diferença de frequência de ressonância $\Delta\nu$, entre os modos HG_{01} e HG_{10} com relação ao ângulo de inclinação θ do espelho curvo presente na cavidade dobrada. Em vermelho os pontos teóricos e em azul os pontos experimentais.

Outra análise feita, foi através da plotagem de um gráfico relacionando os $\Delta\nu(\text{teo})$ e $\Delta\nu(\text{exp})$ e ajustando à uma linha de tendencia, como mostra a Figura 38.

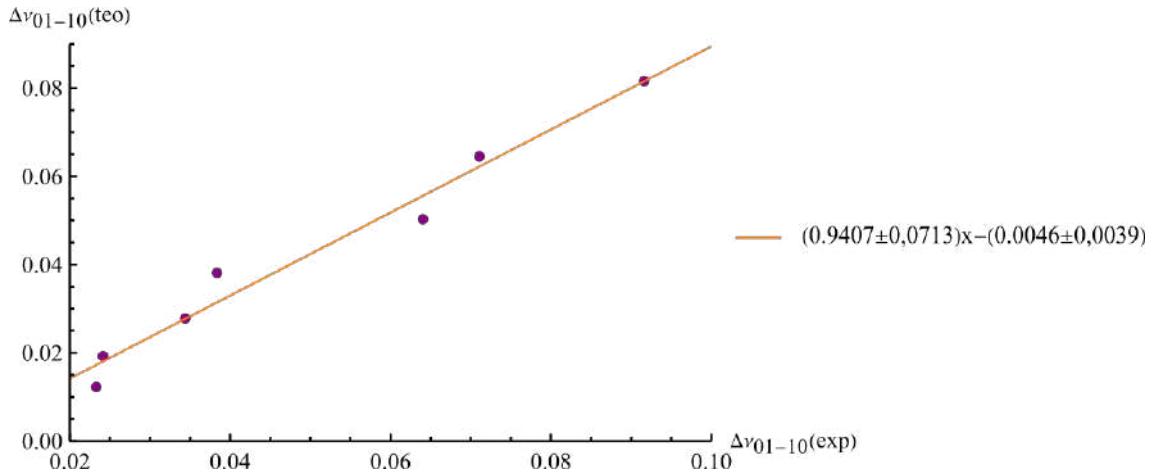


Figura 38: Relação entre as diferenças de frequência de ressonância $\Delta\nu(\text{teo})$ e $\Delta\nu(\text{exp})$, ajustado a uma linha de tendência com equação dada por $(0,9407 \pm 0,0713) x - (0,0046 \pm 0,0039)$ obtida a parir dos pontos do gráfico.

Na situação ideal o coeficiente angular e linear da reta, seriam respectivamente iguais a 1 e 0, que significaria que os pontos experimentais são iguais aos teóricos. Contudo, por conta de erros experimentais que são inerentes a situação experimental, os coeficientes encontrados foram 0,9407 e 0,0046. Comparando com o caso ideal, o coeficiente angular e linear encontrados experimentalmente têm aproximadamente 6% e 0,46%, respectivamente, de diferença com o caso ideal, mostrando que os resultados colhidos experimentalmente são confiáveis.

Esses resultados mostram a dependência do astigmatismo com o ângulo de abertura da cavidade, de forma à quantificar experimentalmente o astigmatismo presente em uma cavidade óptica. Em especial, levando-se em conta as frequências de ressonância dos modos *HG* de primeira ordem, é possível também fazer a análise para modos de ordem maiores que 1. Para o caso de ordem maiores, basta desalinhhar um pouco mais a cavidade como descrito na Seção 6.3 até que os picos referentes a modos de ordem superior apareçam. Contudo, quanto maior a ordem do modo mais difícil dele aparecer no osciloscópio, devido a pouca intensidade que esse irá ressoar.

8 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

Em conclusão, nesta dissertação apresentou-se uma descrição teórica da dinâmica dessa cavidade dobrada (formada por três espelhos que confinam a luz em uma região do espaço na forma da letra V) e uma caracterização do astigmatismo. Com base na propagação dos modos paraxiais Hermite-Gauss de ordem superior e nas condições de ressonância, propôs-se um método para quantificação do astigmatismo nessa cavidade, em função do ângulo de inclinação do espelho curvo. A cavidade montada em laboratório tem um comprimento total $L = 2375\text{ mm}$ e cinturas $w_1 = 343,3\text{ }\mu\text{m}$ e $w_2 = 485,4\text{ }\mu\text{m}$. Foi também apresentado os aparelhos experimentais utilizados para sua montagem, estabilidade e análise.

De acordo com esse estudo, apresentou-se também resultados experimentais compatíveis com a descrição teórica realizada e que permitiram uma caracterização do astigmatismo em uma cavidade montada no Laboratório de Óptica Quântica da UFF. De forma complementar a esse trabalho, explorando-se as condições geométricas da cavidade como o ângulo de dobradura e a curvatura do espelho, aliados à propagação da luz em um cristal não linear KTP, apresentou-se também uma proposta experimental de uma cavidade óptica dobrada para transmissão de feixes com MAO.

Os resultados apresentados nesta dissertação compõem os resultados mais gerais de um projeto de montagem experimental da cavidade óptica para feixes com Momento Angular Orbital e Osciladores Paramétricos Ópticos. A inserção de cristais KTP na cavidade já montada no laboratório constitui a etapa atual de desenvolvimento do projeto. Como perspectiva futura, de curto prazo, tem-se o plano de agregar os resultados desta dissertação aos dados da cavidade com cristal compilando um estudo mais completo desse sistema em um manuscrito a ser publicado. Como perspectiva de médio e longo prazo tem-se o plano de utilizar a cavidade dobrada nas futuras experiências com OPOs a fim de otimizar sua construção.

REFERÊNCIAS

- [1] FEYNMAN, R. P. Simulating physics with computers. In: *Feynman and computation*. [S.l.]: CRC Press, 2018. p. 133–153.
- [2] RIGOLIN, G.; RIEZNIK, A. A. Introdução à criptografia quântica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 27, n. 4, p. 517–526, 2005.
- [3] VIGNATTI, A. L.; NETTO, F.; BITTENCOURT, L. F. Uma introdução à computação quântica. *Departamento de Informática. UFPR*, 2004.
- [4] PADGETT, M. Light's twist. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society Publishing, v. 470, n. 2172, p. 20140633, 2014.
- [5] SOUZA, C. et al. Quantum key distribution without a shared reference frame. *Physical Review A*, APS, v. 77, n. 3, p. 032345, 2008.
- [6] PADGETT, M. J. Orbital angular momentum 25 years on. *Optics express*, Optical Society of America, v. 25, n. 10, p. 11265–11274, 2017.
- [7] SILVA, B. P. da et al. Spin-orbit laser mode transfer via a classical analogue of quantum teleportation. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, IOP Publishing, v. 49, n. 5, p. 055501, 2016.
- [8] KROLL, N. M. Parametric amplification in spatially extended media and application to the design of tuneable oscillators at optical frequencies. *Physical Review*, APS, v. 127, n. 4, p. 1207, 1962.
- [9] GIORDMAINE, J. A.; MILLER, R. C. Tunable coherent parametric oscillation in limb o 3 at optical frequencies. *Physical Review Letters*, APS, v. 14, n. 24, p. 973, 1965.
- [10] MARTINELLI, M. et al. Orbital angular momentum exchange in an optical parametric oscillator. *Physical Review A*, APS, v. 70, n. 1, p. 013812, 2004.

- [11] RODRIGUES, R. et al. Orbital angular momentum symmetry in a driven optical parametric oscillator. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 43, n. 11, p. 2486–2489, 2018.
- [12] RODRIGUES, R. et al. Generalized orbital angular momentum symmetry in parametric amplification. *Physical Review A*, APS, v. 105, n. 1, p. 013510, 2022.
- [13] HANNA, D. Astigmatic gaussian beams produced by axially asymmetric laser cavities. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, IEEE, v. 5, n. 10, p. 483–488, 1969.
- [14] GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Electrodynamics*. [S.l.]: Prentice Hall, 1999.
- [15] ZÍLIO, S. C. *Óptica moderna: fundamentos e aplicações*. [S.l.]: Instituto de Física de São Carlos, 2009.
- [16] YARIV, A. *Optical electronics*. [S.l.]: Saunders College Publishing, 1991.
- [17] YARIV, A. *Quantum electronics*. [S.l.]: John Wiley Sons, 1988.
- [18] FENG, S.; WINFUL, H. G. Physical origin of the gouy phase shift. *Optics letters*, Optica Publishing Group, v. 26, n. 8, p. 485–487, 2001.
- [19] SIEGMA, A. E. *Lasers*. [S.l.]: Universty Science Books, 1986.
- [20] SALEH, B. E.; TEICH, M. C. *Fundamentals of photonics*. [S.l.]: john Wiley sons, 2019.
- [21] BUTKOV, E. *Mathematical physics, volume unico*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1973.
- [22] SOUZA, C. E. R. *Aplicações do Momento Angular Orbital da Luz à Computação e Informação Quântica*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal Fluminense, 2010.
- [23] BEIJERSBERGEN, M. W. et al. Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum. *Optics Communications*, Elsevier, v. 96, n. 1-3, p. 123–132, 1993.

- [24] DANGOISSE, D.; HENNEQUIN, D.; ZEHNLé, V. *Les lasers-3e édition.* [S.l.]: Dunod, 2013.
- [25] FOWLES, G. R. *Introduction to modern optics.* [S.l.]: Courier Corporation, 1989.
- [26] MORAES, F. C. D. d. *Construção e caracterização de um laser contínuo de titânio-safira.* Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2013.
- [27] BARROS, R.; ALVES, G.; KHOURY, A. Gouy-phase effects in the frequency combs of an optical parametric oscillator. *Physical Review A*, APS, v. 103, n. 2, p. 023511, 2021.
- [28] LIU, K. et al. Experimental generation of continuous-variable hyperentanglement in an optical parametric oscillator. *Physical Review Letters*, APS, v. 113, n. 17, p. 170501, 2014.
- [29] BRAUNSTEIN, S. L.; LOOCK, P. V. Quantum information with continuous variables. *Reviews of modern physics*, APS, v. 77, n. 2, p. 513, 2005.
- [30] ANDRADE, R. B. d. *Construção de um oscilador paramétrico ótico para uma interface átomo-luz.* Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2013.

A INTENSIDADE TRANSMITIDA

Neste capítulo será exposto o desenvolvimento matemático para obter a Equação 3.7, referente a intensidade transmitida de uma cavidade de Fabry-Perót.

A partir da Equação 3.4 vamos tomar seu módulo ao quadrado para obter a intensidade ($I_T = |E_T|^2$), assim:

$$E_T = \frac{t_1 t_2 E_0}{1 - r_1 r_2 e^{i\phi}} \Rightarrow I_T = \frac{T_1 T_2 I_0}{|1 - r_1 r_2 e^{i\phi}|^2}. \quad (\text{A.1})$$

Agora, desenvolvendo o denominador $|1 - r_1 r_2 e^{i\phi}|^2$:

$$|1 - r_1 r_2 e^{i\phi}|^2 = (1 - r_1 r_2 e^{i\phi})(1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}) \quad (\text{A.2})$$

$$= 1 + r_1^2 r_2^2 - r_1 r_2 (e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \quad (\text{A.3})$$

$$= 1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \phi. \quad (\text{A.4})$$

Usando a seguinte identidade trigonométrica:

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (\text{A.5})$$

teremos:

$$1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\phi}{2}\right) = 1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 + 4r_1 r_2 \sin^2 \frac{\phi}{2} \quad (\text{A.6})$$

$$= (1 - r_1 r_2)^2 + 4r_1 r_2 \sin^2 \frac{\phi}{2} \quad (\text{A.7})$$

$$= \left(1 - \sqrt{R_1 R_2}\right)^2 + 4\sqrt{R_1 R_2} \sin^2 \frac{\phi}{2}. \quad (\text{A.8})$$

Agora substituindo A.8 em A.1, encontramos:

$$I_T = \frac{T_1 T_2}{\left(1 - \sqrt{R_1 R_2}\right)^2 + 4\sqrt{R_1 R_2} \sin^2 (\phi/2)} I_0 \quad (\text{A.9})$$

B CALCULO DAS PORCENTAGENS DE CORTE DO FEIXE

Neste apêndice será exposto os cálculos para determinar a porcentagem de bloqueio, do feixe no “método da faca”. As contas feitas aqui são referentes ao modo fundamental, para outros modos o desenvolvimento é análogo.

A potência irradiada por uma fonte pontual, como um laser por exemplo, é dada por:

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} I(x, y) dA, \quad (\text{B.1})$$

onde $I(x, y)$ é a intensidade no plano perpendicular ao eixo de propagação do feixe e $dA = dx dy$ é o elemento de área. Como o interesse aqui é o modo fundamental normalizado, logo:

$$I(x, y) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{w^2} e^{-\frac{2r^2}{w^2}}, \quad (\text{B.2})$$

onde $r^2 = x^2 + y^2$ e $w = w(z)$ é a largura do feixe. Substituindo Equação B.2 em Equação B.1, teremos:

$$P = \frac{2}{\pi} \frac{1}{w^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x_l} e^{-\frac{2x^2}{w^2}} e^{-\frac{2y^2}{w^2}} dx dy, \quad (\text{B.3})$$

onde x_l é considerado a posição da lâmina, na direção x . Prosseguindo com o desenvolvimento da equação acima, usando o resultado tabelado para integrais gaussianas:

$$P = \frac{2}{\pi} \frac{1}{w^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2y^2}{w^2}} dy \int_{-\infty}^{x_l} e^{-\frac{2x^2}{w^2}} dx \quad (\text{B.4})$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{1}{w^2} \left(w \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) \left(\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{2x^2}{w^2}} dx + \int_0^{x_l} e^{-\frac{2x^2}{w^2}} dx \right) \quad (\text{B.5})$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{1}{w^2} \left(w \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) \left(\frac{w}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{x_l} e^{-\frac{2x^2}{w^2}} dx \right). \quad (\text{B.6})$$

Para dar prosseguimento as contas, se faz necessário utilizar o conceito de função erro, definida como:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (\text{B.7})$$

Utilizando essa função erro na Equação B.6, com uma mudança de variável $t^2 =$

$2x^2/w^2$, ela será reescrita como:

$$P = \frac{2}{\pi w^2} \left(w \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) \left(\frac{w}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{w}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}x_l}{w} \right) \right) \quad (\text{B.8})$$

$$P = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}x_l}{w} \right) \right]. \quad (\text{B.9})$$

A partir do resultado da Equação B.9, será possível encontrar as porcentagens de bloqueio que deve ser realizada com a lâmina. A intenção por trás da utilização do método da faca é encontrar a cintura do feixe, dessa forma vamos considerar $x_l = w/2$ e $x_l = -w/2$, assim:

$$P_+ = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}\frac{w}{2}}{w} \right) \right] \quad (\text{B.10})$$

$$P_- = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{-\sqrt{2}\frac{w}{2}}{w} \right) \right], \quad (\text{B.11})$$

utilizando valores tabelados para a função erro, $\operatorname{erf}(\sqrt{2}/2) \cong 0,68$ e $\operatorname{erf}(-\sqrt{2}/2) \cong -0,68$, encontra-se $P_+ = 0,84$ e $P_- = 0,16$. Esses resultados significam que devemos bloquear o feixe com a lâmina, inicialmente, até 84% da intensidade do feixe e depois até 16% da intensidade, de tal maneira que o deslocamento da lâmina entre $x_l = w/2$ e $x_l = -w/2$ fornece a cintura do feixe no ponto do eixo z em que o corte foi realizado.