

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Fernanda Sant'Anna Rodrigues de Vasconcelos

**Estudo do Efeito da Difusividade da Densidade de  
Matéria Nuclear dos Núcleos  $^{27}\text{Al}$  e  $^{28}\text{Si}$  em  
Reações com Íons Pesados**

NITERÓI

2025

Fernanda Sant'Anna Rodrigues de Vasconcelos

**Estudo do Efeito da Difusividade da Densidade de  
Matéria Nuclear dos Núcleos  $^{27}\text{Al}$  e  $^{28}\text{Si}$  em  
Reações com Íons Pesados**

Dissertação submetida ao curso de pós-graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Física. Área de concentração: Física Nuclear.

Orientador:  
Prof. Jesús Lubián Ríos

NITERÓI  
2025

Ficha catalográfica automática - SDC/BIF  
Gerada com informações fornecidas pelo autor

V331e Vasconcelos, Fernanda Sant'Anna Rodrigues de  
Estudo do Efeito da Difusividade da Densidade de Matéria  
Nuclear dos Núcleos  $^{27}\text{Al}$  e  $^{28}\text{Si}$  em Reações com Íons Pesados  
/ Fernanda Sant'Anna Rodrigues de Vasconcelos. - 2025.  
79 f.: il.

Orientador: Jesús Lubián Ríos.  
Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,  
Instituto de Física, Niterói, 2025.

1. Reações nucleares. 2. Canais acoplados. 3. Seção de  
choque elástica. 4. Densidade de matéria. 5. Produção  
intelectual. I. Ríos, Jesús Lubián, orientador. II.  
Universidade Federal Fluminense. Instituto de Física. III.  
Título.

CDD - XXX

**Fernanda Sant'Anna Rodrigues de Vasconcelos**

**Estudo do Efeito da Difusividade da Densidade de Matéria Nuclear dos  
Núcleos  $^{27}\text{Al}$  e  $^{28}\text{Si}$  em Reações com Íons Pesados**

Dissertação submetida ao curso de pós-graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Física. Área de concentração: Física Nuclear.

Aprovada em: 06/08/2025.

**BANCA AVALIADORA**

**Membros titulares**

---

Prof. Jesús Lubián Ríos – Orientador, UFF

---

Prof. Luiz Felipe Alvahydo de Ulhoa Canto – UFF/UFRJ

---

Prof. Sergio José Barbosa Duarte – CBPF

*À minha mãe e à minha avó.*

# Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer aos meus pais por todo o apoio durante esses dois anos, em especial à minha mãe, que pacientemente acompanhou e aturou minhas maluquices acadêmicas no dia a dia. Estendo também meus agradecimentos a toda a minha família — avós, tias, tios e primos — por todo o carinho, incentivo e preocupação constantes.

Também gostaria de estender meus agradecimentos ao meu orientador, Jesús Lubián, por me acompanhar, apoiar e continuar puxando minha orelha durante essa etapa da minha jornada acadêmica. Fico extremamente feliz em saber que ele continuará me dando broncas por mais alguns anos. Da mesma forma, sou muito grata por todos os ensinamentos da Érica, da Bárbara e, especialmente, do professor Vinicius Zagatto. Sem o apoio e os ensinamentos deles, a jornada do mestrado teria sido muito mais difícil.

E, por último — mas jamais menos importante —, queria agradecer aos meus amigos, físicos ou não: Marcelly, Vivi, Luca Mocker, Brendinha, os “verdades” e, especialmente, ao Gabriel, por me aturar tanto.

Sou muito grata a todos que incluí — e a muitos que não incluí —, pois, sem dúvida nenhuma, se eu não tivesse o apoio deles, não estaria onde estou e não seria quem eu sou.

# Resumo

Neste trabalho, investigamos os efeitos da difusividade da densidade de matéria nuclear dos núcleos de  $^{27}\text{Al}$  e  $^{28}\text{Si}$  na descrição de reações nucleares induzidas por íons pesados, com foco em distribuições angulares de espalhamento elástico. Em um estudo recente, valores de difusividade nuclear de  $a_m = 0.65\text{ fm}$  e  $a_m = 0.62\text{ fm}$  foram propostos para ambos os núcleos com base na distribuição de Fermi de dois parâmetros, excedendo o valor sistemático amplamente utilizado no Potencial de São Paulo (SPP),  $a_m = 0.56\text{ fm}$ , sendo o valor de  $0.62\text{ fm}$  apontado como o que melhor descrevia os dados experimentais no referido estudo. A fim de avaliar a validade desses novos valores, realizamos cálculos de canais acoplados (CC) para os sistemas  $^9\text{Be}+^{28}\text{Si}$ ,  $^{14}\text{N}+^{28}\text{Si}$ ,  $^{13}\text{C}+^{28}\text{Si}$ ,  $^9\text{Be}+^{27}\text{Al}$ ,  $^{14}\text{N}+^{27}\text{Al}$  e  $^{28}\text{Si}+^{27}\text{Al}$ , considerando energias incidentes aproximadamente 2 a 3 vezes superiores à barreira de Coulomb. As análises foram realizadas com o código FRESCO, utilizando tanto o SPP quanto o potencial de Woods-Saxon (WS) para a parte imaginária dos potenciais ópticos. Os resultados obtidos demonstram que, mesmo para núcleos reconhecidamente deformados como o  $^{27}\text{Al}$  e o  $^{28}\text{Si}$ , o valor sistemático de difusividade  $a_m = 0.56\text{ fm}$  fornece uma boa descrição das distribuições angulares experimentais de espalhamento elástico, indicando que os valores propostos podem não ser necessários na faixa de energia considerada. Esta análise contribui para a compreensão dos efeitos estruturais nos potenciais nucleares e fornece uma contribuição para o uso consistente do SPP em reações com núcleos deformados.

**Palavras-chave:** Reações nucleares, canais acoplados, seção de choque elástica, difusividade, densidade de matéria.

# Abstract

In this work, we investigate the effects of the nuclear matter density diffuseness of the  $^{27}\text{Al}$  and  $^{28}\text{Si}$  nuclei on the description of heavy-ion induced nuclear reactions, focusing on elastic scattering angular distributions. A recent study proposed nuclear matter diffuseness values of  $a_m = 0.65\text{ fm}$  and  $a_m = 0.62\text{ fm}$ , tested for both nuclei based on the two-parameter Fermi distribution. These values exceed the systematic value  $a_m = 0.56\text{ fm}$ , commonly adopted in the São Paulo Potential (SPP), with  $0.62\text{ fm}$  being identified in that study as providing the best description of the experimental data. To assess the validity of these proposed values, we performed coupled-channel (CC) calculations for the systems  $^9\text{Be}+^{28}\text{Si}$ ,  $^{14}\text{N}+^{28}\text{Si}$ ,  $^{13}\text{C}+^{28}\text{Si}$ ,  $^9\text{Be}+^{27}\text{Al}$ ,  $^{14}\text{N}+^{27}\text{Al}$ , and  $^{28}\text{Si}+^{27}\text{Al}$  at incident energies approximately 2–3 times above the Coulomb barrier. The analyses were carried out using the FRESKO code, employing both the SPP and the Woods–Saxon (WS) potential for the imaginary part of the optical potentials. The results show that, even for well-known deformed nuclei such as  $^{27}\text{Al}$  and  $^{28}\text{Si}$ , the systematic diffuseness value  $a_m = 0.56\text{ fm}$  provides a good description of the experimental elastic scattering angular distributions. This suggests that the proposed diffuseness values may not be necessary within the energy range considered. This analysis contributes to understanding structural effects in nuclear potentials and supports the consistent application of the SPP in reactions involving deformed nuclei.

**Keywords:** nuclear reactions, coupled channels, elastic cross section, diffuseness, matter density.



# Lista de Figuras

1	Potencial de Woods–Saxon. Adaptado de [23]. . . . .	18
2	Relação entre degenerescência e acoplamento spin–órbita no modelo de camadas. Adaptado de [26]. . . . .	19
3	Potenciais utilizados no modelo de camadas. Adaptado de [26]. . . . .	20
4	Modos vibracionais. [26] . . . . .	21
5	Banda vibracional do núcleo de $^{112}\text{Cd}$ [28]. À direita se encontram os valores do spin e paridade dos estados e à esquerda suas energias em keV. .	24
6	Banda rotacional do $^{20}\text{Ne}$ [28]. À direita, os valores de spin e paridade dos estados; à esquerda, suas energias em keV. . . . .	28
7	Onda incidente e onda espalhada no espalhamento quântico. Adaptado de [29] . . . . .	30
8	Diagrama ilustrando a interação entre um núcleon do alvo e um núcleon do projétil, com indicação das coordenadas relativas utilizadas na convolução [39]. . . . .	52
9	Esquema de níveis dos acoplamentos nucleares incluídos nos cálculos, destacando os estados com maior influência nas distribuições elásticas. . . . .	54
10	Efeitos das variações do NMDD na barreira Coulomb utilizando o SPP. . .	55
11	Densidades de matéria nuclear para diferentes valores do NMDD. . . . .	56
12	Sistema $^9\text{Be} + ^{28}\text{Si}$ a 14 MeV . . . . .	58
13	Sistema $^9\text{Be} + ^{28}\text{Si}$ a 26 MeV . . . . .	58
14	Sistema $^{14}\text{N} + ^{28}\text{Si}$ a 53.40 MeV . . . . .	59
15	Sistema $^{13}\text{C} + ^{28}\text{Si}$ a 25 MeV . . . . .	60
16	Sistema $^{13}\text{C} + ^{28}\text{Si}$ a 30 MeV . . . . .	61
17	Sistema $^{13}\text{C} + ^{28}\text{Si}$ a 34 MeV . . . . .	61
18	Sistema $^9\text{Be} + ^{27}\text{Al}$ a 22 MeV . . . . .	62
19	Sistema $^9\text{Be} + ^{27}\text{Al}$ a 25 MeV . . . . .	63
20	Sistema $^{14}\text{N} + ^{27}\text{Al}$ . . . . .	64
21	Sistema $^{28}\text{Si} + ^{27}\text{Al}$ . . . . .	67

# Lista de Tabelas

1	Potenciais comumente usados no modelo de camadas. . . . .	17
2	Estados com um, dois e três fônons e suas energias para $\lambda = 2$ . Adaptado de [27] . . . . .	25
3	Parâmetros do potencial Woods-Saxon imaginário para os sistemas com $^{28}\text{Si}$ como alvo . . . . .	57
4	Parâmetros dos potenciais imaginários utilizados nos sistemas com $^{27}\text{Al}$ como alvo. . . . .	62
5	Parâmetros do potencial WS para o sistema $^{28}\text{Si} + ^{27}\text{Al}$ nas diferentes energias estudadas. . . . .	65

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Formalismo Teórico</b>	<b>15</b>
2.1	Reações Nucleares . . . . .	15
2.2	Modelos Nucleares . . . . .	16
2.2.1	Modelo de Camadas . . . . .	16
2.2.2	Modelos Coletivos . . . . .	18
2.2.2.1	Modelo Vibracional . . . . .	19
2.2.2.2	Modelo Rotacional . . . . .	25
2.3	Formalismo do Espalhamento . . . . .	29
2.3.1	Seção de Choque . . . . .	29
2.3.2	Descrição Quântica do Espalhamento . . . . .	29
2.3.3	Equação de Lippmann-Schwinger . . . . .	35
2.3.4	Descrição Quântica do Espalhamento Inelástico . . . . .	39
2.3.5	Teoria de Feshbach e Brueckner . . . . .	42
2.4	Potenciais em Reações Nucleares . . . . .	46
2.4.1	Potencial coulombiano . . . . .	46
2.4.1.1	Solução do Potencial coulombiano . . . . .	46
	Região interna ( $r \leq R_C$ ) . . . . .	47
	Região externa ( $r > R_C$ ) . . . . .	47
2.4.2	Potencial Nuclear . . . . .	47
2.4.2.1	Modelo Óptico na mecânica Quântica . . . . .	48
2.4.2.2	Potencial de Woods–Saxon . . . . .	50
2.4.2.3	Potencial de São Paulo . . . . .	50
<b>3</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	<b>53</b>
3.0.1	Efeitos das variações do NMDD na barreira coulombiana . . . . .	54
3.0.2	Resultados para o alvo $^{28}\text{Si}$ . . . . .	56
3.0.3	Resultados para o $^{27}\text{Al}$ . . . . .	62
3.0.4	Sistema $^{28}\text{Si} + ^{27}\text{Al}$ . . . . .	64

---

<b>4</b>	<b>Conclusões</b>	<b>68</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>69</b>
	<b>Apêndice A - Código Fortran do programa elemento</b>	<b>74</b>

# 1 Introdução

As reações nucleares induzidas por íons pesados desempenham um papel fundamental na investigação das propriedades da matéria nuclear e dos mecanismos que regem as interações entre núcleos. A compreensão detalhada dessas reações é essencial tanto para o avanço da física nuclear fundamental quanto para aplicações em áreas como astrofísica nuclear, desenvolvimento de reatores nucleares e produção de radioisótopos. Um dos aspectos centrais na modelagem teórica dessas reações é a escolha do potencial nuclear empregado na formulação do potencial óptico, que tem como objetivo descrever, de forma efetiva, a interação entre os núcleos da colisão.

A seleção de um potencial nuclear adequado é crucial, uma vez que esse potencial influencia diretamente as previsões teóricas dos observáveis experimentais, como as distribuições angulares de espalhamento elástico e inelástico, seções de choque totais e parciais, entre outros. Idealmente, um bom modelo de potencial deve ser capaz de descrever de forma consistente uma ampla gama de sistemas e energias, minimizando a necessidade de ajustes empíricos.

Nesse contexto, o SPP tem se destacado como uma ferramenta robusta para o estudo de reações nucleares [1, 2, 3]. Esse potencial é construído a partir do formalismo de dupla convolução (*double-folding*), utilizando densidades nucleares realísticas e levando em consideração correções dinâmicas de não-localidade, de forma a capturar aspectos quânticos relevantes da interação entre os núcleos. O SPP tem sido amplamente utilizado em estudos envolvendo núcleos estáveis e exóticos, com bons resultados na descrição de processos de espalhamento elástico, fusão e troca de carga.

Um dos sucessos do SPP está relacionado à sua capacidade de ser usado para estudar a dependência com a energia dos potenciais ópticos em cálculos de espalhamento por um potencial. Tal dependência é especialmente importante na vizinhança da barreira coulombiana, onde fenômenos como a anomalia de limiar de quebra (breakup threshold anomaly -BTA) são observados. A BTA se caracteriza pelo aumento da componente imaginária do potencial óptico à medida que a energia incidente se aproxima da barreira coulombiana, indicando uma maior probabilidade de quebra do projétil antes da colisão

propriamente dita. O SPP tem sido capaz de reproduzir esses efeitos em cálculos que consideram projéteis fortemente e fracamente ligados, incluindo isótopos instáveis [4, 5, 6, 7].

Além disso, o SPP foi aplicado com sucesso no estudo de processos de troca de dupla carga (double charge exchange – DCE), nos quais o projeto e o alvo trocam duas unidades de carga sem alteração de suas massas. Esses processos, de grande interesse atual, podem ocorrer por diferentes mecanismos, como a troca de mésons ou de múltiplos núcleons, sendo o entendimento detalhado desses mecanismos relevante para conexões com processos de dupla captura beta sem emissão de neutrinos, de interesse na física além do Modelo Padrão [8, 9, 10].

O potencial de São Paulo também tem sido utilizado em estudos de decaimento de clusters em núcleos radioativos, fornecendo informações importantes sobre propriedades como a incompressibilidade nuclear e sua dependência em relação à correlação entre núcleons (efeitos de pareamento), número de núcleons de valência e assimetria de isospin. Resultados recentes apontam para uma relação linear entre a incompressibilidade e essas propriedades nucleares, indicando a utilidade do SPP na exploração da estrutura de núcleos longe da linha de estabilidade [11].

Com o objetivo de fornecer uma descrição sistemática para diferentes sistemas, estudos anteriores propuseram o uso de fatores de normalização fixos para as partes real e imaginária do SPP, comumente adotando os valores  $N_r = 1.0$  e  $N_i = 0.78$ . Essa sistemática tem demonstrado sucesso na descrição do espalhamento elástico em uma ampla faixa de energias e massas [12]. No entanto, quando canais inelásticos relevantes são tratados explicitamente por meio de cálculos de CC, o valor de  $N_i$  tem que ser reduzido, tipicamente para valores como 0.6, a fim de evitar contagens duplas do fluxo absorvido pela parte imaginária do potencial [13]. Esta sistemática foi proposta para energias bem acima da barreira, onde os acoplamentos de canais específicos não são relevantes.

No estudo de reações de fusão completa, é comum empregar a fórmula de Wong, uma aproximação que trata a barreira coulombiana como uma barreira parabólica. Os parâmetros dessa parábola podem ser obtidos a partir do SPP, permitindo a extração de características da barreira para o canal de onda com momento angular zero (onda  $s$ ), o que simplifica o tratamento teórico da fusão [14].

Uma característica particularmente interessante do SPP é que ele pode ser considerado como um potencial sem parâmetros livres, uma vez que utiliza a fórmula de dois parâmetros de Fermi para determinar as densidades de matéria e carga com valores fixos para as difusividades da densidade de carga e matéria nuclear ( $a_{ch} = 0.53$  fm e  $a_m = 0.56$  fm, res-

pectivamente), obtidos a partir de estudos sistemáticos em núcleos esféricos e deformados [3, 15, 12, 16, 17, 18]. Para o raio das densidades, uma fórmula simples, dependendo das massas atômicas, foi reportada. Contudo, estudos recentes têm indicado que para certos núcleos, devido a efeitos estruturais específicos — como configurações de camada fechada ou deformações acentuadas no estado fundamental — pode haver desvios significativos em relação à sistemática original do SPP.

Por exemplo, para os isótopos fortemente ligados  $^{17}\text{O}$  e  $^{18}\text{O}$ , foi proposto o uso de um valor maior de difusividade da densidade de matéria,  $a_m = 0.62$  fm [19, 20]. Mais recentemente, foram propostos valores ainda maiores de  $a_m$  para os núcleos  $^{27}\text{Al}$  e  $^{28}\text{Si}$ , sugerindo que suas deformações no estado fundamental poderiam justificar esse ajuste [21, 22]. No entanto, tais propostas foram baseadas em dados de espalhamento elástico a energias significativamente superiores à barreira coulombiana, onde diversos canais não-elásticos com pequenas seções de choque estão abertos. Nessas condições, nem todos os canais podem ser tratados explicitamente, e o uso de um potencial de polarização dinâmico seria mais apropriado para descrever tais efeitos, em vez de ajustes nos parâmetros de densidade, que representam efeitos estáticos.

Diante disso, surge a questão: esses valores modificados de difusividade da densidade da matéria nuclear (NMDD) são de fato apropriados e aplicáveis também em regimes de energia mais baixos, onde os canais de alta energia estão fechados? Esta pergunta é essencial porquanto as densidades de matérias não podem depender da energia, por serem propriedades intrínsecas dos núcleos. Uma maneira de investigar essa hipótese é por meio de cálculos teóricos utilizando diferentes valores de  $a_m$  e comparando os resultados com dados experimentais em energias intermediárias, próximas a 2–3 vezes à da barreira coulombiana.

Neste trabalho, propomos uma análise sistemática comparando o valor padrão da NMDD com os valores propostos para os núcleos  $^{27}\text{Al}$  e  $^{28}\text{Si}$ . Para isso, realizamos cálculos de canais acoplados para diferentes sistemas de colisão envolvendo esses núcleos como alvo ou projétil:  $^{14}\text{N}+^{27}\text{Al}$ ,  $^{14}\text{N}+^{28}\text{Si}$ ,  $^9\text{Be}+^{27}\text{Al}$ ,  $^9\text{Be}+^{28}\text{Si}$ ,  $^{13}\text{C}+^{28}\text{Si}$ ,  $^{20}\text{Ne}+^{28}\text{Si}$  e  $^{28}\text{Si}+^{27}\text{Al}$ , todos em energias da ordem de 2–3 vezes a barreira coulombiana. O objetivo principal é verificar em que medida os diferentes valores de  $a_m$  são capazes de reproduzir as distribuições angulares experimentais e, assim, avaliar sua validade e aplicabilidade.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: o Capítulo 2 apresenta o referencial teórico e a metodologia utilizada nos cálculos. O Capítulo 3 discute os resultados obtidos, com especial atenção aos efeitos provocados pelas variações em  $a_m$ . Por fim, o Capítulo 4 apresenta as conclusões deste estudo e perspectivas para trabalhos futuros.

## 2 Formalismo Teórico

Neste capítulo, apresentamos os fundamentos teóricos necessários para a compreensão das reações nucleares estudadas neste trabalho, com ênfase na descrição quântica do espalhamento nuclear e na formulação dos potenciais envolvidos, especialmente o SPP.

### 2.1 Reações Nucleares

Em uma colisão entre dois núcleos, diversos processos podem ocorrer, dependendo da energia envolvida e das propriedades estruturais do sistema. As reações nucleares mais comuns incluem: espalhamento elástico, espalhamento inelástico, reações de transferência, fusão (completa ou incompleta) e processos de quebra (*breakup*), entre outros.

Neste trabalho, o foco está nos processos de espalhamento elástico e inelástico, que envolvem interações nas quais os núcleos mantêm sua identidade, embora possam sofrer excitação.

No **espalhamento elástico**, após a colisão, tanto o projétil quanto o alvo permanecem em seus estados fundamentais de energia. A reação pode ser representada genericamente como

$${}^{A_p}\text{P} + {}^{A_t}\text{T} \rightarrow {}^{A_p}\text{P} + {}^{A_t}\text{T}, \quad (2.1)$$

onde  ${}^{A_p}\text{P}$  representa o projétil de número de massa  $A_p$ , e  ${}^{A_t}\text{T}$  o núcleo alvo de número de massa  $A_t$ . Nesse caso, a energia cinética total do sistema se conserva, e nenhuma energia é transferida para graus de liberdade internos dos núcleos.

Já no **espalhamento inelástico**, parte da energia cinética é convertida em energia interna, promovendo a excitação de um ou de ambos os núcleos participantes. Esse tipo de processo pode ser descrito genericamente pelas seguintes reações:

$${}^{A_p}\text{P} + {}^{A_t}\text{T} \rightarrow {}^{A_p}\text{P}^* + {}^{A_t}\text{T}, \quad (2.2)$$

$${}^{A_p}\text{P} + {}^{A_t}\text{T} \rightarrow {}^{A_p}\text{P} + {}^{A_t}\text{T}^*, \quad (2.3)$$

$${}^{A_p}\text{P} + {}^{A_t}\text{T} \rightarrow {}^{A_p}\text{P}^* + {}^{A_t}\text{T}^*, \quad (2.4)$$



onde o símbolo \* indica que o núcleo está em um estado excitado.

Os estados excitados de baixa energia geralmente têm natureza coletiva. Modelos fenomenológicos descrevem esses estados como vibrações da superfície nuclear, no caso de núcleos aproximadamente esféricos, ou como rotações, quando se trata de núcleos com deformação permanente.

## 2.2 Modelos Nucleares

Para obter informações relevantes sobre o núcleo, como seus níveis de energia, spin e paridade, é necessário o uso de modelos que o representem. Isso porque o núcleo é um sistema complexo composto por prótons e nêutrons, cuja interação é regida pela força nuclear forte.

Existem vários modelos teóricos utilizados na física nuclear para descrever os núcleos atômicos. Dentre os mais usados, destacam-se o modelo de camadas e os modelos coletivos, como o oscilador harmônico e o rotor simétrico. A seguir, apresentamos uma breve descrição de cada um deles.

### 2.2.1 Modelo de Camadas

Neste modelo, os núcleons se movem de forma independente, sob a ação de um potencial médio autoconsistente, que tem origem na interação com os outros núcleons. O hamiltoniano que descreve esse sistema de muitos corpos é dada por

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{i,j=1}^A \sum_{i<j}^A v(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j), \quad (2.5)$$

onde  $T_i$  é a energia cinética do núcleon  $i$ , o segundo termo representa o potencial de interação entre os núcleons  $i$  e  $j$ , e  $A$  é o número total de núcleons no núcleo.

Esse hamiltoniano torna-se difícil de resolver à medida que aumentamos o número de núcleons. Para simplificá-la, é necessário fazer aproximações. Uma aproximação adequada é o uso do potencial médio,  $v(\mathbf{r}_i)$ , de modo que podemos somar e subtrair esse termo no hamiltoniano fundamental, conforme a Eq. 2.5

$$\mathcal{H} = \overbrace{\sum_{i=1}^A T_i + \sum_{i=1}^A v(\mathbf{r}_i)}^{H_{MF}} + \overbrace{\sum_{i,j=1}^A \sum_{i<j}^A v(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) - \sum_{i=1}^A v(\mathbf{r}_i)}^{V_{RES}}. \quad (2.6)$$

Assim, ficamos com um hamiltoniano que pode ser escrita como

$$\mathcal{H} = H_{MF} + V_{RES}, \quad (2.7)$$

onde o primeiro termo representa o movimento de um núcleon sob o potencial médio, e o segundo termo é a interação residual, bem menor que o primeiro, podendo ser tratada como uma perturbação. Para resolver a equação de Schrödinger utilizando esse hamiltoniano, é necessário empregar um potencial nuclear adequado. Alguns desses potenciais estão apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Potenciais comumente usados no modelo de camadas.

Potencial	Forma de $V(r)$	Níveis de energia	Soluções
Oscilador harmônico	$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2}Cr^2$	$E_{nl} = \hbar\omega (2n + l - \frac{1}{2})$	Polinômios de Hermite (1D), harmônicos esféricos (3D)
Poço quadrado infinito	$V(r) = \begin{cases} 0, & r < R \\ \infty, & r > R \end{cases}$	$E = \frac{\hbar^2}{2\mu R^2} \alpha^2$	Funções de Bessel esféricas $j_l(kr)$ , com $\alpha$ sendo o $n$ -ésimo zero

As aproximações apresentadas na Tabela 1 são capazes de reproduzir os números mágicos das camadas mais menos energéticas. Entretanto, um potencial mais realista e com descrição mais precisa será apresentado a seguir, conhecido como potencial de Woods–Saxon.

Matematicamente, ele pode ser expresso como

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}. \quad (2.8)$$

A forma do potencial é ilustrada na Fig. 1.

Esse potencial depende explicitamente de três parâmetros:

1. Raio nuclear ( $R = r_0 A^{1/3}$ ): representa o tamanho do núcleo.
2. Difusividade ( $a$ ): determina o grau de suavidade da borda do núcleo.

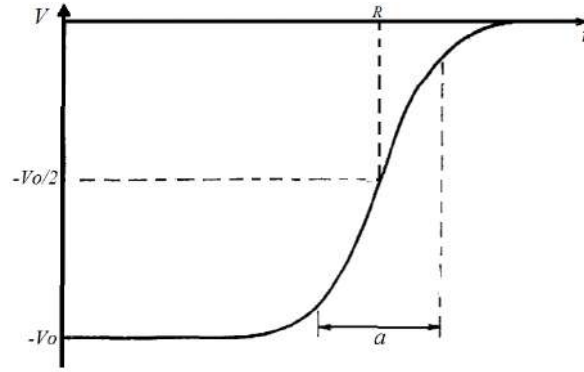


Figura 1: Potencial de Woods-Saxon. Adaptado de [23].

3. Profundidade ( $V_0$ ): está relacionada à energia média de ligação dos núcleons.

Ainda que o potencial de Woods-Saxon apresentado acima apresente um bom desempenho, ele não é capaz de explicar completamente os números mágicos observados. Por isso, [24, 25] propuseram a inclusão da interação spin-órbita, tal que

$$V_{SL} = f(r) \vec{l} \cdot \vec{s}, \quad (2.9)$$

onde  $\vec{l}$  é o momento angular orbital e  $\vec{s}$  é o spin do núcleon.

Esse termo provoca a quebra da degenerescência dos níveis com o mesmo  $l$ , introduzindo o momento angular de partícula única (*single-particle*)

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s} = l \pm \frac{1}{2}. \quad (2.10)$$

A quebra de degenerescência causada por esse termo adicional pode ser vista na Fig. 2, evidenciando o surgimento correto dos números mágicos.

Em síntese, o modelo de camadas, com ajustes apropriados, é uma ferramenta poderosa para descrever a estrutura nuclear, sendo capaz de prever corretamente os números mágicos e diversas propriedades dos núcleos. Como pode ser visto na Fig. 3, a escolha do potencial é de extrema importância para a descrição do núcleo.

### 2.2.2 Modelos Coletivos

Alguns aspectos da estrutura nuclear exigem uma descrição em termos de movimentos coletivos do núcleo. Esses aspectos estão relacionados às diferentes deformações que a superfície do núcleo pode sofrer: dinâmicas através de vibrações na superfície nuclear e estáticas que levam a rotações do núcleo.

No entanto, diferentemente das excitações de partícula única expostas na seção anterior, as vibrações e rotações estão relacionadas ao deslocamento coordenado e cooperativo

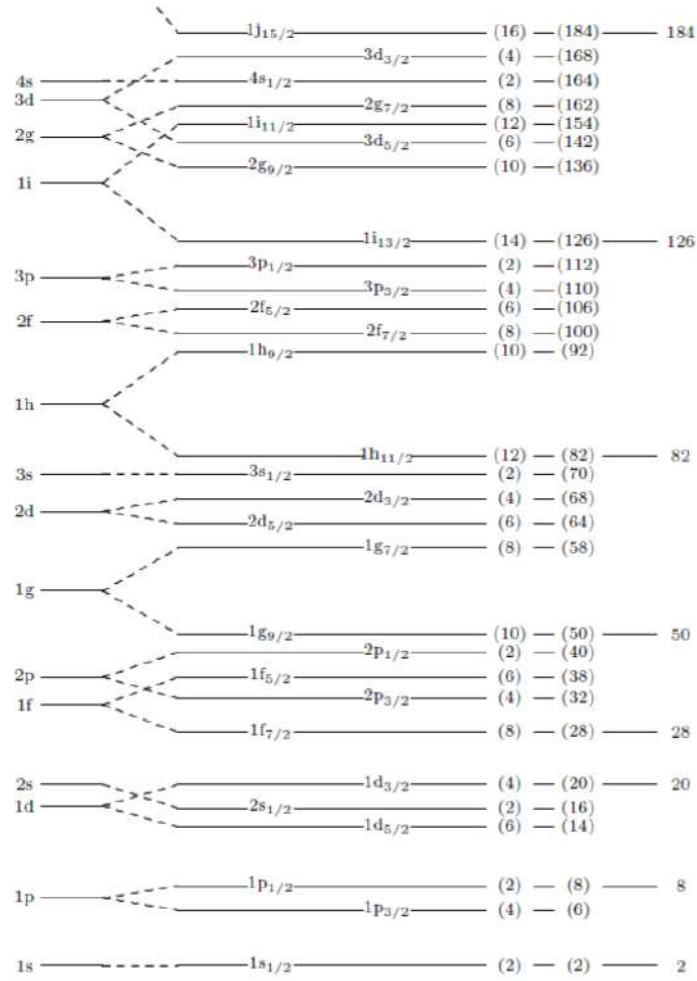


Figura 2: Relação entre degenerescência e acoplamento spin-órbita no modelo de camadas. Adaptado de [26].

de múltiplos núcleons, sendo denominadas movimentos coletivos do núcleo; isto é, o núcleo é afetado como um todo, e não apenas alguns de seus núcleons.

### 2.2.2.1 Modelo Vibracional

Núcleos esféricos podem apresentar pequenas oscilações em sua superfície em torno de um ponto de equilíbrio, as quais são definidas como vibrações. Dessa forma, pontos dessa superfície podem ser caracterizados por uma coordenada radial  $R(\theta, \phi, t)$  que permite descrever de maneira completa a forma do núcleo, fazendo uma expansão em multipolos e podendo ser expressa como [27]

$$R(\theta, \phi, t) = R_0 \left[ 1 + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{+\lambda} \alpha_{\lambda\mu}(t) Y_{\lambda}^{\mu}(\theta, \phi) \right], \quad (2.11)$$

onde  $R_0$  corresponde ao raio do núcleo em sua configuração de equilíbrio,  $\alpha_{\lambda\mu}$  é a amplitude das oscilações, e os  $Y_{\lambda}^{\mu}(\theta, \phi)$  são os harmônicos esféricos, em que  $\lambda$  define o modo de

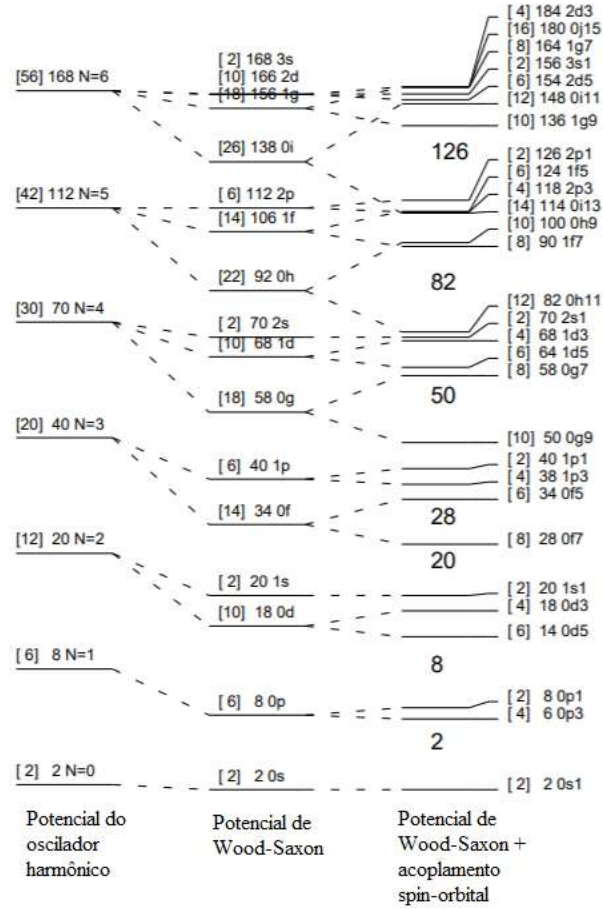


Figura 3: Potenciais utilizados no modelo de camadas. Adaptado de [26].

vibração e  $\mu$  indica a projeção de  $\lambda$  no eixo  $Z$ . A Fig. 4 ilustra os diferentes modos de vibração para cada valor de  $\lambda$ . Para  $\lambda = 0$ , há quebra da conservação de volume, mas como o núcleo é geralmente tratado como incompressível e os estados excitados correspondentes a esse modo de "respiração" têm energias muito altas (30–50 MeV), ele é desprezado. Já o termo com  $\lambda = 1$  está associado ao movimento do centro de massa quando o valor de  $\lambda$  é pequeno, que não envolve as forças nucleares internas [26]. Assim, os valores relevantes começam em  $\lambda = 2$ , o mais comum, correspondente às oscilações de quadrupolo, em que o núcleo adquire uma forma elipsoidal mantendo densidade e volume constantes. Para  $\lambda = 3$ , têm-se as deformações de óctuplo.

As variáveis coletivas  $\alpha_{\lambda\mu}$ , que descrevem essas oscilações, são componentes de um tensor irredutível de posto  $\lambda$ . A partir da invariância da superfície nuclear sob rotações, elas transformam como

$$\alpha'_{\lambda\mu} = \sum_{\nu} D_{\mu\nu}^{\lambda}(\theta_j) \alpha_{\lambda\nu}, \quad (2.12)$$

onde  $\theta_j$  são os ângulos de Euler e  $D_{\mu\nu}^{\lambda}(\theta_j)$  são as matrizes de Wigner.

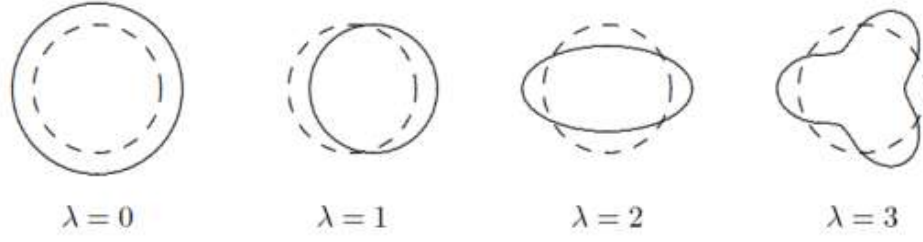


Figura 4: Modos vibracionais. [26]

Além disso, essas variáveis obedecem às seguintes propriedades de simetria

$$\hat{T}\alpha_{\lambda\mu}\hat{T}^{-1} = (-1)^\mu\alpha_{\lambda-\mu}, \quad (\text{reversão temporal}) \quad (2.13)$$

$$\hat{P}\alpha_{\lambda\mu}\hat{P}^{-1} = (-1)^\lambda\alpha_{\lambda\mu}, \quad (\text{paridade}) \quad (2.14)$$

O momento conjugado,  $\hat{\pi}^{[\lambda]}$ , associado às variáveis coletivas também transforma como um tensor irredutível de posto  $\lambda$ , e suas propriedades são determinadas por simetrias como rotação, paridade e reversão temporal. A seguir, apresentamos essas propriedades de forma explícita

$$\hat{\pi}_{\lambda\mu} = \sum_{\nu} D_{\mu\nu}^{\lambda*}(\theta_j)\hat{\pi}_{\lambda\nu}, \quad (2.15)$$

$$\hat{P}\hat{\pi}_{\lambda\mu}\hat{P}^{-1} = (-1)^\lambda\hat{\pi}_{\lambda\mu}, \quad (\text{paridade}) \quad (2.16)$$

$$\hat{\pi}_{\lambda\mu}^* = -(-1)^\mu\hat{\pi}_{\lambda-\mu}, \quad (\text{reversão temporal}) \quad (2.17)$$

Essas relações serão fundamentais para a construção do hamiltoniano vibracional em termos das variáveis coletivas e seus momentos conjugados, respeitando as simetrias fundamentais do sistema.

O hamiltoniano pode ser escrito como função do momento conjugado  $\hat{\pi}^{[\lambda]}$  e da coordenada coletiva  $\hat{\alpha}^{[\lambda]}$

$$H(\hat{\pi}^{[\lambda]}, \hat{\alpha}^{[\lambda]}) = T(\hat{\pi}^{[\lambda]}, \hat{\alpha}^{[\lambda]}) + V(\hat{\alpha}^{[\lambda]}), \quad (2.18)$$

onde  $T$  representa a energia cinética e  $V$  a energia potencial.

Podemos expandir a energia cinética como

$$T(\hat{\pi}^{[\lambda]}, \hat{\alpha}^{[\lambda]}) = \frac{1}{2B_\lambda}[\hat{\pi}^{[\lambda]} \times \hat{\pi}^{[\lambda]}]^{[0]} + B_{\lambda,1}[[\hat{\pi}^{[\lambda]} \times \hat{\alpha}^{[\lambda]}]^{[\lambda]} \times \hat{\pi}^{[\lambda]}]^{[0]} + \dots \quad (2.19)$$

E a energia potencial como

$$V(\hat{\alpha}^{[\lambda]}) = \frac{C_\lambda}{2}[\hat{\alpha}^{[\lambda]} \times \hat{\alpha}^{[\lambda]}]^{[0]} + C_{\lambda,1}[[\hat{\alpha}^{[\lambda]} \times \hat{\alpha}^{[\lambda]}]^{[\lambda]} \times \hat{\alpha}^{[\lambda]}]^{[0]} + \dots \quad (2.20)$$

Mantemos apenas os termos dominantes do hamiltoniano, que podem ser escritos como

$$H(\hat{\pi}^{[\lambda]}, \hat{\alpha}^{[\lambda]}) = \frac{\sqrt{2\lambda+1}}{2B_\lambda} [\hat{\pi}^{[\lambda]} \times \hat{\pi}^{[\lambda]}]^{[0]} + \frac{\sqrt{2\lambda+1}}{2} C_\lambda [\hat{\alpha}^{[\lambda]} \times \hat{\alpha}^{[\lambda]}]^{[0]}, \quad (2.21)$$

aqui

- $B_\lambda$  é o **parâmetro de inércia**.
- $C_\lambda$  é o **parâmetro de rigidez**.

Ao especificarmos este hamiltoniano para vibrações harmônicas, as variáveis momento e posição devem aparecer de forma quadrática. Assim, podemos escrevê-lo de maneira mais simples como:

$$H = \frac{1}{B_\lambda} [\hat{\pi}_{\lambda\mu} \hat{\pi}_{\lambda\mu}] + \frac{C_\lambda}{2} [\hat{\alpha}_{\lambda\mu} \hat{\alpha}_{\lambda\mu}]. \quad (2.22)$$

O hamiltoniano para os modos coletivos  $\lambda$  pode ser escrita, considerando a invariância por rotações, como

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} \left( B_\lambda^{-1} (-1)^\mu \hat{\pi}_{\lambda\mu} \hat{\pi}_{\lambda-\mu} + C_\lambda (-1)^\mu \hat{\alpha}_{\lambda\mu} \hat{\alpha}_{\lambda-\mu} \right). \quad (2.23)$$

Finalmente, o hamiltoniano pode ser escrita de maneira compacta como

$$H_\lambda = -\frac{1}{2} \sum_\lambda \left\{ -B_\lambda^{-1} [\hat{\pi}^{[\lambda]} \otimes \hat{\pi}^{[\lambda]}]^0 + C_\lambda [\hat{\alpha}^{[\lambda]} \otimes \hat{\alpha}^{[\lambda]}]^0 \right\}, \quad (2.24)$$

onde:

$$[\hat{\pi}^{[\lambda]} \otimes \hat{\pi}^{[\lambda]}]^0 = \sum_\mu (-1)^\mu \hat{\pi}_{\lambda\mu} \hat{\pi}_{\lambda-\mu}. \quad (2.25)$$

e

$$[\hat{\alpha}^{[\lambda]} \otimes \hat{\alpha}^{[\lambda]}]^0 = \sum_\mu (-1)^\mu \hat{\alpha}_{\lambda\mu} \hat{\alpha}_{\lambda-\mu}. \quad (2.26)$$

Substituindo explicitamente e reorganizando os fatores

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} \left( -B_\lambda^{-1} \hat{\pi}_{\lambda\mu}^* \hat{\pi}_{\lambda\mu} + C_\lambda \hat{\alpha}_{\lambda\mu}^* \hat{\alpha}_{\lambda\mu} \right). \quad (2.27)$$

Podemos escrever o hamiltoniano em termos dos operadores de aniquilação e criação de *fônons*, tal que

$$\hat{\alpha}_{\lambda\mu} \longrightarrow \alpha_{\lambda\mu} = \sqrt{\frac{\hbar}{2B_\lambda\omega_\lambda}} \left[ \beta_{\lambda\mu}^\dagger + (-1)^\mu \beta_{\lambda-\mu} \right].$$

$$\hat{\alpha}_{\lambda\mu}^* \longrightarrow \alpha_{\lambda\mu} = \sqrt{\frac{\hbar}{2B_\lambda\omega_\lambda}} \left[ (-1)^\mu \beta_{\lambda-\mu}^\dagger + \beta_{\lambda\mu} \right].$$

e utilizando propriedades conhecidas

$$\hat{\beta}_{\lambda\mu}^{\dagger*} = (-1)^\mu \hat{\beta}_{\lambda-\mu}^\dagger. \quad (2.28)$$

$$\hat{\beta}_{\lambda\mu}^* = (-1)^\mu \hat{\beta}_{\lambda-\mu}. \quad (2.29)$$

$$\hat{\beta}_{\lambda\mu} \hat{\beta}_{\lambda'\mu'}^\dagger - \hat{\beta}_{\lambda'\mu'}^\dagger \hat{\beta}_{\lambda\mu} = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'}. \quad (2.30)$$

$$\omega_\lambda = \sqrt{\frac{C_\lambda}{B_\lambda}}. \quad (2.31)$$

podemos fazer manipulações e chegar na hamiltoniano mais geral em termo desses operadores

$$H_{OH} = \sum_{\lambda\mu} \hbar\omega_\lambda \left[ \hat{\beta}_{\lambda\mu}^\dagger \hat{\beta}_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \right]. \quad (2.32)$$

Agora, introduzindo o operador de número de fônons

$$\hat{n}_{\lambda\mu} = \hat{\beta}_{\lambda\mu}^\dagger \hat{\beta}_{\lambda\mu}. \quad (2.33)$$

Sabendo que

$$[\hat{n}_{\lambda\mu}, H] = 0, \quad (2.34)$$

então  $\hat{n}_{\lambda\mu}$  e  $H$  podem ser diagonalizados simultaneamente, isto é, eles compartilham os mesmos autovalores e autovetores.

Assim, nosso hamiltoniano  $H_{OH}$  pode ser escrita como

$$H_{OH} = \sum_{\lambda\mu} \hbar\omega_\lambda \left( \hat{n}_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \right), \quad (2.35)$$

com

$$\hat{n}_{\lambda\mu} |n\rangle = N |N\rangle. \quad (2.36)$$

Para um dado  $\lambda$ , com  $-\lambda \leq \mu \leq \lambda$ , temos os estados

$$|N\rangle = |N_{-\lambda} \dots N_\lambda\rangle, \quad \hat{n}_{\lambda\mu} |N_{-\lambda} \dots N_\lambda\rangle = N_{\lambda\mu} |N_{-\lambda} \dots N_\lambda\rangle.$$



Assim, definimos o número total de fônons

$$\hat{N}|N_{-\lambda} \dots N_{\lambda}\rangle = \left( \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \hat{n}_{\lambda\mu} \right) |N_{-\lambda} \dots N_{\lambda}\rangle = N|N\rangle.$$

Dessa forma, o hamiltoniano para o modo vibracional pode ser escrita como

$$H_{\text{OH}} = \sum_{\lambda} \hbar\omega_{\lambda} \left( \hat{N} + \frac{2\lambda + 1}{2} \right).$$

Assim conseguimos construir as autofunções da nosso hamiltoniano, como pode ser visto na Tabela 2 para  $\lambda=2$ . A formação desses níveis por meio dos *fônons* dá origem ao que se denomina banda vibracional. Como mencionado antes, para  $\lambda = 2$  — o caso mais relevante para esse modelo —, uma característica interessante do espectro energético é o surgimento de um tripleto de estados ( $0^+$ ,  $2^+$  e  $4^+$ ), aproximadamente degenerados entre si e com energia correspondente ao dobro da do primeiro estado excitado. A Fig. 5 apresenta um exemplo de banda vibracional, no qual é possível identificar esse tripleto.

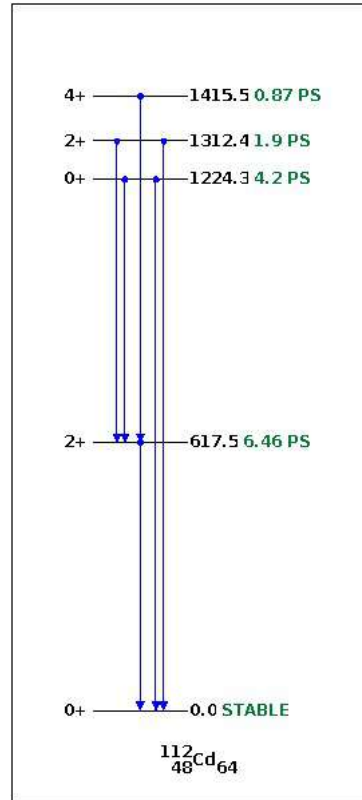


Figura 5: Banda vibracional do núcleo de  $^{112}\text{Cd}$  [28]. À direita se encontram os valores do spin e paridade dos estados e à esquerda suas energias em keV.

Por fim, a forma como descrevemos o hamiltoniano do núcleo muda quando ele apresenta uma deformação permanente no estado fundamental, ou seja, quando não possui simetria esférica, como será mostrado a seguir.

Tabela 2: Estados com um, dois e três fônons e suas energias para  $\lambda = 2$ . Adaptado de [27]

Número de fônons $N$	Função de onda	Momento angular	Energia
0	$ 0,00\rangle =  0\rangle$	0	$\frac{5}{2}\hbar\omega_\lambda$
1	$ 1,2M\rangle = \hat{\beta}_{2M}^\dagger 0\rangle$	2	$(1 + \frac{5}{2})\hbar\omega_2$
2	$ 2,1M\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{2} \sum_{m_1,m_2} (22f m_1m_2M)\hat{\beta}_{2m_1}^\dagger\hat{\beta}_{2m_2}^\dagger 0\rangle$	0,2,4	$(2 + \frac{5}{2})\hbar\omega_2$
3	$ 3,6M\rangle = \frac{1}{3}\sqrt{3} \sum_{m_1,m_2} (246 m_1m_2M)\hat{\beta}_{2m_1}^\dagger 2,4m_2\rangle$	6	$(3 + \frac{5}{2})\hbar\omega_2$
3	$ 3,4M\rangle = \frac{1}{3}\sqrt{3}\left\{\sqrt{\frac{11}{21}} \sum_{m_1,m_2} (224 m_1m_2M)\hat{\beta}_{2m_1}^\dagger 2,2m_2\rangle + \sqrt{\frac{10}{21}} \sum_{m_1,m_2} (244 m_1m_2M)\hat{\beta}_{2m_1}^\dagger 2,4m_2\rangle\right\}$	4	$(3 + \frac{5}{2})\hbar\omega_2$
3	$ 3,3M\rangle = \frac{1}{3}\sqrt{3}\left\{\sqrt{\frac{5}{7}} \sum_{m_1,m_2} (223 m_1m_2M)\hat{\beta}_{2m_1}^\dagger 2,2m_2\rangle - \sqrt{\frac{2}{7}} \sum_{m_1,m_2} (243 m_1m_2M)\hat{\beta}_{2m_1}^\dagger 2,4m_2\rangle\right\}$	3	$(3 + \frac{5}{2})\hbar\omega_2$
3	$ 3,2M\rangle = \frac{1}{3}\sqrt{3}\left\{\sqrt{\frac{49}{105}}(202 M0M)\hat{\beta}_{2M}^\dagger 2,00\rangle + \sqrt{\frac{20}{105}} \sum_{m_1,m_2} (222 m_1m_2M)\hat{\beta}_{2m_1}^\dagger 2,2m_2\rangle + \sqrt{\frac{36}{105}} \sum_{m_1,m_2} (242 m_1m_2M)\hat{\beta}_{2m_1}^\dagger 2,4m_2\rangle\right\}$	2	$(3 + \frac{5}{2})\hbar\omega_2$
3	$ 3,00\rangle = \frac{1}{3}\sqrt{3} \sum_{m_1,m_2} (220 m_1m_20)\hat{\beta}_{2m_1}^\dagger 2,2m_2\rangle$	0	$(3 + \frac{5}{2})\hbar\omega_2$

### 2.2.2.2 Modelo Rotacional

Para núcleos com deformação permanente, a forma elipsoidal é especificada por coordenadas intrínsecas que determinam a magnitude e a assimetria da deformação, junto com os três ângulos de Euler  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ . Essas coordenadas são mais adequadas para descrever núcleos com deformação estática [27]

Para estudar o comportamento nuclear, consideram-se dois sistemas de referência: o sistema intrínseco  $(X', Y', Z')$ , que é fixo no núcleo e alinhado com seus eixos de simetria, e o sistema do laboratório  $(X, Y, Z)$ , que é fixo no espaço. O fato da superfície nuclear ser invariante na mudança desse referencial faz com que as amplitudes dos dois referenciais estejam relacionadas através de matrizes de Wigner.

Assim, as grandezas invariantes sob rotações devem ser simultaneamente autoestados (ou possuir autovalores bem definidos) nos dois sistemas e comutar com os operadores  $\hat{I}^2$ ,  $\hat{I}_Z$  e  $\hat{I}_{Z'}$ .

No sistema intrínseco, a superfície nuclear pode ser expandida como

$$R(\theta', \phi') = R_0 \left[ 1 + \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\theta', \phi') \right], \quad (2.37)$$

onde  $(\theta', \phi')$  são as coordenadas no sistema ligado ao núcleo,  $\alpha_{\lambda\mu}$  são variáveis coletivas no sistema do laboratório.

As variáveis referentes ao referencial do laboratório estão relacionadas às variáveis no sistema intrínseco  $a_{\lambda\nu}(t)$  pelas matrizes de Wigner

$$\alpha_{\lambda\mu}(t) = \sum_{\nu=-\lambda}^{\lambda} D_{\mu\nu}^{\lambda*}(\Omega(t)) a_{\lambda\nu}(t), \quad (2.38)$$

em que  $\Omega(t)$  são os ângulos de Euler que determinam a orientação do núcleo.

Derivando no tempo

$$\dot{\alpha}_{\lambda\mu} = \sum_{\nu} \dot{a}_{\lambda\nu} D_{\mu\nu}^{\lambda*} + \sum_{\nu} a_{\lambda\nu} \dot{D}_{\mu\nu}^{\lambda*}. \quad (2.39)$$

A energia cinética é dada por

$$T = \frac{1}{2} B_{\lambda} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \dot{\alpha}_{\lambda\mu}^* \dot{\alpha}_{\lambda\mu}. \quad (2.40)$$

Substituindo a derivada, a energia cinética se decompõe em

$$T = T_{\beta} + T_{\gamma} + T_{\text{rot}} + T_{\text{acopl}}, \quad (2.41)$$

onde os termos representam, respectivamente, vibrações nas coordenadas generalizadas, rotações do núcleo em torno de seus eixos e termos de acoplamento.

De forma explícita

$$T_{\text{vib}} = \frac{1}{2} B_{\lambda} \sum_{\nu} \dot{a}_{\lambda\nu}^* \dot{a}_{\lambda\nu}, \quad (2.42)$$

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_k \mathcal{J}_k^{(\lambda)} \omega_k^2, \quad (2.43)$$

onde os momentos de inércia em torno dos eixos principais são

$$\mathcal{J}_k^{(\lambda)} = B_{\lambda} \sum_{\nu\sigma} (-1)^{\sigma} \langle \lambda\nu | \hat{L}_k^2 | \lambda, -\sigma \rangle a_{\lambda\nu} a_{\lambda\sigma}. \quad (2.44)$$

O potencial elástico associado às deformações é

$$V = \frac{1}{2} C_{\lambda} \sum_{\nu} |a_{\lambda\nu}|^2. \quad (2.45)$$

O hamiltoniano total do sistema pode então ser escrita como

$$H = T_{\beta} + T_{\gamma} + T_{\text{rot}} + V. \quad (2.46)$$

A autofunção do sistema pode ser escrita como um produto separável

$$\Psi(\beta, \gamma, \Omega) = f_{\nu}(\beta) g_k(\gamma) |IMK\rangle, \quad (2.47)$$

onde:

- $f_{\nu}(\beta)$  descreve as vibrações em  $\beta$ ;
- $g_k(\gamma)$  descreve as vibrações em  $\gamma$ ;
- $|IMK\rangle$  são os estados rotacionais.

Os estados rotacionais têm a forma

$$|IMK\rangle = \sqrt{\frac{2I+1}{16\pi^2(1+\delta_{K0})}} [D_{MK}^I(\Omega) + (-1)^I D_{M,-K}^I(\Omega)], \quad (2.48)$$

onde  $I$  é o momento angular total,  $M$  é a projeção em  $Z$  do laboratório e  $K$  a projeção no eixo intrínseco.

No caso de um núcleo axial ( $K = 0$ ), e desprezando as vibrações ( $\beta = \text{constante}$ ), a energia rotacional assume a forma bem conhecida

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}} I(I+1), \quad (2.49)$$

com momentos de inércia iguais em dois eixos e nulo no eixo de simetria.

Mais geralmente, para um núcleo sem simetria axial, a energia rotacional é

$$E_{\text{rot}} = \sum_k \frac{\langle \hat{I}_k^2 \rangle}{2\mathcal{J}_k^{(\lambda)}}. \quad (2.50)$$

A energia dos níveis rotacionais pode ainda ser ajustada por termos de ordem superior

$$E(I) = AI(I+1) + BI^2(I+1)^2, \quad (2.51)$$

ou

$$E(I) = \frac{AI(I+1)}{1 + BI(I+1)}, \quad (2.52)$$

onde  $A$  e  $B$  são parâmetros ajustáveis que refletem variações no momento de inércia e efeitos de alinhamento de partículas.

As bandas rotacionais observadas apresentam características distintas dependendo da estrutura do núcleo e do valor de  $K$ , que corresponde à projeção do momento angular no eixo de simetria do sistema intrínseco. Essas bandas podem ser classificadas da seguinte forma [26]

1. Núcleos par-par: com número par de prótons e nêutrons, têm  $K = 0$ , já que não há contribuição da parte intrínseca para o momento angular. A energia é

$$E(I) = \frac{\hbar^2}{2\tau} I(I+1), \quad I = 0, 2, 4, \dots \quad (2.53)$$

2. Núcleos ímpares com  $K \neq \frac{1}{2}$ : o estado fundamental tem  $I = K$ , e a energia é

$$E(I) = \frac{\hbar^2}{2\tau} [I(I+1) - K(K+1)], \quad I = K, K+1, K+2, \dots \quad (2.54)$$

3. Núcleos ímpares com  $K = \frac{1}{2}$ : a função de onda contém simultaneamente os estados

$K$  e  $-K$ , e a energia é

$$E_{K=\frac{1}{2}}(I) = \frac{\hbar^2}{2\tau} \left[ I(I+1) - a(-1)^{I+\frac{1}{2}} \left( I + \frac{1}{2} \right) \right], \quad I = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \quad (2.55)$$

onde  $a$  é conhecido como parâmetro de desacoplamento.

Além dos níveis de energia, informações sobre a estrutura coletiva do núcleo podem ser extraídas da probabilidade de transição eletromagnética  $B(E\lambda)$ , definida como

$$B(E\lambda) = \left[ \frac{3Ze\beta_\lambda R_0^\lambda}{4\pi} \right]^2, \quad (2.56)$$

onde  $Z$  é a carga,  $\beta_\lambda$  o parâmetro de deformação e  $R_0 = rA^{1/3}$  o raio nuclear. Quanto maior for  $B(E\lambda)$ , maior será a deformação do núcleo. A Fig. 6 mostra um exemplo de banda rotacional observada experimentalmente.

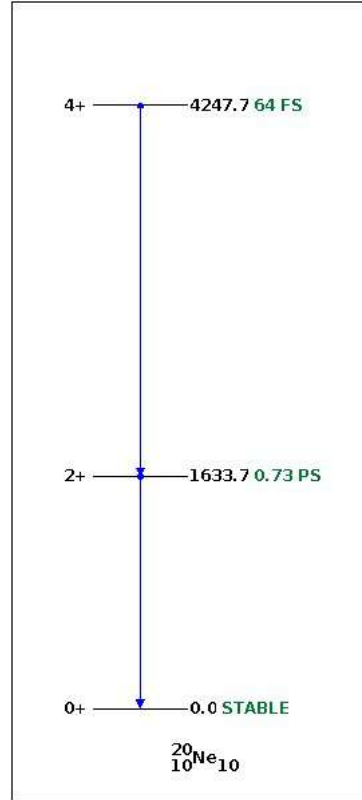


Figura 6: Banda rotacional do  $^{20}\text{Ne}$  [28]. À direita, os valores de spin e paridade dos estados; à esquerda, suas energias em keV.

## 2.3 Formalismo do Espalhamento

### 2.3.1 Seção de Choque

A seção de choque é uma grandeza central na descrição de reações nucleares, pois quantifica a probabilidade de ocorrência de um determinado processo de interação entre o projétil e o alvo. Ela é diretamente relacionada à intensidade do feixe espalhado e, por isso, constitui o elo entre teoria e experimento na análise de dados de espalhamento.

Neste trabalho, utilizamos principalmente a *seção de choque diferencial*, definida como a razão entre o número de partículas espalhadas por unidade de tempo e ângulo sólido, e o fluxo incidente

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\Phi} \frac{d^2N}{d\Omega dt}, \quad (2.57)$$

onde  $\Phi$  representa o fluxo de partículas incidentes. Essa grandeza permite extrair informações sobre a estrutura do núcleo e a natureza da interação nuclear.

Em experimentos de espalhamento elástico, é comum normalizar a seção de choque medida em relação à seção de choque prevista para o espalhamento puramente coulombiano, conhecido como espalhamento de Rutherford. A fórmula correspondente é

$$\frac{d\sigma_{\text{Ruth}}}{d\Omega} = \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}, \quad (2.58)$$

em que  $Z_1$  e  $Z_2$  são os números atômicos do projétil e do alvo,  $E$  é a energia no referencial do centro de massa, e  $\theta$  o ângulo de espalhamento.

A razão  $\frac{d\sigma}{d\sigma_{\text{Ruth}}}$  evidencia desvios em relação ao comportamento puramente coulombiano e, portanto, destaca os efeitos da interação nuclear. Esta normalização é amplamente adotada em análises experimentais e em comparações com cálculos teóricos.

Neste trabalho, as seções de choque diferenciais são obtidas a partir de cálculos de canais acoplados e confrontadas com os dados experimentais disponíveis. As distribuições angulares analisadas permitem avaliar a capacidade do modelo em reproduzir a física dos processos elásticos e inelásticos, bem como investigar os efeitos de variações na difusividade da densidade nuclear de matéria ( $a_m$ ).

### 2.3.2 Descrição Quântica do Espalhamento

Para descrever o espalhamento elástico no contexto quântico, considera-se a equação de Schrödinger para o movimento relativo do projétil em torno do alvo, assumindo que a interação é descrita por um potencial central e que os efeitos do spin são desprezados.

Nessa aproximação, a equação é dada por

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] \psi = 0, \quad (2.59)$$

em que  $\psi$  é a função de onda do sistema,  $m$  a massa reduzida,  $E$  a energia no referencial do centro de massa e  $V(r)$  o potencial central de interação, que depende apenas da distância entre as partículas.

Ao considerarmos um feixe incidente na direção  $z$ , podemos expressar a solução como uma combinação de uma onda plana incidente e uma onda esférica espalhada, como podemos ver na Fig. 7 e pode ser expressa como

$$\psi \sim e^{ikz} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta), \quad (2.60)$$

onde:  $k = (2mE)^{\frac{1}{2}}/\hbar$  e  $f(\theta)$  é a amplitude de espalhamento;

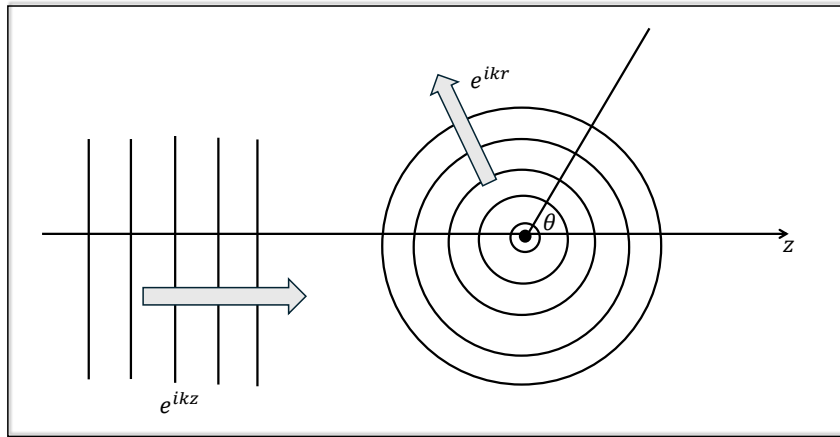


Figura 7: Onda incidente e onda espalhada no espalhamento quântico. Adaptado de [29]

Como a amplitude de espalhamento  $f(\theta)$  é uma grandeza central na descrição do processo, o problema fundamental consiste em calculá-la para um dado potencial  $V(r)$ . O módulo ao quadrado dessa amplitude está diretamente relacionado à seção de choque diferencial, conforme

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2. \quad (2.61)$$

Para resolver a equação de Schrödinger de forma conveniente, aproveita-se a simetria esférica do sistema e a natureza central do potencial para expandir a função de onda  $\psi$  como um produto de componentes radial e angular

$$\psi = \sum_l \frac{u_l(r)}{r} P_l(\cos \theta), \quad (2.62)$$

em que  $u_l(r)$  representa a parte radial e  $P_l(\cos \theta)$  são os polinômios de Legendre que

descrevem a dependência angular.

Substituindo  $\psi$  da Eq. 2.59 pela expansão da Eq. 2.62, a equação fica

$$\nabla^2 \left[ \sum_l \frac{u_l(r)}{r} P_l(\cos(\theta)) \right] + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] \left[ \sum_l \frac{u_l(r)}{r} P_l(\cos(\theta)) \right] = 0. \quad (2.63)$$

Multiplicando a Eq. 2.63 por  $P_{l'}$  e integrando sobre todos os ângulos

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\theta d\phi P_{l'}(\cos(\theta)) \nabla^2 \left[ \sum_l \frac{u_l(r)}{r} P_l(\cos(\theta)) \right] + \\ & \frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\theta d\phi P_{l'}(\cos(\theta)) [E - V(r)] \left[ \sum_l \frac{u_l(r)}{r} P_l(\cos(\theta)) \right] = 0. \end{aligned}$$

Obtém-se, assim, a equação radial

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left[ \frac{2m}{\hbar^2} \{E - V(r)\} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l = 0. \quad (2.64)$$

Para resolver a Eq. 2.64, consideramos inicialmente  $l = 0$  e desconsideramos a carga elétrica

$$\frac{d^2 u_0}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \{E - V(r)\} u_0 = 0. \quad (2.65)$$

Buscando a solução assintótica, sabe-se que o potencial nuclear, para grandes valores de  $r$ , decai rapidamente a zero. Assim, a equação a ser resolvida para  $l = 0$  e  $V(r) \rightarrow 0$  torna-se

$$\frac{d^2 u_0}{dr^2} + k^2 u_0 = 0. \quad (2.66)$$

A solução geral dessa equação é bem conhecida

$$u_0 \sim A \text{sen}(kr + \delta) \equiv \frac{A e^{-i\delta}}{2i} (e^{2i\delta} e^{ikr} - e^{-ikr}), \quad (2.67)$$

em que  $A$  é a constante de normalização e  $\delta$  é o *phase shift*.

A solução geral, como mostrado acima, pode ser interpretada como a soma de uma onda incidente *ingoing*( $\psi_{in}$ ) e uma onda *outgoing*( $\psi_{out}$ )

$$\psi = \psi_{in} + \psi_{out}. \quad (2.68)$$

Substituindo a variável  $u = r\psi$  para simplificar a resolução do problema, tem-se

$$u = r\{\psi_{in}(l=0) + \psi_{out}(l=0)\}, \quad (2.69)$$



Portanto

$$\psi_{in}(l=0) = e^{ikz}(l=0).$$

A onda incidente pode ser expandida em termos das funções de Bessel, resultando em

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos(\theta)). \quad (2.70)$$

Para  $l=0$

$$e^{ikz} = i^0 j_0(kr) P_0(\cos(\theta)).$$

Considerando as propriedades conhecidas dos polinômios de Legendre e da função de Bessel esférica [29], temos:

$$P_0(\cos \theta) = 1, \quad (2.71)$$

$$j_0(kr) = \frac{\text{sen}(kr)}{kr}. \quad (2.72)$$

Chega-se a

$$e^{ikz}(l=0) = \frac{\text{sen}(kr)}{kr} = \frac{1}{2ikr} (e^{ikr} - e^{-ikr}). \quad (2.73)$$

Dessa forma, obtém-se uma expressão para  $\psi_{out}(l=0)$

$$\begin{aligned} \psi_{out}(l=0) &= \psi - \psi_{in} = \frac{u_0}{r} - \psi_{in}(l=0) \\ \psi_{out}(l=0) &= \frac{Ae^{-i\delta}}{2ir} (e^{2i\delta} e^{ikr} - e^{-ikr}) - \frac{1}{2ikr} (e^{ikr} - e^{-ikr}). \end{aligned} \quad (2.74)$$

A expressão acima corresponde à onda *outgoing*, portanto, qualquer termo associado à onda *ingoing* deve ser descartado. Para que esses termos se anulem corretamente, impõe-se a seguinte relação

$$\frac{Ae^{-i\delta}}{2i} = \frac{1}{2ik}. \quad (2.75)$$

Assim, a onda espalhada para  $(l=0)$  pode ser escrita como

$$\psi_{out}(l=0) = \frac{1}{2ikr} (e^{2i\delta} - 1) e^{ikr} = \frac{1}{r} e^{ikr} f_0(\theta),$$

onde a amplitude de espalhamento, para  $l=0$ , é dada por

$$f_0(\theta) = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta} - 1). \quad (2.76)$$

Para o caso  $l \neq 0$ , a solução é obtida de maneira análoga. Na região assintótica, a função radial pode ser representada por

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} + k^2 u_l = 0. \quad (2.77)$$

Isso se deve ao fato de para  $r$  muito grande  $V(r)$  e o termo  $l(l+1)/r^2$  são desprezíveis. Dessa forma, a solução pode ser expressa de maneira a explicitar a dependência em  $l$

$$u_l \sim A \sin(kr - \frac{1}{2}l\pi + \delta_l) \equiv \frac{Ae^{-i\delta_l}}{2i} (e^{2i\delta_l} e^{i(kr - \frac{1}{2}l\pi)} - e^{-i(kr - \frac{1}{2}l\pi)}). \quad (2.78)$$

Para a Eq. 2.78, o termo  $-\frac{1}{2}l\pi$  é arbitrário, enquanto  $\delta_l$  é uma constante determinada pela integração na região nuclear. Assim, pode-se inicialmente adotar  $\delta_l \rightarrow 0$  e  $V(r) \rightarrow 0$  para qualquer  $l$ .

De maneira análoga ao caso  $l = 0$ , a função  $e^{ikz}$  pode ser expandida em termos de funções de Bessel

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta). \quad (2.79)$$

Como  $l$  pode assumir diversos valores, torna-se necessário multiplicar a expressão acima por  $P_{l'}(\cos\theta)$  e integrar sobre todos os ângulos

$$\int_0^\pi (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) \sin(\theta) d\theta = \int_0^\pi e^{ikr(\cos\theta)} P_{l'}(\cos\theta) \sin(\theta) d\theta. \quad (2.80)$$

Fazendo a substituição  $\cos(\theta) = u$ , utilizando a ortogonalidade dos polinômios de Legendre e integrando por partes

$$\int_{-1}^{+1} P_l(u) P_{l'}(u) du = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}.$$

Obtém-se

$$\begin{aligned} 2i^l j_l(kr) &= \left[ \frac{1}{ikr} e^{ikru} P_l(u) \right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} \frac{1}{ikr} e^{ikru} P_{l'}(u) du = \left[ \frac{1}{ikr} e^{ikru} P_l(u) \right]_{-1}^{+1} \\ &- \left[ \frac{1}{ikr^2} e^{ikru} P_{l'}(u) \right]_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1} \frac{1}{ikr^2} e^{ikru} P_{l''}(u) du + \dots \end{aligned} \quad (2.81)$$

Como os termos de ordem superior a  $1/r^2$  tornam-se desprezíveis na região assintótica, chega-se a

$$2i^l j_l(kr) \sim \frac{1}{ikr} (e^{ikr} - e^{i\pi} e^{-kr}) \sim \frac{i^l}{ikr} (e^{i(kr - \frac{1}{2}l\pi)} - e^{-i(kr - \frac{1}{2}l\pi)}), \quad (2.82)$$

Utilizando as relações

$$P_l(-1) = (-1)^l = e^{il\pi}; \quad e^{\frac{1}{2}l\pi} = i^l. \quad (2.83)$$

Assim como  $l = 0$ , a onda *outgoing* terá a forma

$$\psi_{out} = \psi - \psi_{in}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \psi_{out} = & \frac{Ae^{-i\delta_l}}{2ir} (e^{2i\delta_l} e^{i(kr - \frac{1}{2}l\pi)} - e^{-i(kr - \frac{1}{2}l\pi)}) P_l \cos(\theta) - \\ & - (2l+1) \frac{i^l}{2ikr} (e^{i(kr - \frac{1}{2}l\pi)} - e^{-i(kr - \frac{1}{2}l\pi)}) P_l \cos(\theta). \end{aligned} \quad (2.84)$$

Como antes, a expressão contém termos pertencentes à onda incidente. Para eliminá-los, impõe-se a condição

$$\frac{Ae^{-i\delta_l}}{2ir} = (2l+1) \frac{i^l}{2ikr}. \quad (2.85)$$

Chega-se então que  $\psi_{out}$  é expressado da seguinte forma

$$\psi_{out} = \frac{(2l+1)i^l}{2ikr} P_l \cos(\theta) (e^{2i\delta_l} - 1) e^{i(kr - \frac{1}{2}l\pi)} \quad \text{para } \forall l. \quad (2.86)$$

Conhecida a forma da onda espalhada, a amplitude total de espalhamento, somando todas as ondas parciais, pode ser escrita como

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) P_l \cos(\theta). \quad (2.87)$$

Por fim, a seção de choque elástica total é

$$\sigma_E = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |f(\theta)|^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) |1 - S_l|^2, \quad (2.88)$$

onde a matriz de espalhamento  $S_l$  é definida por

$$S_l = e^{2i\delta_l}. \quad (2.89)$$

Assim, nota-se que a matriz  $S_l$  está diretamente relacionada ao *phase shift* e, portanto, à intensidade da interação. Seu valor máximo é 1, o que ocorre na ausência de interação. Dessa forma, a soma apresentada na Eq. 2.88 pode ser truncada, desde que se conheça o valor de  $l$  para o qual  $|S_l| \approx 1$ .

Uma simplificação inicial consistiu em desconsiderar a carga elétrica. Entretanto, a inclusão dessa contribuição torna-se necessária, pois a interação entre as partículas possui também uma componente coulombiana. Dessa forma, o potencial pode ser representado como

$$V(r) = V_C(r) + V_N(r), \quad (2.90)$$

onde  $V_C(r)$  é o potencial coulombiano e  $V_N(r)$  é o potencial nuclear.

Portanto, a amplitude de espalhamento pode ser escrita como a soma das contribuições coulombiana e nuclear

$$f(\theta) = f_C(\theta) + f_N(\theta). \quad (2.91)$$

A contribuição de  $f_N(\theta)$  já foi apresentada na Eq. 2.87. Contudo, ao incluir a interação coulombiana no potencial, surge um fator de fase adicional que modifica a amplitude de espalhamento nuclear elástico. Assim, a nova expressão para  $f_N(\theta)$  pode ser escrita como

$$f_N(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(e^{2i\delta_l} - 1)e^{2i\sigma_l} P_l(\cos \theta). \quad (2.92)$$

onde o termo  $e^{2i\sigma_l}$  é conhecido como a fase de Coulomb, responsável por introduzir uma fase extra na amplitude devido ao potencial coulombiano.

Já a amplitude puramente coulombiana é dada por [30]

$$f_C(\theta) = -\frac{\gamma}{2k} \csc^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) e^{2i\sigma_0 - 2i\gamma \ln \sin(\frac{\theta}{2})}, \quad (2.93)$$

em que  $\gamma$  é o chamado parâmetro de Sommerfeld, definido por

$$\gamma = \frac{mZ_1Z_2e^2}{k\hbar^2}, \quad (2.94)$$

onde  $Z_1$  e  $Z_2$  são os números atômicos do projétil e do alvo, respectivamente.

Utilizando a relação entre a seção de choque diferencial e a amplitude de espalhamento, obtém-se

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = |f_C(\theta) + f_N(\theta)|^2. \quad (2.95)$$

Por fim, a contribuição relativa de cada termo na amplitude de espalhamento depende tanto da energia do sistema quanto do ângulo  $\theta$ .

Para compreender de forma mais geral e formal a solução do problema de espalhamento, e obter uma formulação integral equivalente à equação de Schrödinger com as condições de contorno corretas, apresentamos a seguir a dedução da equação de Lippmann–Schwinger. Nessa abordagem, os efeitos de outros canais de reação são incorporados no potencial  $V$  de maneira implícita.

### 2.3.3 Equação de Lippmann-Schwinger

Damos agora a dedução da equação de Lippmann–Schwinger, que é fundamental para a formulação da teoria quântica do espalhamento. Para isso, partimos da equação de Schrödinger independente do tempo

$$H\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad (2.96)$$

onde o hamiltoniano total  $H$  é escrito como a soma de dois termos

$$H = H_0 + V(\mathbf{r}), \quad (2.97)$$

com  $H_0 = \frac{p^2}{2m}$  representando o hamiltoniano da partícula livre — ou seja, contendo apenas o termo cinético — e  $V(\mathbf{r})$  sendo um potencial local responsável por introduzir interações (o centro espalhador). Na ausência de  $V$ , os autoestados do sistema são os estados de partícula livre.

Esses autoestados satisfazem (usando a notação de Dirac)

$$H_0 |\phi\rangle = E |\phi\rangle, \quad (2.98)$$

e, na representação de posição, tomam a forma de ondas planas

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.99)$$

com energia associada  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ .

Para resolver formalmente a equação de Schrödinger na presença do potencial  $V(\mathbf{r})$ , introduzimos o operador função de Green do hamiltoniano livre

$$G_0(E) = \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon}, \quad (2.100)$$

onde  $\epsilon \rightarrow 0^+$  é um número positivo infinitesimal, introduzido para garantir as condições de contorno físicas corretas no problema de espalhamento.

A função de Green  $G_0(E)$  satisfaz a equação

$$(E - H_0)G_0(E) = 1. \quad (2.101)$$

Esse operador permite reescrever a equação de Schrödinger original na forma de uma equação integral, o que será feito a seguir.

Partindo da equação de Schrödinger com interação

$$(H_0 + V)|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \quad (2.102)$$

podemos reorganizar essa equação como

$$(E - H_0)|\psi\rangle = V|\psi\rangle. \quad (2.103)$$

Agora aplicamos o operador resolvente  $G_0(E) = \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon}$  dos dois lados da equação

$$|\psi\rangle = G_0(E)V|\psi\rangle. \quad (2.104)$$

Contudo, essa equação possui uma solução trivial  $|\psi\rangle = 0$ . Para obter a solução física desejada — isto é, a função de onda espalhada que no limite assintótico representa uma onda incidente mais uma onda espalhada — adicionamos a condição de contorno correspondente à presença da onda incidente  $|\phi\rangle$ . Isso leva à forma integral da equação de Lippmann-Schwinger

$$|\psi^{(\pm)}\rangle = |\phi\rangle + G_0^{(\pm)}(E)V|\psi^{(\pm)}\rangle, \quad (2.105)$$

onde  $|\psi^{(\pm)}\rangle$  representa a função de onda total associada às condições de contorno assintóticas do espalhamento (sinal + para solução de espalhamento de saída, sinal – para de entrada) e  $G_0^{(\pm)}(E) = \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon}$ .

Essa é a equação de Lippmann-Schwinger, cuja interpretação física é: o estado espalhado  $|\psi^{(\pm)}\rangle$  é composto por uma onda incidente  $|\phi\rangle$  mais a perturbação causada pela presença do potencial, propagada via a função de Green  $G_0$ .

Na base de posição, podemos escrever a equação de Lippmann-Schwinger para a função de onda espalhada  $\psi^{(+)}(\mathbf{r})$  como

$$\psi^{(+)}(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) + \int d^3r' G_0^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) V(\mathbf{r}') \psi^{(+)}(\mathbf{r}'), \quad (2.106)$$

onde: -  $\phi(\mathbf{r})$  é a função de onda da partícula livre (a onda incidente), -  $\psi^{(+)}(\mathbf{r})$  é a solução total do espalhamento, -  $V(\mathbf{r}')$  é o potencial espalhador, -  $G_0^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E)$  é a função de Green associada ao hamiltoniano livre  $H_0$ , dada por

$$G_0^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) = \langle \mathbf{r} | \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} | \mathbf{r}' \rangle. \quad (2.107)$$

Para o caso de partículas com energia  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ , essa função de Green pode ser escrita explicitamente como

$$G_0^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{+ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.108)$$

Essa função representa a propagação de uma onda esférica com condição de contorno de saída (representada pelo  $+i\epsilon$ ). O termo integral na Eq. 2.106 representa a perturbação do estado livre causada pelo espalhamento em todos os pontos  $\mathbf{r}'$  do espaço, e propagada até  $\mathbf{r}$  via a função de Green.

A equação integral de Lippmann-Schwinger mostra que a função de onda total  $\psi^{(+)}(\mathbf{r})$

é composta por dois termos:

- $\phi(\mathbf{r})$ : uma onda incidente livre que se propaga como se o potencial não existisse;
- um termo de correção: uma integral envolvendo o potencial  $V(\mathbf{r}')$ , a função de onda espalhada  $\psi^{(+)}(\mathbf{r}')$ , e a função de Green  $G_0^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E)$ , que propaga a perturbação do potencial para o ponto  $\mathbf{r}$ .

Esse segundo termo representa a onda espalhada: a perturbação da onda incidente devido ao potencial espalhador.

Quando a distância  $r = |\mathbf{r}|$  tende ao infinito, ou seja, observamos a partícula muito longe da região de espalhamento, a função de onda total  $\psi^{(+)}(\mathbf{r})$  assume a forma assintótica

$$\psi^{(+)}(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (2.109)$$

onde: - o primeiro termo  $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$  é a onda incidente plana; - o segundo termo é a \*\*onda espalhada esférica\*\*, com amplitude de espalhamento  $f(\theta, \phi)$ , que depende da direção de observação.

A comparação entre a equação de Lippmann-Schwinger e sua forma assintótica permite identificar o termo responsável por  $f(\theta, \phi)$ . De fato, usando a forma assintótica da função de Green

$$G_0^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}'}, \quad (2.110)$$

com  $\mathbf{k}_f = k\hat{\mathbf{r}}$ , temos

$$f(\theta, \phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' e^{-i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \psi^{(+)}(\mathbf{r}'). \quad (2.111)$$

Essa é a expressão geral para o amplitude de espalhamento, que permite calcular como a partícula é desviada para cada ângulo sólido  $(\theta, \phi)$ .

A grandeza física mensurável em experimentos de espalhamento é a seção de choque diferencial,  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ , que representa a probabilidade de espalhamento por unidade de ângulo sólido. Ela está relacionada ao módulo da amplitude de espalhamento

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2. \quad (2.112)$$

Assim, todo o problema de espalhamento pode ser resolvido encontrando  $\psi^{(+)}(\mathbf{r})$ , que satisfaz a equação de Lippmann-Schwinger, e usando-a para calcular o amplitude de espalhamento via a Eq. (2.111).

A equação de Lippmann–Schwinger fornece uma formulação integral equivalente à equação de Schrödinger, destacando de forma explícita a contribuição do potencial de interação e o caráter não local do espalhamento por meio da função de Green.

Essa equação também separa claramente a onda incidente da onda espalhada, permitindo calcular diretamente a amplitude  $f(\theta, \phi)$ , a qual está relacionada à seção de choque diferencial e, conseqüentemente, aos observáveis experimentais.

Essa visão, no entanto, ainda trata os efeitos de outros canais de forma implícita por meio do potencial  $V$ . Quando é necessário considerar explicitamente a contribuição de estados excitados ou de outros canais de reação, recorre-se ao método dos canais acoplados, que será apresentado a seguir.

### 2.3.4 Descrição Quântica do Espalhamento Inelástico

O espalhamento inelástico é o processo não-elástico mais simples, e sua seção de choque pode ser determinada por meio do método dos canais acoplados. Inicialmente, resolve-se a equação de Schrödinger para obter a função de onda que descreve o estado do sistema, assumindo que apenas processos elásticos e inelásticos ocorrem.

Dessa forma, considerando  $T = (-\frac{\hbar^2}{2m})\nabla_r^2$  como operador de energia cinética da partícula incidente,  $H(\xi)$  como o hamiltoniano nuclear, com  $\xi$  representando todas as coordenadas intrínsecas do núcleo, e  $V(r, \xi)$  como o potencial de interação entre o projétil e o alvo. A equação de Schrödinger que descreve o sistema pode ser escrita como

$$\begin{aligned} H_T \Psi(\mathbf{r}, \xi) &= E \Psi(\mathbf{r}, \xi) \\ [T + V(\mathbf{r}, \xi) + H(\xi)] \Psi(\mathbf{r}, \xi) &= E \Psi(\mathbf{r}, \xi). \end{aligned} \quad (2.113)$$

Os estados nucleares são autoestados do hamiltoniano nuclear, que descreve as interações entre os núcleons, sendo determinados por

$$H(\xi) \chi_\alpha(\xi) = \epsilon_\alpha \chi_\alpha(\xi), \quad (2.114)$$

onde  $\chi_\alpha(\xi)$  constitui uma base ortonormal, e  $\alpha$  representa o conjunto de números quânticos necessários para caracterizar um estado. Para  $\xi = R_N$ , a função de onda deve anular-se, já que os estados ligados exigem que a função de onda desapareça para  $\xi > R_N$ , sendo  $R_N$  o raio nuclear.

Respeitando as condições de contorno, para resolver a Eq. 2.113, a função de onda  $\Psi(r, \xi)$  é expandida

$$\Psi(\mathbf{r}, \xi) = \sum_{\alpha'} \psi_{\alpha'}(\mathbf{r}) \chi_{\alpha'}(\xi). \quad (2.115)$$



Substituindo a Eq. 2.115 na Eq. 2.113, multiplicando pela esquerda por  $\chi_\alpha^*(\xi)$  e integrando sobre todas as coordenadas intrínsecas do núcleo

$$\begin{aligned}
& [T + V(\mathbf{r}, \xi) + H(\xi)] \sum_{\alpha'} \psi_{\alpha'}(\mathbf{r}) \chi_{\alpha'}(\xi) = E \sum_{\alpha'} \psi_{\alpha'}(\mathbf{r}) \chi_{\alpha'}(\xi) \\
& \int \chi_\alpha^*(\xi) [T + V(\mathbf{r}, \xi) + H(\xi)] \sum_{\alpha'} \psi_{\alpha'}(\mathbf{r}) \chi_{\alpha'}(\xi) d\xi = E \int \chi_\alpha^*(\xi) \sum_{\alpha'} \psi_{\alpha'}(\mathbf{r}) \chi_{\alpha'}(\xi) d\xi \\
& \sum_{\alpha, \alpha'} \left[ \int \chi_\alpha^*(\xi) T \psi_{\alpha'}(\mathbf{r}) \chi_{\alpha'}(\xi) d\xi + \int \chi_\alpha^*(\xi) V(\mathbf{r}, \xi) \chi_{\alpha'}(\xi) \psi_{\alpha'}(\mathbf{r}) d\xi \right. \\
& \quad \left. + \int \chi_\alpha^*(\xi) H(\xi) \chi_{\alpha'}(\xi) \psi_{\alpha'}(\mathbf{r}) d\xi \right] = E \sum_{\alpha, \alpha'} \int \chi_\alpha^*(\xi) \chi_{\alpha'}(\xi) \psi_{\alpha'}(\mathbf{r}) d\xi. \quad (2.116)
\end{aligned}$$

Utilizando a Eq. 2.114 na Eq. 2.116,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha, \alpha'} [T \psi_{\alpha'}(\mathbf{r}) \int \chi_\alpha^*(\xi) \chi_{\alpha'}(\xi) d\xi + \int \chi_\alpha^*(\xi) V(\mathbf{r}, \xi) \chi_{\alpha'}(\xi) \psi_{\alpha'}(\mathbf{r}) d\xi \\
& \quad + \epsilon_{\alpha'} \psi_{\alpha'}(\mathbf{r}) \int \chi_\alpha^*(\xi) \chi_{\alpha'}(\xi) d\xi] = E \sum_{\alpha, \alpha'} \psi_{\alpha'}(\mathbf{r}) \int \chi_\alpha^*(\xi) \chi_{\alpha'}(\xi) d\xi, \quad (2.117)
\end{aligned}$$

onde sabendo que  $\chi_\alpha(\xi)$  constitui uma base ortonormal, têm-se

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha'} [T + \epsilon_{\alpha'} - E] \psi_{\alpha'}(\mathbf{r}) = - \sum_{\alpha} V_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r}) \psi_{\alpha'}(\mathbf{r}) \\
& [T + \epsilon_{\alpha'} - E] \psi_{\alpha'}(\mathbf{r}) = - \sum_{\alpha=1}^N V_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r}) \psi_{\alpha'}(\mathbf{r}), \quad (2.118)
\end{aligned}$$

onde  $N$  corresponde ao número de estados da base. A determinação da função de onda em um canal depende do conhecimento das funções de onda nos demais canais, como evidenciado na equação anterior. Na Eq. 2.118, o termo  $V_{\alpha\alpha'}$  descreve o acoplamento entre diferentes estados do sistema, sendo dado por

$$V_{\alpha\alpha'} = \int \chi_\alpha^*(\xi) V(\mathbf{r}, \xi) \chi_{\alpha'}(\xi) d\xi. \quad (2.119)$$

Para evidenciar as partes radial e angular da solução, escrevemos  $\psi_\alpha(\mathbf{r})$  como uma soma de ondas parciais

$$\psi_\alpha(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \frac{u_\alpha(r)}{r} Y_l^m(\theta, \phi). \quad (2.120)$$

Ao substituir na Eq. 2.118, em seguida multiplicar à esquerda por  $Y_{l'}^{*m'}$  e integrar

sobre todos os ângulos  $d\Omega$ , chega-se a

$$\begin{aligned} & \int Y_{l'}^{*m'}(\theta, \phi) (T - E_\alpha) \sum_{l,m} \frac{u_\alpha(r)}{r} Y_l^m(\theta, \phi) d\Omega \\ &= - \int Y_{l'}^{*m'}(\theta, \phi) \sum_{\alpha=1}^N V_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r}) \sum_{l,m} \frac{u_\alpha(r)}{r} Y_l^m(\theta, \phi) d\Omega, \end{aligned} \quad (2.121)$$

onde  $E_\alpha$  corresponde à energia relativa do movimento, convertida em energia interna para a excitação do núcleo, e é dada por  $E_\alpha = \hbar^2 k_\alpha^2 / 2\mu$ .

Atuando o operador de energia cinética T

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{l,m \\ l',m'}} \left[ \int Y_{l'}^{*m'}(\theta, \phi) T \frac{u_\alpha(r)}{r} Y_l^m(\theta, \phi) d\Omega - E_\alpha \int Y_{l'}^{*m'}(\theta, \phi) \frac{u_\alpha(r)}{r} Y_l^m(\theta, \phi) d\Omega \right] \\ &= - \sum_{\substack{l,m \\ l',m'}} \sum_{\alpha=1}^N \int Y_{l'}^{*m'}(\theta, \phi) V_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r}) \frac{u_\alpha(r)}{r} Y_l^m(\theta, \phi) d\Omega \\ & \sum_{\substack{l,m \\ l',m'}} \left[ \frac{d^2 u_\alpha(r)}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} u_\alpha(r) - E_\alpha u_\alpha(r) \right] \int Y_{l'}^{*m'}(\theta, \phi) Y_l^m(\theta, \phi) d\Omega \\ &= - \frac{2\mu}{\hbar^2} \sum_{\substack{l,m \\ l',m'}} \sum_{\alpha=1}^N \int Y_{l'}^{*m'}(\theta, \phi) V_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r}) \frac{u_\alpha(r)}{r} Y_l^m(\theta, \phi) d\Omega. \end{aligned} \quad (2.122)$$

A condição de ortogonalidade dos harmônicos esféricos permite simplificar a Eq. 2.122, resultando em

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - k_\alpha^2 + W_{\alpha\alpha} \right] u_\alpha(r) = \sum_{\alpha' \neq \alpha} W_{\alpha\alpha'}(r) u_{\alpha'}(r), \quad (2.123)$$

no qual define-se

$$W_{\alpha\alpha'}(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} \sum_{l,m} \int Y_l^{*m}(\theta, \phi) V_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r}) \frac{u_\alpha(r)}{r} Y_l^m(\theta, \phi) d\Omega. \quad (2.124)$$

Cada canal é descrito por uma equação própria. No lado esquerdo da equação aparecem os termos associados ao acoplamento do canal consigo mesmo, que não dependem da energia. Em contraste, no lado direito estão os termos que representam o acoplamento com os demais canais, sendo  $W_{\alpha\alpha'}(r)$  o potencial que descreve essa interação.

Para tratar de maneira mais sistemática a contribuição dos canais inelásticos e sua influência sobre o canal elástico, podemos recorrer ao formalismo dos projetores proposto por Feshbach. Esse formalismo fornece uma forma rigorosa de derivar o potencial óptico,

no qual os efeitos dos canais excluídos aparecem de forma explícita por meio de um potencial de polarização, como será apresentado a seguir.

### 2.3.5 Teoria de Feshbach e Brueckner

Nesta seção, apresentamos o formalismo dos projetores de Feshbach [31, 32] para obter uma expressão para o potencial óptico, cuja forma final será análoga à obtida na Eq. 2.124. Considerando  $\mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{r}_A (\equiv \boldsymbol{\xi})$ ,  $\phi_n(\boldsymbol{\xi})$  e  $H(\boldsymbol{\xi})$  como, respectivamente, a posição da partícula incidente, a posição dos núcleons dentro do núcleo, os estados do alvo e o hamiltoniano nuclear, o hamiltoniano total do sistema pode ser escrita como a soma de um hamiltoniano não perturbada com um potencial que leva em consideração a interação entre os núcleons do alvo

$$H = H_0 + V = H(\boldsymbol{\xi}) + T(\mathbf{r}_0) + V(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\xi}), \quad (2.125)$$

onde

$$V(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{\alpha} V(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_{\alpha}), \quad (2.126)$$

representa a interação entre o projétil e cada núcleon no interior do núcleo. Aqui,  $\mathbf{r}_0$  é o vetor posição da partícula incidente em relação ao centro do alvo, e  $\alpha$  indica a coordenada de cada núcleon no alvo.

A função de onda total  $\Psi$  satisfaz a equação de Schrödinger independente do tempo, que assume a forma de um problema de autovalores:

$$\begin{aligned} (H - E)\Psi &= 0 \\ (H_0 + V(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\xi}) - E)\Psi &= 0. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Nesta equação,  $H$  é o hamiltoniano total (operador),  $\Psi$  é a função de onda total (autovetor), e  $E$  é a energia total do sistema (autovalor). Trata-se de um problema típico em mecânica quântica, cuja solução determina os estados estacionários do sistema.

Pode-se expandir a função de onda total  $\Psi$  como uma combinação linear de produtos da função de onda da partícula incidente  $u_{\alpha}(\mathbf{r}_0)$  com os estados internos do alvo  $\phi_{\alpha}(\boldsymbol{\xi})$

$$\Psi = \sum_{\alpha} u_{\alpha}(\mathbf{r}_0) \phi_{\alpha}(\boldsymbol{\xi}). \quad (2.128)$$

As funções  $u_{\alpha}(\mathbf{r}_0)$  satisfazem a seguinte equação diferencial

$$[T + v(\mathbf{r}_0) - \epsilon_{\alpha}] u_{\alpha}(\mathbf{r}_0) = 0, \quad (2.129)$$

onde  $v(\mathbf{r}_0)$  é o potencial óptico, e  $\epsilon_\alpha = E - E_\alpha$ , com  $E_\alpha$  sendo a energia do estado interno  $\phi_\alpha$  do alvo. Esta equação descreve o movimento efetivo da partícula incidente sob a influência de um potencial médio, levando em consideração os efeitos do acoplamento com os estados excitados do núcleo.

A ideia, neste ponto, é decompor o espaço total de estados em dois subespaços ortogonais por meio de operadores de projeção, denotados por  $P$  e  $Q$ . O operador  $P$  projeta sobre o subespaço de interesse — usualmente o canal elástico — enquanto  $Q$  projeta sobre o subespaço complementar, correspondente aos canais inelásticos e outros graus de liberdade. Ao atuar  $P$  no estado  $\Psi$ , tem-se

$$\begin{aligned} P\Psi &= \Phi_0 \\ |\phi_0\rangle \langle\phi_0| \Psi &= \phi_0(\boldsymbol{\xi}) u_0(\mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (2.130)$$

Para prosseguir com a aplicação dos projetores, é importante citar suas propriedades fundamentais

$$\begin{aligned} P^2 &= P \\ Q^2 &= Q \\ P + Q &= 1 \\ PQ &= QP = 0. \end{aligned} \quad (2.131)$$

Portanto, inserindo a identidade  $P + Q = 1$  na Eq. 2.127, temos a seguinte forma

$$\begin{aligned} (H - E)(P + Q)\Psi &= 0 \\ (HP + HQ - EP - EQ)\Psi &= 0. \end{aligned} \quad (2.132)$$

O próximo passo é projetar a equação acima nos subespaços definidos por  $P$  e  $Q$ . Isso é feito aplicando, pela esquerda, os operadores de projeção  $P$  e  $Q$  à Eq. 2.132

$$\begin{aligned} (PHP + PHQ - PEP - PEQ)\Psi &= 0 \\ (PHP + PHQ - EP)\Psi &= 0 \\ (PHPP + PHQQ - EP)\Psi &= 0 \\ (E - PHP)P\Psi &= PHQQ\Psi, \end{aligned} \quad (2.133)$$

e

$$\begin{aligned} (QHP + QHQ - QEP - QEQ)\Psi &= 0 \\ (QHP + QHQ - EQ)\Psi &= 0 \\ (QHPP + QHQQ - EQ)\Psi &= 0 \\ (E - QHQ)Q\Psi &= QHPP\Psi. \end{aligned} \quad (2.134)$$

Isolando  $Q\Psi$  na Eq. 2.132, obtemos

$$Q\Psi = \frac{1}{E - QHQ + i\epsilon} QHPP\Psi, \quad (2.135)$$

onde o termo imaginário  $i\epsilon$  é introduzido para evitar polos, já que a expressão pode divergir caso a energia associada ao operador  $QHQ$  coincida com a energia do canal elástico.

Substituindo a Eq. 2.135 na Eq. 2.133 tem-se

$$\begin{aligned} (E - PHP)P\Psi &= PHQQ\Psi \\ (E - PHP)P\Psi &= PHQ \frac{1}{E - QHQ + i\epsilon} QHPP\Psi \quad (2.136) \\ (E - PHP - PHQ \frac{1}{E - QHQ + i\epsilon} QHP)P\Psi &= 0. \end{aligned}$$

Antes de prosseguir com a Eq. 2.141, é necessário determinar explicitamente os termos que envolvem os projetores, começando pelo operador  $PHP$ . Usando a definição do operador  $P$  na Eq. 2.130 e considerando que o hamiltoniano interno do núcleo  $H(\xi)$  satisfaz

$$H(\xi) |\phi_0\rangle = \epsilon_0 |\phi_0\rangle,$$

onde  $\epsilon_0$  é a energia do estado fundamental, podemos tomar, para simplificar, essa energia como referência zero, ou seja,  $\epsilon_0 = 0$ . Assim, tem-se

$$\begin{aligned} PHP &= |\phi_0\rangle \langle\phi_0| H |\phi_0\rangle \langle\phi_0| \\ &= |\phi_0\rangle (\langle\phi_0| [H(\xi) + T(\mathbf{r}_0) + V(\mathbf{r}_0, \xi)] |\phi_0\rangle) \langle\phi_0| \quad (2.137) \\ &= |\phi_0\rangle (T(\mathbf{r}_0) + \langle\phi_0| V(\mathbf{r}_0, \xi) |\phi_0\rangle) \langle\phi_0|. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} PHQ &= |\phi_0\rangle \langle\phi_0| HQ \\ &= |\phi_0\rangle \langle\phi_0| (H(\xi) + T(\mathbf{r}_0) + V(\mathbf{r}_0, \xi)) Q \quad (2.138) \\ &= |\phi_0\rangle \langle\phi_0| H(\xi) Q + |\phi_0\rangle \langle\phi_0| T(\mathbf{r}_0) Q + |\phi_0\rangle \langle\phi_0| V(\mathbf{r}_0, \xi) Q. \end{aligned}$$

Analisando os termos da equação acima, observamos que os dois primeiros são nulos. O primeiro termo desaparece porque  $H(\xi)$  atua apenas nas coordenadas internas do núcleo, e assumimos que  $H(\xi) |\phi_0\rangle = 0$ , além de  $Q |\phi_0\rangle = 0$ , o que implica  $\langle\phi_0| H(\xi) Q = 0$ . Já o segundo termo também é nulo, pois o operador cinético  $T(\mathbf{r}_0)$ , que atua nas coordenadas relativas, comuta com  $|\phi_0\rangle$ , e como  $\langle\phi_0| Q = 0$ , segue-se que  $\langle\phi_0| T(\mathbf{r}_0) Q = 0$ . Resta, portanto, apenas o terceiro termo, que em geral é não nulo e representa o acoplamento entre o estado fundamental e os estados excitados do núcleo induzido pelo potencial. Dessa forma, o operador  $PHQ$  pode ser reescrito como

$$PHQ = |\phi_0\rangle \langle \phi_0| V(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\xi}) Q, \quad (2.139)$$

e também

$$QHP = QV(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\xi}) |\phi_0\rangle \langle \phi_0|. \quad (2.140)$$

As Eqs. 2.137, 2.139 e 2.140 podem ser substituídas na Eq. 2.141.

$$\left( E - |\phi_0\rangle (T + \langle \phi_0| V |\phi_0\rangle) \langle \phi_0| - |\phi_0\rangle \langle \phi_0| V Q \frac{1}{E - QHQ + i\epsilon} QV |\phi_0\rangle \langle \phi_0| \right) P\Psi = 0. \quad (2.141)$$

Agora multiplicando por  $\langle \phi_0|$

$$\begin{aligned} \left( \langle \phi_0| E - \langle \phi_0| |\phi_0\rangle (T + \langle \phi_0| V |\phi_0\rangle) \langle \phi_0| - \langle \phi_0| |\phi_0\rangle \langle \phi_0| V Q \frac{1}{E - QHQ + i\epsilon} QV |\phi_0\rangle \langle \phi_0| \right) P\Psi &= 0 \\ \left( E - (T + \langle \phi_0| V |\phi_0\rangle) \langle \phi_0| - \langle \phi_0| V Q \frac{1}{E - QHQ + i\epsilon} QV |\phi_0\rangle \langle \phi_0| \right) P\Psi &= 0 \\ \left( E - T + \langle \phi_0| V |\phi_0\rangle - \langle \phi_0| V Q \frac{1}{E - QHQ + i\epsilon} QV |\phi_0\rangle \right) \langle \phi_0| P\Psi &= 0 \\ \left( E - T - \langle \phi_0| V |\phi_0\rangle - \langle \phi_0| V Q \frac{1}{E - QHQ + i\epsilon} QV |\phi_0\rangle \right) u_0(\mathbf{r}_0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.142)$$

Finalmente podemos definir o potencial óptico como

$$\nu = \langle \phi_0| V |\phi_0\rangle + \langle \phi_0| V Q \frac{1}{E - QHQ + i\epsilon} QV |\phi_0\rangle. \quad (2.143)$$

O potencial óptico pode ser interpretado como a soma de duas contribuições principais:

- **Potencial *bare*:** O primeiro termo, chamado de potencial bare, corresponde à média da interação entre o projétil e o alvo quando ambos permanecem em seus estados fundamentais. Esse termo descreve a parte direta da interação, sem considerar processos de excitação ou transferência, e por isso é independente da energia do sistema.
- **Potencial de polarização:** O segundo termo, que depende explicitamente da energia, incorpora os efeitos do acoplamento do canal elástico com os canais inelásticos excluídos na projeção. Este termo é geralmente não-local e complexo, refletindo processos dinâmicos. Sua avaliação exata, no entanto, é considerada impraticável

em muitos casos, dada a estrutura envolvida  $Q$  [33]. Por esse motivo, diversas aproximações têm sido desenvolvidas na literatura, tanto na forma não-local quanto por meio de versões locais equivalentes [34].

Assim, o potencial óptico representa uma forma efetiva de tratar a interação entre os canais elásticos e inelásticos em um sistema quântico, sendo essencial para a descrição precisa de reações nucleares em energias próximas e abaixo da barreira coulombiana [35].

## 2.4 Potenciais em Reações Nucleares

Em reações nucleares, o potencial entre as partículas tem duas contribuições principais: o potencial coulombiano e o potencial nuclear. Ambos contribuem para a descrição da interação e podem ser estudados separadamente. Ele pode ser escrito da seguinte forma

$$V(r) = V_C(r) + V_N(r), \quad (2.144)$$

no qual  $V_C(r)$  é o potencial coulombiano e  $V_N(r)$  é o potencial nuclear.

### 2.4.1 Potencial coulombiano

O potencial coulombiano, citado na Seção 2.3.2, é um potencial espalhador de longo alcance que decai para zero quando a distância entre as partículas aumenta. Na descrição de sistemas nucleares, é comum considerá-lo como o potencial gerado por uma esfera uniformemente carregada

$$V_C(r) = \begin{cases} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2R_C} \left( 3 - \frac{r^2}{R_C^2} \right), & r \leq R_C \\ \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}, & r > R_C \end{cases} \quad (2.145)$$

onde

- $Z_1$  e  $Z_2$  são os números atômicos do projétil e alvo, respectivamente
- $R_C$  é o raio da distribuição de carga nuclear
- $e$  é a carga elementar

#### 2.4.1.1 Solução do Potencial coulombiano

A solução da equação de Schrödinger com este potencial requer abordagens distintas para as duas regiões:

**Região interna ( $r \leq R_C$ )** Para  $r \leq R_C$ , a solução geralmente é obtida numericamente através de:

- Integração numérica a partir de um valor inicial ("chute") para a função de onda
- Aplicação das condições de continuidade da função de onda e sua derivada na fronteira  $r = R_C$
- Normalização apropriada para garantir a continuidade com a solução externa

**Região externa ( $r > R_C$ )** Para  $r > R_C$ , existem soluções analíticas conhecidas:

- Funções regulares de Coulomb  $F_l(r)$
- Funções irregulares de Coulomb  $G_l(r)$
- Combinações destas nas chamadas funções de Hankel coulombianas

Estas soluções refletem o comportamento assintótico do potencial de longo alcance e são essenciais para a descrição correta do espalhamento coulombiano [30, 36].

$$\psi_l(r) \sim F_l(r) + iG_l(r) \quad (\text{para } r \rightarrow \infty) \quad (2.146)$$

## 2.4.2 Potencial Nuclear

Quando ocorre uma reação nuclear, muitos canais podem ter influência na descrição da seção de choque elástica. Então, para conseguir estudar a influência de cada canal se torna necessário assumir um potencial que consiga descrever tanto o processo elástico quanto os processos não-elásticos. Uma alternativa encontrada para esse potencial foi sugerido por Herman Feshbach e colaboradores em 1953 [37]. A proposta era tratar esse potencial como um potencial complexo, onde a parte real é referente a refração do projétil e a parte imaginária a absorção dele. Dentro do formalismo do modelo óptico usa-se um potencial complexo do tipo

$$V_N(r) = V(r) + iW(r), \quad (2.147)$$

onde a parte imaginária está associada à perda de fluxo para outros canais.

O modelo tem uma justificativa através da mecânica quântica, que será mostrada abaixo.



### 2.4.2.1 Modelo Óptico na mecânica Quântica

Considerando um potencial complexo, como na Eq. 2.147 na equação de Schrödinger, esta pode ser resolvida de forma análoga ao caso de um potencial real, como feito para o espalhamento elástico e inelástico. Contudo, assume-se que as funções de onda  $u_l(r)$ , a matriz de espalhamento  $S_l$ , o *phase shift*  $\delta_l$  e as amplitudes de espalhamento  $f(\theta)$  são todas grandezas complexas.

Sendo assim, a equação de Schrödinger para o potencial complexo pode ser escrita como:

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V - iW)\psi = 0. \quad (2.148)$$

Tomando o complexo conjugado da Eq. 2.148, obtém-se:

$$\nabla^2 \psi^* + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V + iW)\psi^* = 0. \quad (2.149)$$

Em seguida, multiplicamos a Eq. 2.148 por  $\psi^*$  e a Eq. 2.149 por  $\psi$  e subtraindo a segunda da primeira, obtemos

$$\begin{aligned} \psi^* \left[ \nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V - iW)\psi \right] &= 0 \\ - \\ \psi \left[ \nabla^2 \psi^* + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V + iW)\psi^* \right] &= 0 \\ \psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^* &= \frac{4imW}{\hbar^2} \psi \psi^*. \end{aligned} \quad (2.150)$$

O fluxo de probabilidade pode ser definido como

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2\mu}(\psi^* \nabla \psi + \psi \nabla \psi^*),$$

e sabendo que o produto  $\psi \psi^*$  corresponde a densidade de probabilidade  $\rho$ , obtém-se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = -Kv\rho, \quad (2.151)$$

onde  $K = \frac{2W}{v\hbar}$ . Nota-se que o potencial imaginário atua como um termo absorptivo; se fosse positivo, em vez disso, ele atuaria como um repulsor de fluxo. Isso confirma a suposição inicial de que a parte imaginária do potencial é responsável por remover uma fração do fluxo do canal de entrada. A seção de choque total de absorção é determinada a partir do fluxo de probabilidade incidente sobre o núcleo, normalizado pelo número de partículas incidentes por  $cm^2$  por unidade de tempo, e integrando-se sobre todo o ângulo sólido.

Assim

$$\sigma_A = \int \frac{\mathbf{j}}{v} d\Omega$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{i\hbar}{2mv} (\psi^* \nabla \psi + \psi \nabla \psi^*) r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi. \quad (2.152)$$

Expandindo  $\psi$  em ondas parciais

$$\psi = - \sum_l \frac{(2l+1)}{2ikr} P_l(\cos\theta) (S_l e^{ikr} - e^{-ikr}),$$

e

$$\psi^* = \sum_l \frac{(2l+1)}{2ikr} P_l^*(\cos\theta) (S_l^* e^{-ikr} - e^{ikr}).$$

Calculando as derivadas de  $\psi$  e  $\psi^*$  e substituindo-as na Eq. 2.152, obtém-se a expressão para a seção de choque de absorção

$$\sigma_A = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) (1 - |S_l|^2). \quad (2.153)$$

Uma vez determinada a seção de choque de absorção, e conhecida a seção de choque de espalhamento elástico calculada anteriormente, a seção de choque total para partículas não carregadas pode ser expressa como

$$\sigma_T = \sigma_E + \sigma_A, \quad (2.154)$$

onde substituindo as Eqs. 2.88 e 2.153 na Eq. 2.154, temos

$$\begin{aligned} \sigma_T &= \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2L+1) |1 - S_l|^2 + \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) (1 - |S_l|^2) \\ &= \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) [1 - S_l S_l^* + (1 - S_l)(1 - S_l^*)] \\ &= \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) [1 - S_l S_l^* + 1 - S_l - S_l^* + S_l S_l^*] \\ &= \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) (2 - S_l - S_l^*) \\ &= \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) (2 - 2\text{Re}S_l). \end{aligned}$$

Portanto, a seção de choque total é dado por

$$\sigma_T = \frac{2\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) (1 - \text{Re}S_l). \quad (2.155)$$

### 2.4.2.2 Potencial de Woods–Saxon

O potencial de Woods–Saxon é um dos mais conhecidos e amplamente utilizados no modelo óptico para descrever processos de espalhamento nuclear, como mencionado anteriormente na Seção 2.2.1. Sua popularidade se deve à simplicidade de sua forma analítica e à capacidade de reproduzir, de forma satisfatória, os principais aspectos do espalhamento. Na seção anterior, apresentou-se sua formulação considerando apenas o raio nuclear associado à distribuição de matéria do núcleo. Agora, no contexto do potencial de interação entre dois núcleos, é necessário utilizar um raio dependente tanto do projétil quanto do alvo, dado por

$$R = r_0(A_p^{1/3} + A_t^{1/3}), \quad (2.156)$$

onde  $A_p$  e  $A_t$  são os números de massa do projétil e do alvo, respectivamente.

No modelo óptico, o potencial de Woods–Saxon é estendido para incluir não apenas uma parte real, responsável por descrever a interação média, mas também componentes imaginárias para levar em conta a absorção do fluxo de partículas para canais inelásticos e de reação. Cada termo do potencial é descrito por três parâmetros geométricos: a profundidade  $W$ , o raio  $r_w$  e a difusividade  $a_w$  — no caso da componente imaginária. A forma geral é

$$W(r) = -W \left[ 1 + \exp \left( \frac{r - R_w}{a_w} \right) \right]^{-1}, \quad (2.157)$$

onde  $R_w = r_w(A_p^{1/3} + A_t^{1/3})$  define o raio do potencial imaginário. Esses parâmetros  $W$ ,  $r_w$  e  $a_w$  permitem ajustar a absorção para diferentes energias e sistemas.

### 2.4.2.3 Potencial de São Paulo

O SPP é amplamente utilizado para descrever colisões entre íons pesados, especialmente em energias próximas e abaixo da barreira de Coulomb. Ele é baseado no conceito de interação de dupla convolução (*double-folding*), que considera explicitamente a interação efetiva entre os núcleons e as distribuições de densidade de matéria dos núcleos participantes [3, 17]. Essa abordagem permite incorporar informações microscópicas da estrutura nuclear no cálculo do potencial de interação entre os núcleos.

O potencial de dupla convolução é dado por

$$V_F(R) = \int \rho_1(\vec{r}_1) \rho_2(\vec{r}_2) V_0 \delta(\vec{R} - \vec{r}_1 + \vec{r}_2) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2, \quad (2.158)$$

onde  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  são as coordenadas intrínsecas dos núcleons no projétil e no alvo,  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são as densidades nucleares,  $\vec{R}$  é a distância entre os centros de massa e  $V_0 = -456 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^3$

é a intensidade da interação efetiva.

O uso da função delta em  $V_{nn}(\vec{s}) = V_0\delta(\vec{s})$  caracteriza a aproximação de alcance zero, que simplifica o cálculo ao assumir que a interação só ocorre quando os dois núcleons ocupam a mesma posição no espaço. Essa aproximação é válida quando o alcance efetivo da interação núcleon-núcleon é muito menor que a espessura da superfície nuclear. Nessa situação, a integral de convolução torna-se analiticamente tratável, mantendo a física essencial do espalhamento na superfície nuclear, embora ignore detalhes da interação em distâncias finitas.

As densidades nucleares  $\rho_1(r)$  e  $\rho_2(r)$  utilizadas na Eq. 2.158 são fundamentais para a construção do SPP, pois elas encapsulam a distribuição de matéria dos núcleos participantes. Essas distribuições são tipicamente descritas por uma função de Fermi-Dirac com dois parâmetros, também conhecida como *two-parameter Fermi distribution*

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}}, \quad (2.159)$$

onde  $\rho_0$  é a densidade central,  $R_0$  é o raio nuclear e  $a$  é a difusividade, que quantifica a espessura da superfície nuclear. Esses três parâmetros não são completamente livres, já que estão relacionados pela condição de normalização

$$\int_0^\infty \rho(r) r^2 dr = X, \quad (2.160)$$

com  $X$  representando o número total de prótons, nêutrons ou núcleons. O uso de densidades de matéria em vez de apenas densidades de carga (obtidas, por exemplo, pelo espalhamento de elétrons) é crucial para capturar a contribuição dos nêutrons e para descrever corretamente a interação nuclear.

A sistemática adotada no SPP foi construída com base em cálculos microscópicos de Dirac-Hartree-Bogolyubov (DHB) [38] e também ajustada a partir de dados experimentais de densidade de carga. A versão original do modelo foi desenvolvida para núcleos aproximadamente esféricos, para os quais se determinou uma difusividade média  $a = 0.56$  fm. O raio nuclear, por sua vez, é parametrizado como

$$R_0 = (1.31 A^{1/3} - 0.84) \text{ fm}, \quad (2.161)$$

onde  $A$  é o número de massa do núcleo.

Além do potencial de dupla convolução  $V_F(R)$ , o SPP incorpora de forma fenomenológica os efeitos da não-localidade dinâmica da interação nuclear por meio de um fator exponencial que depende da velocidade relativa entre os núcleons. O potencial de São

Paulo completo, dependente da energia, é dado por

$$V_{SP}(R, E) = V_F(R) e^{-\frac{4v^2}{c^2}}, \quad (2.162)$$

onde  $v$  é a velocidade relativa entre os núcleos e  $c$  é a velocidade da luz. Substituindo explicitamente a forma do potencial de dupla convolução, temos:

$$V_{SP}(R, E) = \int \rho_1(\vec{r}_1) \rho_2(\vec{r}_2) V_0 \delta(\vec{R} - \vec{r}_1 + \vec{r}_2) e^{-\frac{4v^2}{c^2}} d\vec{r}_1 d\vec{r}_2. \quad (2.163)$$

A Fig. 8 apresenta esquematicamente as coordenadas envolvidas na Eq. 2.163.

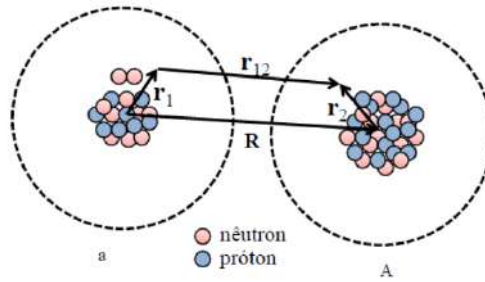


Figura 8: Diagrama ilustrando a interação entre um núcleon do alvo e um núcleon do projétil, com indicação das coordenadas relativas utilizadas na convolução [39].

Para cálculos práticos no modelo óptico (Eq. 2.147), o potencial de São Paulo é multiplicado por fatores de normalização real ( $N_r$ ) e imaginário ( $N_i$ ), de modo que

$$V(r) = (N_r + iN_i) V_{SP}(r), \quad (2.164)$$

com valores típicos  $N_r \approx 1$  e  $N_i \approx 0.78$  em cálculos de um canal [12], embora esses fatores possam ser ajustados para levar em conta acoplamentos fortes ao canal elástico, como será discutido em seções posteriores.

Em resumo, o SPP combina informações microscópicas sobre a estrutura dos núcleos por meio das densidades de matéria com uma correção fenomenológica para a não-localidade, oferecendo uma descrição realista e bem-sucedida para a interação núcleo-núcleo em colisões de íons pesados.

### 3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os cálculos de canais acoplados foram realizados utilizando o código FRESKO [40]. No potencial óptico, adotou-se o SPP tanto para a parte real quanto para a imaginária, com fatores de normalização  $N_r = 1.0$  para a parte real e  $N_i = 0.6$  para a parte imaginária. O coeficiente  $N_i = 0.6$  contabiliza a perda de fluxo para canais não incluídos explicitamente no cálculo, em energias acima da barreira coulombiana [13]. Esse efeito também pode ser reproduzido com um potencial do tipo Woods-Saxon na parte imaginária, utilizando os parâmetros geométricos  $(W, r_w, a_w)$ . Quando todos os canais relevantes são incluídos explicitamente no formalismo de canais acoplados, o potencial Woods-Saxon é geralmente preferido para simular a absorção de fluxo por fusão, por fornecer uma representação mais adequada desse processo, sendo utilizado como um potencial interno.

Os estados excitados mais relevantes foram identificados por meio de análise sistemática das distribuições angulares. Os parâmetros nucleares utilizados nos cálculos provêm de duas fontes complementares:

1. Para núcleos par-par, os parâmetros de deformação ( $\beta_\lambda$ ) foram obtidos do NNDC [28] e dos trabalhos de Raman et al. [41], os quais adotam  $r_0 = 1.2$  fm. Como em nosso trabalho foi adotado  $r_0 = 1.06$  fm, os parâmetros foram normalizados.
2. Para todos os núcleos (incluindo par-par, ímpar-par e ímpar-ímpar), as probabilidades de transição eletromagnética ( $B(E\lambda)$ ) obtidas a partir do NNDC [28] forneceram uma verificação independente dos elementos de matriz.

Os cálculos dos elementos de matriz utilizados no formalismo de canais acoplados foram realizados com o auxílio de um código desenvolvido em FORTRAN (Apêndice A.1), proporcionando uma implementação flexível e minimizando o risco de erros de cálculo.

Esta combinação de fontes permitiu a determinação dos acoplamentos nucleares, conforme ilustrado na Fig. 9. No caso particular do  ${}^9\text{Be}$  (sistema ímpar-par), a análise confirmou a necessidade de considerar apenas o estado fundamental ( $J^\pi = \frac{3}{2}^-$ ), dada a ausência de estados excitados ligados.

Nas subseções seguintes, são apresentados os resultados dos cálculos de canais acoplados, começando pela análise dos efeitos das variações do NMDD na barreira coulombiana,

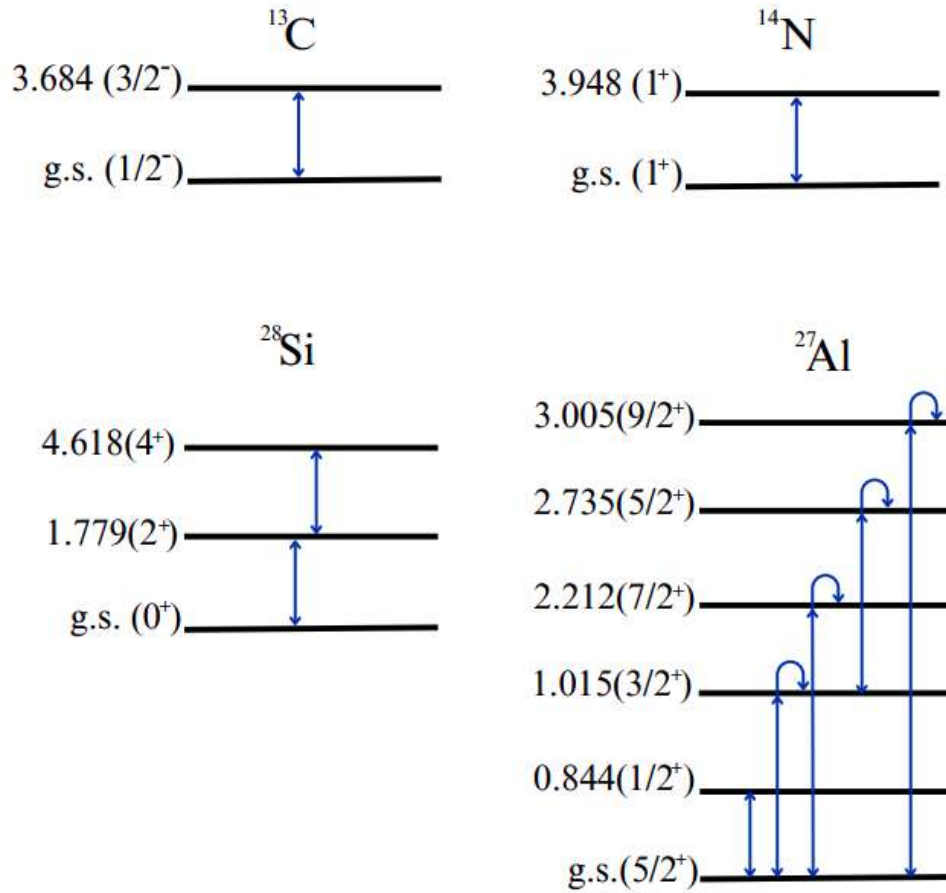


Figura 9: Esquema de níveis dos acoplamentos nucleares incluídos nos cálculos, destacando os estados com maior influência nas distribuições elásticas.

e posteriormente detalhando os resultados para os diferentes núcleos-alvo estudados.

### 3.0.1 Efeitos das variações do NMDD na barreira coulombiana

Em Ref. [3], foi examinada a sensibilidade do potencial na região superficial a pequenas variações no parâmetro NMDD. A Fig. 10 mostra como essas variações afetam a barreira coulombiana para os sistemas estudados nesta dissertação. Observa-se que o aumento do NMDD reduz a altura da barreira, aumenta seu raio e a torna menos larga.

Esses efeitos são cruciais para a compreensão dos resultados apresentados nas próximas subseções. A redução da altura da barreira, por exemplo, aumenta a penetrabilidade; o aumento do raio influencia a localização do pico de Fresnel; e a menor largura altera a interferência entre os potenciais nuclear e coulombiano.

As Figs. 11a-d mostram as distribuições de densidade de matéria calculadas para os núcleos analisados. Nota-se que o valor sistemático do parâmetro de difusividade ( $a_m = 0,56$  fm) apresenta a melhor concordância com os resultados obtidos a partir dos

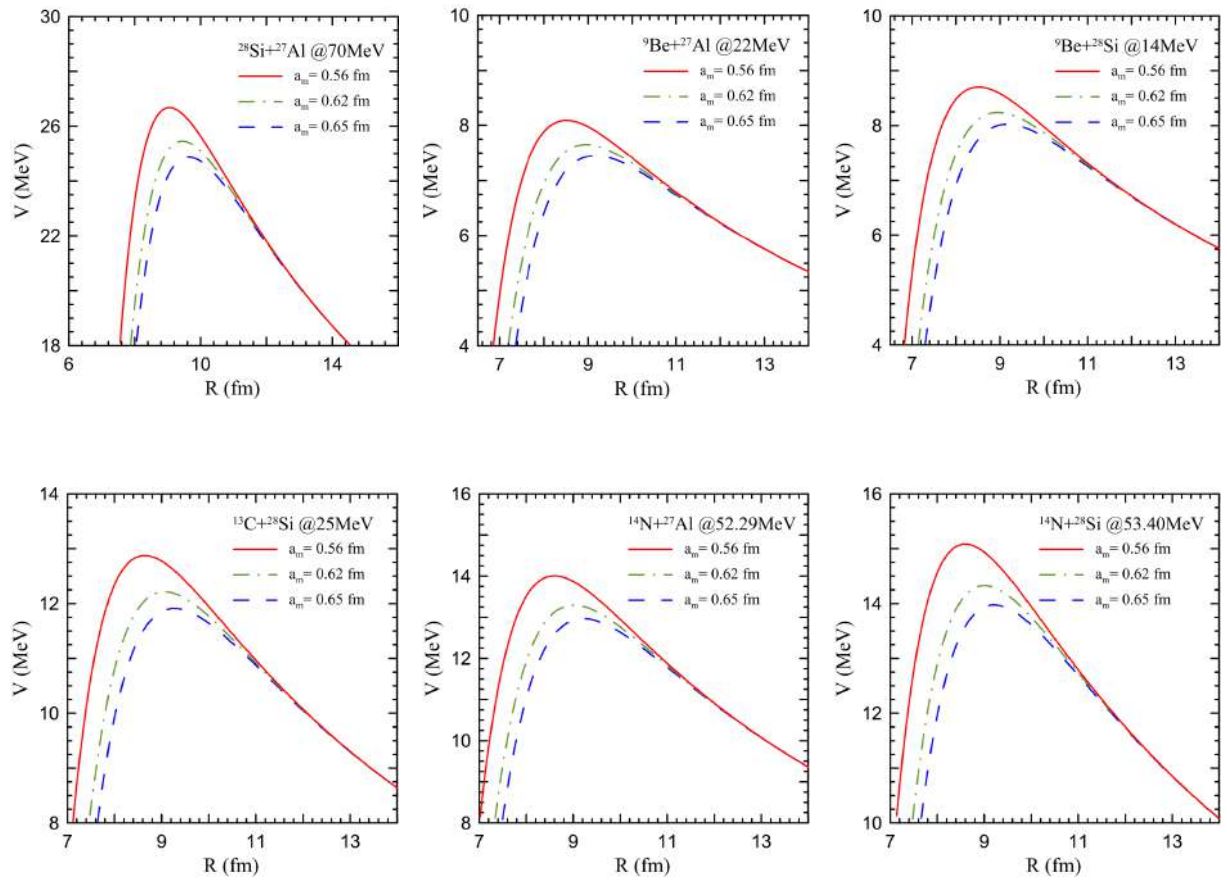


Figura 10: Efeitos das variações do NMDD na barreira Coulomb utilizando o SPP.



cálculos DHB, especialmente na região superficial, onde a sensibilidade às variações da densidade é mais acentuada. Os painéis b e d apresentam essas densidades em escala linear, evidenciando ainda mais a boa aproximação da sistemática em relação ao DHB.

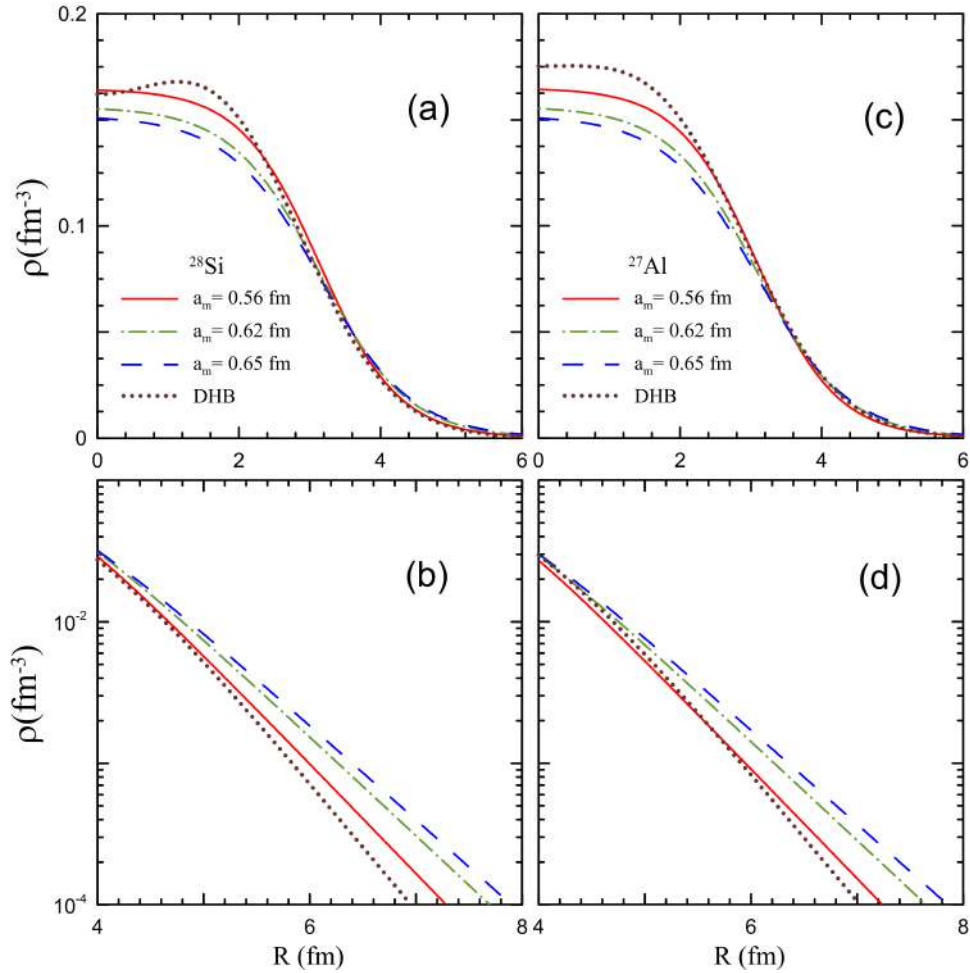


Figura 11: Densidades de matéria nuclear para diferentes valores do NMDD.

### 3.0.2 Resultados para o alvo $^{28}\text{Si}$

Como discutido anteriormente, o parâmetro NMDD afeta principalmente a região superficial do potencial, influenciando significativamente o espalhamento em ângulos traseiros. Conforme será demonstrado nesta seção, o aumento do NMDD atenua as distribuições angulares do espalhamento elástico em ângulos maiores.

Os sistemas estudados -  $^9\text{Be} + ^{28}\text{Si}$ ,  $^{13}\text{C} + ^{28}\text{Si}$  e  $^{14}\text{N} + ^{28}\text{Si}$  - foram analisados utilizando os mesmos parâmetros do potencial Woods-Saxon imaginário, conforme mostrado na Tabela 3. Estes parâmetros foram escolhidos para garantir que o potencial permaneça interno à barreira coulombiana em todos os casos.

Entre esses sistemas, o  $^9\text{Be} + ^{28}\text{Si}$  merece atenção especial devido às propriedades

Tabela 3: Parâmetros do potencial Woods-Saxon imaginário para os sistemas com  $^{28}\text{Si}$  como alvo

Sistema	$W$ (MeV)	$r_w$ (fm)	$a_w$ (fm)
$^9\text{Be} + ^{28}\text{Si}$	50.0	0.95	0.2
$^{13}\text{C} + ^{28}\text{Si}$	50.0	0.95	0.2
$^{14}\text{N} + ^{28}\text{Si}$	50.0	1.06	0.2

únicas do núcleo de  $^9\text{Be}$ . Seu baixo limiar de quebra (*low breakup threshold*) resulta em acoplamentos significativos com canais de *continuum* e processos de transferência, levando a uma maior absorção de fluxo no canal elástico em comparação com os outros sistemas. Este efeito será particularmente evidente nos resultados apresentados a seguir, onde se observa uma supressão mais pronunciada da seção de choque elástica.

As Figs. 12 e 13 mostram a comparação entre as distribuições angulares experimentais e teóricas do espalhamento elástico para o sistema  $^9\text{Be} + ^{28}\text{Si}$  nas energias de 14 MeV e 26 MeV, respectivamente. No painel (a), são comparados os resultados obtidos com os potenciais imaginários internos do tipo SPP e WS. A linha vermelha contínua representa o potencial SPP para a parte imaginária calculada com a sistemática NMDD, enquanto a linha roxa tracejada corresponde ao potencial imaginário interno WS. No painel (b), são comparados os resultados utilizando diferentes valores de NMDD, onde o SPP foi utilizado consistentemente para a parte imaginária em todos os casos. A linha vermelha mantém o mesmo significado do painel (a); a curva verde tracejada com pontos representa o valor NMDD com  $a_m = 0.62$  fm, e a linha azul tracejada corresponde a  $a_m = 0.65$  fm.

Para a energia de 14 MeV (Fig. 12a), o resultado utilizando o potencial WS na parte imaginária subestima os dados de espalhamento elástico, enquanto o SPP descreve bem os dados. Entretanto, nem o WS nem o SPP conseguem explicar completamente as oscilações observadas nos dados experimentais em ângulos traseiros. O potencial WS reduz a seção de choque elástica em comparação com o SPP. Contudo, nenhum dos dois consegue descrever satisfatoriamente as oscilações presentes nos dados experimentais em ângulos maiores.

Como pode ser observado na Fig. 12b, para ângulos  $\theta < 50^\circ$ , as diferenças entre as curvas correspondentes aos diferentes valores de NMDD são muito pequenas. Para ângulos entre  $50^\circ$  e  $90^\circ$ , os resultados teóricos para  $a_m = 0.62$  fm mostram boa concordância com os dados experimentais. No entanto, para ângulos traseiros, o valor sistemático ( $a_m = 0.56$  fm) fornece uma descrição mais adequada dos dados, apesar da ausência de oscilações nos cálculos teóricos.

Concluindo, para ambas as energias de 14 MeV e 26 MeV, a distribuição angular do espalhamento elástico utilizando o SPP para a parte imaginária apresenta melhor concor-

dância com os dados experimentais do que os resultados obtidos com o potencial WS. Isso ocorre porque o SPP imaginário com coeficiente de intensidade 0.6 explica efetivamente os canais de reação, como o canal de quebra do  $^9\text{Be}$ , que foi negligenciado no esquema de CC. Além disso, os resultados associados ao valor sistemático do NMDD descrevem melhor os dados experimentais. Como mencionado anteriormente, o aumento do NMDD reduz a altura efetiva da barreira, aumentando a absorção de fluxo dos canais de espalhamento elástico e consequentemente suprimindo a seção de choque elástica.

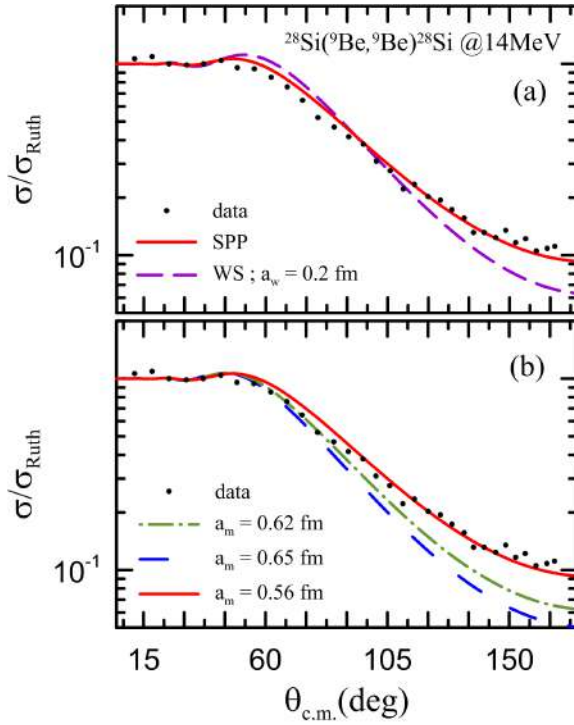


Figura 12: Comparação entre as distribuições angulares experimentais e teóricas do espalhamento elástico para o sistema  $^9\text{Be} + ^{28}\text{Si}$  a 14 MeV. Os dados experimentais foram obtidos de Ref. [42].

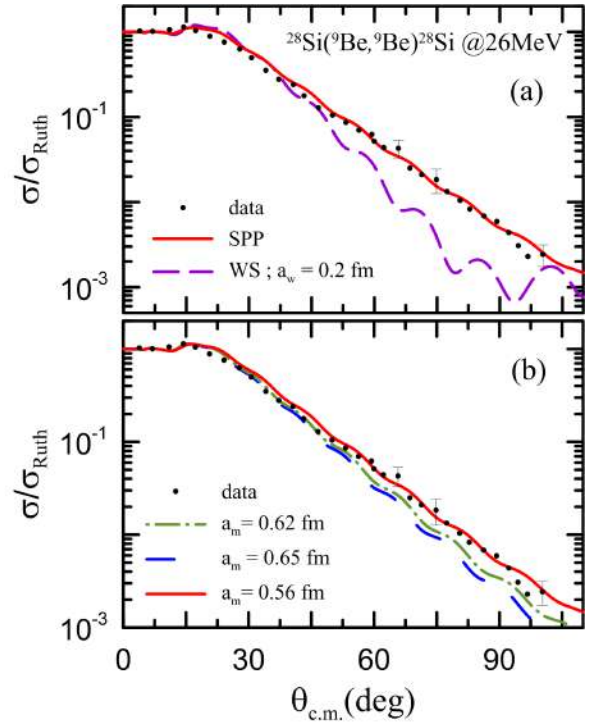


Figura 13: Comparação entre as distribuições angulares experimentais e teóricas do espalhamento elástico para o sistema  $^9\text{Be} + ^{28}\text{Si}$  a 26 MeV. Os dados experimentais foram obtidos da Ref. [42].

Uma abordagem similar foi adotada para o sistema  $^{14}\text{N} + ^{28}\text{Si}$ . A Fig. 14 apresenta a distribuição angular do espalhamento elástico a 53.40 MeV. A comparação entre as seções de choque elásticas usando os potenciais SPP e WS é mostrada na Fig. 14a. Quando o potencial WS é utilizado na parte imaginária do potencial óptico, o resultado teórico subestima os dados experimentais e exibe oscilações não presentes na distribuição angular medida. Por outro lado, o cálculo utilizando o SPP mostra concordância significativamente melhor com os dados. Devido a essa melhor descrição, o SPP foi adotado na análise subsequente do parâmetro NMDD.

A Fig. 14b ilustra a sensibilidade da distribuição angular a variações no parâmetro

de difusividade NMDD do alvo. Como observado, o aumento do valor de  $a_m$  leva a uma redução na seção de choque, especialmente em ângulos traseiros. A melhor concordância global é obtida com o valor sistemático  $a_m = 0.56$  fm. Este comportamento pode estar relacionado ao acoplamento com canais de reação que são efetivamente considerados pelas características absorptivas de superfície do SPP (com  $N_i = 0.6$  fm). Por exemplo, com base na análise de valores-Q reportados em Ref. [43], um canal de captura de dêuteron como  $^{28}\text{Si}(^{14}\text{N}, ^{12}\text{C})^{30}\text{P}$ , com valor-Q de 1.571 MeV, pode contribuir significativamente para a absorção, particularmente na região superficial.

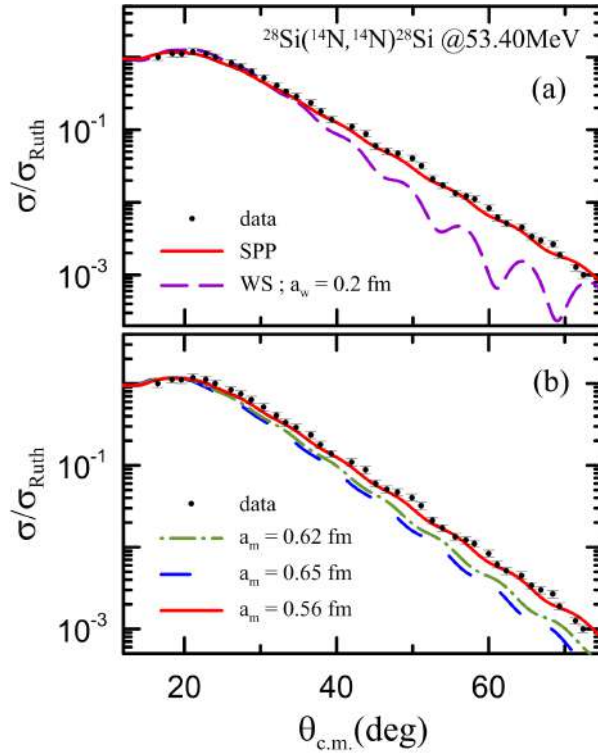


Figura 14: Comparação entre as distribuições angulares experimentais e teóricas do espalhamento elástico para o sistema  $^{14}\text{N} + ^{28}\text{Si}$  a 53.40 MeV. Os dados experimentais foram obtidos de [44].

Assim, como pode ser observado, durante todo o intervalo angular o uso da sistemática descreve razoavelmente bem os dados experimentais.

As Figs. 15, 16 e 17 mostram a comparação entre as distribuições angulares teóricas e experimentais do espalhamento elástico para o sistema  $^{13}\text{C} + ^{28}\text{Si}$  nas energias de 25 MeV, 30 MeV e 34 MeV, respectivamente.

Nas Figs. 15-17a, são comparadas as distribuições angulares de espalhamento elástico obtidas utilizando os potenciais SPP e WS na parte imaginária do modelo óptico. Observa-se que o potencial WS apresenta melhor concordância com os dados experimentais para as três energias estudadas. A 25 MeV (Fig. 15a), o ajuste aos dados experimentais é

similar para ambos os potenciais imaginários - enquanto um descreve melhor os ângulos maiores (WS), o outro reproduz melhor o pico de Fresnel (SPP). Ambos os potenciais descrevem razoavelmente bem os dados experimentais para 30 MeV (Fig. 16a). Já a 34 MeV (Fig. 17a), o potencial SPP superestima a seção de choque elástica, enquanto o potencial WS a subestima, porém ainda apresenta melhor concordância geral com os dados experimentais. A descrição inadequada dos dados por ambos os potenciais pode indicar que canais de reação não considerados nos cálculos tornam-se importantes neste regime de energia.

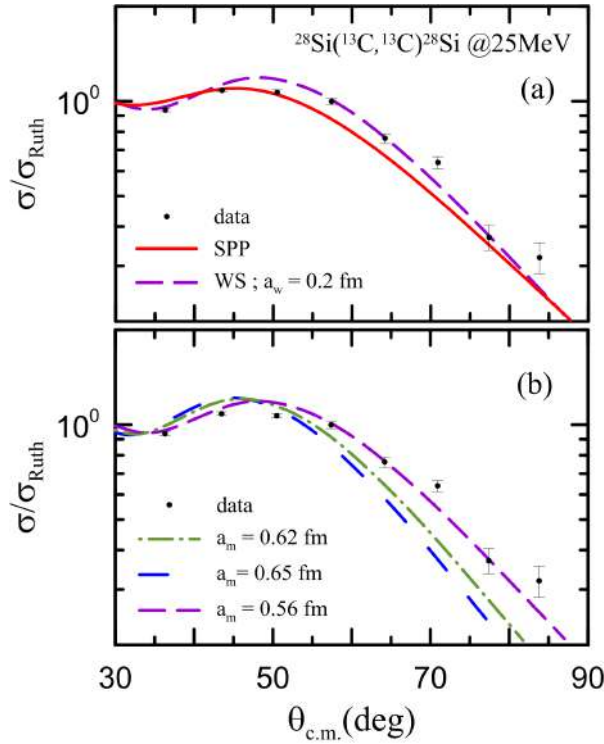


Figura 15: Comparação entre as distribuições angulares experimentais e teóricas do espalhamento elástico para o sistema  $^{13}\text{C} + ^{28}\text{Si}$  a 25 MeV. Os dados experimentais foram obtidos de [45].

As Figs. 15-17b mostram a análise das distribuições angulares de espalhamento elástico utilizando o potencial WS na parte imaginária do potencial óptico e o SPP na parte real, com três diferentes valores de NMDD. O valor sistemático de NMDD fornece o melhor ajuste aos dados experimentais para todas as energias, enquanto os outros valores de NMDD sugeridos em Ref. [21] subestimam os dados.

Em suma, para todos os sistemas e energias estudados com  $^{28}\text{Si}$  como alvo, independente da energia, o melhor acordo com os dados experimentais de espalhamento elástico foi obtido utilizando o valor sistemático de NMDD no potencial SPP ( $a_m=0.56$  fm).

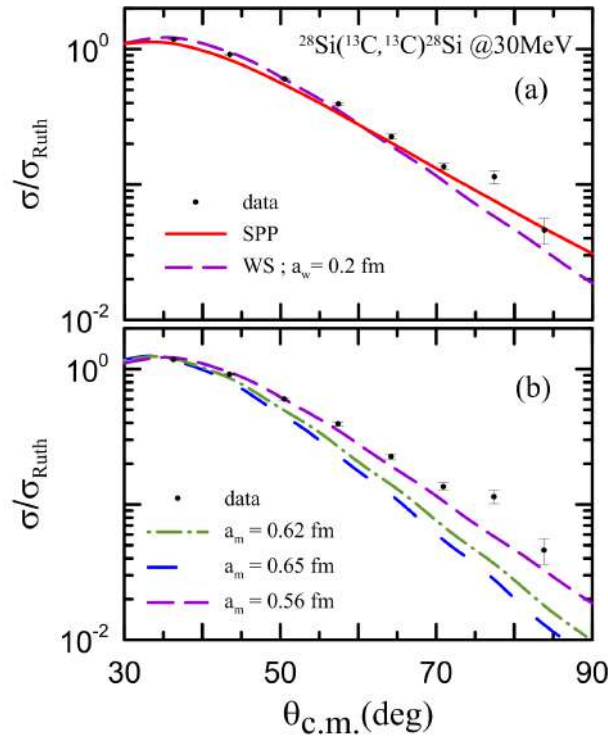


Figura 16: Comparação entre as distribuições angulares experimentais e teóricas do espalhamento elástico para o sistema  $^{13}\text{C} + ^{28}\text{Si}$  a 30 MeV. Os dados experimentais foram obtidos de [45].

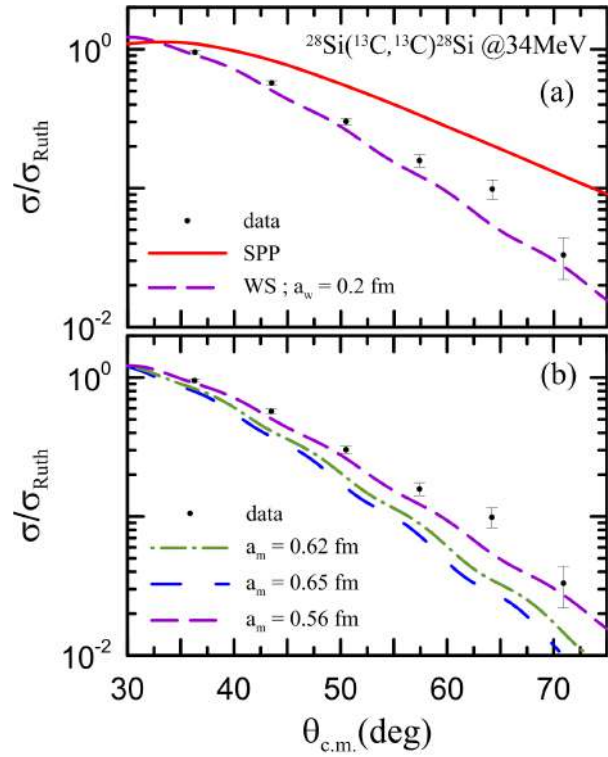


Figura 17: Comparação entre as distribuições angulares experimentais e teóricas do espalhamento elástico para o sistema  $^{13}\text{C} + ^{28}\text{Si}$  a 34 MeV. Os dados experimentais foram obtidos de [45].



### 3.0.3 Resultados para o $^{27}\text{Al}$

A metodologia descrita na subseção anterior foi aplicada aos sistemas  $^9\text{Be} + ^{27}\text{Al}$ , a 22 e 25 MeV, e  $^{14}\text{N} + ^{27}\text{Al}$ , a 55.29 MeV. Com o objetivo de comparar diferentes descrições para a parte imaginária do potencial óptico, foram utilizados tanto o potencial do tipo WS quanto o SPP. Os parâmetros adotados para o potencial WS estão apresentados na Tabela 4, enquanto, para o SPP, foi aplicado um fator de normalização de 0.6 na parte imaginária. Além disso, foram analisados os efeitos de variações nos parâmetros NMDD sobre as distribuições angulares de espalhamento elástico.

Tabela 4: Parâmetros dos potenciais imaginários utilizados nos sistemas com  $^{27}\text{Al}$  como alvo.

Sistema	$E_{\text{lab}}$ (MeV)	Potencial	$W$ (MeV)	$r_w$ (fm)	$a_w$ (fm)
$^9\text{Be} + ^{27}\text{Al}$	22	WS	50.0	0.95	0.2
$^9\text{Be} + ^{27}\text{Al}$	25	WS	50.0	0.95	0.2
$^{14}\text{N} + ^{27}\text{Al}$	52.29	WS	50.0	1.06	0.2
Todos os sistemas	—	SPP (normalizado)	—	—	—

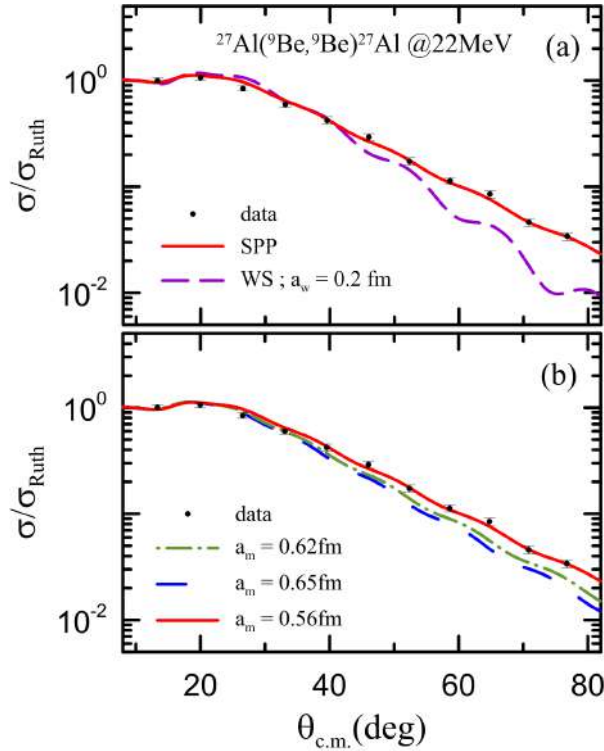


Figura 18: Comparação entre distribuições angulares de espalhamento elástico experimental e teórica para o sistema  $^9\text{Be} + ^{27}\text{Al}$  a 22 MeV. Os dados experimentais são retirados da Ref. [42].

As Figs. 18 e 19 mostram as comparações entre dados experimentais e distribuições angulares teóricas de espalhamento elástico para o sistema  $^9\text{Be} + ^{27}\text{Al}$  em energias inci-

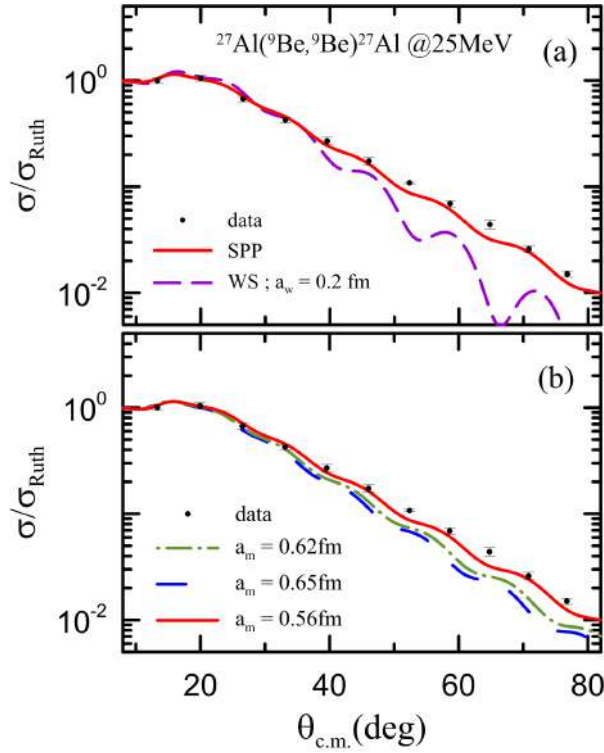


Figura 19: Comparação entre distribuições angulares de espalhamento elástico experimental e teórica para o sistema  ${}^9\text{Be} + {}^{27}\text{Al}$  a 25 MeV. Os dados experimentais foram retirados de [46].

centes de 22 MeV e 25 MeV, respectivamente. O acordo entre os dados experimentais e os cálculos usando os potenciais SPP e WS é apresentado nas Figs. 18a e 19a. Além disso, as Figs. 18b e 19b ilustram a influência das variações nos parâmetros NMDD na seção de choque de espalhamento elástico.

Como pode ser visto nas Figs. 18a e 19a, ambos os potenciais fornecem uma boa descrição da distribuição angular experimental até  $35^\circ$ . No entanto, além desse ângulo, os resultados com o potencial WS subestimam os dados. As variações no NMDD (Figs. 18 e 19b) indicam que as melhores descrições da distribuição angular elástica são obtidas usando o valor sistemático de  $a_m = 0.56$  fm para ambas as energias.

Para o sistema  ${}^{14}\text{N} + {}^{27}\text{Al}$  a 52.29 MeV, a seção de choque elástica é mostrada na Fig. 20. A Fig 20a apresenta a distribuição angular calculada usando os potenciais SPP e WS. O resultado obtido com o potencial WS na parte imaginária do potencial óptico subestima os dados experimentais. Ele exibe um comportamento oscilatório que não é observado na distribuição medida. Por outro lado, quando o SPP é usado na parte imaginária, a previsão teórica fornece uma descrição melhor dos dados experimentais. No entanto, ainda subestima ligeiramente a seção de choque. Uma possível explicação para essa discrepância seria a contribuição do canal de transferência associado à reação de



captura de dêuteron,  $^{27}\text{Al}(^{14}\text{N}, ^{16}\text{O})^{25}\text{Mg}$ , que tem um valor  $Q$  de 3.596 MeV, que não foi considerado nos cálculos atuais. A Figura 20b mostra os resultados obtidos com o SPP sob variações do parâmetro de difusividade NMD. Como observado, o melhor acordo é alcançado com o valor sistemático.

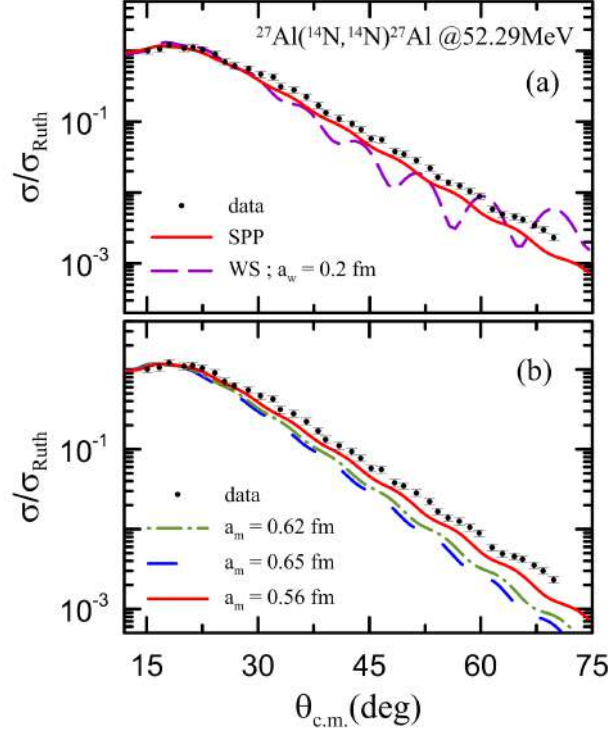


Figura 20: Comparação entre distribuições angulares de espalhamento elástico experimental e teórica para o sistema  $^{14}\text{N} + ^{27}\text{Al}$ . Os dados experimentais foram retirados de [44].

Como observado nos sistemas com alvo  $^{28}\text{Si}$ , os resultados para o alvo  $^{27}\text{Al}$  indicam que o valor sistemático NMDD no SPP fornece a melhor descrição dos dados de espalhamento elástico para todos os sistemas e energias estudados. Em contraste, quando os valores NMDD sugeridos por [21] são usados, a seção de choque elástica teórica diminui pelas razões discutidas acima.

### 3.0.4 Sistema $^{28}\text{Si} + ^{27}\text{Al}$

A investigação dos efeitos do NMDD na distribuição angular de espalhamento elástico será estendida ao sistema  $^{28}\text{Si} + ^{27}\text{Al}$  nas energias de 70, 80, 90 e 100 MeV. Em contraste com análises anteriores onde variações do NMDD foram aplicadas a núcleos individuais ( $^{28}\text{Si}$  ou  $^{27}\text{Al}$ ), nesta subseção, ambas as distribuições de matéria do projétil ( $^{28}\text{Si}$ ) e do alvo ( $^{27}\text{Al}$ ) serão modificadas simultaneamente.

Em nossos cálculos anteriores com CC, quando foi utilizado um fator de forma de

WS para a parte imaginária do potencial, os parâmetros foram escolhidos para absorver o fluxo dentro da barreira de Coulomb, com  $W = 50.0$  MeV,  $r_w = 1.06$  fm e  $a_w = 0.2$  fm. Nesta subseção, também consideramos um valor maior para a difusividade da parte imaginária,  $a_w = 0.75$ , para as energias mais altas, a fim de incluir efetivamente canais de reação adicionais não tratados no esquema de acoplamento. Essa alteração permite que o potencial imaginário alcance a região superficial da interação nuclear.

Os valores específicos dos parâmetros adotados para cada energia estudada estão resumidos na Tabela 5. Ressaltamos que  $a_w$  refere-se à difusividade do potencial imaginário de Woods-Saxon, enquanto  $a_m$  corresponde à difusividade da densidade de matéria, conforme discutido anteriormente.

$E_{\text{lab}}$ (MeV)	$W$ (MeV)	$r_w$ (fm)	$a_w$ (fm)
70	50	1.06	0.2
80	50	1.06	0.75
90	50	1.06	0.75
100	50	1.06	0.75

Tabela 5: Parâmetros do potencial WS para o sistema  $^{28}\text{Si} + ^{27}\text{Al}$  nas diferentes energias estudadas.

As seções de choque elásticas para  $^{28}\text{Si} + ^{27}\text{Al}$  são mostradas na Fig. 21 para todas as energias investigadas: 70 MeV (a,e), 80 MeV (b,f), 90 MeV (c,g) e 100 MeV (d,h).

Como nas subseções anteriores, começamos comparando a distribuição angular de espalhamento elástico CC usando os potenciais SPP e WS (Figs. 21a-d) na parte imaginária. A comparação revelou que o potencial WS concorda melhor com os dados de espalhamento elástico em toda a faixa de energia investigada (70-100 MeV). Então, examinamos sistematicamente como as mudanças no NMDD afetam as seções de choque elásticas usando o potencial WS.

As Figs. 21e-h apresentam as seções de choque elásticas calculadas para cada valor de NMDD. A distribuição de matéria sistemática ( $a_m = 0.56$  fm) fornece a melhor descrição geral dos dados experimentais em todo o intervalo de energia. No entanto, os outros valores de NMDD testados - usados simultaneamente em ambos  $^{28}\text{Si}$  e  $^{27}\text{Al}$  - subestimaram significativamente os dados experimentais.

Notavelmente, a 100 MeV, embora nenhum dos cálculos teóricos reproduza o fraco comportamento oscilatório observado nos dados experimentais para ângulos  $\theta > 50^\circ$ , a distribuição de densidade sistemática ( $a_m = 0.56$  fm) apresenta boa concordância com a seção de choque elástica para  $\theta < 50^\circ$ . Acredita-se que, nessa energia mais elevada, canais de transferência tenham um papel significativo, mas não estão incluídos nos cálculos realizados.

De maneira concisa, assim como nos sistemas em que apenas um dos dois núcleos apresentava variações no NMDD, observa-se que a sistemática oferece melhor desempenho — o que também se verifica, de forma consistente, para este sistema em todas as energias analisadas.

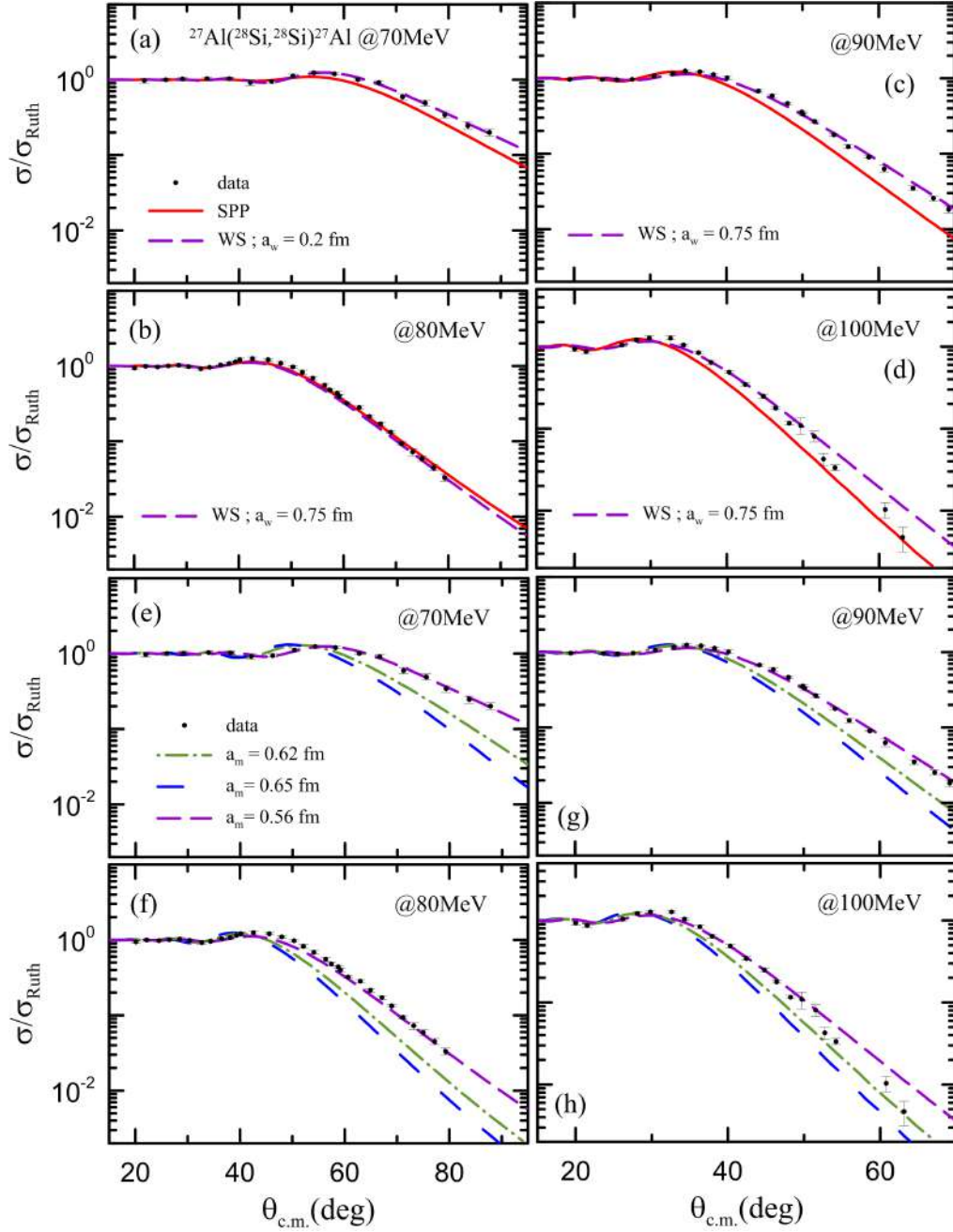


Figura 21: Comparação entre distribuições angulares de espalhamento elástico experimental e teórica para o sistema  $^{28}\text{Si} + ^{27}\text{Al}$ . Os dados experimentais foram retirados de [44].

## 4 Conclusões

Neste trabalho, realizamos cálculos de canais acoplados para os sistemas  ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$ ,  ${}^{14}\text{N}+{}^{28}\text{Si}$ ,  ${}^{13}\text{C}+{}^{28}\text{Si}$ ,  ${}^9\text{Be}+{}^{27}\text{Al}$ ,  ${}^{14}\text{N}+{}^{27}\text{Al}$  e  ${}^{28}\text{Si}+{}^{27}\text{Al}$  em energias próximas à barreira coulombiana (2–3 vezes o valor da barreira), com o objetivo de investigar como modificações na sistemática da densidade de matéria nuclear dos núcleos  ${}^{27}\text{Al}$  e  ${}^{28}\text{Si}$  influenciam a descrição das distribuições angulares elásticas.

Nossos resultados demonstraram que, para energias próximas à barreira coulombiana, a sistemática padrão da densidade de matéria nuclear, com  $a_m = 0.56$  fm, fornece descrições mais consistentes em comparação com os valores alterados  $a_m = 0.62$  fm e  $a_m = 0.65$  fm. Isso indica que a mudança na densidade de matéria – um efeito estático – não é adequada para simular efeitos dinâmicos de reação nessa região de energia. Portanto, dentro do formalismo do SPP, o valor sistemático  $a_m = 0.56$  fm permanece como o mais apropriado para descrever a dinâmica de reações nucleares envolvendo os núcleos  ${}^{27}\text{Al}$  e  ${}^{28}\text{Si}$ .

Além disso, reforçamos que ajustes na densidade de matéria nuclear devem ser evitados como forma de incorporar efeitos dinâmicos, uma vez que tais modificações correspondem a alterações estáticas nas propriedades do núcleo.

Dessa forma, este trabalho consolidou a sistemática tradicional para a densidade de matéria nuclear para os núcleos estudados.

# REFERÊNCIAS

- [1] M. A. Cândido Ribeiro et al. “Pauli Nonlocality in Heavy-Ion Rainbow Scattering: A Further Test of the Folding Model”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 78 (17 abr. de 1997), pp. 3270–3273. DOI: [10.1103/PhysRevLett.78.3270](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.78.3270). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.3270>.
- [2] L. C. Chamon et al. “Nonlocal Description of the Nucleus-Nucleus Interaction”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 79 (26 dez. de 1997), pp. 5218–5221. DOI: [10.1103/PhysRevLett.79.5218](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.79.5218). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.79.5218>.
- [3] L. C. Chamon et al. “Toward a global description of the nucleus-nucleus interaction”. Em: *Phys. Rev. C* 66 (1 jul. de 2002), p. 014610. DOI: [10.1103/PhysRevC.66.014610](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.66.014610). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.66.014610>.
- [4] M. S. Hussein et al. “New manifestation of the dispersion relation: Breakup threshold anomaly”. Em: *Phys. Rev. C* 73 (4 abr. de 2006), p. 044610. DOI: [10.1103/PhysRevC.73.044610](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.73.044610). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.73.044610>.
- [5] L.F. Canto et al. “Fusion and breakup of weakly bound nuclei”. Em: *Physics Reports* 424.1 (2006), pp. 1–111. ISSN: 0370-1573. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2005.10.006>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015730500459X>.
- [6] F. Gollan et al. “Breakup threshold anomaly in the elastic scattering of the  $^9\text{Be} + ^{80}\text{Se}$  system”. Em: *Nuclear Physics A* 979 (2018), pp. 87–101. ISSN: 0375-9474. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2018.09.003>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037594741830191X>.
- [7] J. M. Figueira et al. “Breakup threshold anomaly in the elastic scattering of  $^6\text{Li}$  on  $^{27}\text{Al}$ ”. Em: *Phys. Rev. C* 75 (1 jan. de 2007), p. 017602. DOI: [10.1103/PhysRevC.75.017602](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.75.017602). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.75.017602>.
- [8] J. L. Ferreira et al. “Multinucleon transfer in the  $^{116}\text{Cd}(^{20}\text{Ne}, ^{20}\text{O})^{116}\text{Sn}$  double charge exchange reaction at 306 MeV incident energy”. Em: *Phys. Rev. C* 105 (1 jan. de

- 2022), p. 014630. DOI: [10.1103/PhysRevC.105.014630](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.105.014630). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.105.014630>.
- [9] A. Spatafora et al. “Multichannel experimental and theoretical approach to the  $^{12}\text{C}(^{18}\text{O}, ^{18}\text{F})^{12}\text{B}$  single-charge-exchange reaction at 275 MeV: Initial-state interaction and single-particle properties of nuclear wave functions”. Em: *Phys. Rev. C* 107 (2 fev. de 2023), p. 024605. DOI: [10.1103/PhysRevC.107.024605](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.107.024605). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.107.024605>.
- [10] I. Ciraldo et al. “Analysis of one-proton transfer reaction in  $^{18}\text{O} + ^{76}\text{Se}$  collisions at 275 MeV”. Em: *Phys. Rev. C* 109 (2 fev. de 2024), p. 024615. DOI: [10.1103/PhysRevC.109.024615](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.109.024615). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.109.024615>.
- [11] Xiao Liu et al. “Microscopic calculations of nuclear incompressibility from cluster radioactivity”. Em: *Phys. Rev. C* 110 (3 set. de 2024), p. 034329. DOI: [10.1103/PhysRevC.110.034329](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.110.034329). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.110.034329>.
- [12] M.A.G. Alvarez et al. “A parameter-free optical potential for the heavy-ion elastic scattering process”. Em: *Nuclear Physics A* 723.1 (2003), pp. 93–103. ISSN: 0375-9474. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0375-9474\(03\)01158-8](https://doi.org/10.1016/S0375-9474(03)01158-8). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947403011588>.
- [13] D. Pereira et al. “An imaginary potential with universal normalization for dissipative processes in heavy-ion reactions”. Em: *Physics Letters B* 670.4 (2009), pp. 330–335. ISSN: 0370-2693. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2008.10.066>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269308013543>.
- [14] L. F. Canto et al. “Improved Wong and classical approximations, and reduction of fusion data”. Em: *Phys. Rev. C* 109 (5 mai. de 2024), p. 054609. DOI: [10.1103/PhysRevC.109.054609](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.109.054609). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.109.054609>.
- [15] L.C. Chamon. “The São Paulo Potential”. Em: *Nuclear Physics A* 787.1 (2007). Proceedings of the Ninth International Conference on Nucleus-Nucleus Collisions, pp. 198–205. ISSN: 0375-9474. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2006.12.032>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037594740601013X>.

- [16] L.R. Gasques et al. “Comparison between heavy-ion reaction and fusion processes for hundreds of systems”. Em: *Nucl. Phys. A* 764 (2006), pp. 135–148. ISSN: 0375-9474. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2005.09.001>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947405010870>.
- [17] L. C. Chamon et al. “Coulomb and nuclear potentials between deformed nuclei”. Em: *Phys. Rev. C* 70 (1 jul. de 2004), p. 014604. DOI: [10.1103/PhysRevC.70.014604](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.70.014604). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.70.014604>.
- [18] B. V. Carlson, L. C. Chamon e L. R. Gasques. “Accurate approximation for the Coulomb potential between deformed nuclei”. Em: *Phys. Rev. C* 70 (5 nov. de 2004), p. 057602. DOI: [10.1103/PhysRevC.70.057602](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.70.057602). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.70.057602>.
- [19] E. Crema et al. “Near-barrier quasielastic scattering as a sensitive tool to derive nuclear matter diffuseness”. Em: *Phys. Rev. C* 84 (2 ago. de 2011), p. 024601. DOI: [10.1103/PhysRevC.84.024601](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.84.024601). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.84.024601>.
- [20] J. F. P. Huiza et al. “Quasi-elastic barrier distribution of the  $^{17}\text{O} + ^{64}\text{Zn}$  system and the derivation of the  $^{17}\text{O}$  nuclear matter diffuseness”. Em: *Phys. Rev. C* 82 (5 nov. de 2010), p. 054603. DOI: [10.1103/PhysRevC.82.054603](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.82.054603). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.82.054603>.
- [21] L. M. Fonseca et al. “Elastic and inelastic scattering of  $^{16}\text{O}$  on  $^{27}\text{Al}$  and  $^{28}\text{Si}$  at 240 MeV”. Em: *Phys. Rev. C* 100 (1 jul. de 2019), p. 014604. DOI: [10.1103/PhysRevC.100.014604](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.100.014604). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.100.014604>.
- [22] J. M. Eisenberg e W. Greiner. *Nuclear Models*. 2nd revised. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1975.
- [23] Kenneth S. Krane, David Halliday e et al. *Introductory nuclear physics*. 1987.
- [24] M.G. Mayer. “Phys. Rev”. Em: 75 (1949), p. 1969.
- [25] O. Haxel, J.H. Jensen e H.E. Suess. “Phys. Rev.” Em: 75 (1949), p. 1766.
- [26] Helio Schechter e Carlos A. Bertulani. *Introdução à Física Nuclear*. Editora UFRJ, 2010.
- [27] J. M. Eisenberg e W. Greiner. *Nuclear Models*. Vol. 1. Nuclear Theory. North-Holland / American Elsevier, 1970.
- [28] National Nuclear Data Center. *National Nuclear Data Center*. <https://www.nndc.bnl.gov>.



- [29] David J. Griffiths. *Mecânica Quântica*. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2020.
- [30] P. E. Hodgson. *Nuclear Reactions and Nuclear Structure*. Oxford: Clarendon Press, 1971.
- [31] H. Feshbach. “A Unified Theory of Nuclear Reactions. II”. Em: *Annals of Physics* 19 (1962), pp. 287–313.
- [32] H. Feshbach. “Unified Theory of Nuclear Reactions”. Em: *Reviews of Modern Physics* 36 (1964), pp. 1076–1120.
- [33] J. Lubian et al. “ $^7\text{Li}$  breakup polarization potential at near barrier energies”. Em: *Nuclear Physics A* 791.1 (2007), pp. 24–35. ISSN: 0375-9474. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2007.04.011>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947407004770>.
- [34] L. F. Canto, B. V. Carlson e R. Donangelo. “Polarization Potentials in Nuclear Physics”. Em: *Brazilian Journal of Physics* 51.2 (2021), pp. 181–192. DOI: [10.1007/s13538-020-00850-y](https://doi.org/10.1007/s13538-020-00850-y). URL: <https://doi.org/10.1007/s13538-020-00850-y>.
- [35] G. R. Satchler. *Direct Nuclear Reactions*. Oxford: Oxford University Press, 1983. ISBN: 9780198511886.
- [36] B. Buck, R. N. Maddison e P. E. Hodgson. “Optical Model Analysis of Nuclear Scattering”. Em: *Philosophical Magazine* 5.59 (1960), pp. 1181–1191. DOI: [10.1080/14786436008238326](https://doi.org/10.1080/14786436008238326).
- [37] Herman Feshbach, Charles E. Porter e Victor F. Weisskopf. “The Formation of a Compound Nucleus in Neutron Reactions”. Em: *Phys. Rev.* 90 (1 abr. de 1953), pp. 166–167. DOI: [10.1103/PhysRev.90.166](https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.90.166). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.90.166>.
- [38] B. V. Carlson e D. Hirata. “Dirac-Hartree-Bogoliubov approximation for finite nuclei”. Em: *Phys. Rev. C* 62 (5 out. de 2000), p. 054310. DOI: [10.1103/PhysRevC.62.054310](https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.62.054310). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.62.054310>.
- [39] Erica Nunes Cardozo. “Estudo das reações de transferência de um e dois nêutrons no sistema  $^{18}\text{O} + ^{28}\text{Si}$  À 84 MEV”. Tese de Doutorado. Niterói: Universidade Federal Fluminense, 2018. URL: <https://app.uff.br/riuff/handle/1/9793>.
- [40] I. J. Thompson. “Coupled reaction channels calculations in nuclear physics”. Em: *Computer Physics Reports* 7.4 (1988), pp. 167–212.

- [41] S. Raman, C.W. Nestor e P. Tikkanen. “Transition probability from the ground to the first-excited  $2+$  state of even-even nuclides”. Em: *Atomic Data and Nuclear Data Tables* 78.1 (2001), pp. 1–128. ISSN: 0092-640X. DOI: <https://doi.org/10.1006/adnd.2001.0858>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0092640X01908587>.
- [42] K. Bodek et al. “The energy dependence of fusion in the  $9\text{Be}+^{28}\text{Si}$  system”. Em: *Nuclear Physics A* 339.2 (1980), pp. 353–364. ISSN: 0375-9474. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(80\)90099-8](https://doi.org/10.1016/0375-9474(80)90099-8). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375947480900998>.
- [43] National Nuclear Data Center. *Q-Value Calculator*. URL: <https://www.nndc.bnl.gov/qcalc/>.
- [44] J.F. Mateja et al. “A woods-saxon and double-folding optical-model description of  $^{14}\text{N}$  elastic and inelastic scattering from  $^{24}\text{Mg}$ ,  $^{27}\text{Al}$  and  $^{28}\text{Si}$ ”. Em: *Nuclear Physics A* 351.3 (1981), pp. 509–518. ISSN: 0375-9474. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(81\)90185-8](https://doi.org/10.1016/0375-9474(81)90185-8). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375947481901858>.
- [45] R. Linares et al. “Investigation of the one-neutron transfer in  $^{13}\text{C}+^{28}\text{Si}$  at  $E_{\text{lab}} = 30$  and 34 MeV”. Em: *Phys. Rev. C* 101 (1 jan. de 2020), p. 014611. DOI: [10.1103/PhysRevC.101.014611](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.101.014611). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.101.014611>.
- [46] R.M. Anjos et al. “No evidence of break-up effects on the fusion of  $9\text{Be}$  with medium-light nuclei”. Em: *Physics Letters B* 534.1 (2002), pp. 45–51. ISSN: 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(02\)01554-X](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(02)01554-X). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037026930201554X>.

## APÊNDICE A – Código Fortran do programa elemento

```

1 program elemento
2   implicit none
3   real, parameter :: pi = 3.14159265358979323846
4   integer :: choice, lambda, exit_status, ios, Z, reot
5   real :: B, Bwu, A, Ia, Ib, Bup, M, clebsch, pot, coef, beta, r0, R,
6     Mn, Def, Rdef, betanorm, Mnreot, Mreot, cgreot, &
7     Rdefreot
8   character(len=100) :: command
9   character(len=100) :: result_line
10
11  ! Primeira escolha: Uso da transicao eletromagnetica ou uso do beta
12  (raman ou kibedi)
13
14  print *, 'Escolha 1 para calculo de transicao eletromagnetica e 2
15  para o uso do beta (raman ou kibedi)'
16
17  read *, choice
18
19  if (choice == 1) then
20    ! Mudanca de unidade da transicao eletromagnetica
21
22    print *, 'Digite o lambda referente, a massa atomica do nucleo e
23    a transicao de Weisskopf (Bwu):'
24
25    read *, lambda, A, Bwu
26
27    B = Bwu * (1.2)**(2*lambda) / (4.0 * pi) * (3.0 / (lambda +
28    3.0))**2 * A**(2.0/3.0 * lambda)
29
30    print *, 'Apos a transformacao de Weisskopf para e2fm, o valor
31    da transicao e:', B
32
33    ! Agora ha necessidade dessa transicao ser de subida:
34
35    print *, 'Informe o estado inicial (Ia) e o estado final (Ib)'
36
37    read *, Ia, Ib
38
39    Bup = (2*Ib + 1) * B / (2*Ia + 1)
40
41    print *, 'Nossa transicao eletromagnetica de subida e:', Bup

```

```

27
28      ! Calculo de deformacao coulombiana e nuclear
29
30      ! Calculo do elemento de matriz reduzido
31      M = sqrt((2*Ia + 1)*Bup)
32      print *, '0 elemento de matriz reduzido (M) dado as informacoes
          anteriores e:', M
33
34      ! Precisamos agora do clebsch gordan
35
36      ! Define o comando para chamar o script Python
37      command = 'python3 clebsch_calculator.py'
38
39      ! Executa o script Python e captura a saida
40      exit_status = system(command)
41
42      ! Verificar se o script foi executado com sucesso
43      if (exit_status /= 0) then
44          print *, 'Erro ao executar o script Python'
45          stop
46      end if
47
48      ! Le a saida do script Python
49      open(unit=10, file = 'output.txt', status='old', action='read',
          iostat=ios)
50      if (ios /= 0) then
51          print *, 'Erro ao abrir arquivo de saida'
52          stop
53      end if
54
55      ! Le resultado do Clebsch-Gordan do arquivo
56      read(10, '(A)', iostat=ios) result_line
57      if (ios==0) then
58          read(result_line, *) clebsch
59          print *, 'Clebsch-Gordan calculado: ', clebsch
60      else
61          print *, 'Erro ao ler o resultado'
62          close(10)
63          stop
64      end if
65
66      close (10)
67

```

```

68      ! Calculo para elemento de matriz
69      pot = int(Ib-Ia - abs(Ia-Ib))/2
70      coef = (-1)**pot
71      Mn = M/(clebsch * sqrt(2*Ia + 1) * coef)
72      print *, '0 elemento de matriz (Mn) e:', Mn
73
74      ! Calculando beta agora
75      print *, 'Informe o r0 e o numero de protons:'
76      read *, r0, Z
77      R = r0 * A**(1.0/3.0)
78      beta = (4 * pi * Mn) / (3 * Z * (R**lambda))
79      print *, '0 beta e:', beta
80
81      print *, 'A deformacao nuclear depende desse beta, portanto
      podemos acha-lo:'
82
83      Def = beta * R
84      print *, 'A deformacao nuclear e:', Def
85
86      ! Calculo para a deformacao nuclear reduzida
87      RDef = Def * sqrt(2*Ia + 1) * clebsch * coef
88      print *, 'Agora podemos ter a deformacao nuclear reduzida:',
      RDef
89
90      else if (choice == 2) then
91
92          ! Solicitando os dados de entrada
93          print *, 'Forneca as informacoes seguintes: Z, r0, A, a
      multipolaridade e o beta(k), estado inicial e estado final'
94          read *, Z, r0, A, lambda, beta, Ia, Ib
95
96          ! Calculando betanorm e o raio R
97          betanorm = beta * ((1.2)**lambda) / ((1.06)**lambda)
98          R = r0 * (A)**(1.0/3.0)
99
100         ! Exibindo os valores calculados
101         print *, "betanorm =", betanorm
102         print *, "Z =", Z, "r0 =", r0, "A =", A, "R =", R
103
104         ! Calculando Mn
105         Mn = 3 * Z * betanorm * (R**lambda) / (4 * pi)
106         print *, "Mn =", Mn
107

```

```

108      ! Define o comando para chamar o script Python
109      command = 'python3 clebsch_calculator.py'
110
111      ! Executa o script Python e captura a saida
112      exit_status = system(command)
113
114      ! Verifica se o script foi executado com sucesso
115      if (exit_status /= 0) then
116          print *, "Erro ao executar o script Python"
117          stop
118      end if
119
120      ! Le a saida do script Python
121      open(unit=10, file='output.txt', status='old', action='read',
122            iostat=ios)
123      if (ios /= 0) then
124          print *, "Erro ao abrir o arquivo de saida"
125          stop
126      end if
127
128      ! Le o resultado do Clebsch-Gordan do arquivo
129      read(10, '(A)', iostat=ios) result_line
130      if (ios == 0) then
131          read(result_line, *) clebsch
132          print *, "Clebsch-Gordan calculado: ", clebsch
133      else
134          print *, "Erro ao ler o resultado"
135          close(10)
136          stop
137      end if
138
139      close(10)
140
141      ! Calculando o resultado final M
142      M = Mn * clebsch * sqrt(2*Ia + 1) * (-1) ** ((Ia - Ib + abs(Ia -
143      Ib))/2)
144
145      ! Exibindo o resultado final
146      print *, "M =", M
147
148      ! Calculo deformacao nuclear
149      Def = betanorm * R
150      print *, 'A deformacao nuclear e:', Def

```

```

149
150      ! Calculo para a deformacao nuclear reduzida
151      pot = int(Ib-Ia - abs(Ia-Ib))/2
152      coef = (-1)**pot
153      RDef = Def * sqrt(2*Ia + 1) * clebsch * coef
154      print *, 'Agora podemos ter a deformacao nuclear reduzida:',
           RDef
155      beta = betanorm
156  end if
157
158  write(*, '(A)') repeat('-', 80) ! linha com 80 caracteres "-"
159
160  print '(A, F10.4)', 'Valor de M:', M
161  print '(A, F10.4)', 'Valor de Mn:', Mn
162  print '(A, F10.4)', 'Valor de beta:', beta
163  print '(A, F10.4)', 'Valor de Def:', Def
164  print '(A, F10.4)', 'Valor de RDef:', RDef
165
166  ! Reorientacao
167  print *, 'Escolha se quer reorientacao ou nao: S(1) ou N(2):'
168  read *, reot
169
170  if (reot == 1) then
171      print *, beta
172      print *, 'Utilizaremos esse beta para calcular a reorientacao'
173      Mnreot = (3 * Z * beta * ((1.06)*(A)**(1.0/3.0))**lambda)/(4*pi)
174      print *, 'Informe cg'
175      read *, cgreot
176      Mreot = Mnreot * sqrt(2*Ib + 1) * cgreot
177      print '(A, F10.4)', 'Valor de M:', Mreot
178      Rdefreot = Mreot * (4*pi) / (3*Z*((1.06)*(A)**(1.0/3.0))**(lambda-1)
           )
179      print '(A, F10.4)', 'Valor de RDef:', Rdefreot
180  end if
181
182  end program elemento

```

Listing A.1: Código Fortran completo para cálculo de elementos de matriz