

Universidade Federal Fluminense



**Estudo de correlações em estados mistos com luz  
estruturada**

**Daniel Gonzaga Braga**

Volta Redonda  
2025



Daniel Gonzaga Braga

## **Estudo de correlações em estados mistos com luz estruturada**

Tese de Doutorado apresentada ao programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Doutor em Física.

Universidade Federal Fluminense – UFF

Instituto de Física

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Prof. Dr. José Augusto Oliveira Huguenin

Volta Redonda – RJ

2025

Ficha catalográfica automática - SDC/BIF  
Gerada com informações fornecidas pelo autor

B813e Braga, Daniel Gonzaga  
Estudo de correlações em estados mistos com luz estruturada  
/ Daniel Gonzaga Braga. - 2025.  
155 p.: il.

Orientador: José Augusto Oliveira Huguenin.  
Tese (doutorado)-Universidade Federal Fluminense, Instituto  
de Física, Niterói, 2025.

1. Mecânica Quântica. 2. Óptica. 3. Correlações  
Quânticas. 4. Luz Estruturada. 5. Produção intelectual. I.  
Oliveira Huguenin, José Augusto, orientador. II. Universidade  
Federal Fluminense. Instituto de Física. III. Título.

CDD - XXX

Daniel Gonzaga Braga

## **Estudo de correlações em estados mistos com luz estruturada**

Tese de Doutorado apresentada ao programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Doutor em Física.

Trabalho aprovado. Volta Redonda – RJ, 31 de julho de 2025:

---

**Prof. Dr. José Augusto Oliveira  
Huguenin  
Orientador**

---

**Prof. Dr. Stephen Patrick Walborn  
(UdeC)  
Membro Externo**

---

**Profa. Dra. Nadja Kolb Bernardes  
(UFPE)  
Membro Externo**

---

**Prof. Dr. Gabriel Horacio Aguilar  
(CBPF)  
Membro Externo**

---

**Prof. Dr. Daniel Jost Brod (UFF)  
Membro Interno**

Volta Redonda – RJ

2025



*Dedico esta tese àqueles que, diante de uma sociabilidade injusta, ousaram e ousam sonhar e lutar por uma realidade diferente.*



# Agradecimentos

Antes de começarmos os agradecimentos, eu gostaria de indicar a você, leitor/leitora, que acabarei por me delongar por aqui. Acredito que o Daniel de um tempo atrás faria um agradecimento mais curto, mas o de hoje comprehende que, pelo peso que esta tese tem, para além do valor acadêmico e científico, é necessário permitir que ela se estenda até onde for preciso.

Primeiramente, gostaria de agradecer à minha família pelo apoio durante essa jornada. Principalmente aos meus pais, Robert e Rosana, que acreditaram em mim em todo momento, mais do que eu algumas vezes. É importante frisar que só estou aqui hoje porque meus pais trabalharam muito. Eu me lembro da canção de Milton Nascimento “Canção do Sal”, que descreve o trabalho árduo de um trabalhador de salina e que o filho desse sujeito teria uma única preocupação, que seria estudar para, então, vida de gente levar. Foi minha mãe que sempre acreditou que o estudo era o caminho para uma vida melhor para mim. Esta tese é resultado direto do apoio e desejo dela.

Ao meu sobrinho Pedro, eu tenho tanto a agradecer. Tive a possibilidade de te conhecer e acompanhar o seu crescimento ao longo do doutorado; foi extremamente revigorante. Nunca parei para pensar sobre a possibilidade de ser tio; acabou sendo uma das melhores experiências da minha vida. Enquanto escrevo, fico pensando em que momento da vida você lerá este texto, o que estará acontecendo em nossas vidas. Isso com certeza eu não sei, mas sei que, independentemente do que seja, tudo será melhor por ter você comigo. Te amo muito.

Ao meu orientador, José Augusto, tenho uma profunda gratidão. Estamos trabalhando juntos desde a graduação, conto há pelo menos oito anos. Ao longo desse tempo, nem sempre estive bem, nem consegui entregar o quanto gostaria para a pesquisa, mas em todos os momentos o contato com o Zé foi extremamente gentil e humano. Aprendi muito com ele e isso não se limita apenas à parte de pesquisa. É um dos encontros raros que a vida proporciona para a gente. Cabe a mim ser grato por ter tido a possibilidade de ser orientando dele e agora sofrer com o inevitável fim desse ciclo. Tem uma frase de Guimarães Rosa de que gosto muito: “Viver é um rasgar-se e remendar-se” e, para mim, nesse ato de remendo, a gente acaba usando um pouco do pano dado por aqueles que temos por perto. Neste caso, creio que sempre carregarei comigo, com muito carinho, um pouco do retalho do Zé e tomarei muito cuidado para não danificá-lo em cada novo rasgar.

Gostaria de agradecer também a todos que lutam para que a universidade pública seja cada vez mais um espaço plural. Sei que estamos longe de poder dizer que esse é um espaço para todos, infelizmente ainda é um espaço de muitos privilégios. Mas, isso não

anula toda a luta que foi e continua sendo travada para que esse espaço se torne cada vez mais acessível. Sei que, nos últimos anos, isso parece se perder no horizonte, e agora parece que lutamos apenas para não sucumbir ao sucateamento. Mas, ainda acredito que somos capazes de mais, o que só é possível através da luta. Ela é cansativa e inglória, portanto, lhes agradeço por ela. Gostaria de agradecer aos meus camaradas também.

Volto a agradecer ao meu pai, mas por um motivo diferente. Meu pai é torcedor do Fluminense e sou muito grato a ele por não ter feito questão de que seu filho torcesse para o mesmo time que ele, pois a vida me fez Flamengo (na verdade, foi a minha mãe, por ter um tio fanático pelo Flamengo e pelo Zico, mas deixemos a vida levar o crédito por uma questão poética). E sou muito grato ao Clube de Regatas do Flamengo, não apenas pelos momentos enquanto torcedor. Para mim, e imagino que para todo aquele que é apaixonado por futebol, ser Flamengo é muito mais do que futebol, é parte fundamental de mim e da minha memória afetiva. É se alegrar ao encontrar alguém com o uniforme do Flamengo, é se emocionar com o Maracanã lotado cantando, é carregar um sentimento coletivo que atravessa gerações. É saber que em qualquer lugar que eu for, terei um pouco de casa ao ligar a televisão e assistir uma partida de futebol.

Agora chego em um momento complicado para mim. Eu tive a sorte de, ao longo desses anos de graduação, mestrado e agora doutorado, estar sempre próximo de pessoas maravilhosas, de modo que não conseguiria sequer colocar todas aqui. Portanto, acabarei citando aqueles que estiveram mais próximos deste trabalho. Eu gostaria de agradecer imensamente aos meus amigos de laboratório: Guilherme, Bianca, João, Lucas, Gabe, Vitória, João Marcelo, Raiane Souza, Raiane Rosa e Tainara. Aqui gostaria de incluir também os que hoje não estão mais no laboratório, mas por quem guardo um carinho enorme: Marcello e Vinicius. O ambiente que construímos juntos é excepcional e, sinceramente, acho que é raríssimo de se encontrar em qualquer outro lugar. Independentemente de onde eu vá, sentirei muita falta de vocês.

Para mim, é um enorme prazer saber que, deste doutorado, eu não carrego só conhecimento acadêmico, eu carrego nossas memórias, nossos momentos, eu carrego vocês. Espero que, no decorrer da vida, a gente acabe se esbarrando muitas vezes. Conheço muito bem cada um, a ponto de saber que a maioria vai se incomodar por eu ter falado de todos num parágrafo só. Pela quantidade de nomes, eu sei que tu, leitor/leitora, compreendes muito bem o porquê de ter feito isso, e eles também, mas irão fingir que não, só para reclamar. Vocês sabem que, neste texto aqui, não cabe o tanto que gosto de vocês. Teria que, provavelmente, escrever outra tese para isso.

Nesse momento, eu preciso explicar que esta tese não representa apenas o encerramento do meu doutorado, mas também o fim de mais de uma década na UFF. Portanto, esse agradecimento se estende a todo esse tempo. Tenho amigos que fiz na graduação e que até hoje se mantêm próximos, ainda que a distância atrapalhe muito. Gostaria de

agradecer ao Lucas, Matheus, Bruno, Denimara e Rosate. Fico muito feliz pelo que fomos e somos, e me enche de satisfação notar o que a nossa amizade se tornou ao longo do tempo. Me encanta lembrar o momento em que nos conhecemos e ver onde chegamos. Para me manter justo com todos, não vou esmiuçar os detalhes de cada um, mas saibam que vocês fizeram uma diferença enorme na minha vida e espero que essa nossa relação continue por muito tempo. Gostaria de aqui dar um destaque ao Lucas, mas já explico aos que se revoltam: é que, no contexto desta tese, ele, assim como fez na minha dissertação, se prontificou a ler as primeiras versões deste texto e me tranquilizar quanto à qualidade do mesmo.

Agora eu caminho para fora do ambiente acadêmico e agradeço a Igor, Victor, Bernardo, Guilherme e Lucas. Provavelmente as pessoas que mais ouviram sobre esta tese fora da física. Agradeço demais pelo companheirismo e pelos momentos bons, que foram essenciais para que este trabalho continuasse. Obrigado pelo apoio e por ouvirem minhas reclamações. Muitos deles eu tive o prazer de estar próximo nesses últimos anos, então tem sido doloroso pensar que provavelmente eu tenha que continuar a carreira acadêmica longe deles. Sei que nossa amizade não mudará, mas vocês farão muita falta no dia a dia.

Gostaria de agradecer ao meu psicólogo Matheus por me ajudar a lidar com minhas questões pessoais e a elaborar internamente tanta coisa. Este agradecimento que agora você lê tem essa forma e influência direta das nossas sessões de terapia. A carreira acadêmica me cobrou um preço muito grande no quesito saúde mental. Lembro-me de que durante o mestrado já tive algumas crises de ansiedade e noites de insônia. Em dado momento do doutorado, cheguei a estar esgotado ao ponto de criar um enorme desgosto pelo trabalho de cientista e, diversas vezes, cogitar largar o ambiente acadêmico. Graças a um trabalho junto daqueles que me cercam e com a ajuda do Matheus, eu consegui reconstruir o querer fazer ciência. Acho importante deixar isso registrado aqui, para que você, aluno ou aluna de graduação ou pós-graduação que esteja lendo, entenda que esse sentimento não é nada incomum. Fazer ciência na sociedade em que estamos, no país em que estamos, é extremamente custoso. Mas, bem como isso pode lhe ocorrer, também é possível construir uma forma de se reerguer.

Ao longo do doutorado, acabamos tendo contato com pessoas da nossa área, e com dois deles tive a oportunidade de realizar trabalhos que compõem esta tese. Os professores Antonio Zelaquett e Marcelo Sarandy. Nosso contato não só foi muito bom como também motivador. É extremamente gratificante encontrar pessoas tão competentes no que fazem e genuinamente interessadas pelo que estudam.

Também preciso agradecer a dois professores que estiveram mais próximos, que são o professor Ladário e o professor Wagner. O Ladário foi um dos primeiros com quem tive contato na UFF, ainda no primeiro período, e o carinho dele e sua dedicação ao instituto são admiráveis. Já o Wagner eu conheci mais adiante. Acho que o primeiro momento em

que me interessei por estudar o que estudo hoje foi em uma palestra dele e, atualmente, é muito bom poder trabalhar ao seu lado. O interesse dele pelo trabalho científico, sem sombra de dúvidas, é bastante motivador.

Gostaria também de agradecer àqueles que trabalham para o funcionamento pleno da UFF. Em especial, agradeço ao Gerson, que, para além do seu serviço, sempre se prontificou a nos ajudar na construção de peças para o laboratório. Muitas pesquisas acabam sendo possíveis por esse trabalho.

Agradeço à CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro e institucional ao longo deste trabalho, foi fundamental para que eu tenha me dedicado ao doutorado.

A ti, pobre leitor/leitora, peço desculpas por me delongar neste agradecimento. Mas, esta tese é fruto de um sujeito que busca entender a si mesmo. A mim ficou muito claro que era necessário colocar muito bem definido o “Eu”. Gostaria que soubesse que quem escreveu esta tese não foi um físico qualquer, foi Daniel.

*“Se a aparência e a essência das coisas coincidissem,  
a ciência seria desnecessária.”*

*Karl Marx, O Capital — Livro III*



# Resumo

Esta tese apresenta um estudo experimental e teórico sobre correlações quânticas em estados mistos de luz estruturada, com ênfase em modos spin-órbita. Inicialmente, são exploradas técnicas de classificação da separabilidade de estados tripartites a partir de tomografia parcial e aprendizado de máquina, demonstrando que é possível identificar a não-separabilidade mesmo com informações reduzidas do sistema. Em seguida, propõe-se e implementa-se um circuito óptico para a preparação e caracterização de estados-X, utilizando os graus de liberdade da luz para preparar estados bipartidos. A partir desses estados, investigam-se as correlações quânticas, incluindo emaranhamento, discórdia e coerência, utilizando a abordagem geométrica para quantificá-las. Com o objetivo de aprimorar a reconstrução experimental dos modos spin-órbita, apresenta-se uma técnica de tomografia completa baseada em medidas de intensidade e análise de imagens obtidas com lente astigmática inclinada. Por fim, propõe-se um circuito óptico para a geração de Modos Spin-Órbita Mistos Maximamente Discordantes (MDMS), contribuindo para a compreensão de correlações quânticas em sistemas ópticos.

**Palavras-chaves:** Informação quântica; Modos spin-órbita; Estados mistos; Tomografia quântica; Correlações quânticas.



# Abstract

This thesis presents an experimental and theoretical study of quantum correlations in mixed states of structured light, with emphasis on spin-orbit modes. Initially, techniques for classifying the separability of tripartite states using partial tomography and machine learning are explored, demonstrating that it is possible to identify non-separability even with reduced information about the system. Next, an optical circuit is proposed and implemented for the preparation and characterization of X states, using the degrees of freedom of light to prepare bipartite states. From these states, the quantum correlations, including entanglement, discord, and coherence, are investigated, using the geometric approach to quantify them. To improve the experimental reconstruction of spin-orbit modes, a complete tomography technique based on intensity measurements and image analysis obtained with a tilted astigmatic lens is presented. Finally, an optical circuit is proposed for the generation of Maximally Discordant Mixed Spin-Orbit Modes (MDMS), contributing to the understanding of quantum correlations in optical systems.

**Key-words:** Quantum information; Spin-orbit modes; Mixed States; Quantum Tomography; Quantum Correlations.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação de um q-bit na esfera de Bloch. Fonte: (7) . . . . .	32
Figura 2 – Representação da atuação da porta Hadamard na esfera de Bloch, atuando no estado $( 0\rangle +  1\rangle)/\sqrt{2}$ . Fonte: (7) . . . . .	35
Figura 3 – Exemplo gráfico de onda eletromagnética se propagando no eixo $x$ . Os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ oscilam perpendicularmente entre si. Fonte: (43). . . . .	37
Figura 4 – Ilustração de polarização linear, neste caso anti-diagonal. Fonte: (43). . . . .	39
Figura 5 – Ilustração de polarização circular à direita. Fonte: (43). . . . .	40
Figura 6 – Ilustração da atuação de uma placa de meia onda (HWP). Fonte: (43), adaptado pelo autor. . . . .	42
Figura 7 – Ilustração da atuação de uma placa de quarto de onda (QWP) em uma polarização linear com $\theta = 45^\circ$ . Fonte: (43), adaptado pelo autor. . . . .	43
Figura 8 – Ilustração da atuação de um PBS. Fonte: (43). . . . .	43
Figura 9 – Esfera de Poincaré para polarização. Fonte: (52). . . . .	44
Figura 10 – Distribuição de intensidade de modos de Hermite-Gauss $HG_{mn}$ com índices $m$ e $n$ variando de 0 a 3. Fonte: Autor. . . . .	47
Figura 11 – Modos de Laguerre com $p$ e $l$ variando de 0 a 3. Fonte: Autor. . . . .	48
Figura 12 – Representação do sentido de rotação da frente de onda para o Laguerre de primeira ordem. Fonte: Autor. . . . .	49
Figura 13 – Representação da combinação linear dos modos de Hermite. Fonte: Autor. . . . .	49
Figura 14 – Representação da ligação entre os modos de Hermite-Gauss e Laguerre-Gauss. Fonte: Autor. . . . .	50
Figura 15 – Esfera de Poincaré para modos transversos. Fonte: (52). . . . .	51
Figura 16 – Representação gráfica da diferença de atuação de um PBS e um BS. Fonte: Autor. . . . .	53
Figura 17 – Representação do arranjo experimental de um interferômetro. Fonte: Autor. . . . .	53
Figura 18 – Esfera de Poincaré para o caminho. Fonte: (52). . . . .	54
Figura 19 – Esquema experimental da tomografia de polarização. Fonte: Autor. . . . .	65
Figura 20 – Esquema experimental da tomografia de modos transversos. Fonte: Autor. . . . .	67
Figura 21 – Esquema experimental para a tomografia de caminho. Fonte: Autor. . . . .	68
Figura 22 – Esquema experimental para a tomografia dos modos spin-orbita. Fonte: Autor. . . . .	70
Figura 23 – Modos spin-órbita análogos aos estados de Bell. Fonte: (31). . . . .	85
Figura 24 – Circuito óptico para preparação do estado GHZ. Fonte: (140). . . . .	91
Figura 25 – Circuito óptico para preparação do estado de Werner tripartite. Fonte: (144). . . . .	92

Figura 26 – Circuito óptico para tomografia de três q-bits. Fonte: (144). . . . .	93
Figura 27 – Classificação por rede neural para sistemas tripartite, simulando erros nos dispositivos ópticos: (a) treinamento e teste usando o critério de bisseparabilidade; (b) usando o critério de separabilidade total. A região cinza indica a região de emaranhamento utilizando o critério de Gühne e Seevinck (113). Fonte: (144), adaptado pelo autor. . . . .	97
Figura 28 – Circuito óptico para preparação do estado de $\rho_1$ . Fonte: Autor. . . . .	104
Figura 29 – Evolução das correlações para simulação de $\rho_1$ . Fonte: Autor. . . . .	104
Figura 30 – Circuito óptico para preparação do estado de $\rho_2$ . Fonte: Autor. . . . .	105
Figura 31 – Evolução das correlações para simulação de $\rho_2$ . Fonte: Autor. . . . .	106
Figura 32 – Circuito óptico para preparação do estado de Werner. Fonte: (144). . .	107
Figura 33 – Evolução das correlações para simulação de $\rho_w$ . Fonte: Autor. . . . .	108
Figura 34 – Evolução das correlações para o resultado experimental de $\rho_1$ . Fonte: Autor. . . . .	109
Figura 35 – Evolução das correlações para o resultado experimental de $\rho_2$ . Fonte: Autor. . . . .	110
Figura 36 – Evolução das correlações para simulação de $\rho_1$ . Fonte: Autor. . . . .	111
Figura 37 – Evolução das correlações para simulação de $\rho_2$ . Fonte: Autor. . . . .	112
Figura 38 – Evolução das correlações para simulação de $\rho_w$ . Fonte: Autor. . . . .	113
Figura 39 – Esquema experimental para preparo dos estados $\rho_i$ . Fonte: Autor. . . .	118
Figura 40 – Esquema experimental da tomografia com lente inclinada. Fonte: Autor. .	120
Figura 41 – Imagens teóricas (A) e experimentais (B) para o modo puro $\rho_1 =  \Phi^+\rangle\langle\Phi^+ $ . As colunas apresentam as imagens nas diferentes bases de polarização. As linhas apresentam as imagens diretas (DIR), correspondentes ao feixe transmitido pelo BS direto para CCD, e as imagens astigmáticas (AST), obtidas com o feixe passando pela lente inclinada.	122
Figura 42 – Comparação da matriz teórica para obtida experimentalmente para o estado $\rho_1 =  \Phi^+\rangle\langle\Phi^+ $ e a fidelidade. . . . .	122
Figura 43 – Resultado teórico (A) e experimental (B) para $\rho_2 =  Hh\rangle\langle Hh $ . Colunas: bases de polarização; linhas: DIR (transmissão pelo BS) e AST (reflexão com lente inclinada). . . . .	123
Figura 44 – Comparação da matriz teórica para obtida experimentalmente para o estado $\rho_2 =  Hh\rangle\langle Hh $ e a fidelidade. . . . .	123
Figura 45 – Imagens teóricas (A) e experimentais (B) para o modo puro $\rho_3 =  LG_+\rangle\langle LG_+ $ . As colunas apresentam as imagens nas diferentes bases de polarização. As linhas apresentam as imagens diretas (DIR), correspondentes ao feixe transmitido pelo BS direto para CCD, e as imagens astigmáticas (AST), obtidas com o feixe passando pela lente inclinada.	124

Figura 46 – Comparação da matriz teórica para obtida experimentalmente para o estado $\rho_3 =  LG_+\rangle \langle LG_+ $ e a fidelidade. . . . .	125
Figura 47 – Imagens teóricas (A) e experimentais (B) para o modo puro $\rho_6 = \frac{1}{2}( \phi^+\rangle \langle \phi^+  +  V, v\rangle \langle V, v )$ . As colunas apresentam as imagens nas diferentes bases de polarização. As linhas apresentam as imagens diretas (DIR), correspondentes ao feixe transmitido pelo BS direto para CCD, e as imagens astigmáticas (AST), obtidas com o feixe passando pela lente inclinada. . . . .	125
Figura 48 – Comparação da matriz teórica para obtida experimentalmente para o estado $\rho_6 = \frac{1}{2}( \phi^+\rangle \langle \phi^+  +  V, v\rangle \langle V, v )$ e a fidelidade. . . . .	126
Figura 49 – Imagens teóricas (A) e experimentais (B) para o modo puro $\rho_8 = \frac{1}{2}( LG_+\rangle \langle LG_+  +  V, v\rangle \langle V, v )$ . As colunas apresentam as imagens nas diferentes bases de polarização. As linhas apresentam as imagens diretas (DIR), correspondentes ao feixe transmitido pelo BS direto para CCD, e as imagens astigmáticas (AST), obtidas com o feixe passando pela lente inclinada. . . . .	126
Figura 50 – Comparação da matriz teórica para obtida experimentalmente para o estado $\rho_8 = \frac{1}{2}( LG_+\rangle \langle LG_+  +  V, v\rangle \langle V, v )$ e a fidelidade. . . . .	127
Figura 51 – Gráfico ilustrativo mostrando a fidelidade dos estados reconstruídos experimentalmente. Os estados considerados são apresentados nas Eqs. (6.11) e (6.12). . . . .	128
Figura 52 – Circuito óptico para preparação dos MDMS com modos spin-órbita. Fonte: (182). . . . .	131
Figura 53 – Correlações em função do fator de mistura para o estado $R2$ com $p = 0.5$ : discórdia quântica (azul), correlação clássica (vermelho) e concorrência (verde). Fonte: (182). . . . .	134
Figura 54 – Correlações em função do fator de mistura para o estado $R3$ com $m = 0.5$ : discórdia quântica (azul), correlação clássica (vermelho) e concorrência (verde). Fonte: (182). . . . .	135
Figura 55 – Discórdia quântica em função da correlação clássica para estados MDMS. Pontos cinza: estados $R2$ ; círculos pretos: estados $R3$ . Fonte: (182). . .	136



# Lista de tabelas

Tabela 1 – Relação entre bases computacionais e modos transversos da luz. . . . .	56
Tabela 2 – Bases de medida, parâmetros de Stokes e aparatos ópticos para tomo- grafia de cada grau de liberdade . . . . .	69
Tabela 3 – Bases de medida, parâmetros de Stokes e aparatos ópticos para tomo- grafia dos modos spin-órbita . . . . .	72



# Lista de abreviaturas e siglas

HWP	Placa de meia onda, do inglês <i>Half Wave Plate</i> .
QWP	Placa de quarto de onda, do inglês <i>Quarter Wave Plate</i> .
SWP	Placa de onda S, do inglês <i>S-Wave Plate</i> .
BS	Divisor de feixe, do inglês <i>Beam Splitter</i> .
PBS	Divisor de feixe polarizado, do inglês <i>Polarized Beam Splitter</i>
MZIM	Interferômetro de Mach-Zehnder com um espelho adicional.
LC	Lentes cilíndricas.
PD	Prisma de Dove.
EMM	Estado de maximamente misto.
QD	Discórdia Quântica, do inglês <i>Quantum Discord</i> .
MDMS	Estado misto maximamente discordante, do inglês <i>Maximally discordant mixed states</i> .



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>27</b>
<b>1 COMPUTAÇÃO QUÂNTICA E GRAUS DE LIBERDADE DA LUZ</b>	<b>31</b>
<b>1.1 Computação e Informação quântica</b>	<b>31</b>
1.1.1 Q-bits	31
1.1.2 Portas lógicas	33
<b>1.2 Graus de liberdade da luz</b>	<b>35</b>
1.2.1 Polarização da Luz	38
1.2.2 Modos Transversos	45
1.2.3 Caminho	51
<b>1.3 Codificação de q-bits nos graus de liberdade da luz</b>	<b>55</b>
<b>2 TOMOGRAFIA</b>	<b>57</b>
<b>2.1 Matriz densidade</b>	<b>57</b>
<b>2.2 Tomografia de um Q-bit</b>	<b>60</b>
<b>2.3 Tomografia de múltiplos q-bits</b>	<b>61</b>
<b>2.4 Fidelidade de estados quânticos</b>	<b>63</b>
<b>2.5 Tomografia dos graus de liberdade da luz</b>	<b>64</b>
2.5.1 Polarização	65
2.5.2 Modos Transversos	66
2.5.3 Caminho	68
2.5.4 Modos Spin-órbita	69
<b>3 CORRELAÇÕES QUÂNTICAS, COERÊNCIA E NÃO-SEPARABILIDADE EM SISTEMAS ÓPTICOS</b>	<b>73</b>
<b>3.1 Emaranhamento</b>	<b>73</b>
3.1.1 Concorrência	75
3.1.2 Emaranhamento Geométrico	76
<b>3.2 Discórdia</b>	<b>78</b>
3.2.1 Discórdia Quântica	78
3.2.2 Discórdia Geométrica	81
<b>3.3 Coerência</b>	<b>82</b>
<b>3.4 Feixes intensos e correlações</b>	<b>84</b>
<b>4 CLASSIFICAÇÃO DE NÃO-SEPARABILIDADE DE TRÊS Q-BITS USANDO GRAUS DE LIBERDADE DA LUZ</b>	<b>89</b>

4.1	Preparo e tomografia dos modos tripartite . . . . .	90
4.2	Classificação de separabilidade via rede neural . . . . .	94
4.2.1	Critério de separabilidade utilizado . . . . .	94
4.2.2	Rede Neural para classificação de separabilidade . . . . .	95
4.3	Resultados . . . . .	96
5	<b>ESTUDO DE CORRELAÇÕES QUÂNTICAS GEOMÉTRICAS EM MODOS SPIN-ÓRBITA . . . . .</b>	<b>99</b>
5.1	Aplicação para modos spin-órbita tipo X . . . . .	102
5.1.1	Resultados de simulação de circuitos ópticos . . . . .	103
5.1.2	Resultados experimentais . . . . .	108
5.1.3	Resultados de simulação com modelo de ruído . . . . .	110
6	<b>TOMOGRAFIA DE MODOS SPIN-ÓRBITA UTILIZANDO LENTE INCLINADA . . . . .</b>	<b>115</b>
6.1	Análise de modo transverso . . . . .	116
6.2	Realização experimental e resultados . . . . .	118
7	<b>MODOS SPIN-ÓRBITA MISTOS MAXIMAMENTE DISCORDANTES . . . . .</b>	<b>129</b>
7.1	Estados mistos maximamente discordantes . . . . .	129
7.2	Proposta experimental e simulação do circuito óptico . . . . .	130
	<b>Conclusão . . . . .</b>	<b>137</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>141</b>
	<b>ANEXO A – LISTA DE TRABALHOS DESENVOLVIDOS DURANTE A TESE . . . . .</b>	<b>153</b>

# Introdução

A Mecânica Quântica surgiu no início do século XX como uma resposta essencial às limitações da Física Clássica na descrição de fenômenos em escalas atômicas e subatômicas. O ponto de partida desse novo paradigma foi a quantização da energia proposta por Max Planck, ao investigar a radiação do corpo negro (1), seguida pela introdução do conceito de fóton por Albert Einstein para explicar o efeito fotoelétrico (2). Esses avanços marcaram uma ruptura com o determinismo clássico, ao introduzirem a ideia de que certos aspectos da natureza são fundamentalmente probabilísticos.

Na consolidação dessa nova estrutura teórica, Niels Bohr formulou o princípio da complementaridade, segundo o qual partículas quânticas exibem natureza tanto ondulatória quanto corpuscular, dependendo do arranjo experimental (3). Pouco depois, Werner Heisenberg introduziu o princípio da incerteza, estabelecendo limites fundamentais à precisão com que determinadas propriedades físicas, como posição e momento, podem ser conhecidas simultaneamente (4).

O amadurecimento da teoria quântica revelou fenômenos genuinamente não clássicos, como a superposição de estados e, especialmente, o emaranhamento quântico. Este último descreve correlações não locais entre partículas, que persistem independentemente da distância que as separa, desafiando os princípios da localidade e do realismo. Tais ideias foram debatidas no célebre paradoxo EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) (5) e mais tarde confirmadas pela violação das desigualdades de Bell (6).

Esses fundamentos revolucionários não apenas redefiniram a compreensão da natureza em sua escala mais elementar, como também impulsionaram o surgimento de novos domínios científicos, entre os quais se destaca a Teoria da Informação Quântica (7). Esta área encontra-se hoje na vanguarda do progresso científico, ao integrar os princípios fundamentais da Mecânica Quântica com conceitos clássicos da teoria da informação, propondo novos paradigmas para o processamento e a transmissão de dados.

O interesse pela computação e pela informação quântica cresceu de maneira significativa após a formulação de algoritmos que demonstraram vantagens substanciais em relação aos métodos clássicos para determinadas tarefas computacionais. Destacam-se, entre eles, o algoritmo de Shor para a fatoração eficiente de inteiros em seus fatores primos (8), o algoritmo de Grover para busca em bases de dados não estruturadas (9), e o algoritmo de Deutsch-Jozsa para a identificação eficiente de propriedades de funções booleanas (10). A Teoria da Informação Quântica explora propriedades exclusivamente quânticas, como superposição, emaranhamento e coerência, para desenvolver tecnologias com potencial disruptivo.

Entre suas aplicações mais notáveis estão os protocolos de criptografia quântica (11, 12) e algoritmos capazes de resolver problemas computacionalmente intratáveis para computadores clássicos (8, 9, 13, 14). Ao mesmo tempo, essa teoria amplia os limites da própria noção de informação e abre novos caminhos para o desenvolvimento tecnológico em áreas como computação, comunicações (15, 16) e metrologia (17, 18).

Entre as diversas plataformas físicas propostas para a implementação da computação quântica, os sistemas ópticos baseados nos graus de liberdade da luz têm se destacado como uma alternativa promissora, tanto do ponto de vista teórico quanto experimental. A luz possui múltiplos graus de liberdade, tais como polarização, modo transverso e caminho, o que oferece um espaço de Hilbert altamente versátil para a codificação e manipulação de bits quânticos, os q-bits (19, 20, 21) e q-dits (22, 23).

A utilização combinada dos diferentes graus de liberdade da luz possibilita o acesso a sistemas multipartidos e de alta dimensão, ampliando as possibilidades para o processamento paralelo de informações e para a simulação de fenômenos quânticos complexos. Entre essas combinações, destacam-se os modos spin-órbita da luz, que integram o momento angular de spin (associado à polarização) e o momento angular orbital (relacionado ao modo transverso) (24, 25, 26). Esse acoplamento permite explorar correlações quânticas entre diferentes graus de liberdade da luz, incluindo manifestações como emaranhamento, discordância e coerência. Tais fenômenos representam recursos fundamentais para protocolos avançados de informação quântica, exigindo métodos precisos de caracterização experimental.

A análise rigorosa dessas correlações requer a reconstrução completa do estado quântico, o que conduz naturalmente à tomografia quântica como metodologia central. Esta técnica, baseada em medidas projetivas em múltiplas bases (27), permite determinar a matriz densidade do sistema com precisão, sendo indispensável para validar implementações experimentais (28). Contudo, em sistemas de alta dimensionalidade, a tomografia enfrenta desafios exponenciais no número de medições requeridas (29).

Como alternativa eficaz para investigação de correlações em regimes de alta intensidade, a analogia clássico-quântica emerge como abordagem promissora. Neste paradigma, feixes intensos de luz feixes intensos de luz podem ser descritos por um conjunto de ferramentas matemáticas que, sob certas aproximações, coincidem com aquelas utilizadas na mecânica quântica (30). Esta equivalência formal permite mapear problemas quânticos em sistemas ópticos também descritos pela teoria clássica (31, 32, 33, 34).

Aplicações demonstraram o poder desta analogia: desde a exploração de coerência quântica e contextualidade (35, 36) até a observação direta de fases topológicas em sistemas emaranhados equivalentes (37). Esses avanços consolidam a abordagem como plataforma versátil para emular operações quânticas em ambientes controláveis, contribuindo significativamente para a compreensão e aplicação dos princípios da informação quântica.

Nesta tese, propomos investigar estados bipartidos e tripartidos codificados em combinações de modos spin-órbita e caminho usando feixes intensos. Através de experimentos e simulações computacionais, exploraremos correlações quânticas nesses sistemas. Adicionalmente, desenvolveremos uma proposta tomográfica alternativa para modos spin-órbita, visando simplificação e robustez frente a métodos convencionais.

Para desenvolver sistematicamente esta investigação, a tese estrutura-se em duas partes interligadas que conduzem o leitor desde os fundamentos teóricos da informação quântica até contribuições originais deste doutorado.

A primeira parte, correspondente aos Capítulos 1 a 3, tem como objetivo estabelecer o arcabouço teórico e metodológico que fundamenta os estudos apresentados posteriormente. No Capítulo 1, introduzimos os princípios básicos da computação quântica, com ênfase na definição formal do q-bit e em suas formas de manipulação. Em seguida, discutimos os principais graus de liberdade da luz utilizados na codificação de informação quântica: iniciamos pela polarização, seguimos com os modos transversos e, por fim, abordamos o grau de liberdade associado ao caminho. Para cada um deles, detalhamos os conceitos matemáticos e as técnicas ópticas empregadas em sua manipulação. O capítulo se encerra com a descrição da codificação de q-bits nesses diferentes graus de liberdade.

No Capítulo 2, apresentamos a técnica de tomografia quântica. Para isso, introduzimos o conceito de matriz densidade para um único q-bit, estendendo-o posteriormente a sistemas com múltiplos q-bits. Uma vez estabelecido esse conceito fundamental, explicamos em que consiste a tomografia quântica e por que ela é essencial para a descrição completa de um sistema quântico. Em seguida, discutimos como essa técnica é aplicada especificamente no contexto dos graus de liberdade da luz.

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo das correlações quânticas. Nele, introduzimos os conceitos de emaranhamento, discórdia e coerência, oferecendo uma descrição conceitual de cada um e apresentando diferentes quantificadores disponíveis na literatura. Além disso, discutimos como essas correlações podem ser abordadas por meio de uma analogia clássico-quântica, utilizando feixes de laser estruturados.

A segunda parte da tese, que abrange os Capítulos 4 a 7, apresenta os resultados originais obtidos ao longo do trabalho de doutorado. No Capítulo 4, investigamos a classificação da não separabilidade em sistemas de três q-bits codificados nos graus de liberdade da luz. Para isso, foi implementado algoritmo de aprendizado de máquina capaz de distinguir estados separáveis com base em medidas tomográficas parciais.

No Capítulo 5, investigamos correlações geométricas de discórdia, coerência e emaranhamento em estados- $X$ , a partir dos modos spin-órbita. Apresentamos tanto resultados simulados quanto dados experimentais obtidos a partir de um feixe laser intenso, evidenciando a consistência entre teoria e experimento.

O Capítulo 6 apresenta, com resultados experimentais, uma nova técnica de tomografia de modos spin-órbita baseada no uso de uma lente inclinada. Essa abordagem permite a reconstrução de estados puros e mistos com elevado grau de fidelidade a partir da combinação da tomografia de polarização com uma técnica de análise de modos transversos utilizando lente inclinada. Essa tomografia mostrou-se robusta e mais simples em comparação com os métodos tradicionalmente empregados na literatura.

Por fim, no Capítulo 7, apresentamos um circuito óptico para a geração de Estados Mistos Maximamente Discordantes (MDMS) em modos spin-órbita. Propomos um circuito específico para essa família de estados e apresentamos resultados de simulações que corroboram e evidenciam características previstas pela teoria.

Encerramos a tese com as conclusões gerais, nas quais discutimos as implicações desses resultados para futuras aplicações e sugerimos possíveis direções para trabalhos subsequentes.

# 1 Computação quântica e graus de liberdade da luz

## 1.1 Computação e Informação quântica

### 1.1.1 Q-bits

A teoria de informação e computação clássica traz como algo fundamental o conceito de bit(abreviação do inglês *Binary Digit*) que representa a menor unidade em que podemos armazenar uma informação, tendo como propriedade a possibilidade de assumir valores distintos: 0 ou 1. Na computação quântica, temos um conceito análogo que é de *quantum bits*, ou simplesmente q-bits.

O q-bit é entendido como o estado de um sistema quântico de dois níveis, podendo assumir os valores  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , sendo  $|\rangle$  a notação de Dirac para o estado. Porém, aqui surge uma das características marcantes da mecânica quântica, o conceito de superposição. Diferente do seu análogo clássico, o q-bit, além de ter a possibilidade de valor  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$ , também pode estar em uma combinação linear desses dois estados. De modo geral, o estado de um q-bit pode ser descrito como (7)

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (1.1)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são números complexos, sendo  $|\alpha|^2$  e  $|\beta|^2$  as probabilidades de se obter, respectivamente,  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  numa medição na base computacional, com  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  para garantir a normalização do estado.  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  são chamados de vetores da base computacional e matematicamente são representados por

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Como exemplos de implementação experimental de q-bits, podemos citar:

- **Circuito supercondutores**, usados em processadores quânticos como os da IBM e Google (38);
- **Íons aprisionados**, manipulados por lasers em sistemas como os desenvolvidos pela IonQ (39);
- **Fótions**, codificados em polarização ou momento angular orbital, aplicados em comunicações quânticas (40);

- **Vacância de nitrogênio** em diamante, explorada para sensoriamento quântico (41);
- **Pontos quânticos**, onde spins eletrônicos são controlados magneticamente (42).

Nesta definição, já conseguimos observar uma das vantagens da computação quântica com relação à clássica: a possibilidade de superposição.

Uma forma útil de se descrever um q-bit é utilizando a representação geométrica. A partir da condição de normalização podemos reescrever a eq. (1.1) como (7)

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \right], \quad (1.3)$$

onde  $\theta, \gamma$  e  $\phi$  são valores reais. O fator  $e^{i\gamma}$  representa uma fase global, e pode ser ignorado, então temos que

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle. \quad (1.4)$$

Os ângulos  $\theta$  e  $\phi$  definem um ponto em uma esfera de raio unitário. Assim temos a esfera de Bloch, representada na Figura 1, essa representação geométrica do estado de um q-bit é muito útil. Podemos notar que os estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  se encontram nos polos da esfera, assim como os estados com superposição de  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  com amplitudes iguais se encontram no equador (7).

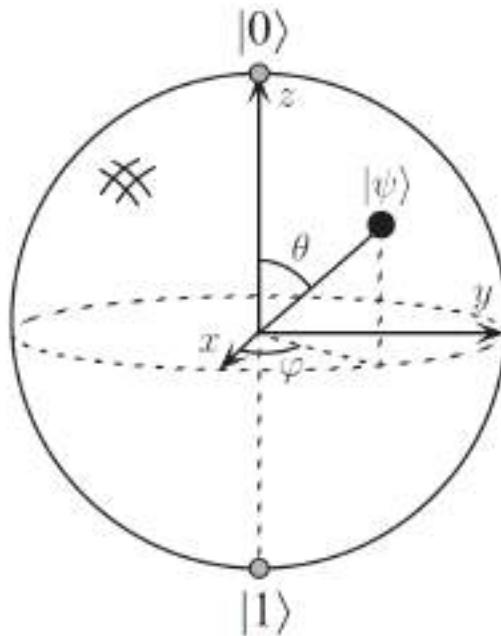


Figura 1 – Representação de um q-bit na esfera de Bloch. Fonte: (7)

Uma vez bem definido o q-bit, precisamos agora expandir esse conceito para o caso de múltiplos q-bits. Comecemos com o caso de dois q-bits. Para o caso clássico temos quatro possibilidades: 00, 01, 10, 11. Não é muito diferente para o caso quântico, temos

a base  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ , lembrando da possibilidade de superposição. Portanto a equação para dois q-bits será

$$|\psi\rangle = \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle, \quad (1.5)$$

sendo  $|\alpha_{ij}|^2$  a densidade de probabilidade de obtermos  $|ij\rangle$  em uma medida na base computacional. Uma vez visualizado o caso de dois q-bits, podemos generalizar esse conceito para um número qualquer de q-bits. Supondo o caso de um número  $n$  de q-bits, o vetor de estado será dado por

$$|\psi\rangle = \alpha_1 |0, 0, \dots, 0\rangle + \alpha_2 |1, 0, \dots, 0\rangle + \dots + \alpha_{2^n} |1, 1, \dots, 1\rangle. \quad (1.6)$$

Aqui, cada coeficiente  $\alpha_i$  é um número complexo associado a um dos  $2^n$  possíveis estados da base computacional, enquanto a normalização exige que  $\sum_{i=1}^{2^n} |\alpha_i|^2 = 1$ . Essa generalização para  $n$  q-bits é fundamental para a computação quântica, permitindo a representação de sistemas complexos e a exploração de fenômenos como o emaranhamento e a superposição em uma ampla escala (7).

Um caso particular que será explorado nesta tese diz respeito aos estados quânticos tripartites, que envolvem sistemas compostos por três q-bits. A forma geral desses estados pode ser expressa como

$$|\psi\rangle = \alpha_1 |000\rangle + \alpha_2 |001\rangle + \alpha_3 |010\rangle + \alpha_4 |011\rangle + \alpha_5 |100\rangle + \alpha_6 |101\rangle + \alpha_7 |110\rangle + \alpha_8 |111\rangle, \quad (1.7)$$

sendo que os coeficientes complexos  $\alpha_i$  devem satisfazer à condição de normalização  $\sum_{i=1}^8 |\alpha_i|^2 = 1$ . Essa representação abrange uma ampla variedade de estados multipartidos.

### 1.1.2 Portas lógicas

Agora que temos definida a base para codificação da informação na computação quântica, é essencial entender como é possível manipular e modificar essa informação. Aqui temos as portas lógicas quânticas, elas serão análogos quânticos das portas lógicas clássicas. As portas lógicas são responsáveis por levar o estado de um ou mais q-bits a outro estado. Para que isso fique mais claro, vamos utilizar um exemplo fundamental: a porta lógica NOT, também conhecida como porta  $X$ . Classicamente a porta NOT atua em um bit invertendo o seu valor, ou seja levando de 0 para 1 e vice versa. A porta NOT quântica faz algo semelhante, mas atuando nos estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ . Matematicamente, a porta NOT vai ser representada pela matriz

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Quando aplicada a um q-bit no estado  $|0\rangle$ , a NOT leva para o estado  $|1\rangle$  e vice versa. Se aplicarmos a um estado qualquer, como descrito pela eq. (1.1), temos

$$X |\psi\rangle = X(\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) = \beta |0\rangle + \alpha |1\rangle. \quad (1.9)$$

Portanto, as amplitudes de probabilidade dos estados são trocadas entre si. A partir da porta NOT, podemos notar algumas propriedades das portas lógicas quânticas. As portas lógicas serão matematicamente representadas por matrizes, no caso de um q-bit, uma matriz 2x2. Outro fator importante é que essa matriz é unitária, isso significa que  $U^\dagger U = I$ , sendo  $U^\dagger$  o adjunto de  $U$  (obtido tomando o complexo conjugada da matriz transposta de  $U$ ) e  $I$  a matriz identidade (7).

Outros dois exemplos de portas lógicas para um q-bit que são fundamentais para a computação quântica são: a porta de fase e a porta Hadamard. A porta de fase tem sua representação dada pela matriz

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

sendo sua atuação descrita da seguinte forma: o estado  $|0\rangle$  permanece inalterado, enquanto o estado  $|1\rangle$  é levado para  $-|1\rangle$ . Aqui compreendemos o motivo do nome dessa porta: ela atua introduzindo uma fase relativa entre os vetores da base. Note que, diferentemente da porta  $X$ , neste caso não existe análogo clássico para a porta  $Z$ .

Já a porta Hadamard vai ter sua representação matricial dada por

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

a atuação desta porta resulta em  $|0\rangle \rightarrow \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$  e  $|1\rangle \rightarrow \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$ . Portanto a porta Hadamard vai atuar levando um estado da base computacional para um estado de superposição equilibrada. Assim como a porta de fase não temos análogo clássico para a porta Hadamard.

Na definição do q-bit, apresentamos uma forma útil de visualizar o estado de um q-bit por meio da representação na esfera de Bloch, ilustrada na Figura 1. É interessante estender essa discussão para explorar a atuação de uma porta lógica quântica nessa representação. Em termos geométricos, a aplicação de uma porta lógica corresponde a rotações na esfera de Bloch. Por exemplo, a porta Hadamard realiza uma transformação que pode ser descrita como uma rotação de  $90^\circ$  em torno do eixo  $y$ , seguida de uma rotação de  $180^\circ$  em torno do eixo  $x$ . Na Figura 2, temos a visualização dessa transformação no estado  $\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$ .

Para finalizar esta seção, vamos abordar uma porta de dois q-bits fundamental para a computação quântica: a porta C-NOT (do inglês *Controlled-NOT*). Nessa porta, um dos q-bits é denominado de q-bit controle, e o outro de q-bit alvo. O estado do q-bit controle determina se uma NOT é aplicada ao q-bit alvo. Especificamente:

- Se o q-bit controle estiver no estado  $|0\rangle$ , o estado do q-bit alvo permanece inalterado.
- Se o q-bit controle estiver no estado  $|1\rangle$ , uma NOT é aplicada ao q-bit alvo.

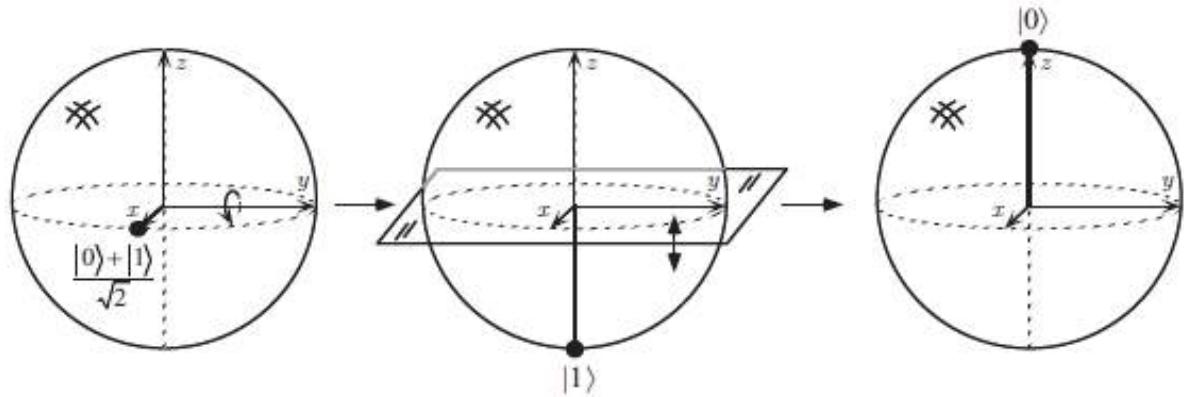


Figura 2 – Representação da atuação da porta Hadamard na esfera de Bloch, atuando no estado  $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ . Fonte: (7)

Matematicamente, podemos descrever a atuação da porta C-NOT como

$$\begin{aligned}
 |00\rangle &\rightarrow |00\rangle, \\
 |01\rangle &\rightarrow |01\rangle, \\
 |10\rangle &\rightarrow |11\rangle, \\
 |11\rangle &\rightarrow |10\rangle,
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

sendo o primeiro q-bit o controle, e o segundo alvo. De maneira geral, a transformação pode ser expressa como:  $|A, B\rangle \rightarrow |A, B \oplus A\rangle$ , sendo  $\oplus$  é a soma de módulo 2. Sendo a forma matricial dada por

$$\mathbf{U}_{CN} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

As portas aqui apresentadas são particularmente importantes pois são necessárias para obtenção do conjunto universal de portas lógicas quânticas (7). Esta propriedade é fundamental para a implementação prática de algoritmos quânticos.

Na implementação física, as portas lógicas quânticas são realizadas através de diferentes mecanismos, dependendo da plataforma utilizada. Em sistemas ópticos, por exemplo, as portas quânticas são realizadas por placas de onda, prismas, entre outros aparelhos ópticos(43), compreenderemos melhor como isso é feito mais a frente nessa tese.

## 1.2 Graus de liberdade da luz

Os graus de liberdade de um sistema referem-se ao número de variáveis independentes necessárias para descrever completamente o estado desse sistema. No contexto da

luz, como estamos tratando de uma onda eletromagnética, estes graus estão intimamente ligados às restrições impostas pelas equações de Maxwell. Vamos partir das equações de Maxwell no vácuo na ausência de corrente e cargas livres, utilizando como referência (44) e (45). Sendo assim temos:

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0, \quad (1.14)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad (1.15)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0, \quad (1.16)$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0. \quad (1.17)$$

onde  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  são, respectivamente, a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do vácuo. As equações (1.16) e (1.17) mostram explicitamente o acoplamento entre os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . Para obtermos equações diferenciais independentes que descrevam a propagação autônoma de cada campo, buscamos eliminá-los mutuamente.

Aplicando o operador rotacional em ambos os lados da equação (1.16), temos

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}). \quad (1.18)$$

Utilizando a identidade vetorial  $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ , e lembrando que  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$  (eq. (1.14)), a equação (1.18) se torna

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (1.19)$$

Multiplicando ambos os lados por  $-1$  e utilizando a relação fundamental entre as constantes do vácuo,  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ , obtemos a equação de onda para o campo elétrico

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (1.20)$$

O mesmo procedimento pode ser aplicado à equação (1.17) para obter a equação de onda para o campo magnético

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (1.21)$$

As equações (1.20) e (1.21) revelam que, no vácuo, tanto o campo elétrico quanto o campo magnético satisfazem a equação de onda tridimensional clássica, propagando-se com velocidade  $c$ , a velocidade da luz no vácuo. As soluções mais simples e didaticamente úteis dessas equações são as ondas planas monocromáticas, descritas por

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (1.22)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (1.23)$$

onde  $\vec{E}_0$  e  $\vec{B}_0$  são vetores constantes (amplitudes),  $\vec{k}$  é o vetor de onda, e  $\omega$  é a frequência angular da onda. A relação de dispersão entre  $\vec{k}$  e  $\omega$  é dada por  $|\vec{k}| = \omega/c$ .

Substituindo a solução (1.22) na equação de Gauss (1.14), temos

$$\nabla \cdot \vec{E} = i\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \perp \vec{E}_0, \quad (1.24)$$

portanto o campo elétrico é transversal à direção de propagação da onda. Analogamente, usando (1.15) com (1.23),

$$\nabla \cdot \vec{B} = i\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \perp \vec{B}_0. \quad (1.25)$$

o que indica que o campo magnético também é transversal à direção de propagação da onda. Além disso, ao substituir as soluções nas equações de Maxwell (1.16) e (1.17), podemos obter a relação entre os vetores de campo

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}_0, \quad (1.26)$$

sendo assim o campo magnético é perpendicular ao campo elétrico, e ambos são perpendiculares à direção de propagação  $\vec{k}$ , caracterizando uma onda eletromagnética transversal. A Figura 3 apresenta uma ilustração de uma onda eletromagnética se propagando ao longo do eixo  $x$ , destacando que os campos elétrico e magnético são perpendiculares entre si.

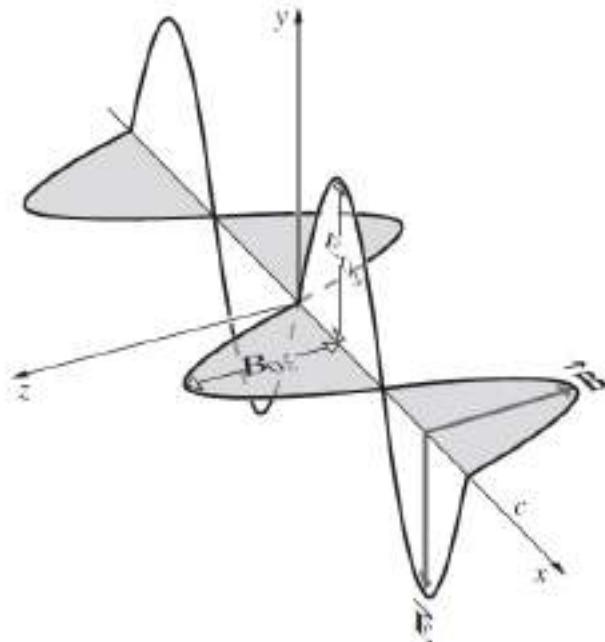


Figura 3 – Exemplo gráfico de onda eletromagnética se propagando no eixo  $x$ . Os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  oscilam perpendicularmente entre si. Fonte: (43).

O formalismo apresentado evidencia como as equações de Maxwell predizem a existência de ondas eletromagnéticas, onde variações temporais de  $\vec{E}$  geram  $\vec{B}$  e vice-versa.

Tal estrutura matemática unifica, sob um mesmo arcabouço teórico, os fenômenos de eletricidade, magnetismo e óptica clássica.

A natureza transversal das ondas eletromagnéticas implica que sua oscilação pode ser orientada em direções específicas no plano perpendicular à sua direção de propagação, fenômeno conhecido como polarização. Esse conceito, fundamental em óptica e telecomunicações, será detalhado na próxima seção.

### 1.2.1 Polarização da Luz

A polarização é uma das propriedades fundamentais da luz que descreve a orientação das oscilações do campo elétrico em uma onda eletromagnética. Para essa discussão iremos usar como referência (43) e (46).

Partindo das equações de Maxwell para ondas eletromagnéticas, considerando uma onda plana monocromática propagando-se na direção  $z$ , o campo elétrico pode ser escrito como

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad (1.27)$$

onde  $\vec{E}_0$  é a amplitude complexa do campo,  $k = 2\pi/\lambda$  é o número de onda,  $\omega = 2\pi\nu$  é a frequência angular,  $\lambda$  é o comprimento de onda e  $\nu$  é a frequência da onda.

Como vimos na seção anterior, o campo elétrico é perpendicular à direção de propagação, então, supondo que este se propaga na direção  $z$ , podemos decompô-lo em duas componentes ortogonais no plano  $xy$

$$\vec{E}(z, t) = (E_{0x} \hat{x} + E_{0y} e^{i\delta} \hat{y}) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (1.28)$$

onde  $E_{0x}$  e  $E_{0y}$  são as amplitudes reais das componentes do campo nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, e  $\delta$  é a diferença de fase entre essas componentes. É precisamente esta diferença de fase, juntamente com a razão entre as amplitudes, que determina o estado de polarização da luz. Dependendo dos valores de  $E_{0x}$ ,  $E_{0y}$  e  $\delta$ , podemos classificar os estados de polarização em três categorias principais: polarização linear, circular e elíptica.

A polarização linear ocorre quando as componentes do campo elétrico oscilam com diferença de fase  $\delta = n\pi$ , onde  $n$  é um inteiro. Neste caso, o campo elétrico oscila ao longo de uma linha reta no plano transversal à direção de propagação. Matematicamente, temos

$$\vec{E}(z, t) = (E_{0x} \hat{x} \pm E_{0y} \hat{y}) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (1.29)$$

onde o sinal  $+$  ou  $-$  depende da paridade de  $n$ . O ângulo  $\theta$  que esta linha forma com o eixo  $x$  é dado por

$$\tan(\theta) = \frac{E_{0y}}{E_{0x}}. \quad (1.30)$$

Casos particulares importantes de polarização linear incluem a polarização horizontal (H), que ocorre quando  $E_{0y} = 0$ , resultando em oscilações apenas ao longo do eixo  $x$ ; a

polarização vertical (V), quando  $E_{0x} = 0$ , resultando em oscilações apenas ao longo do eixo  $y$ . A polarização diagonal (D) e anti-diagonal (A),  $E_{0x} = E_{0y}$ , resultando em oscilações a  $\pm 45^\circ$  em relação ao eixo  $x$ . A Figura 4 apresenta uma forma gráfica de representar uma polarização linear.

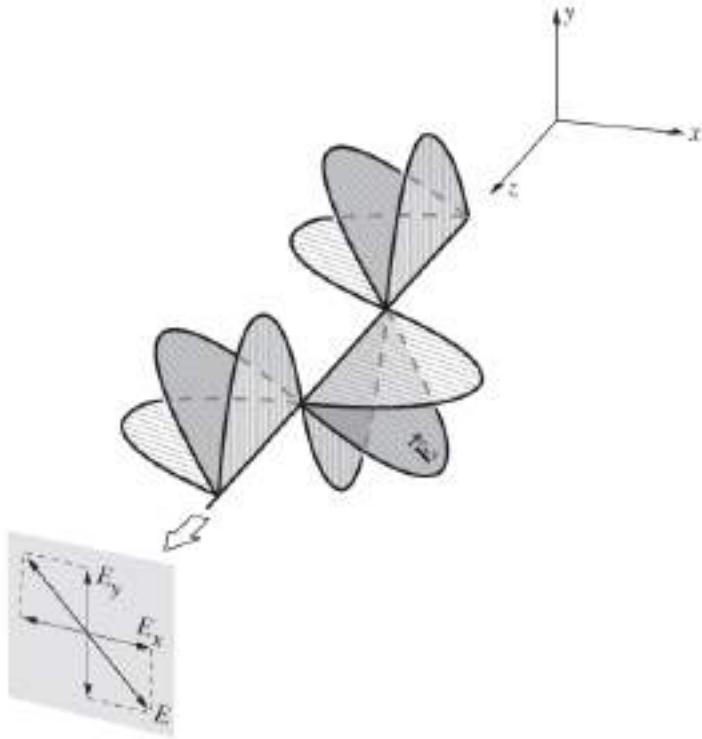


Figura 4 – Ilustração de polarização linear, neste caso anti-diagonal. Fonte: (43).

A polarização linear pode ser obtida por dispositivos ópticos, como polarizadores lineares, que transmitem apenas a componente do campo elétrico paralela ao seu eixo de transmissão. Historicamente, a descoberta da polarização linear por Malus levou à formulação da Lei de Malus, que descreve a intensidade da luz transmitida através de um polarizador:  $I = I_0 \cos^2(\theta)$ , onde  $I_0$  é a intensidade da luz incidente e  $\theta$  é o ângulo entre a direção de polarização da luz incidente e o eixo de transmissão do polarizador (43).

A polarização circular ocorre quando as amplitudes das componentes são iguais ( $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ ) e a diferença de fase é  $\delta = (2n + 1)\pi/2$ , onde  $n$  é um inteiro. Neste caso, a ponta do vetor campo elétrico descreve uma trajetória circular no plano transversal à direção de propagação. Matematicamente, temos

$$\vec{E}(z, t) = E_0(\hat{x} \pm i\hat{y})e^{i(kz - \omega t)}, \quad (1.31)$$

onde, assim como no caso linear, o sinal  $\pm$  será definido de acordo com a paridade de  $n$ , sendo que  $+$  corresponde à polarização circular à direita e o sinal  $-$  corresponde à polarização circular à esquerda. A Figura 5 apresenta uma forma de visual de compreender o comportamento do campo elétrico com polarização circular.

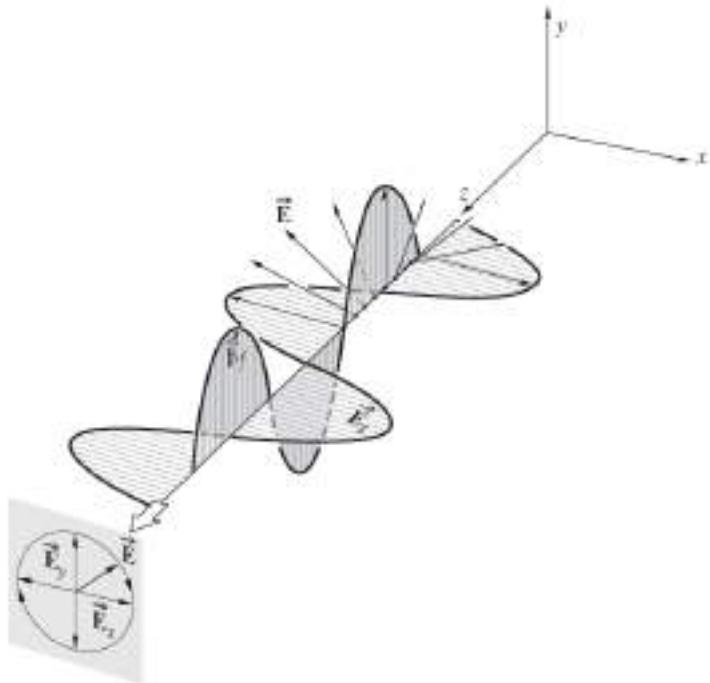


Figura 5 – Ilustração de polarização circular à direita. Fonte: (43).

A polarização circular possui propriedades notáveis, como a invariância rotacional em torno do eixo de propagação. Além disso, quando uma onda com polarização circular é refletida por uma superfície metálica, o sentido da polarização é invertido. Este fenômeno é explorado em diversas aplicações, como em óculos 3D circulares e em comunicações via satélite, onde a polarização circular é menos suscetível a distorções atmosféricas (47). Do ponto de vista quântico, a polarização circular está associada ao momento angular de spin do fóton, que pode assumir valores de  $\pm\hbar$  ao longo da direção de propagação. Esta propriedade estabelece uma conexão fundamental entre a óptica clássica e a mecânica quântica (48).

A polarização elíptica é o caso mais geral, ocorrendo quando as amplitudes são diferentes ( $E_{0x} \neq E_{0y}$ ) e a diferença de fase é múltiplo de  $\pi/2$ . Neste caso, a ponta do vetor campo elétrico descreve uma trajetória elíptica no plano transversal à direção de propagação. A forma e a orientação da elipse são determinadas pelas amplitudes relativas entre as componentes do campo. Os eixos maior e menor da elipse, bem como sua orientação, podem ser calculados a partir dos parâmetros  $E_{0x}$ ,  $E_{0y}$  e  $\delta$  (43). A polarização elíptica é particularmente importante em meios opticamente ativos e birrefringentes, onde a luz sofre alterações em seu estado de polarização ao se propagar. Fenômenos como dicroísmo circular e birrefringência circular, fundamentais em espectroscopia e cristalografia, estão intimamente relacionados à polarização elíptica (47).

Uma maneira elegante e concisa de descrever o estado de polarização da luz é através do formalismo dos vetores de Jones (47), que apresenta notável semelhança com

o formalismo de Dirac da mecânica quântica (49). Neste formalismo, o campo elétrico é representado por um vetor complexo bidimensional

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

onde  $E_x(t)$  e  $E_y(t)$  são as componentes complexas do campo elétrico em um dado instante  $t$ . Para uma onda monocromática, podemos reescrever a equação anterior como

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} e^{i\delta} \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

Uma propriedade fundamental deste formalismo é que qualquer estado de polarização pode ser expresso como uma combinação linear de dois estados ortogonais. Por exemplo, podemos decompor o campo em suas componentes horizontal e vertical

$$\vec{E} = \vec{E}_H + \vec{E}_V = E_{0x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + E_{0y} e^{i\delta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.34)$$

Em muitas aplicações, especialmente em óptica quântica e informação quântica, é conveniente trabalhar com vetores de Jones normalizados, que preservam apenas a informação sobre o estado de polarização, desconsiderando a amplitude total do campo. Após a normalização, os estados de polarização horizontal e vertical são representados por

$$\vec{E}_H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{E}_V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

Outros estados importantes em suas formas normalizadas incluem a polarização diagonal e anti-diagonal

$$\vec{E}_D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{E}_A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

E a polarização circular à direita e à esquerda

$$\vec{E}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \vec{E}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

O formalismo de Jones também permite representar a ação de dispositivos ópticos como matrizes  $2 \times 2$  que atuam sobre os vetores de Jones. Por exemplo, a matriz de Jones para um polarizador linear com eixo de transmissão formando um ângulo  $\theta$  com o eixo  $x$  é dada por (50)

$$\mathbf{P}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

Outros componentes fundamentais são as placas de onda, que introduzem uma diferença de fase entre as componentes ortogonais da luz. Um caso importante é a placa de meia onda (HWP, do inglês *Half Wave Plate*), que introduz uma defasagem de  $\phi = \pi$ . Sua matriz de Jones, para um eixo rápido formando um ângulo  $\theta$  com o eixo  $x$ , é (43, 50)

$$\mathbf{HWP}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

Note que, ao incidir luz com polarização linear, o resultado será uma rotação no ângulo de polarização de  $2\theta$ . A Figura 6 ilustra graficamente esse efeito.

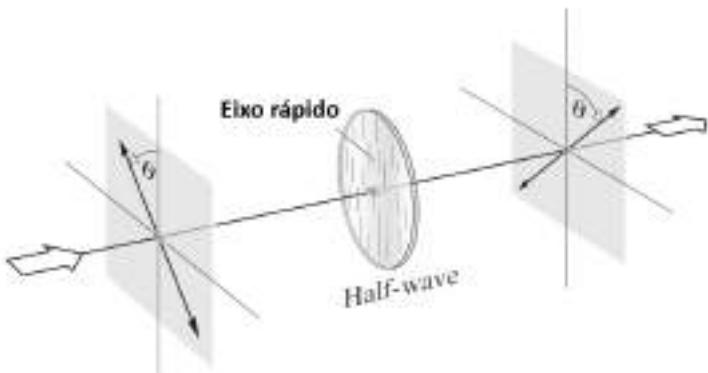


Figura 6 – Ilustração da atuação de uma placa de meia onda (HWP). Fonte: (43), adaptado pelo autor.

Um segundo caso de grande interesse é a placa de quarto de onda (QWP, do inglês *Quarter Wave Plate*), que gera uma diferença de fase de  $\phi = \pi/2$ . Sua matriz de Jones é dada por (43, 50)

$$\mathbf{QWP}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + i \sin^2\theta & (1 - i) \cos\theta \sin\theta \\ (1 - i) \cos\theta \sin\theta & \sin^2\theta + i \cos^2\theta \end{pmatrix}. \quad (1.40)$$

A incidência de uma polarização linear com  $\theta = 45^\circ$  resultará em uma polarização circular. A Figura 7 ilustra esse caso.

Um dispositivo com uma função diferente, mas igualmente relevante, é o cubo divisor de feixe polarizado (PBS, do inglês *Polarizing Beam Splitter*). Esse dispositivo é composto por dois prismas triangulares unidos por camadas de filmes dielétricos, formando uma interface semirrefletora seletiva. Quando um feixe de luz incide sobre o PBS, ele é separado em duas componentes: a luz com polarização horizontal é transmitida, enquanto a luz com polarização vertical é refletida. A Figura 8 ilustra seu funcionamento.

Uma representação geométrica dos estados de polarização é fornecida pela esfera de Poincaré (51). Nesta representação, cada estado de polarização corresponde a um ponto único na superfície de uma esfera de raio unitário. Na esfera de Poincaré, os polos norte

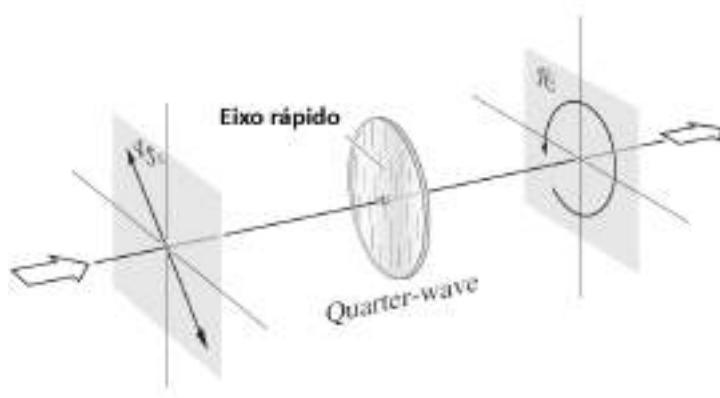


Figura 7 – Ilustração da atuação de uma placa de quarto de onda (QWP) em uma polarização linear com  $\theta = 45^\circ$ . Fonte: (43), adaptado pelo autor.

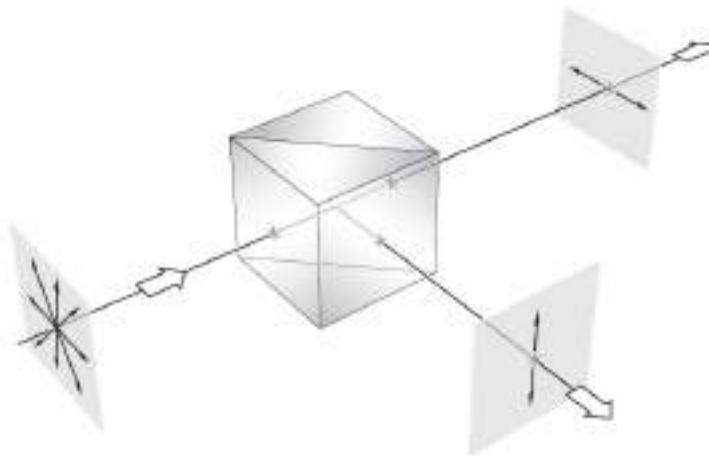


Figura 8 – Ilustração da atuação de um PBS. Fonte: (43).

e sul correspondem às polarizações circulares à direita e à esquerda, respectivamente; o equador corresponde aos estados de polarização linear, com diferentes pontos representando diferentes orientações; e todos os outros pontos da esfera correspondem a estados de polarização elíptica, com a elipticidade aumentando à medida que nos afastamos do equador em direção aos polos (51). A Figura 9 apresenta a esfera de Poincaré para polarização.

A posição de um estado de polarização na esfera de Poincaré é determinada pelos parâmetros de Stokes, que são quantidades mensuráveis experimentalmente. Os parâmetros de Stokes normalizados ( $s_1, s_2, s_3$ ) estão relacionados às coordenadas esféricas ( $\theta, \phi$ ) na

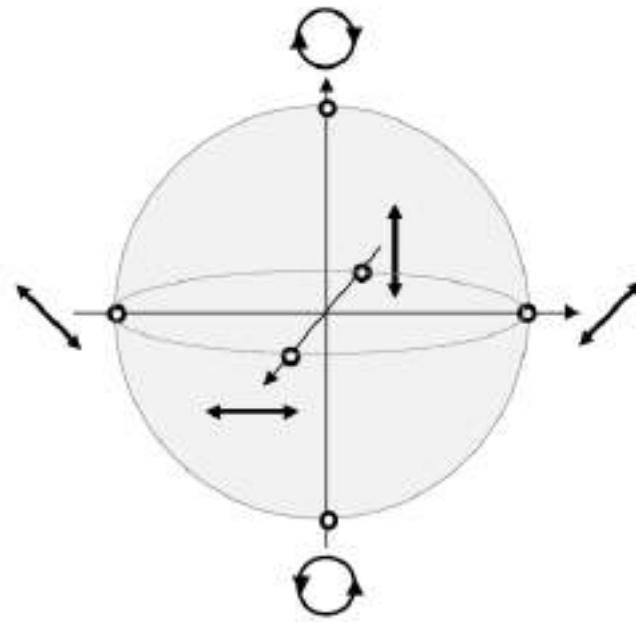


Figura 9 – Esfera de Poincaré para polarização. Fonte: (52).

esfera de Poincaré por

$$s_1 = \cos(2\theta), \quad (1.41)$$

$$s_2 = \sin(2\theta) \cos(2\phi), \quad (1.42)$$

$$s_3 = \sin(2\theta) \sin(2\phi). \quad (1.43)$$

Os parâmetros de Stokes podem ser determinados experimentalmente medindo-se as intensidades da luz após passar por diferentes combinações de polarizadores e placas de onda

$$S_0 = I_H + I_V, \quad (1.44)$$

$$S_1 = I_H - I_V, \quad (1.45)$$

$$S_2 = I_D - I_A, \quad (1.46)$$

$$S_3 = I_R - I_L. \quad (1.47)$$

onde  $I_H$ ,  $I_V$ ,  $I_D$ ,  $I_A$ ,  $I_R$  e  $I_L$  são as intensidades medidas após a luz passar por polarizadores que selecionam as polarizações horizontal, vertical, diagonal, anti-diagonal, circular à direita e circular à esquerda, respectivamente. Os parâmetros normalizados são obtidos dividindo-se por  $S_0$ :  $s_i = S_i/S_0$  (43).

A esfera de Poincaré não é apenas uma ferramenta de visualização, mas também um poderoso instrumento matemático para analisar a evolução do estado de polarização em sistemas ópticos. A ação de dispositivos ópticos como placas de onda e polarizadores pode ser representada como rotações na esfera de Poincaré. Por exemplo, uma placa de

onda que introduz uma diferença de fase  $\phi$  entre as componentes rápida e lenta corresponde a uma rotação de ângulo  $\phi$  em torno do eixo que passa pelo centro da esfera e pelos pontos correspondentes às polarizações lineares paralela e perpendicular ao eixo rápido da placa. Um rotador de polarização, que rotaciona a direção de polarização linear de um ângulo  $\alpha$ , corresponde a uma rotação de ângulo  $2\alpha$  em torno do eixo que passa pelos polos da esfera (51). A esfera de Poincaré também está intimamente relacionada à esfera de Bloch da mecânica quântica.

A polarização da luz é um fenômeno fundamental que conecta a óptica clássica à mecânica quântica, oferecendo um rico campo de estudo teórico e aplicações práticas. O entendimento profundo da polarização e sua manipulação são essenciais para o desenvolvimento de tecnologias ópticas avançadas e para a implementação de protocolos de informação quântica. No contexto desta tese, a polarização da luz será utilizada como um dos graus de liberdade para a codificação de q-bits. Outro grau de liberdade que exploraremos são os modos transversos da luz, tema da próxima seção.

### 1.2.2 Modos Transversos

Os modos transversos da luz representam soluções específicas da equação de onda que descrevem a distribuição espacial do campo eletromagnético em um plano perpendicular à direção de propagação. Para abordar esse conteúdo utilizaremos como referencias (53, 54, 55).

Para derivar os modos transversos, partimos da equação de onda para o campo elétrico. Enquanto a solução mais simples é a onda plana, esta é uma idealização que não descreve adequadamente feixes reais, que possuem extensão finita no plano transversal. Uma solução mais realista é dada por

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{e} E_0(\vec{r}) e^{-ikz} e^{i\omega t} \quad (1.48)$$

onde  $\hat{e}$  é o vetor unitário que descreve a polarização,  $E_0(\vec{r})$  é a amplitude complexa que depende da posição,  $k = 2\pi/\lambda$  é o número de onda,  $\omega = 2\pi\nu$  é a frequência angular, e estamos considerando uma onda que se propaga na direção  $z$ .

Substituindo esta expressão na equação de onda derivada das equações de Maxwell, eq.(1.20), e fazendo a derivada temporal, obtemos a equação de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2) E_0(\vec{r}) e^{-ikz} = 0. \quad (1.49)$$

Em coordenadas cartesianas, esta equação se torna

$$\frac{\partial^2 E_0(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_0(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_0(x, y, z)}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial E_0}{\partial z} = 0. \quad (1.50)$$

A dependência em  $z$  em  $E_0(x, y, z)$  representa essencialmente o efeito de difração. Para feixes bem colimados, como os lasers, podemos aplicar a aproximação paraxial,

que considera que a variação do campo na direção de propagação é lenta comparada ao comprimento de onda e às variações transversais (55)

$$\left| \frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} \right| \ll \left| 2k \frac{\partial E_0}{\partial z} \right| \text{ ou } \left| \frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} \right| \text{ ou } \left| \frac{\partial^2 E_0}{\partial y^2} \right|. \quad (1.51)$$

Desprezando a derivada segunda em relação a  $z$ , obtemos a equação paraxial de Helmholtz dada por

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_0}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial E_0}{\partial z} = 0. \quad (1.52)$$

Esta equação pode ser reescrita de forma mais compacta. Utilizando operador Laplaciano transverso,  $\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ , podemos reescrever-la como

$$\nabla_t^2 E_0(\vec{s}, z) - 2ik \frac{\partial E_0(\vec{s}, z)}{\partial z} = 0, \quad (1.53)$$

onde  $\vec{s}$  representa as coordenadas transversais, sendo  $\vec{s} = (x, y)$  em coordenadas cartesianas ou  $\vec{s} = (r, \phi)$  em coordenadas cilíndricas.  $E_0(\vec{s}, z)$  é a amplitude complexa no plano transversal na posição  $z$ .

A equação paraxial de Helmholtz admite diferentes famílias de soluções, dependendo do sistema de coordenadas utilizado. As duas famílias de modos mais importantes e amplamente utilizadas são os modos de Hermite-Gauss (HG), que são soluções em coordenadas cartesianas, e os modos de Laguerre-Gauss (LG), em coordenadas cilíndricas.

Os modos de Hermite-Gauss são expressos por

$$E_{mn}(x, y, z) = \text{HG}_{mn}(x, y, z) = \frac{C_{nm}}{\omega(z)} H_n \left[ \frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)} \right] H_m \left[ \frac{\sqrt{2}y}{\omega(z)} \right] \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)} \right] \times \exp \left[ -i \frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)} \right] \exp [-i(m + n + 1)\psi(z)]. \quad (1.54)$$

onde  $H_i$  é o polinômio de Hermite de ordem  $i$ ,  $\omega(z)$  é a largura do feixe na posição  $z$ ,  $R(z)$  é o raio de curvatura da frente de onda, e  $\psi(z)$  é a fase de Gouy.

O caso fundamental, quando  $m = n = 0$ , corresponde ao feixe gaussiano, cuja expressão simplificada é

$$E_{00} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} W(z)} \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{W^2(z)} \right] \exp \left[ -i \frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)} + i\psi(z) \right]. \quad (1.55)$$

Os parâmetros que caracterizam o feixe gaussiano são

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_R} \right)^2}, \quad (1.56)$$

que representa a largura do feixe na posição  $z$ , onde  $W_0$  é a cintura do feixe (largura mínima em  $z = 0$ ) e  $z_R = \frac{\pi W_0^2}{\lambda}$  é o comprimento de Rayleigh

$$R(z) = z + \frac{z_R^2}{z}, \quad (1.57)$$

que representa o raio de curvatura da frente de onda; e

$$\psi(z) = \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_R} \right), \quad (1.58)$$

que é a fase de Gouy, uma mudança de fase adicional que o feixe gaussiano acumula ao propagar-se, em comparação com uma onda plana ideal. É importante notar que a solução do feixe gaussiano é válida principalmente no intervalo  $(-z_R, z_R)$ . Fora deste intervalo, o feixe se comporta aproximadamente como uma onda esférica centrada em  $W_0$ .

Os modos de Hermite-Gauss de ordem superior apresentam padrões de intensidade mais complexos, com nodos, regiões de intensidade zero, nas direções  $x$  e  $y$ . O número de nodos horizontais é dado por  $m$ , enquanto o número de nodos verticais é dado por  $n$ . Estes modos formam um conjunto completo e ortogonal, o que significa que qualquer distribuição de campo transversal pode ser expressa como uma combinação linear destes modos. A Figura 10 apresenta a distribuição de intensidade para alguns modos de Hermite-Gauss.

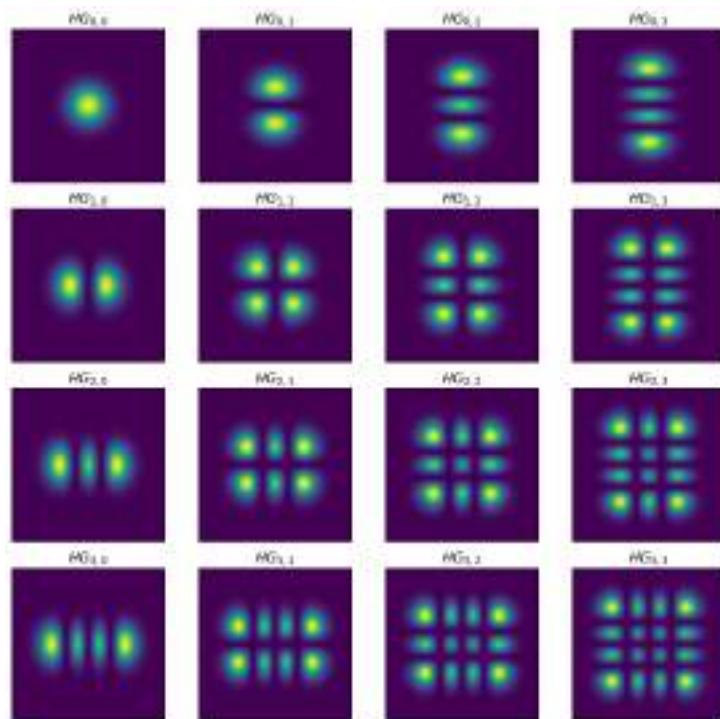


Figura 10 – Distribuição de intensidade de modos de Hermite-Gauss  $HG_{mn}$  com índices  $m$  e  $n$  variando de 0 a 3. Fonte: Autor.

Quando resolvemos a equação paraxial de Helmholtz em coordenadas cilíndricas, obtemos os modos de Laguerre-Gauss. A equação em coordenadas cilíndricas é

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_0}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_0}{\partial \phi^2} + 2ik \frac{\partial E_0}{\partial z} = 0. \quad (1.59)$$

A solução desta equação é dada por

$$E_{pl}(r, z, \phi) = \text{LG}_p^l(r, z, \phi) = \sqrt{\frac{2p!}{\pi\omega^2(z)(p+|l|)!}} \left[ \frac{\sqrt{2}r}{\omega(z)} \right]^{|l|} \exp \left[ -\frac{r^2}{\omega^2(z)} \right] L_p^{|l|} \left[ \frac{2r^2}{\omega^2(z)} \right] \times \exp \left[ i \left( kz - (2p+|l|+1)\psi(z) + \frac{kr^2}{2R(z)} + l\phi \right) \right]. \quad (1.60)$$

onde  $L_p^l$  são os polinômios associados de Laguerre,  $p$  é um inteiro não negativo que indica o número de anéis na distribuição de intensidade, e  $l$  é um inteiro que representa a carga topológica do feixe.

Uma característica dos modos de Laguerre-Gauss com  $l \neq 0$  é que eles possuem momento angular orbital (MAO). A frente de onda destes modos se propaga de forma helicoidal, com o vetor de onda espiralando em torno da direção de propagação. O parâmetro  $l$  determina o número de hélices e o sentido da rotação (horário para  $l < 0$  e anti-horário para  $l > 0$ ). Além disso, a intensidade destes modos apresenta um padrão anular com um núcleo escuro no centro, cuja dimensão aumenta com  $|l|$ . A Figura 11 apresenta o perfil de distribuição de intensidade dos modos Laguerre-Gauss e a Figura 12 apresenta de modo gráfico a diferença do sentido de rotação da frente de onda, de acordo com o sinal de  $l$ , para o modo de Laguerre de primeira ordem.

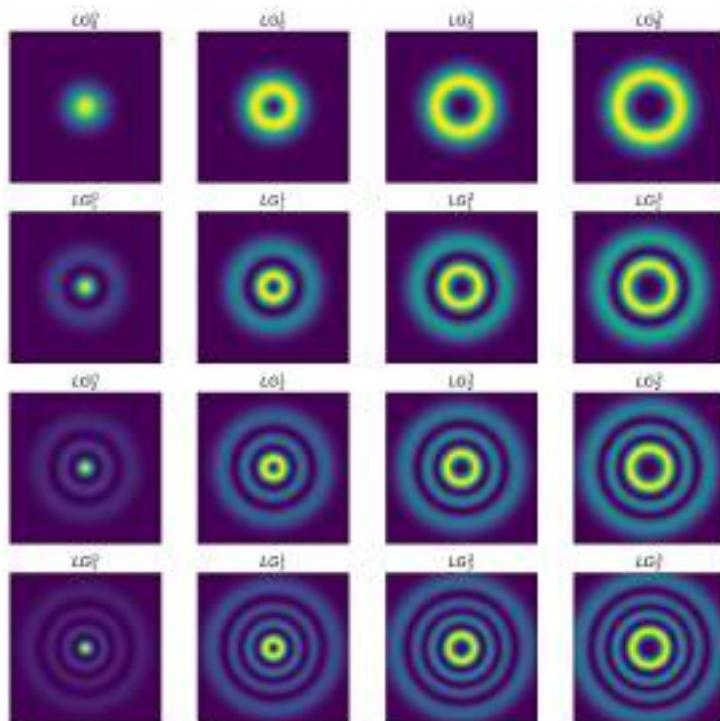


Figura 11 – Modos de Laguerre com  $p$  e  $l$  variando de 0 a 3. Fonte: Autor.

Na área de informação quântica, os modos transversos oferecem um espaço de Hilbert de alta dimensão para codificação de informação. O momento angular orbital da luz pode ser explorado para implementar q-dits, sistemas quânticos de dimensão  $d > 2$ .

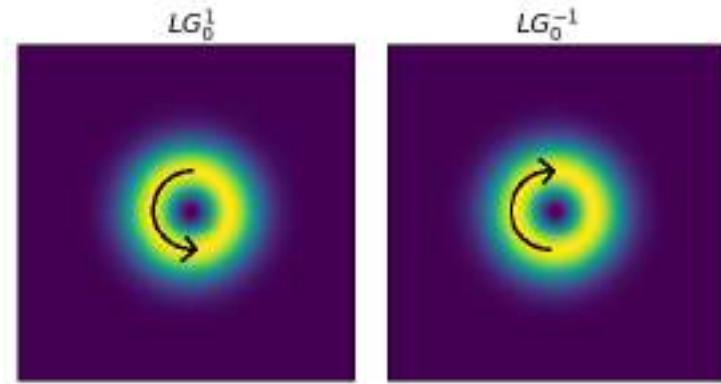


Figura 12 – Representação do sentido de rotação da frente de onda para o Laguerre de primeira ordem. Fonte: Autor.

Outra possibilidade, que é o caso dessa tese, é focar no modos de Hermite e Laguerre de primeira ordem.

Uma propriedade interessante dos modos de Hermite-Gauss de primeira ordem é que eles podem ser combinados linearmente para formar modos com diferentes orientações. Por exemplo, podemos definir um modo inclinado por um ângulo  $\theta$  em relação ao eixo horizontal como

$$HG_{0,1}^\theta = \cos(\theta)HG_{1,0} + \sin(\theta)HG_{0,1}. \quad (1.61)$$

Dois casos particulares importantes são  $\theta = \pi/4$  e  $\theta = -\pi/4$ , que resultam em

$$HG_{0,1}^{\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{1,0} + HG_{0,1}), \quad (1.62)$$

$$HG_{0,1}^{-\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{1,0} - HG_{0,1}). \quad (1.63)$$

A Figura 13, apresenta graficamente essa propriedade. Outra propriedade que é importante

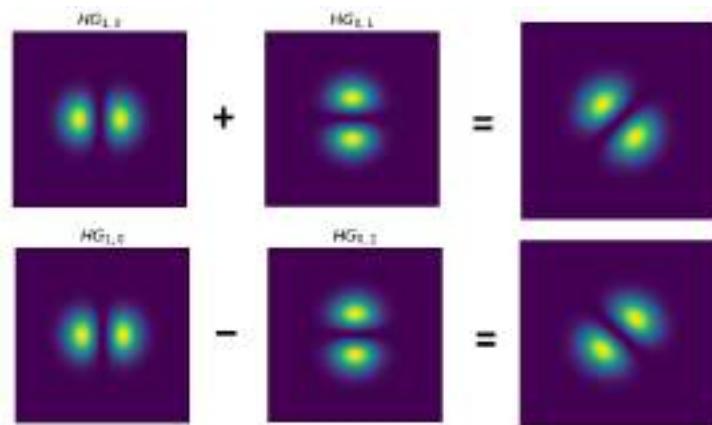


Figura 13 – Representação da combinação linear dos modos de Hermite. Fonte: Autor.

notar é que os modos de Hermite-Gauss e Laguerre-Gauss não são independentes, mas

estão relacionados por transformações unitárias. De fato, qualquer modo de Laguerre-Gauss, de primeira ordem, pode ser expresso como uma combinação linear de modos de Hermite-Gauss, e vice-versa. Sendo

$$LG_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{1,0} + iHG_{0,1}) \quad (1.64)$$

e

$$LG_0^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{1,0} - iHG_{0,1}). \quad (1.65)$$

Essa propriedade é apresentada de forma gráfica pela Figura 14. Tendo definido matemati-

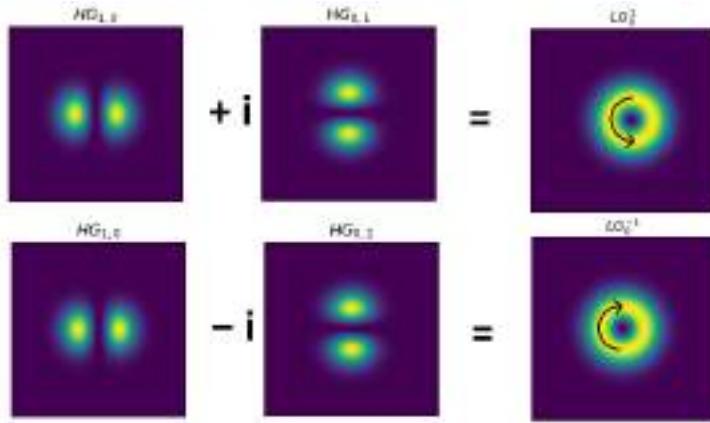


Figura 14 – Representação da ligação entre os modos de Hermite-Gauss e Laguerre-Gauss.

Fonte: Autor.

camente os modos transversos HG e LG, precisamos agora considerar os elementos ópticos que permitem transformar esses modos. Bem como aconteceu na polarização, a atuação dos elementos ópticos pode ser descrita utilizando matrizes 2x2.

Um exemplo é o prisma de Dove. Quando inserido em um feixe de luz, ele rotaciona a imagem transversal por um ângulo que é o dobro do ângulo  $\theta$  de orientação da base do prisma em relação à horizontal. A ação do prisma de Dove orientado por  $\theta$  pode ser representada pela seguinte matriz

$$\mathbf{DP}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}. \quad (1.66)$$

Outro elemento importante é o conversor de modos, tipicamente construído com duas lentes cilíndricas idênticas de distância focal  $f$ , separadas por uma distância  $d$ , sua ação no subespaço de primeira ordem pode ser descrita pela matriz

$$\mathbf{C}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + e^{i\phi} \sin^2\theta & \cos\theta \sin\theta (e^{i\phi} - 1) \\ \cos\theta \sin\theta (e^{i\phi} - 1) & e^{i\phi} \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad (1.67)$$

onde  $\theta$  é o ângulo de orientação do conversor e  $\phi$  é uma fase relativa que depende da distância  $d$  entre as duas lentes cilíndricas. Duas configurações comuns são  $d = \sqrt{2}f$  que irá introduzir uma fase relativa  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , e  $d = 2f$  para uma fase  $\phi = \pi$ .

Note que, na eq(1.67) se utilizarmos  $\phi = \pi/2$  e  $\theta = \pi/4$  ocorre a conversão de  $\text{HG}_{10}$  em  $\text{LG}_0^1$ , ou  $\text{HG}_{01}$  em  $\text{LG}_0^{-1}$ , essa transformação será particularmente útil posteriormente nesta tese. É importante destacar que o funcionamento ótimo do conversor de modos, especialmente o de  $\pi/2$ , requer que o tamanho e a divergência do feixe incidente sejam adequadamente ajustados aos parâmetros do conversor. Isso geralmente demanda o uso de lentes esféricas adicionais antes e depois do conversor para adaptar o feixe.

Para finalizarmos, é interessante definirmos um análogo da esfera de Poincaré para modo transversos, onde os diferentes ângulos de rotação para os modos de Hermite ocupam o equador e os modos de Laguerre os polos. Evidentemente essa analogia carrega consigo toda a estrutura matemática e a possibilidade de descrição do estado utilizando um análogo dos parâmetros de Stokes.

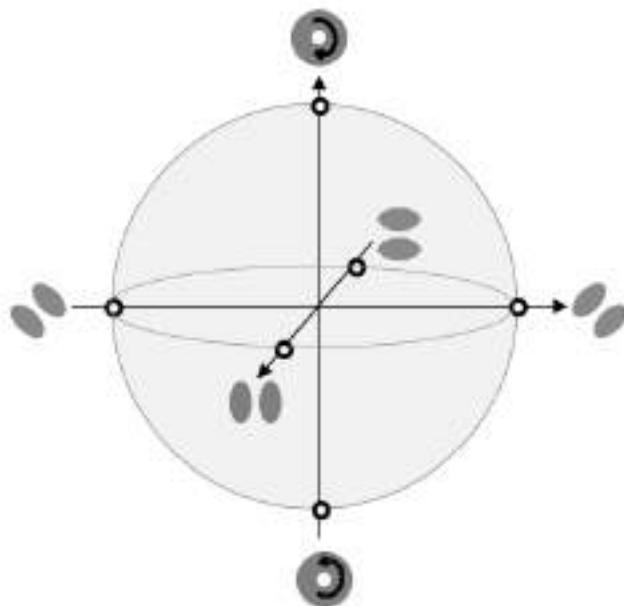


Figura 15 – Esfera de Poincaré para modos transversos. Fonte: (52).

Tendo bem definido os modos transversos, na próxima sub-seção abordaremos o último grau de liberdade da luz utilizado nessa tese. O caminho.

### 1.2.3 Caminho

O caminho, também conhecido como direção de propagação, constitui um dos graus de liberdade fundamentais da luz, ao lado da polarização e dos modos transversos. Este grau de liberdade está relacionado à trajetória espacial percorrida pelo feixe luminoso e representa uma propriedade física que pode ser manipulada e utilizada para codificação de informação quântica.

A partir das equações de Maxwell, temos que as ondas eletromagnéticas são caracterizadas por campos elétricos e magnéticos que oscilam perpendicularmente entre si e perpendicularmente à direção de propagação. É justamente esta direção de propagação, representada por  $\vec{k}$ , que define o caminho do feixe luminoso. Definimos dois caminhos distintos  $k_0$  e  $k_1$ , ortogonais entre si. Esta codificação permite que o caminho seja utilizado como um grau de liberdade da luz, que pode ser manipulado e controlado.

Podemos escrever a direção em termos das componentes ortogonais, de modo que uma direção de propagação qualquer pode ser escrita como

$$\vec{k}(\theta, \phi) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{k}_0 + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{k}_1 \quad (1.68)$$

onde

$$\vec{k}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{k}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.69)$$

Para a manipulação do grau de caminho podemos citar principalmente o cubo divisor de feixes(BS, do inglês *Beam Splitter*) e o PBS.

O BS é um dispositivo óptico que divide a intensidade do feixe luminoso igualmente entre suas saídas, independentemente do estado de polarização presente no feixe. Esta propriedade permite que o BS seja utilizado para criar superposições entre diferentes caminhos de propagação. Matematicamente, a ação de um BS pode ser representada pela matriz

$$\mathbf{BS} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.70)$$

O PBS, assim como vimos na seção de polarização, é um dispositivo que seleciona o estado de polarização do feixe incidente, separando-o em suas componentes ortogonais. Transmitindo a componente de polarização horizontal e refletindo a de polarização vertical. Nesse caso a polarização atua como um controlador do caminho. A Figura 16 apresenta uma representação gráfica que facilita a compreensão da atuação destes elementos ópticos.

Podemos também utilizar da interferometria para manipular o grau de caminho, se entrarmos com dois feixes de mesma frequência e coerentes entre si em BS podemos controlar a intensidade cada saída do cubo utilizando um espelho acoplado a uma cerâmica piezoeletrica(PZT), que irá se dilatar de acordo com a tensão aplicada ao PZT, modificando o caminho óptico do braço em que se encontra, resultando numa diferença de fase entre os caminhos. A Figura 17 representa essa montagem experimental.

Quando a diferença de fase relativa entre os dois feixes é  $\Delta\phi = 2m\pi$ , sendo  $m$  inteiro, ocorre interferência construtiva em uma das portas de saída do segundo divisor de feixes (BS) e, simultaneamente, interferência destrutiva na outra. Nessa condição, toda a intensidade óptica é direcionada para uma única saída, enquanto a outra permanece

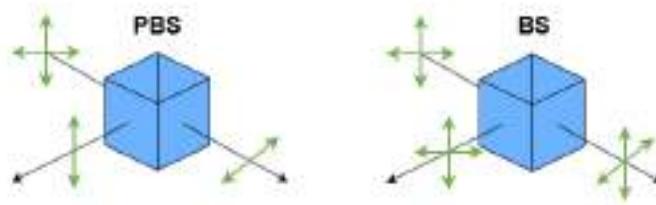


Figura 16 – Representação gráfica da diferença de atuação de um PBS e um BS. Fonte: Autor.

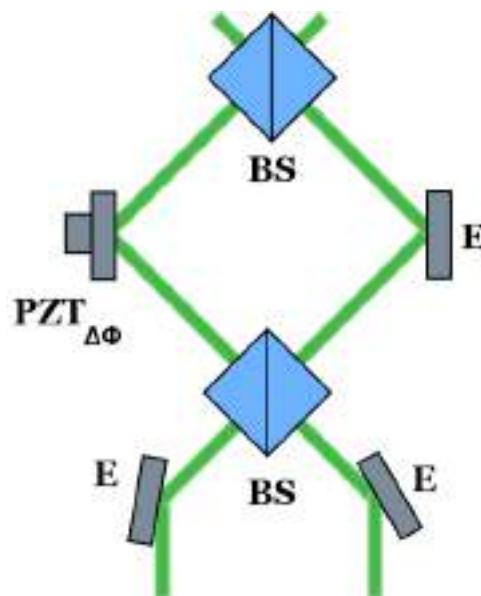


Figura 17 – Representação do arranjo experimental de um interferômetro. Fonte: Autor.

completamente extinta. Por outro lado, para  $\Delta\phi = (2m + 1)\pi$ , há uma troca entre as saídas do BS. Esse controle da distribuição de intensidade entre as saídas, mediado pela fase  $\Delta\phi$  introduzida pela dilatação do material piezoeletrico (PZT), permite utilizar o interferômetro como um controlador de caminho.

É importante notar que o funcionamento de um interferômetro está limitado pela coerência do feixe utilizado. A observação de efeitos de interferência exige que as parcelas do campo que se recombinam mantenham correlações de fase ao longo do atraso temporal introduzido pelo dispositivo. Assim, as manifestações de interferência só são claramente detectáveis quando a diferença de caminho óptico  $\Delta\ell$  entre as trajetórias é compatível com o comprimento de coerência da fonte (56).

O comprimento de coerência pode ser descrito de forma aproximada como (56)

$$\Delta t \sim \frac{1}{\Delta\nu}, \quad (1.71)$$

onde  $\Delta\nu$  largura de banda da fonte. Assim, o comprimento de coerência pode ser escrito como

$$\Delta\ell = c\Delta t \sim \frac{c}{\Delta\nu}. \quad (1.72)$$

A condição para que a interferência seja observável a diferença de caminho óptico imposto pelo interferômetro seja menor que o comprimento de coerência da luz.

Assim, como ocorre com a polarização e os modos transversos, o caminho também pode ser representado por uma esfera análoga à esfera de Poincaré, esta representação geométrica permite visualizar os estados e as manipulações de caminho de maneira intuitiva. A Figura 18 apresenta a esfera de Poincaré para o caminho.

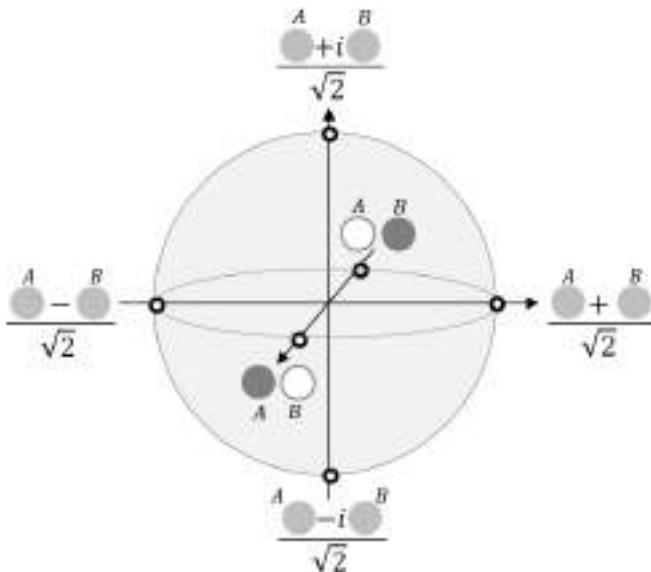


Figura 18 – Esfera de Poincaré para o caminho. Fonte: (52).

Na esfera de Poincaré associada ao grau de liberdade do caminho, cada um dos círculos representados, denominados aqui como A e B, corresponde a um dos dois trajetos possíveis que o feixe pode seguir. Quando o feixe propaga-se exclusivamente pelo caminho A, sua representação no equador da esfera é um círculo completamente preenchido (cinza escuro), enquanto a ausência do feixe no caminho B é indicada por um círculo vazio (branco). Já nas extremidades do equador, temos estados em que o feixe se encontra igualmente distribuído entre os caminhos A e B, estes estados balanceados são representados por círculos em cinza claro. No entanto, mesmo entre estados com intensidades iguais, observamos diferenças de fase entre os caminhos. Essa distinção também se manifesta nos polos da esfera: tanto o polo norte quanto o polo sul correspondem a estados balanceados, porém com uma diferença de fase relativa entre os trajetos. Especificamente, o polo norte está associado a um fator de fase  $i$ , enquanto o polo sul está associado a um fator  $-i$ .

Tendo bem definido este grau de liberdade, juntamente com a polarização e os modos transversos, na próxima seção iremos abordar como é feita a codificação dos q-bits nesses graus de liberdade da luz.

### 1.3 Codificação de q-bits nos graus de liberdade da luz

Uma vez definidos os graus de liberdade que serão utilizados nesta tese, resta agora estabelecer uma correspondência clara entre essas grandezas físicas e a codificação de q-bits em computação quântica. A codificação de q-bits nos graus de liberdade da luz consiste em associar estados quânticos de dois níveis a propriedades físicas específicas do campo eletromagnético. Essa associação deve satisfazer os requisitos fundamentais da computação quântica, incluindo a capacidade de preparar estados em superposição coerente, realizar operações unitárias reversíveis e efetuar medidas projetivas sobre bases arbitrárias (31).

As estruturas matemáticas discutidas nas seções anteriores, em especial a notação vetorial de Jones e a representação matricial dos elementos ópticos que atuam nesses graus de liberdade, já evidenciavam uma forte semelhança com o formalismo de q-bits. Essa correspondência permite uma transição natural para a computação quântica, onde os elementos ópticos desempenham o papel de portas lógicas unitárias, e os estados físicos da luz representam os vetores de estado no espaço de Hilbert. Os exemplos escolhidos ao longo desta tese foram formulados justamente para evidenciar essa equivalência: ao mostrar que uma placa de onda, prisma ou Beam Splitter pode implementar a mesma matriz associada a uma porta lógica padrão (como X, Z ou Hadamard), estabelecemos de forma concreta o vínculo entre óptica clássica e operações quânticas.

Em cada grau de liberdade analisado existe uma esfera de Poincaré associada, cuja estrutura geométrica e algébrica é formalmente idêntica à esfera de Bloch da teoria dos q-bits. Isso significa que qualquer estado puro pode ser representado por um ponto na superfície dessa esfera, com as coordenadas  $(\theta, \varphi)$  correspondendo à amplitude relativa e à fase entre os estados base. Essa analogia geométrica fornece uma visualização intuitiva dos estados quânticos e das operações ópticas, além de reforçar a universalidade do modelo de q-bit.

Na codificação baseada em polarização, definimos a base computacional como  $|0_{\text{Pol}}\rangle, |1_{\text{Pol}}\rangle \equiv |H\rangle, |V\rangle$ , onde  $|H\rangle$  representa o estado de polarização horizontal e  $|V\rangle$  o estado de polarização vertical. Estes dois estados formam uma base ortonormal no espaço de Hilbert bidimensional da polarização e são facilmente preparados e manipulados por meio de placas HWP e QWP, como discutido anteriormente.

Os modos transversos, particularmente os modos de Hermite–Gauss de primeira ordem, oferecem uma alternativa igualmente válida para a codificação de q-bits. Nesse contexto, a base computacional é definida como  $|h\rangle, |v\rangle \equiv |HG_{1,0}\rangle, |HG_{0,1}\rangle$ , com os modos

ortogonais  $HG_{1,0}$  e  $HG_{0,1}$  representando as direções horizontais e verticais de propagação da amplitude do campo. A geração e manipulação desses modos podem ser realizadas por meio de conjuntos de lente e prismas de Dove, que operam analogamente às portas unitárias.

O caminho, ou direção de propagação, também pode ser explorado como grau de liberdade para codificação quântica. Nesse caso, a base computacional é dada por  $|0_C\rangle, |1_C\rangle \equiv |k_0\rangle, |k_1\rangle$ , onde  $|k_0\rangle$  e  $|k_1\rangle$  representam dois caminhos distintos que o feixe pode seguir. A preparação de estados superpostos e a realização de portas nesse espaço são efetuadas por BS, PBS, espelhos e arranjos como o interferômetro.

Como sintetizado na Tabela 1, cada grau de liberdade da luz estabelece uma relação direta e unívoca entre uma grandeza física mensurável e a base computacional da computação quântica

Tabela 1 – Relação entre bases computacionais e modos transversos da luz.

Base computacional	Polarização	Modos Transversos	Caminho
$ 0\rangle$	$H$	$HG_{1,0}$	$k_0$
$ 1\rangle$	$V$	$HG_{0,1}$	$k_1$

Além disso, podemos utilizar a combinação dessas grandezas para representar estados de dois ou três q-bits. Os modos spin-órbita (combinação de modo transverso com polarização), nos permitem codificar estados bipartites utilizando a codificação

$$\begin{aligned} \vec{E}_h HG_{10} &\rightarrow |Hh\rangle = |00\rangle, \\ \vec{E}_h HG_{01} &\rightarrow |Hv\rangle = |01\rangle, \\ \vec{E}_v HG_{10} &\rightarrow |Vh\rangle = |10\rangle, \\ \vec{E}_v HG_{01} &\rightarrow |Vv\rangle = |11\rangle. \end{aligned} \tag{1.73}$$

onde  $\vec{E}_h$  e  $\vec{E}_v$  indicam a polarização horizontal e vertical, respectivamente, e os modos  $HG_{10}$  e  $HG_{01}$  identificam a estrutura transversal do feixe. De forma análoga, pode-se ainda estender essa abordagem para a codificação de três q-bits utilizando o grau de liberdade do caminho como q-bit adicional. Resultando em estados, por exemplo

$$\begin{aligned} \vec{E}_h HG_{10} k_0 &\rightarrow |Hhk_0\rangle = |000\rangle, \\ \vec{E}_h HG_{01} k_0 &\rightarrow |Hvk_0\rangle = |010\rangle, \\ \vec{E}_v HG_{10} k_1 &\rightarrow |Vhk_1\rangle = |101\rangle, \\ \vec{E}_v HG_{01} k_1 &\rightarrow |Vvk_1\rangle = |111\rangle. \end{aligned} \tag{1.74}$$

Com isso, torna-se possível realizar experimentos envolvendo q-bits múltiplos inteiramente no regime óptico, utilizando combinações físicas bem definidas de graus de liberdade da luz.

## 2 Tomografia

Neste capítulo, concentraremos nossa atenção na tomografia quântica de estado, o procedimento experimental e matemático que permite reconstruir completamente a matriz densidade de um sistema quântico desconhecido a partir de um conjunto adequado de medições. Trata-se de uma técnica essencial para a caracterização de estados, pois possibilita, entre outras coisas, quantificar grandezas como fidelidade, coerência e correlações quânticas diretamente dos dados experimentais.

### 2.1 Matriz densidade

Antes de adentrarmos no processo de tomografia quântica, é fundamental revisitarmos como os estados quânticos são representados matematicamente. No Capítulo 1, apresentamos a representação de estados a partir do formalismo de vetor de estado de Dirac. Contudo, a descrição puramente vetorial revela-se insuficiente quando lidamos com sistemas que não estão em estados puros. Isso ocorre, por exemplo, em um ensemble que contém uma mistura estatística de diferentes estados puros ou quando o sistema de interesse está emaranhado com outro sistema, que não está sendo observado. A ferramenta matemática adequada para descrever tanto estados puros quanto mistos é o operador densidade, ou matriz densidade, comumente denotado por  $\rho$ .

Supondo um sistema quântico preparado em um conjunto de estados puros  $\{|\psi_n\rangle\}$  com pesos estatísticos correspondentes  $\{P_n\}$ , o operador densidade que descreve essa mistura é dado por

$$\rho = \sum_n P_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|. \quad (2.1)$$

Esta definição carrega consigo a natureza estatística dos estados mistos. Para que  $\rho$  represente um estado físico válido, ele deve satisfazer propriedades fundamentais (7):

- (i) A matriz densidade  $\rho$  deve ser um operador Hermitiano, ou seja,  $\rho = \rho^\dagger$ , garantindo que os valores esperados de sejam sempre reais (49). Note que essa condição é clara, dada a definição do operador densidade pela eq. (2.1).
- (ii)  $\rho$  deve ser positivo semidefinido, o que significa que, para qualquer vetor de estado  $|\phi\rangle$  no espaço de Hilbert do sistema, temos que

$$\langle \phi | \rho | \phi \rangle = \sum_n P_n |\langle \phi | \psi_n \rangle|^2 \geq 0, \quad (2.2)$$

uma vez que  $P_n \geq 0$  e  $|\langle \phi | \psi_n \rangle|^2 \geq 0$ . Isso garante que as probabilidades associadas a resultados de medidas sejam positivas.

- (iii) Outra propriedade crucial é que o traço de  $\rho$  deve ser igual a 1, ou seja,  $\text{Tr}(\rho) = 1$ , refletindo a normalização da probabilidade total.

Os elementos diagonais de  $\rho$  em uma base  $\{|\phi_m\rangle\}$ , dados por  $\rho_{mm} = \langle\phi_m|\rho|\phi_m\rangle$ , possuem interpretação direta: representam a probabilidade de encontrar o sistema no estado  $|\phi_m\rangle$  após uma medição nessa base (49).

A distinção entre estado puro e estado misto pode ser feita pelo traço do quadrado de  $\rho$ :  $\text{Tr}(\rho^2) = 1$  se, e somente se, o sistema estiver em estado puro; caso contrário,  $\text{Tr}(\rho^2) < 1$ . Para que fique claro essa propriedade, partindo da eq. (2.1),  $\rho^2$  é dado por

$$\rho^2 = \left(\sum_n P_n |\psi_n\rangle \langle\psi_n|\right) \left(\sum_m P_m |\psi_m\rangle \langle\psi_m|\right) = \sum_{n,m} P_n P_m |\psi_n\rangle \langle\psi_n| |\psi_m\rangle \langle\psi_m| \quad (2.3)$$

Para o caso puro, a eq. (2.3) se reduz a

$$\rho^2 = |\psi\rangle \langle\psi| |\psi\rangle \langle\psi| = |\psi\rangle \langle\psi| = \rho \quad (2.4)$$

Portanto, dada a condição de traço unitário para  $\rho$ ,  $\text{Tr}(\rho^2) = 1$  para estados puros e  $\text{Tr}(\rho^2) < 1$  para estados mistos.

Analisemos a evolução de um sistema quântico no formalismo de Dirac, supondo que o sistema inicial esteja no estado  $|\psi_i\rangle$ . Sob a ação de um operador unitário  $U$ , o estado final será

$$|\psi_f\rangle = U |\psi_i\rangle. \quad (2.5)$$

Para o operador densidade, basta substituir  $|\psi_i\rangle \langle\psi_i|$  por  $U |\psi_i\rangle \langle\psi_i| U^\dagger$  em (2.1), resultando em

$$\rho_f = \sum_n P_n U |\psi_n\rangle \langle\psi_n| U^\dagger = U \rho U^\dagger. \quad (2.6)$$

A descrição de medições no formalismo de matriz densidade também se mostra direta. Como mostrado na ref. (7), ao aplicarmos um operador de medição  $M_m$  em um estado inicial  $|\psi_i\rangle$ , a probabilidade de obter um valor  $m$  é

$$p(m | i) = \langle\psi_i| M_m^\dagger M_m |\psi_i\rangle = \text{Tr}(M_m^\dagger M_m |\psi_i\rangle \langle\psi_i|). \quad (2.7)$$

Portanto, a probabilidade total de obter  $m$  é

$$p(m) = \sum_i P_i p(m | i) = \sum_i P_i \text{Tr}(M_m^\dagger M_m |\psi_i\rangle \langle\psi_i|) = \text{Tr}(M_m^\dagger M_m \rho). \quad (2.8)$$

Outra aplicação importante do operador densidade é a descrição de subsistemas em um sistema composto. Considere dois sistemas quânticos  $A$  e  $B$ , cuja matriz densidade conjunta seja  $\rho^{AB}$ . O operador densidade reduzido de  $A$  é obtido pelo traço parcial em  $B$

$$\rho^A = \text{Tr}_B(\rho^{AB}), \quad (2.9)$$

onde o traço parcial em  $B$  é definido, para bases  $\{|a_i\rangle\}$  e  $\{|b_j\rangle\}$ , por

$$\text{Tr}_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) = |a_1\rangle\langle a_2| \text{Tr}(|b_1\rangle\langle b_2|). \quad (2.10)$$

Assim realizamos uma redução do sistema composto ao subsistema  $A$ . O operador densidade reduzido  $\rho^A$  contém toda a informação estatística necessária para descrever os resultados de quaisquer medições realizadas apenas em  $A$ , independentemente do estado de  $B$ . Em outras palavras, o traço parcial em  $B$  remove as correlações explícitas com esse subsistema, preservando unicamente a estrutura estatística acessível do subsistema  $A$  (7).

O estado de um único q-bit é descrito por uma matriz  $2 \times 2$ . Na base computacional  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , a forma geral é

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C e^{i\phi} \\ C e^{-i\phi} & B \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

onde  $A = \rho_{00}$  e  $B = \rho_{11}$  são populações (não-negativas e tais que  $A + B = 1$ ) e  $\rho_{01} = \rho_{10}^* = C e^{i\phi}$  contém as coerências quânticas entre  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  (com  $C \geq 0$ ). A condição de positividade exige  $C^2 \leq A B$ .

Para um sistema composto por  $n$  q-bits, o espaço de Hilbert total é  $\mathcal{H} = (\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ , de dimensão  $d = 2^n$ . Dessa forma, a matriz densidade  $\rho$  tem dimensão  $2^n \times 2^n$  e pode ser expressa na base computacional  $\{|i_1 i_2 \dots i_n\rangle\}$  (com  $i_k \in \{0, 1\}$ ) como

$$\rho = \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^1 \sum_{j_1, \dots, j_n=0}^1 \rho_{i_1 \dots i_n, j_1 \dots j_n} |i_1 \dots i_n\rangle \langle j_1 \dots j_n|. \quad (2.12)$$

Essa matriz contém  $d^2 = 4^n$  elementos complexos, dos quais  $d^2 - 1 = 4^n - 1$  são parâmetros reais independentes, uma vez que  $\rho$  é Hermitiano e  $\text{Tr}(\rho) = 1$ . Estes parâmetros descrevem não apenas as populações de cada estado da base computacional, mas contêm, também, as informações das correlações quânticas entre os q-bits.

Por exemplo, se o estado for separável e puder ser escrito como um produto tensorial dos estados individuais de cada q-bit,  $\rho = \rho^1 \otimes \rho^2 \otimes \dots \otimes \rho^n$ , então seus elementos de matriz se fatorizam

$$\rho_{i_1 \dots i_n, j_1 \dots j_n} = \rho_{i_1, j_1}^1 \rho_{i_2, j_2}^2 \dots \rho_{i_n, j_n}^n. \quad (2.13)$$

No entanto, para estados emaranhados ou correlacionados, essa fatorização não é possível. Elaboraremos melhor esta questão no próximo capítulo, onde abordaremos as correlações quânticas.

Tendo bem definido o operador densidade para sistemas de um e vários q-bits, estamos preparados para introduzir o protocolo de tomografia quântica. Na próxima seção, mostraremos como selecionar um conjunto completo de bases de medição e coletar estatísticas suficientes em cada uma delas, de modo a reconstruir a matriz densidade.

## 2.2 Tomografia de um Q-bit

A tomografia quântica de estados permite a caracterização completa de um estado quântico desconhecido. De forma análoga à tomografia médica, que reconstrói uma imagem tridimensional interna a partir de múltiplas projeções bidimensionais, a tomografia quântica reconstrói a matriz densidade de um sistema quântico através de medidas projetivas em diferentes bases. Para abordar esse tema usaremos como referencias (57, 58). Iniciaremos abordando o caso mais simples, um q-bit, e depois generalizaremos para o caso de múltiplos q-bits.

Conforme discutido na Seção 2.1, a matriz densidade  $\rho$  de um único q-bit é um operador Hermitiano  $2 \times 2$ , semidefinido positivo e com traço unitário. Uma parametrização completa e conveniente para  $\rho$  é definida pela expansão de  $\rho$  na base dos operadores de Pauli

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 S_i \hat{\sigma}_i = \frac{1}{2} (S_0 \hat{\sigma}_0 + S_1 \hat{\sigma}_1 + S_2 \hat{\sigma}_2 + S_3 \hat{\sigma}_3) = \frac{1}{2} (\hat{I} + \vec{S} \cdot \vec{\sigma}), \quad (2.14)$$

onde  $\hat{\sigma}^i$  representa as matrizes de Pauli, dadas por

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0 &= \hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \hat{\sigma}_1 &= \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\sigma}_2 &= \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, & \hat{\sigma}_3 &= \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Essas quatro matrizes formam uma base completa para o espaço de operadores Hermitianos  $2 \times 2$ . Os coeficientes  $S_i$  são números reais chamados de parâmetros de Stokes (57), dados por

$$S_i = \text{Tr}(\hat{\sigma}_i \rho), \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (2.16)$$

Como  $\text{Tr}(\rho) = 1$  e  $\text{Tr}(\hat{\sigma}_0) = \text{Tr}(\hat{I}) = 2$ , segue-se que  $S_0 = \text{Tr}(\hat{\sigma}_0 \rho) = 1$ . Os três parâmetros restantes ( $S_1, S_2, S_3$ ) formam o vetor de Bloch  $\vec{S}$ , cujo módulo satisfaz

$$|\vec{S}|^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \leq 1. \quad (2.17)$$

A igualdade  $|\vec{S}|^2 = 1$  caracteriza estados puros, o vetor aponta um ponto na superfície da esfera de Bloch, enquanto  $|\vec{S}|^2 < 1$  corresponde a estados mistos, o vetor aponta um ponto no interior da esfera. O estado completamente misto  $\rho = \hat{I}/2$  coincide com  $\vec{S} = (0, 0, 0)$ , ponto central da esfera.

Fisicamente, a menos de  $S_0$ , cada parâmetro de Stokes está relacionado à diferença de probabilidades de projeção em autovetores de  $\hat{\sigma}_i$ . Especificamente, se  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  são os autoestados de  $\hat{\sigma}_3$  (com autovalores  $+1$  e  $-1$ , respectivamente), então

$$S_3 = \text{Tr}(\hat{\sigma}_3 \rho) = \text{Tr}[(|0\rangle \langle 0| - |1\rangle \langle 1|) \rho] = P_0 - P_1, \quad (2.18)$$

onde  $P_0 = \langle 0 | \rho | 0 \rangle$  e  $P_1 = \langle 1 | \rho | 1 \rangle$ . Analogamente, os autoestados de  $\hat{\sigma}_1$  podem ser definidos, por exemplo, como  $|D/A\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$ , e os de  $\hat{\sigma}_2$  como  $|R/L\rangle = (|0\rangle \pm i|1\rangle)/\sqrt{2}$ . Portanto teremos que

$$S_0 = \text{Tr}(\hat{\sigma}_0 \rho) = P_0 + P_1, \quad (2.19)$$

$$S_1 = \text{Tr}(\hat{\sigma}_1 \rho) = P_D - P_A, \quad (2.20)$$

$$S_2 = \text{Tr}(\hat{\sigma}_2 \rho) = P_R - P_L, \quad (2.21)$$

$$S_3 = \text{Tr}(\hat{\sigma}_3 \rho) = P_0 - P_1. \quad (2.22)$$

Como  $(P_0 + P_1) = (P_D + P_A) = (P_R + P_L) = 1$ , podemos reescrever cada parâmetro de Stokes  $S_k$  em função de uma única probabilidade  $P_k$  do autoestado com autovalor +1:

$$S_k = 2P_k - 1, \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.23)$$

A tarefa da tomografia de um q-bit é, portanto, determinar experimentalmente os três parâmetros de Stokes ( $S_1, S_2, S_3$ ). Para isso, realizam-se medições projetivas em três bases mutuamente não enviesadas (MUBs). Duas bases  $\{|\psi_i\rangle\}$  e  $\{|\phi_j\rangle\}$  são mutuamente não enviesadas se

$$|\langle \psi_i | \phi_j \rangle|^2 = \frac{1}{d}, \quad (2.24)$$

para todo  $i, j$ , onde  $d$  é a dimensão do espaço de Hilbert, sendo  $d = 2$  para um q-bit. No caso que nos interessa, as bases de autoestados de  $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$  e  $\hat{\sigma}_3$  constituem um conjunto de MUBs. Medindo-se em cada base, obtém-se as probabilidades  $P_D, P_A, P_R, P_L, P_0$  e  $P_1$ , permitindo o cálculo dos parâmetros de Stokes, e a partir disso reconstrói-se a matriz densidade  $\rho$  na forma

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S_0 + S_3 & S_1 - iS_2 \\ S_1 + iS_2 & S_0 - S_3 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Uma vez definida a tomografia para o estado de um q-bit, na próxima seção iremos abordar como esse conceito pode ser estendido para um número maior de q-bits.

## 2.3 Tomografia de múltiplos q-bits

A extensão da tomografia quântica para sistemas formados por múltiplos q-bits é conceitualmente direta, mas apresenta desafios experimentais significativamente maiores devido ao crescimento exponencial da dimensionalidade do espaço de Hilbert. Para um sistema de  $n$  q-bits, o espaço de Hilbert é o produto tensorial dos espaços individuais,  $\mathcal{H}^{(n)} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$ , resultando em dimensão  $d = 2^n$ . A descrição completa desse sistema, seja em estado puro ou misto, requer uma matriz densidade  $\rho$  de dimensão  $d \times d$ . Sendo  $\rho$  Hermitiana e de traço unitário, ela é especificada por  $d^2 - 1 = (2^n)^2 - 1 = 4^n - 1$  parâmetros reais independentes, o que cresce rapidamente com  $n$ .

Assim como a matriz de um q-bit pode ser expandida na base das matrizes de Pauli, a matriz densidade de  $n$  q-bits pode ser expandida na base formada pelos produtos tensoriais das matrizes de Pauli atuando em cada subespaço de um q-bit. Assim, qualquer matriz densidade  $\rho$  pode ser escrita como

$$\rho = \frac{1}{2^n} \sum_{i_1=0}^3 \sum_{i_2=0}^3 \cdots \sum_{i_n=0}^3 S_{i_1 i_2 \dots i_n} (\hat{\sigma}_{i_1} \otimes \hat{\sigma}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \hat{\sigma}_{i_n}), \quad (2.26)$$

onde os coeficientes  $S_{i_1 i_2 \dots i_n}$  são números reais denominados parâmetros de Stokes generalizados ou parâmetros de correlação. Esses coeficientes são determinados experimentalmente por meio dos valores esperados dos operadores da base

$$S_{i_1 i_2 \dots i_n} = \text{Tr} \left[ (\hat{\sigma}_{i_1} \otimes \hat{\sigma}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \hat{\sigma}_{i_n}) \rho \right]. \quad (2.27)$$

Em particular,  $S_{00 \dots 0} = \text{Tr}(\rho (\hat{I} \otimes \cdots \otimes \hat{I})) = \text{Tr}(\rho) = 1$  está fixado pela normalização. Os demais  $4^n - 1$  parâmetros contêm toda a informação sobre o estado, englobando tanto as propriedades locais de cada q-bit quanto todas as correlações clássicas e quânticas entre eles.

Experimentalmente, a determinação desses parâmetros requer a realização de medições projetivas conjuntas sobre os  $n$  q-bits. Cada parâmetro  $S_{i_1 i_2 \dots i_n}$  está relacionado às probabilidades de resultados de medições realizadas nas bases associadas aos operadores  $\sigma_{i_k}$  para cada q-bit  $k$ . Para reconstruir completamente  $\rho$  em um sistema de  $n$  q-bits, deve-se determinar todos os  $4^n - 1$  parâmetros  $S_{i_1 i_2 \dots i_n}$  independentes. Em geral, isso exige medições em  $3^n$  configurações de bases de produto distintas.

Utilizando um sistema de dois q-bits como exemplo, ou seja,  $n = 2$ , são necessárias  $3^2 = 9$  configurações de bases locais para se determinar os 15 parâmetros independentes do estado quântico. Os parâmetros de Stokes para dois q-bits vão ser dados por

$$S_{i_1 i_2} = \text{Tr} \left[ (\hat{\sigma}_{i_1} \otimes \hat{\sigma}_{i_2}) \rho \right]. \quad (2.28)$$

Usando a relação  $S_k = P_k^+ - P_k^-$  para cada q-bit, com  $k = \{1, 2, 3\}$ . Para  $i_1 \neq 0$  e  $i_2 \neq 0$ , o cálculo do parâmetro de Stokes se reduz a

$$S_{i_1 i_2} = \sum_{a,b=\pm 1} ab P_{i_1 i_2}^{ab} = P_{i_1 i_2}^{++} - P_{i_1 i_2}^{+-} - P_{i_1 i_2}^{-+} + P_{i_1 i_2}^{--}, \quad (2.29)$$

onde  $P_{i_1 i_2}^{ab}$  representa a probabilidade de obter o resultado  $a$  (autovalor  $+1$  ou  $-1$ ) na medição do primeiro q-bit na base  $i_1$  e resultado  $b$  (autovalor  $+1$  ou  $-1$ ) na medição do segundo q-bit na base  $i_2$ . Para o caso de  $i = 0$ , teremos

$$\begin{aligned} S_{0,i_2} &= \sum_{b=\pm 1} b P_{0 i_2}^{+b} \\ S_{i_1,0} &= \sum_{a=\pm 1} a P_{i_1 0}^{a+} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Para ilustrar, escrevemos alguns desses parâmetros explicitamente

$$\begin{aligned} S_{00} &= P_{00} + P_{01} + P_{10} + P_{11}, \\ S_{03} &= P_{00} + P_{10} - P_{01} - P_{11}, \\ S_{11} &= P_{DD} - P_{AD} - P_{DA} + P_{AA}, \\ S_{12} &= P_{DR} - P_{AR} - P_{DL} + P_{AL}, \\ S_{33} &= P_{00} - P_{10} - P_{01} + P_{11}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Os demais 11 parâmetros seguem o mesmo procedimento, de modo que todos os  $S_{i_1 i_2}$  podem ser obtidos a partir das probabilidades de detecção apropriadas. Dessa forma, é possível reconstruir a matriz densidade do sistema bipartite.

A reconstrução da matriz densidade  $\rho$  fornece uma descrição completa do estado, incluindo todas as informações sobre as propriedades locais e as correlações entre os q-bits. Para aprofundar nossa compreensão sobre como os q-bits se relacionam, especialmente em termos de efeitos puramente quânticos que não possuem análogo clássico, é necessário introduzir e analisar medidas específicas de correlações. O próximo capítulo se dedicará justamente a explorar essas correlações quânticas, como o emaranhamento e a discórdia, investigando como elas se manifestam e podem ser quantificadas a partir da matriz densidade.

## 2.4 Fidelidade de estados quânticos

A reconstrução tomográfica de estados quânticos é sensível a ruídos e imperfeições experimentais, o que pode afetar a proximidade entre o estado reconstruído experimentalmente e o estado teórico. Para quantificar essa proximidade emprega-se a fidelidade quântica, um critério matemático amplamente utilizado para avaliar similaridade entre estados e validar protocolos em informação quântica (7, 59).

Para estados puros  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle$ , a fidelidade é definida pela probabilidade de transição entre eles

$$F(|\phi\rangle\langle\phi|, |\psi\rangle\langle\psi|) = |\langle\psi|\phi\rangle|^2. \tag{2.32}$$

Ao comparar um estado misto  $\rho$  com um estado puro  $|\psi\rangle$ , utiliza-se a generalização conhecida como fidelidade de Schumacher (60)

$$F(\rho, |\psi\rangle\langle\psi|) = \langle\psi|\rho|\psi\rangle. \tag{2.33}$$

Para o caso geral de dois estados mistos arbitrários,  $\rho$  e  $\sigma$ , a generalização mais amplamente empregada é a fidelidade de Uhlmann–Jozsa (61). Sua forma matemática é dada por

$$F(\rho, \sigma) = \left[ \text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho} \sigma \sqrt{\rho}} \right]^2. \tag{2.34}$$

No caso da avaliação do resultado da tomografia experimental, teremos  $\rho$  como a matriz densidade reconstruída a partir dos resultados experimentais e  $\sigma$  como a matriz densidade do estado teórico correspondente.

Qualquer medida de fidelidade robusta deve satisfazer um conjunto de propriedades conhecidas como axiomas de Jozsa (61):

1. A fidelidade deve assumir valores reais no intervalo  $[0, 1]$ .
2.  $F(\rho, \sigma) = 1$  se, e somente se,  $\rho = \sigma$ .
3.  $F(\rho, \sigma) = \text{Tr}(\sigma\rho)$  se  $\rho$  ou  $\sigma$  for um estado puro.
4. A fidelidade deve ser simétrica em relação aos seus argumentos, ou seja,  $F(\rho, \sigma) = F(\sigma, \rho)$ .
5. A fidelidade deve ser invariante sob transformações unitárias, de modo que  $F(U\rho U^\dagger, U\sigma U^\dagger) = F(\rho, \sigma)$  para qualquer operador unitário  $U$ .

Nos capítulos seguintes, a fidelidade será empregada como métrica para comparar os estados reconstruídos tomograficamente com seus correspondentes teóricos, permitindo uma avaliação objetiva da realização experimental da tomografia de estados.

## 2.5 Tomografia dos graus de liberdade da luz

Uma vez apresentados os fundamentos teóricos da tomografia quântica, passamos agora à sua implementação experimental. Nesta seção iremos abordar como é realizada a tomografia quântica nos graus de liberdade da luz de polarização, modos transversos e caminho.

Conforme estabelecido nas seções anteriores, os parâmetros de Stokes relacionam-se diretamente com as probabilidades de projeção em bases definidas. Em nosso estudo experimental com feixes laser, tais probabilidades manifestam-se fisicamente como intensidades normalizadas. Portanto, temos que

$$P_i = \frac{I_i}{I_{\text{tot}}}, \quad (2.35)$$

onde  $I_i$  corresponde à intensidade detectada na configuração de medida  $i$ , associada a uma projeção específica, e  $I_{\text{tot}} = \sum_i I_i$  representa a intensidade luminosa total, obtida pela soma das intensidades medidas em todas as configurações ortogonais. Esta relação operacional será empregada sistematicamente na reconstrução da matriz densidade, abrangendo todos os graus de liberdade utilizados nessa tese.

### 2.5.1 Polarização

Para a polarização da luz, conforme detalhado na Seção 1.3, a base computacional é definida pela polarização horizontal  $|H\rangle = |0\rangle$  e a polarização vertical  $|V\rangle = |1\rangle$ .

O arranjo experimental para a tomografia de polarização é ilustrado na Figura 19. Um PBS é o componente central, atuando como um projetor na base computacional ao transmitir a componente horizontal e refletir a vertical. Utilizamos placas de onda de quarto de onda (QWP) e meia-onda (HWP) para rotacionar a base de medida, as setas de ponta dupla indicam que essas placas são inseridas ou retiradas de acordo com a necessidade.

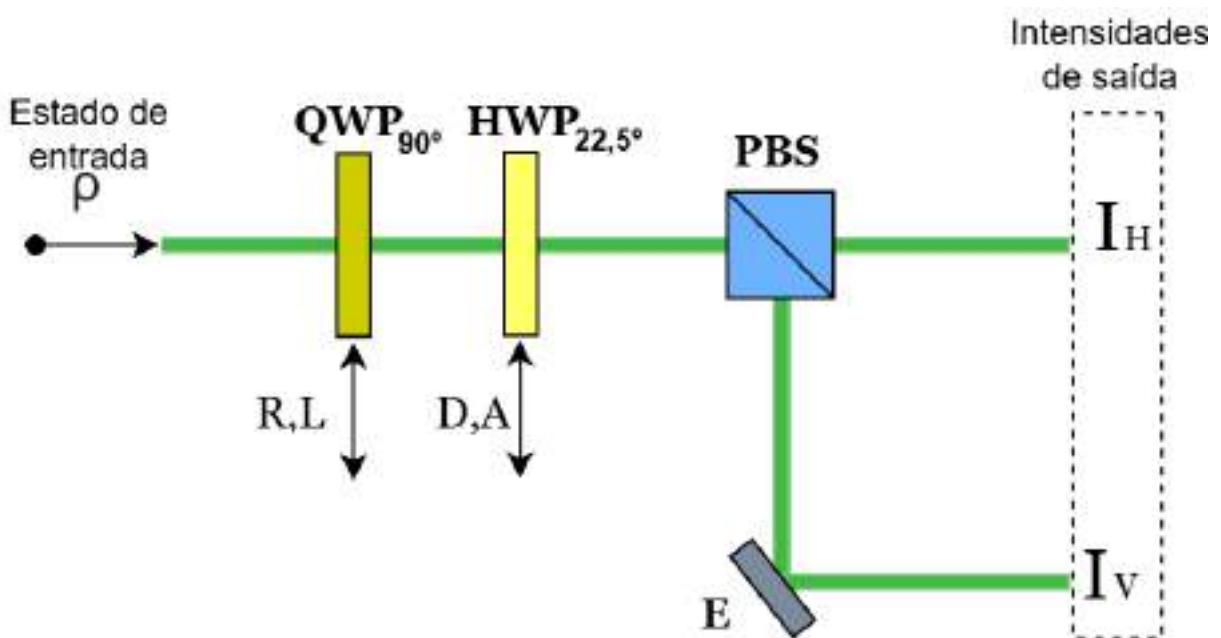


Figura 19 – Esquema experimental da tomografia de polarização. Fonte: Autor.

A primeira etapa da medição envolve a projeção na base computacional  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , sem a inserção de QWP ou HWP. As probabilidades de detecção são obtidas a partir das intensidades normalizadas são

$$\begin{aligned} P_{|0\rangle} &= \frac{I_{|0\rangle}}{I_{\text{tot}}}, \\ P_{|1\rangle} &= \frac{I_{|1\rangle}}{I_{\text{tot}}}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

permitindo a determinação dos parâmetros de Stokes  $S_0$  e  $S_3$ .

Para a medição nas bases diagonal e antidiagonal  $\{|D\rangle, |A\rangle\}$ , a HWP é inserida com seu eixo rápido orientado a  $22,5^\circ$ , resultando na rotação das bases de medida. As

probabilidades correspondentes são calculadas como

$$\begin{aligned} P_{|D\rangle} &= \frac{I_{|D\rangle}}{I_{\text{tot}}}, \\ P_{|A\rangle} &= \frac{I_{|A\rangle}}{I_{\text{tot}}}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

a partir das quais o parâmetro  $S_1$  é calculado.

Finalmente, para projetar nas bases circular direita e esquerda  $\{|R\rangle, |L\rangle\}$ , uma QWP com eixo rápido a  $90^\circ$  é inserida antes da HWP. A ordem de atuação de cada aparato óptico é fundamental devido à não comutatividade das matrizes de Jones. As probabilidades medidas são

$$\begin{aligned} P_{|R\rangle} &= \frac{I_{|R\rangle}}{I_{\text{tot}}}, \\ P_{|L\rangle} &= \frac{I_{|L\rangle}}{I_{\text{tot}}}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

resultando na obtenção do parâmetro  $S_2$ .

Com a determinação dos parâmetros de Stokes  $S_0, S_1, S_2$  e  $S_3$ , é possível reconstruir integralmente a matriz densidade do q-bit codificado na polarização da luz, caracterizando seu estado de forma completa.

### 2.5.2 Modos Transversos

Para a tomografia de modos transversos, a codificação do q-bit segue a representação apresentada na Seção 1.3, onde  $|h\rangle \equiv |HG_{1,0}\rangle = |0\rangle$  e  $|v\rangle \equiv |HG_{0,1}\rangle = |1\rangle$ . A Figura 20 ilustra o esquema experimental, destacando os dispositivos removíveis: o conjunto de lentes cilíndricas (LC) e o prisma de Dove (PD).

O componente principal deste arranjo é o interferômetro Mach-Zehnder com espelho adicional (MZIM) (62), que opera como um seletor de paridade. Um espelho montado em um elemento PZT (cerâmica piezoelétrica) permite um controle preciso da diferença de caminho óptico, ajustando a tensão elétrica aplicada. O MZIM direciona os modos ímpares  $\{|Hv\rangle, |Vh\rangle\}$  para uma saída e os modos pares  $\{|Hh\rangle, |Vv\rangle\}$  para outra. Supondo um feixe com polarização horizontal teremos em uma das saídas do interferômetro o modo  $|Hh\rangle$  e na outra  $|Hv\rangle$ . Portanto, um feixe com polarização horizontal ou vertical, o resultado de seleção de paridade pode ser comparado a medida projetiva nas bases de modos transversos. É importante notar que limitações da visibilidade do interferômetro produzem erros nas projeções.

Na etapa inicial, sem a inserção de CL ou DP, o MZIM irá projetar nas bases dos modos transversos. Portanto as probabilidades de detecção vão ser dadas por

$$\begin{aligned} P_{|h\rangle} &= \frac{I_{|Hh\rangle}}{I_{\text{tot}}}, \\ P_{|v\rangle} &= \frac{I_{|Hv\rangle}}{I_{\text{tot}}}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

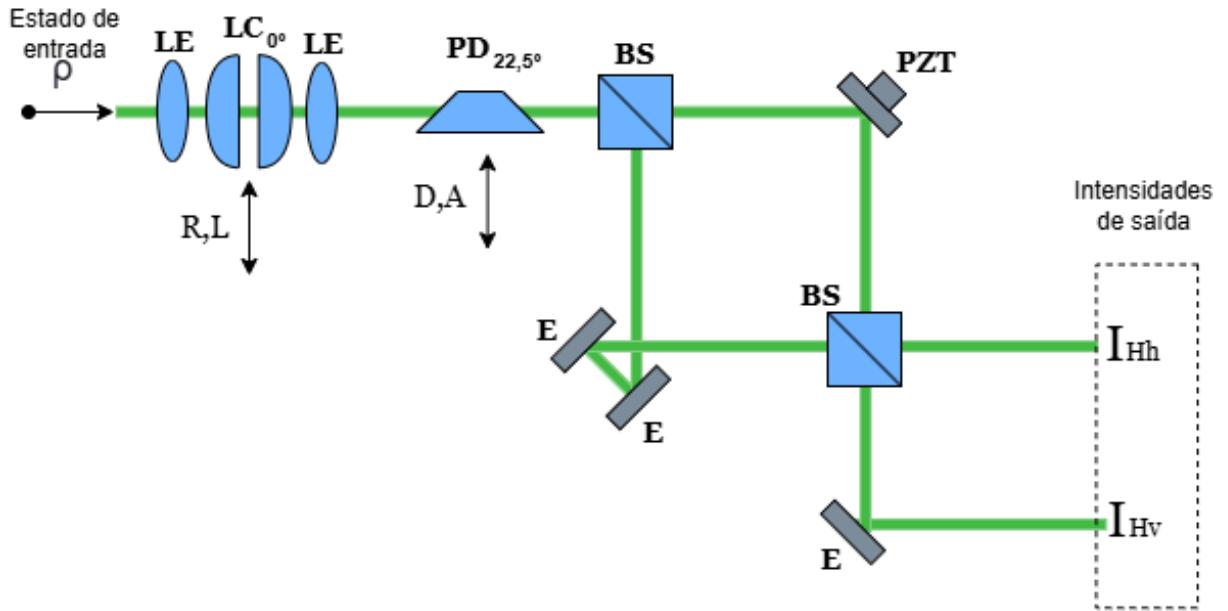


Figura 20 – Esquema experimental da tomografia de modos transversos. Fonte: Autor.

onde  $I_{\text{tot}} = I_{|Hh\rangle} + I_{|Hv\rangle}$ . A partir dessas probabilidades, os parâmetros de Stokes  $S_0$  e  $S_3$  são obtidos pela soma e diferença.

Em seguida, para realizar a projeção nas bases diagonal e antidiagonal, utilizamos o prisma de Dove com eixo rápido a  $22,5^\circ$ . De modo que o prisma rotaciona a base de medida dos modos em  $45^\circ$ , conforme discutido na Seção 1.2. As probabilidades medidas serão

$$\begin{aligned} P_{|d\rangle} &= \frac{I_{|Hd\rangle}}{I_{\text{tot}}}, \\ P_{|a\rangle} &= \frac{I_{|Ha\rangle}}{I_{\text{tot}}}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

permitindo o cálculo do parâmetro  $S_1$ .

Por fim, para a projeção nas bases de modos rotacionais direita e esquerda, adicionamos um conjunto de lentes cilíndricas com ângulo entre lentes de  $0^\circ$  e distância  $d = \sqrt{2}f$ , uma lente esférica é inserida antes e depois do conjunto de lentes cilíndricas para controlarmos o tamanho da cintura do feixe. Assim obtemos as probabilidades

$$\begin{aligned} P_{|r\rangle} &= \frac{I_{|Hr\rangle}}{I_{\text{tot}}}, \\ P_{|l\rangle} &= \frac{I_{|Hl\rangle}}{I_{\text{tot}}}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

resultando na determinação do parâmetro  $S_2$ . Com a obtenção de todos os parâmetros de Stokes, a matriz densidade do q-bit em modos transversais pode ser reconstruída

integralmente.

### 2.5.3 Caminho

Para o esquema de tomografia de caminho, utilizaremos a codificação do q-bit nas bases caminho, conforme apresentado na Seção 1.3, temos

$$|k_0\rangle \equiv |0\rangle, \quad |k_1\rangle \equiv |1\rangle, \quad (2.42)$$

onde  $|k_0\rangle$  e  $|k_1\rangle$  representam trajetórias ortogonais do feixe laser. A configuração experimental está ilustrada na Figura 21, onde a seta dupla indica dispositivos móveis, inseridos apenas quando necessário.

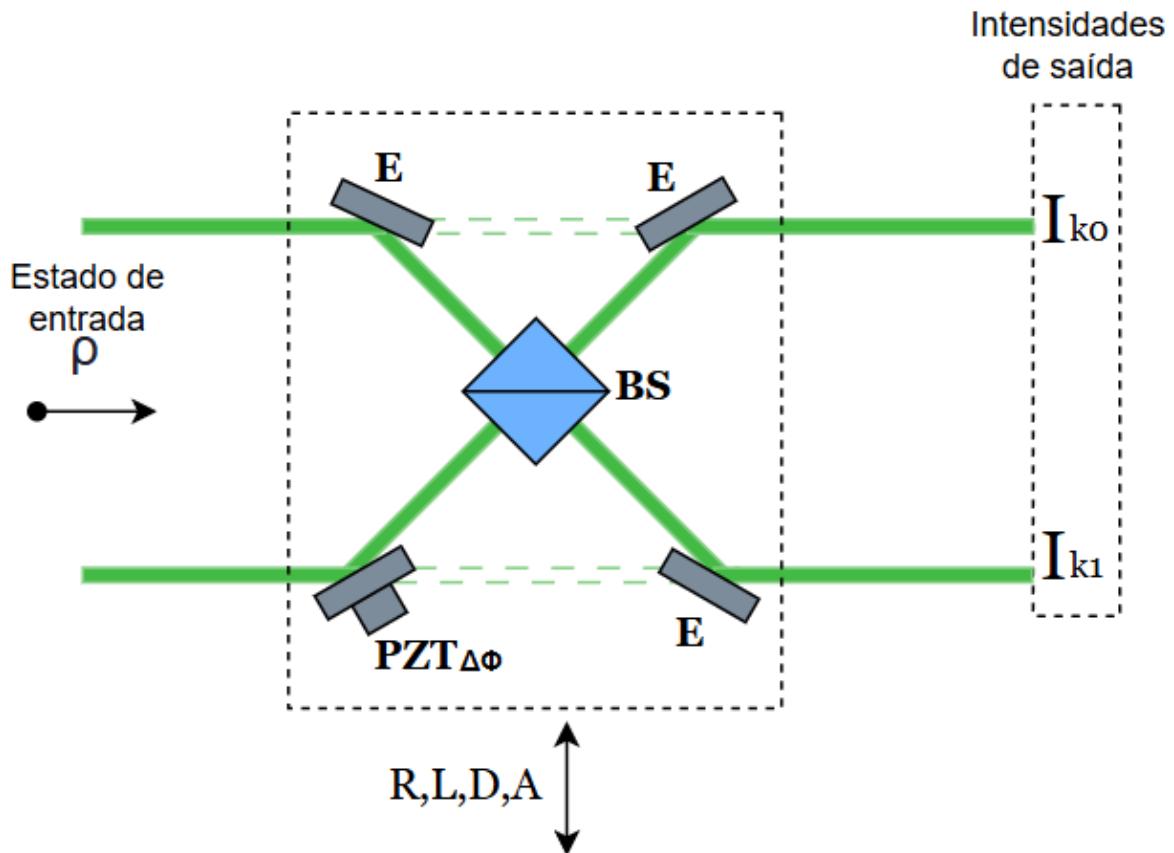


Figura 21 – Esquema experimental para a tomografia de caminho. Fonte: Autor.

Para obter as projeções nas diferentes bases, empregamos um divisor de feixe (BS) e uma cerâmica piezoelétrica (PZT). A PZT permite ajustar com precisão a fase relativa  $\Delta\Phi$  entre os dois caminhos, enquanto o BS recombina os feixes para gerar interferências.

Para medirmos na base computacional realizamos as medidas diretamente em cada

caminho, sem o PZT e o BS. As respectivas probabilidades são

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{I_{k_0}}{I_{\text{tot}}}, \\ P_1 &= \frac{I_{k_1}}{I_{\text{tot}}}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

A partir dessas probabilidades calculamos os parâmetros de Stokes  $S_0$  e  $S_3$ .

Inserindo o BS e posicionando espelhos, sendo um deles acoplado à PZT, podemos controlar a fase relativa entre os caminhos  $\Delta\Phi$  para projetar nas bases diagonal e antidiagonal

$$\begin{aligned} |d\rangle &= \frac{|k_0\rangle + |k_1\rangle}{\sqrt{2}}, \\ |a\rangle &= \frac{|k_0\rangle - |k_1\rangle}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (\Delta\Phi = 0) \quad (2.44)$$

ou nas bases circular direita e esquerda

$$\begin{aligned} |r\rangle &= \frac{|k_0\rangle + i|k_1\rangle}{\sqrt{2}}, \\ |l\rangle &= \frac{|k_0\rangle - i|k_1\rangle}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad \left(\Delta\Phi = \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.45)$$

De modo que medimos as intensidades que permitem calcular os parâmetros de Stokes  $S_1$  e  $S_2$ .

Dessa forma, combinando medições diretas e interferométricas com controle de fase pela PZT, é possível reconstruir completamente a matriz densidade do q-bit de caminho.

Para finalizarmos a abordagem de como é feita a tomografia para os diferentes graus de liberdade da luz de polarização, modos transversos e caminho, sumarizamos na Tabela 2 os parâmetros de Stokes correspondentes a cada base de medida e os aparelhos ópticos utilizados em cada configuração. Esse resumo facilita a visualização dos elementos necessários em cada etapa experimental e conclui o panorama completo da tomografia nesses três graus de liberdade.

Tabela 2 – Bases de medida, parâmetros de Stokes e aparelhos ópticos para tomografia de cada grau de liberdade

Bases	Stokes	Polarização	Modos transversos	Caminho
$ 0\rangle,  1\rangle$	$S_0, S_3$	PBS	MZIM, PBS	–
$ D\rangle,  A\rangle$	$S_1$	HWP(22.5°), PBS	PD(22.5°), MZIM, PBS	PZT( $\Delta\Phi = 0$ ), BS
$ R\rangle,  L\rangle$	$S_2$	QWP(90°), HWP(22.5°), PBS	LC(0°), PD(22.5°), MZIM, PBS	PZT( $\Delta\Phi = \frac{\pi}{2}$ ), BS

#### 2.5.4 Modos Spin-órbita

Para finalizarmos este capítulo dedicado à tomografia, abordamos agora a reconstrução experimental de um estado bipartido utilizando graus de liberdade da luz. Nesse

contexto, apresentamos a tomografia dos modos spin-órbita, resultantes da combinação entre os graus de liberdade de polarização (spin) e dos modos transversos espaciais (órbita) da luz.

A Figura 22 apresenta o circuito óptico utilizado para a tomografia dos modos spin-órbita. Esse arranjo consiste, essencialmente, na combinação dos aparelhos empregados separadamente nas tomografias de polarização, Fig.19, e de modos transversos, Fig. 20. As medidas são realizadas simultaneamente nesses dois graus de liberdade, por meio de diferentes combinações dos elementos ópticos que atuam sobre cada subsistema.

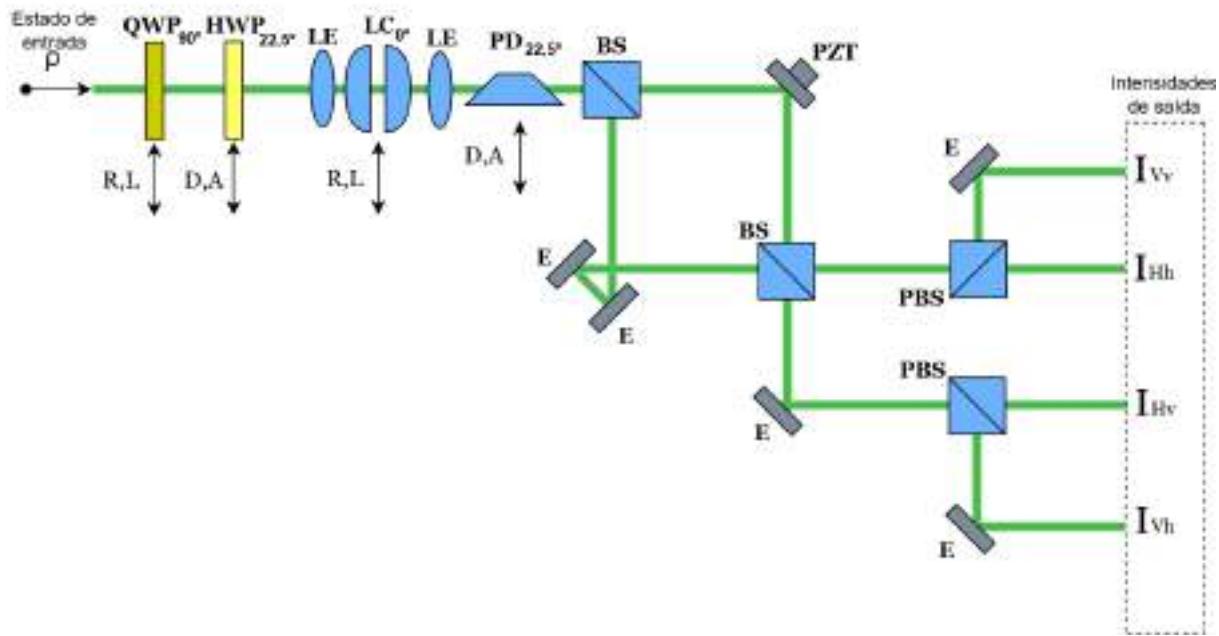


Figura 22 – Esquema experimental para a tomografia dos modos spin-orbita. Fonte: Autor.

Para realizar medidas simultâneas nas bases de polarização  $\{H, V\}$  e momento espacial  $\{h, v\}$ , utilizamos o MZIM com um PBS em cada saída. O MZIM separa os estados por paridade: os estados de paridade par  $|Hh\rangle, |Vv\rangle$  são direcionados para uma saída, enquanto os estados de paridade ímpar  $|Hv\rangle, |Vh\rangle$  são direcionados para outra. Então, cada feixe de saída é projetado pelo respectivo PBS nas bases de polarização. As intensidades medidas  $I_{|ij\rangle}$  (com  $i = H, V$  e  $j = h, v$ ) nos permite calcular

$$\begin{aligned} P_{|00\rangle} &= \frac{I_{|Hh\rangle}}{I_{\text{tot}}}, & P_{|01\rangle} &= \frac{I_{|Hv\rangle}}{I_{\text{tot}}}, \\ P_{|10\rangle} &= \frac{I_{|Vh\rangle}}{I_{\text{tot}}}, & P_{|11\rangle} &= \frac{I_{|Vv\rangle}}{I_{\text{tot}}}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

para obtenção dos parâmetros  $S_{00}, S_{03}, S_{30}$  e  $S_{33}$ , sendo  $I_{\text{tot}} = I_{|Hh\rangle} + I_{|Hv\rangle} + I_{|Vh\rangle} + I_{|Vv\rangle}$ .

Inserimos o prisma de Dove (PD) girado em  $22,5^\circ$  antes do MZIM, o que corresponde a uma rotação de  $45^\circ$  na subespaço dos modos transversos. A sequência  $\text{PD} \rightarrow \text{MZIM} \rightarrow \text{PBS}$  projeta então nas bases

$$|Hd\rangle = \frac{|Hh\rangle + |Hv\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |Ha\rangle = \frac{|Hh\rangle - |Hv\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.47)$$

que nos permite obter as probabilidades

$$\begin{aligned} P_{|0d\rangle} &= \frac{I_{|Hd\rangle}}{I_{\text{tot}}}, & P_{|0a\rangle} &= \frac{I_{|Ha\rangle}}{I_{\text{tot}}}, \\ P_{|1d\rangle} &= \frac{I_{|Vd\rangle}}{I_{\text{tot}}}, & P_{|1a\rangle} &= \frac{I_{|Va\rangle}}{I_{\text{tot}}}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

calculamos  $S_{01}$  e  $S_{31}$ .

Para acessar  $S_{02}$  e  $S_{32}$ , adicionamos o conjunto de lentes cilíndricas (LC) com ângulo relativo de  $0^\circ$  antes da PD. A sequência  $\text{LC} \rightarrow \text{PD} \rightarrow \text{MZIM} \rightarrow \text{PBS}$  implementa a projeção em

$$|Hr\rangle = \frac{|Hh\rangle + i|Hv\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |Hl\rangle = \frac{|Hh\rangle - i|Hv\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.49)$$

sendo as probabilidades

$$\begin{aligned} P_{|0r\rangle} &= \frac{I_{|Hr\rangle}}{I_{\text{tot}}}, & P_{|0l\rangle} &= \frac{I_{|Hl\rangle}}{I_{\text{tot}}}, \\ P_{|1r\rangle} &= \frac{I_{|Vr\rangle}}{I_{\text{tot}}}, & P_{|1l\rangle} &= \frac{I_{|Vl\rangle}}{I_{\text{tot}}}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

De modo análogo, as outras bases são acessadas por combinações de HWP, QWP, PD e LC. Cada configuração fornece um conjunto de probabilidades de detecção que permitem extrair os nove parâmetros de Stokes  $S_{mn}$  ( $m, n = 0, 1, 2, 3$ ).

Com todos os parâmetros  $S_{mn}$  determinados experimentalmente, a matriz densidade do estado bipartido spin-órbita é reconstruída. Dessa forma, obtemos uma caracterização completa do estado híbrido de polarização e modo transverso da luz.

Assim como foi feito para a tomografia individual de cada grau de liberdade da luz, reunimos na Tabela 3, com o objetivo de facilitar o entendimento do processo tomográfico, as bases de medição correspondentes aos parâmetros de Stokes, bem como os aparelhos ópticos utilizados em cada medida para a tomografia dos modos spin-órbita da luz.

Tabela 3 – Bases de medida, parâmetros de Stokes e aparatos ópticos para tomografia dos modos spin-órbita

Bases de medida	Parâmetros de Stokes	Aparatos ópticos
$ Hh\rangle,  Hv\rangle,  Vh\rangle,  Vv\rangle$	$S_{00}, S_{03}, S_{30}, S_{33}$	MZIM, PBS
$ Hd\rangle,  Ha\rangle,  Vd\rangle,  Va\rangle$	$S_{01}, S_{31}$	PD(22.5°), MZIM, PBS
$ Hr\rangle,  Hl\rangle,  Vr\rangle,  Vl\rangle$	$S_{02}, S_{32}$	LC(0°), PD(22.5°), MZIM, PBS
$ Dh\rangle,  Dv\rangle,  Ah\rangle,  Av\rangle$	$S_{10}, S_{13}$	HWP, MZIM, PBS
$ Rh\rangle,  Rv\rangle,  Lh\rangle,  Lv\rangle$	$S_{20}, S_{23}$	QWP, HWP, MZIM, PBS
$ Dd\rangle,  Da\rangle,  Ad\rangle,  Aa\rangle$	$S_{11}$	PD(22.5°), HWP, MZIM, PBS
$ Dr\rangle,  Dl\rangle,  Ar\rangle,  Al\rangle$	$S_{12}$	LC(0°), PD(22.5°), HWP, MZIM, PBS
$ Rd\rangle,  Ra\rangle,  Ld\rangle,  La\rangle$	$S_{21}$	PD(22.5°), QWP, HWP, MZIM, PBS
$ Rr\rangle,  Rl\rangle,  Lr\rangle,  Ll\rangle$	$S_{22}$	LC(0°), PD(22.5°), QWP, HWP, MZIM, PBS

# 3 Correlações quânticas, coerência e não-separabilidade em sistemas ópticos

## 3.1 Emaranhamento

O emaranhamento representa uma das manifestações mais profundas e distintas da mecânica quântica, constituindo um fenômeno que desafia nossa intuição clássica sobre a natureza das correlações físicas. Reconhecido inicialmente por Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) em 1935 como uma "ação fantasmagórica à distância"<sup>(5)</sup> da teoria quântica, e posteriormente formalizado por Schrödinger através do conceito de "Verschränkung"<sup>(63)</sup>, o emaranhamento permaneceu por décadas como uma curiosidade teórica antes de emergir como um recurso físico fundamental para o processamento de informação quântica. Para explorar esse conceito fundamental da Mecânica Quântica seguiremos as referencias <sup>(64, 65)</sup>.

O caráter genuinamente quântico do emaranhamento foi formalmente estabelecido em 1964, quando Bell provou que certas correlações quânticas violam desigualdades impostas por teorias de variáveis ocultas locais <sup>(6)</sup>. Experimentos subsequentes, em particular os de Aspect et al. <sup>(66)</sup> no início dos anos 1980, confirmaram essas violações e consolidaram o emaranhamento como um fenômeno real e inerente à natureza.

Formalmente, para um sistema bipartido  $AB$  descrito pelo operador densidade  $\rho_{AB}$ , dizemos que o estado é separável se ele puder ser preparado por meio de operações locais em  $A$  e  $B$  acompanhadas de comunicação clássica (LOCC). Isso equivale a escrever

$$\rho_{AB}^{\text{sep}} = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1, \quad (3.1)$$

onde cada  $\rho_A^i$  e  $\rho_B^i$  são estados do subsistema e  $\{p_i\}$  define uma distribuição de probabilidade. Estados que não admitem tal decomposição são chamados de emaranhados, refletindo a existência de correlações globais que não se reduzem a probabilidades clássicas ou propriedades individuais dos subsistemas.

No caso de estados puros bipartidos,  $|\psi\rangle_{AB}$ , a condição de separabilidade reduz-se à possibilidade de fatoração em um produto de estados locais, portanto  $|\psi\rangle_{AB}$  é separável se pudermos decompô-lo como

$$|\psi\rangle_{AB} = |\phi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B. \quad (3.2)$$

Adicionalmente, como mostrado em <sup>(67)</sup>, a decomposição de Schmidt de um estado puro carrega consigo informações do emaranhamento deste. Qualquer vetor de estado puro pode

ser escrito na forma da decomposição de Schmidt dada por

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^r \sqrt{\lambda_i} |i\rangle_A \otimes |i\rangle_B, \quad (3.3)$$

onde  $\{\lambda_i\}$  são os autovalores das matrizes densidades reduzidas de  $A$  e  $B$ , e  $r$  é o rank de Schmidt, também chamado de número de Schmidt. A condição  $r = 1$  caracteriza estados separáveis e para  $r > 1$  temos estados emaranhados.

Além de seu papel no debate sobre os fundamentos da mecânica quântica, o emaranhamento se tornou um recurso central em informação quântica. Protocolos de criptografia (11, 12), codificação densa (68, 69) e teleporte quântico (70, 71) demonstram aplicações práticas dessa correlação quântica.

Dada essa relevância, em muitos casos a simples verificação da separabilidade de um estado não é suficiente, sendo necessária uma medida quantitativa do emaranhamento.

Um quantificador de emaranhamento é uma função que associa a cada estado quântico um valor numérico  $E(\rho)$ . Essa medida deve satisfazer os seguintes axiomas fundamentais (65):

- **(I) Valores nulos apenas para estados separáveis:**

$$E(\rho) = 0 \text{ se, e somente se, } \rho \text{ é separável.}$$

- **(II) Monotonicidade média sob LOCC:**

$$E(\rho) \geq \sum_i p_i E(\sigma_i).$$

Para qualquer protocolo LOCC que transforme  $\rho$  em  $\{\sigma_i\}$  com probabilidades  $\{p_i\}$ . Este axioma reflete a impossibilidade de aumentar em média o emaranhamento com operações locais.

- **(III) Invariância a operações unitárias locais:**

$$E(\rho) = E \left( (U_A \otimes U_B) \rho (U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger) \right).$$

Transformações locais  $(U_A \otimes U_B)$  preservam as correlações quânticas, alterando apenas as bases locais sem afetar a estrutura de emaranhamento.

É importante mencionar que alguns autores adicionam outras propriedades que um quantificador de emaranhamento deve ter. Por exemplo, a ref. (64) aponta a convexidade como uma propriedade conveniente para uma medida de emaranhamento. Convexidade significa que misturas estatísticas não podem aumentar o emaranhamento, teremos que

$$E \left( \sum_i p_i \rho_i \right) \leq \sum_i p_i E(\rho_i). \quad (3.4)$$

Em estados puros, a maioria das medidas convergem para a entropia de emaranhamento

$$E(|\psi\rangle) = S(\rho_A) = S(\rho_B) = -\sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i. \quad (3.5)$$

Em estados mistos, o panorama é mais complexo: diferentes medidas podem ordenar estados de formas distintas. Nesta tese, utilizaremos duas medidas específicas: concorrência e emaranhamento geométrico; as próximas subseções serão dedicadas à elaboração de cada uma delas.

### 3.1.1 Concorrência

A concorrência é uma das medidas de emaranhamento mais importantes e matematicamente tratáveis para sistemas de dois q-bits. Introduzida por Wootters (72), ela surgiu inicialmente como uma quantidade auxiliar para o cálculo do emaranhamento de formação, mas posteriormente estabeleceu-se como uma medida de emaranhamento, com propriedades matemáticas e interpretações físicas notáveis.

Wootters (72) define a concorrência partindo da transformação de spin flip. Para um estado puro de um único q-bit, a inversão de spin, denotada por um til, é definida como

$$|\tilde{\psi}\rangle = \sigma_y |\psi^*\rangle, \quad (3.6)$$

onde  $|\psi^*\rangle$  é o complexo conjugado de  $|\psi\rangle$  quando expresso em uma base fixa, como  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , e  $\sigma_y$  é a matriz de Pauli. Para um sistema de partícula de spin- $\frac{1}{2}$  esta é a operação que inverte a direção do spin. Para realizar o spin flip em  $n$  q-bits basta atuar essa transformação em cada um deles individualmente.

Para um sistema de dois q-bits descrito por uma matriz densidade  $\rho$ , o estado com spin invertido é dado por

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y), \quad (3.7)$$

onde o complexo conjugado é tomado na base padrão  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ . Esta transformação é equivalente à “conjugação complexa na base mágica” mencionada por Hill e Wootters (73).

Para um estado puro  $|\psi\rangle$  de dois q-bits, a concorrência é definida como

$$C(|\psi\rangle) = |\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle|, \quad (3.8)$$

ou seja, o módulo do valor esperado do estado com spin invertido no estado original. Esta definição captura de forma elegante o grau de emaranhamento: para estados separáveis,  $C(|\psi\rangle) = 0$ , enquanto para estados maximamente emaranhados, como o estado singuleto  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ , temos  $C(|\psi\rangle) = 1$ .

A concorrência está diretamente relacionada ao emaranhamento de formação  $E_F$  através da função (74)

$$E_F(|\psi\rangle) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right), \quad (3.9)$$

onde  $h(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2(1 - x)$  é a entropia binária. Esta relação estabelece uma correspondência entre a concorrência e o emaranhamento de formação para estados puros de dois q-bits.

A concorrência para estados mistos é dada pelo mínimo da soma do ensemble de estados puros que formam o estado. Para uma matriz densidade  $\rho$  de dois q-bits, a concorrência é definida como

$$C(\rho) = \min_{\{p_i, |\psi_i\rangle\}} \sum_i p_i C(|\psi_i\rangle), \quad (3.10)$$

onde a minimização é realizada sobre todas as possíveis decomposições  $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$  do estado misto em termos de estados puros.

O resultado notável obtido por Wootters (72) é que esta minimização pode ser resolvida analiticamente, resultando na fórmula fechada

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (3.11)$$

onde  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4 \geq 0$  são as raízes quadradas dos autovalores da matriz não-hermitiana  $\rho\tilde{\rho}$ , em ordem decrescente. Alternativamente, os  $\lambda_i$  podem ser vistos como os autovalores da matriz hermitiana  $R = \sqrt{\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}}$ .

Do ponto de vista operacional, a fórmula analítica para a concorrência representa uma vantagem significativa sobre outras medidas de emaranhamento que requerem otimizações numéricas complexas. Essa tratabilidade matemática, aliada a uma interpretação física direta, torna a concorrência um instrumento especialmente eficaz para quantificar o emaranhamento em pares de q-bits. Vale destacar, porém, que sua aplicabilidade se restringe ao caso de sistemas bipartites, não sendo, portanto, adequada para estados com mais de dois q-bits.

### 3.1.2 Emaranhamento Geométrico

Uma abordagem alternativa para quantificar o emaranhamento é a medida geométrica, que se fundamenta na distância entre um estado quântico e o conjunto dos estados separáveis. Como discutido em (75), essa linha de pesquisa é amplamente explorada na literatura, contando com diversas definições e métricas propostas para caracterizar essa distância (76, 77, 78, 79, 80). Nesta tese, abordaremos o tema seguindo principalmente a abordagem apresentada em (81).

Podemos quantificar o grau de emaranhamento de um estado quântico, representado por sua matriz densidade  $\rho$ , por meio da menor distância entre ele e o conjunto dos estados

separáveis  $\rho^{\text{sep}}$ . Essa medida é dada por:

$$E(\rho) = \min_{\rho^{\text{sep}}} d(\rho, \rho^{\text{sep}}), \quad (3.12)$$

onde  $d(\rho, \rho^{\text{sep}})$  é uma métrica de distância no espaço dos operadores de densidade. A escolha da métrica é crucial, pois diferentes métricas podem levar a diferentes quantificações do emaranhamento geométrico. As métricas de distância mais comumente empregadas nesse contexto são baseadas nas normas Schatten- $p$ . Duas dessas normas são de particular interesse:

- **Norma de Hilbert-Schmidt** ( $p = 2$ ): Conhecida também como distância euclidiana no espaço de Hilbert-Schmidt, é definida como

$$\|A\|_2 = (\text{Tr } A^\dagger A)^{1/2}, \quad (3.13)$$

levando à distância  $d_2(\rho, \sigma) = \|\rho - \sigma\|_2$ . Esta métrica é computacionalmente conveniente devido à sua simplicidade algébrica, sendo análoga à distância euclidiana em espaços vetoriais. No entanto, Ozawa demonstrou que a norma de Hilbert-Schmidt nem sempre é contractiva sob operações quânticas trace-preserving (82). A propriedade de contractividade é fundamental para uma métrica de distância, pois assegura que a distinguibilidade entre dois estados quânticos não aumente sob evolução física, seguindo o princípio de que a capacidade de discriminar estados não deve crescer com o tempo.

- **Norma Traço** ( $p = 1$ ): Também conhecida como distância de traço, é definida como

$$\|A\|_1 = \text{Tr } \sqrt{A^\dagger A}, \quad (3.14)$$

levando à distância  $d_1(\rho, \sigma) = \|\rho - \sigma\|_1$ . A norma traço possui uma interpretação operacional direta, pois está intimamente relacionada à distinguibilidade estatística entre estados quânticos. Essa métrica supera o problema de contratividade apresentado pela norma de Hilbert-Schmidt.

Além dessas, outras métricas podem ser utilizadas, como a distância de Bures (83, 84) e Fubini-Study (85, 86), cada uma com suas próprias propriedades.

Uma das principais vantagens da medida geométrica de emaranhamento reside em sua interpretabilidade imediata: quanto maior for a distância de um estado quântico ao conjunto dos estados separáveis, maior será seu grau de emaranhamento. Essa abordagem permite visualizar a separabilidade como um subespaço bem definido no espaço de Hilbert, com o emaranhamento quantificado pela menor distância até essa fronteira.

Além disso, o formalismo geométrico pode ser generalizado para sistemas multipartites, possibilitando o cálculo de correlações em sistemas mais complexos. Contudo, a

determinação dessa medida demanda, em geral, um esforço computacional significativo, sobretudo em espaços de alta dimensão (77).

## 3.2 Discórdia

Nos estágios iniciais do desenvolvimento da teoria da informação quântica, o emaranhamento foi amplamente reconhecido como o recurso central responsável pela vantagem dos sistemas quânticos em relação aos clássicos. Contudo, esse entendimento foi revisitado, especialmente após a demonstração, por Knill e Laflamme, de um modelo de computação quântica que apresentava vantagens em eficiência mesmo na ausência de emaranhamento (87).

Esse resultado estimulou uma reavaliação do papel exclusivo do emaranhamento. De maneira independente, Henderson e Vedral (88) e Ollivier e Zurek (89) mostraram que estados separáveis podem exibir correlações de natureza quântica, essa grandeza é denominada Discórdia Quântica (QD, do inglês *Quantum Discord*). Essa noção foi consolidada por avanços teóricos e experimentais (90, 91).

Nesta seção, exploraremos em detalhes este conceito fundamental, com foco particular em duas abordagens de quantificação: a Discórdia Quântica, que mantém a formulação original baseada em medidas de informação, e a Discórdia Geométrica, que fornece uma versão baseada nas distâncias entre estados quânticos. Utilizaremos (92, 93) como principais referências.

### 3.2.1 Discórdia Quântica

Na teoria da informação clássica, a entropia de Shannon  $H(X)$  quantifica a incerteza ou ignorância associada a uma variável aleatória  $X$  (94, 95). Formalmente, esta entropia é definida como

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p(x_i) \log_2 p(x_i), \quad (3.15)$$

onde  $n$  representa o número de possíveis resultados de  $X$ ,  $x_i$  denota cada resultado distinto, e  $p(x_i)$  corresponde à probabilidade associada à ocorrência de  $x_i$ .

Este conceito estende-se naturalmente para sistemas de múltiplas variáveis através da entropia conjunta  $H(X, Y)$ , que mede a incerteza total associada ao par de variáveis aleatórias  $(X, Y)$ , dada por

$$H(X, Y) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log_2 p(x_i, y_j), \quad (3.16)$$

sendo  $p(x_i, y_j)$  a distribuição conjunta de probabilidades, onde  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) e  $y_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) representam os possíveis valores de  $X$  e  $Y$ , respectivamente.

Outra grandeza que podemos calcular é a entropia condicional  $H(Y|X)$ , que quantifica a incerteza remanescente sobre  $Y$  quando  $X$  é conhecida, dada por

$$H(Y|X) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log_2 p(y_j|x_i) = H(X, Y) - H(X), \quad (3.17)$$

onde  $p(y_j|x_i)$  denota a probabilidade condicional de  $y_j$  dado  $x_i$  (96).

Estas quantidades relacionam-se intimamente através da informação mútua  $I(X : Y)$ , que mede a informação compartilhada entre as variáveis, definida por

$$I(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y). \quad (3.18)$$

O Teorema de Bayes estabelece a relação entre probabilidades condicionais que é

$$p(x_i|y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}. \quad (3.19)$$

Utilizando este teorema, podemos expressar a informação mútua em uma forma alternativa, dada por

$$J(X : Y) = H(X) - H(X|Y), \quad (3.20)$$

onde  $H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y)$  é a entropia condicional de  $X$  dado  $Y$ . Esta forma interpreta a informação mutua como a redução da incerteza de  $X$ , uma vez que medimos  $Y$ . Classicamente as eq.(3.18) e (3.20) são equivalentes, porém quando tratamos do cenário quântico nem sempre isso será verdadeiro.

No contexto quântico, distribuições de probabilidade são substituídas por operadores densidade, e somatórios por traços (97, 98). Assim teremos a entropia de von Neumann(99), que é dada por

$$S(\rho) = -\text{Tr} [\rho \log_2 \rho]. \quad (3.21)$$

A informação mútua quântica total para estado bipartido  $\rho_{AB}$  é

$$I(\rho_{AB}) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}), \quad (3.22)$$

onde  $\rho_A = \text{Tr}_B[\rho_{AB}]$  e  $\rho_B = \text{Tr}_A[\rho_{AB}]$  são estados reduzidos. Esta quantidade quantifica correlações totais no estado (100, 101).

Para generalizar (3.20), consideramos medições locais no subsistema  $B$ . Diferentemente do caso clássico, medições quânticas necessariamente perturbam o sistema. Considere uma medida positiva operator-valued (POVM)  $\{B_k\}$  aplicada a  $B$ . O estado pós-medida, condicionado ao resultado  $k$ , é dado por

$$\rho_k = \frac{1}{p_k} (I_A \otimes B_k) \rho_{AB} (I_A \otimes B_k), \quad (3.23)$$

com probabilidade  $p_k = \text{Tr} [(I_A \otimes B_k) \rho_{AB} (I_A \otimes B_k)]$ . A partir desse operador densidade condicional, a entropia condicional quântica é definida como

$$S(\rho_{AB} | \{B_k\}) = \sum_k p_k S(\rho_k). \quad (3.24)$$

A informação mútua condicionada a uma medição específica é então

$$J(\rho_{AB} | \{B_k\}) = S(\rho_A) - S(\rho_{AB} | \{B_k\}). \quad (3.25)$$

Para obter o equivalente quântico de (3.20), generalizamos sobre todos os POVMs possíveis. Isso define a medida em  $B$  que maximiza a informação acessível sobre  $A$ , resultando na correlação clássica

$$\mathcal{C}(\rho_{AB}) = \sup_{\{B_k\}} J(\rho_{AB} | \{B_k\}). \quad (3.26)$$

Note que, se substituirmos (3.25) em (3.26), obteremos

$$\mathcal{C}(\rho_{AB}) = S(\rho_A) - \min_{\{B_k\}} S(\rho_{AB} | \{B_k\}). \quad (3.27)$$

Portanto, a correlação clássica é definida pela medida que menos perturba o sistema.

A Discórdia Quântica  $\mathcal{D}(\rho_{AB})$  é definida como a diferença entre a informação mútua total  $I(\rho_{AB})$ , equação (3.22), e esta correlação clássica

$$\mathcal{D}(\rho_{AB}) = I(\rho_{AB}) - \mathcal{C}(\rho_{AB}). \quad (3.28)$$

A Discórdia Quântica possui propriedades fundamentais, conforme demonstrado em (92):

- $\mathcal{D}_B(\rho_{AB}) \geq 0$  (não-negatividade).
- $\mathcal{D}_B$  é invariante sob unitárias locais  $U_A \otimes U_B$ .
- $\mathcal{D}_B$  não aumenta, em média, sob operações locais em  $A$  (a ação de operações locais em  $B$  é mais complexa devido à minimização sobre as medições em  $B$ ).
- Assimetria: Em geral,  $\mathcal{D}_A(\rho_{AB}) \neq \mathcal{D}_B(\rho_{AB})$ . A quantidade de correlação quântica detectada depende de qual subsistema é medido.

O principal desafio do cálculo da discordia é a minimização sobre todos os POVMs, que nem sempre possibilitar solução analítica. O que nos leva a pensar em outras possibilidades para quantificar essa grandeza, como é o caso da discordia geométrica, que discutiremos na próxima subseção.

### 3.2.2 Discórdia Geométrica

Uma abordagem alternativa, que tem ganhado destaque devido à sua interpretabilidade intuitiva e, em alguns casos, maior tratabilidade analítica, é a Discórdia Geométrica (DG). De modo análogo ao emaranhamento geométrico, a DG quantifica correlações quânticas pela distância entre um estado  $\rho$  e o conjunto dos estados clássicos, isto é, os estados que apresentam discórdia nula.

Formalmente, a Discórdia Geométrica é definida por

$$\mathcal{D}_G(\rho) = \min_{\chi \in \Omega_{CQ}} d(\rho, \chi), \quad (3.29)$$

onde  $\Omega_{CQ}$  representa o conjunto dos estados clássico-quânticos, e  $d(\rho, \chi)$  é uma medida de distância no espaço de operadores densidade. Os estados clássico-quânticos são aqueles que podem ser escritos na forma

$$\chi = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes |i\rangle\langle i|^B, \quad (3.30)$$

onde  $\{|i\rangle\}$  é uma base ortonormal para o subsistema  $B$ ,  $\rho_i^A$  são estados quânticos do subsistema  $A$ , e  $p_i$  é uma distribuição de probabilidade.

Para definir essa distância, é necessário escolher uma métrica, e duas escolhas bastante utilizadas na literatura são as normas de Schatten- $p$ : a norma de Hilbert–Schmidt, correspondente ao caso  $p = 2$ , e a norma traço, correspondente a  $p = 1$ .

A Discórdia Geométrica na métrica da norma de Hilbert–Schmidt é dada por

$$\mathcal{D}_G^{HS}(\rho) = \min_{\chi \in \Omega_{CQ}} \|\rho - \chi\|_2^2, \quad (3.31)$$

onde  $\|X\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(X^\dagger X)}$  é a norma de Hilbert–Schmidt.

Essa versão da discórdia geométrica permite, diferentemente da discórdia quântica, a obtenção de expressões analíticas fechadas para estados arbitrários de dois q-bits, a partir da identificação explícita do estado clássico mais próximo (102). Apesar de sua simplicidade, essa versão da discórdia apresenta limitações conceituais importantes. Estudos recentes apontaram que essa medida pode aumentar sob operações locais reversíveis aplicadas no subsistema não medido, o que contraria o comportamento esperado de uma boa quantificadora de correlações quânticas (103).

Como apresentado em (104), a métrica que supera esse problema é a norma traço, definida por

$$\mathcal{D}_G^{Tr}(\rho) = \min_{\chi \in \Omega_{CQ}} \|\rho - \chi\|_1, \quad (3.32)$$

onde  $\|X\|_1 = \text{Tr}\sqrt{X^\dagger X}$  é a norma traço. Embora essa métrica apresente propriedades desejáveis, como a monotonicidade sob operações locais, seu cálculo é, na maioria das vezes, mais complexo do que o da norma de Hilbert–Schmidt.

### 3.3 Coerência

A coerência quântica é uma das características mais fundamentais da mecânica quântica, estando intrinsecamente ligada à capacidade de um sistema existir em uma superposição de estados. Ela constitui a base de fenômenos como a interferência e o emaranhamento, sendo reconhecida como um recurso essencial em diversas tarefas de informação quântica, incluindo computação quântica, criptografia e metrologia (18). Nesta seção, utilizaremos como principal referência o formalismo desenvolvido em (105), que propõe uma estrutura rigorosa para a quantificação da coerência em estados quânticos.

O primeiro passo para quantificar a coerência é a definição dos estados incoerentes. Para isso, fixa-se uma base ortonormal de referência no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  do sistema, denotada por  $\{|i\rangle\}_{i=1}^d$ . Diz-se que um estado é incoerente nessa base se sua matriz densidade  $\delta$  for diagonal, ou seja,

$$\delta = \sum_{i=1}^d \delta_i |i\rangle\langle i|, \quad \delta_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^d \delta_i = 1. \quad (3.33)$$

O conjunto de todos os estados incoerentes é denotado por  $\mathcal{I}$ . Portanto, qualquer estado  $\rho$  que não seja diagonal nessa base apresenta coerência. É importante ressaltar que a coerência é dependente da escolha de base, de modo que o conjunto  $\mathcal{I}$  é definido de acordo com a base. Utilizaremos  $\rho$  para denotar a matriz densidade de um estado qualquer e  $\delta$  para matriz densidade dos estados incoerentes.

Na ref. (105), é postulado um conjunto de requisitos que qualquer medida de coerência,  $C(\rho)$ , deve satisfazer:

- (C1)  $C(\rho) \geq 0$ , e  $C(\delta) = 0$  para todo  $\delta \in \mathcal{I}$ . Algumas referências prefere uma versão mais forte desse requisito, denotado por (C1'), que indica que  $C(\rho) = 0$ , se e somente se,  $\rho \in \mathcal{I}$ .
- (C2) Monotonicidade: a coerência não deve aumentar sob operações incoerentes.

Podemos escrever uma operação CPTP (do inglês *Completely Positive and Trace-Preserving*) (7, 105) por sua decomposição nos termos de Kraus  $\{K_n\}$ , sendo  $\sum_n \hat{K}_n^\dagger \hat{K}_n = \mathbb{I}$ , temos

$$\Phi(\rho) = \sum_n K_n \rho K_n^\dagger, \quad (3.34)$$

sendo as probabilidades  $p_n = \text{Tr}(K_n \rho K_n^\dagger)$  e os estados após a medida  $n$  dados por  $\rho_n = K_n \rho K_n^\dagger / p_n$ . A operação  $\Phi$  é dita incoerente (ICPTP, do inglês *Incoherent Completely Positive and Trace Preserving*) (105) se cada operador de Kraus que a compõe preserva o conjunto de estados incoerentes, ou seja  $K_n \mathcal{I} K_n^\dagger \subseteq \mathcal{I}$ , para todo  $n$ .

Essa propriedade se desdobra em (C2a) não aumento sob mapas ICPTP:  $C(\rho) \geq C(\Phi_{ICPTP}(\rho))$  para todo  $\Phi_{ICPTP}$  e (C2b) Monotonicidade em média sob operações seletivas:  $C(\rho) \geq \sum_n p_n C(\rho_n)$

- (C3) Convexidade:  $C(\sum_n p_n \rho_n) \leq \sum_n p_n C(\rho_n)$ . Ou seja, a coerência não deve aumentar sob mistura estatística.

Medidas que satisfazem (C2b) e (C3) automaticamente satisfazem (C2a).

Uma classe natural de quantificadores de coerência surge ao medir a “distância” de um estado  $\rho$  ao conjunto  $\mathcal{I}$  dos estados incoerentes, portanto

$$C_D(\rho) = \min_{\delta \in \mathcal{I}} D(\rho, \delta), \quad (3.35)$$

onde  $D$  é uma métrica entre operadores de densidade. Duas escolhas proeminentes que satisfazem todos os axiomas (C1)–(C3) são a entropia relativa, a norma  $l_1$  (105).

Sendo a entropia quântica relativa dada por

$$S(\rho\|\sigma) = \text{Tr}(\rho \log_2 \rho) - \text{Tr}(\rho \log_2 \sigma), \quad (3.36)$$

A entropia relativa da coerência vai ser dada pela minimização dessa grandeza

$$C_{\text{rel}}(\rho) = \min_{\delta \in \mathcal{I}} S(\rho\|\delta) = S(\rho_{\text{diag}}) - S(\rho), \quad (3.37)$$

onde

$$\rho_{\text{diag}} = \sum_i \langle i | \rho | i \rangle |i\rangle \langle i| \quad (3.38)$$

é o estado obtido zerando-se os elementos fora da diagonal principal de  $\rho$ .

A norma  $l_1$  da coerência é dada pelos elementos fora da diagonal

$$C_{l_1}(\rho) = \sum_{i \neq j} |\rho_{ij}| = \sum_{i \neq j} |\langle i | \rho | j \rangle|. \quad (3.39)$$

Esta medida é relativamente simples de se calcular, se tornando uma boa ferramenta para o cálculo de coerência.

Outra medida particularmente interessante é a medida definida pela norma traço, nesse caso ela satisfaz os requisitos (C1'), (C2a) e (C3) (105). A coerência dada pela norma traço é definida como a distância mínima entre o estado  $\rho$  e o conjunto de estados incoerentes, portanto

$$C^{Tr}(\rho) = \min_{\delta \in \mathcal{I}} \|\rho - \delta\|_1. \quad (3.40)$$

É importante notar que, em geral, o estado incoerente mais próximo de  $\rho$  não é necessariamente sua parte diagonal,  $\rho_{\text{diag}}$ . Isso significa que, diferentemente da entropia relativa, esta medida não possui uma forma fechada simples e o processo de minimização precisa ser realizado.

A coerência quântica, embora seja um recurso fundamental para tecnologias quânticas, é extremamente frágil frente a interações indesejadas com o ambiente. Esse fenômeno, conhecido como decoerência, descreve o processo pelo qual um sistema quântico inicialmente em superposição de estados perde sua coerência devido à efeitos do sistema. Essa fragilidade motiva estudos para compreender a dinâmica de sistemas quânticos sob decoerência e desenvolver estratégias para evita-la (106, 107, 108, 109).

### 3.4 Feixes intensos e correlações

No primeiro capítulo, apresentamos os fundamentos da computação e da informação quântica, além de discutir os graus de liberdade da luz e as formas de codificação de q-bits nesses diferentes graus. No capítulo atual, tratamos das correlações quânticas, abordamos o emaranhamento, a discórdia quântica e, por fim, a coerência. Nesta seção, estabelecemos a conexão entre essas propriedades quânticas e os graus de liberdade da luz, mais especificamente os modos de um feixe óptico intenso. Para isso, discutiremos a quantização e não separabilidade dos modos spin-órbita da luz, utilizando como referências(30, 31).

Partindo dos modos spin-órbita, ou seja, aqueles definidos a partir da polarização e do perfil transverso, primeiramente consideramos a polarização, cujos vetores de base são  $\hat{e}_H$  e  $\hat{e}_V$ , respectivamente, polarização horizontal e vertical. Quanto aos modos transversos Hermite-Gauss de primeira ordem,  $HG_{10}$  e  $HG_{01}$ , adotamos como vetores de base  $h(\mathbf{r})$  e  $v(\mathbf{r})$ , respectivamente. Assim, um modo spin-órbita arbitrário, que combina esses dois graus de liberdade de um feixe laser, pode ser escrito como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = A_{H,h} h(\mathbf{r}) \hat{e}_H + A_{H,v} v(\mathbf{r}) \hat{e}_H + A_{V,h} h(\mathbf{r}) \hat{e}_V + A_{V,v} v(\mathbf{r}) \hat{e}_V, \quad (3.41)$$

em que  $A_{i,j}$  são as amplitudes complexas. Por uma questão de normalização  $\sum_{i,j} |A_{i,j}|^2 = 1$ , com  $i = H, V$  indicando a polarização e  $j = h, v$  referindo-se aos modos transversos. No nosso caso, por lidarmos com feixes ópticos intensos, essas amplitudes vão estar associadas às intensidades relativas em cada modo.

Se faz interessante avaliarmos a Eq. (3.41) quanto à separabilidade. Uma função  $F(x, y)$  é dita separável se for possível fatorá-la na forma  $F(x, y) = f(x).g(y)$ , e não separável caso não seja possível decompô-la em componentes independentes. Desse modo, o modo spin-órbita será separável se conseguirmos fatorá-lo como um produto entre uma função da polarização e uma função do modo transverso, tal que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (A_H \hat{e}_H + A_V \hat{e}_V)(A_h h(\mathbf{r}) + A_v v(\mathbf{r})) \quad (3.42)$$

onde  $A_H$  e  $A_V$  são as amplitudes associadas aos estados de polarização  $\hat{e}_H$  e  $\hat{e}_V$ , e  $h(\mathbf{r})$  e  $v(\mathbf{r})$  são perfis transversos do modo espacial. Afim de quantificar essa separabilidade podemos definir uma grandeza que se assemelha à concorrência (72), de modo que teremos

$$C = 2 |A_{H,h}, A_{V,v} - A_{H,v}, A_{V,h}| \quad (3.43)$$

Nessa formulação,  $C = 0$  indica um modo separável, enquanto  $0 < C < 1$  indica um modo não-separável, com o valor máximo  $C = 1$  correspondendo a um modo maximamente não-separável. Essa grandeza permite uma conexão direta com o conceito de emaranhamento, sendo um critério para a não-separabilidade de modos spin-órbita de um feixe laser clássico, análogo à concorrência para estados quânticos emaranhados de dois q-bits.

Para a classe de modos maximamente não-separáveis, definimos o análogo spin-órbita dos estados de Bell, dados por

$$\mathbf{E}_{\Phi+}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [h(\mathbf{r}) \hat{e}_H + v(\mathbf{r}) \hat{e}_V], \quad (3.44)$$

$$\mathbf{E}_{\Phi-}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [h(\mathbf{r}) \hat{e}_H - v(\mathbf{r}) \hat{e}_V], \quad (3.45)$$

$$\mathbf{E}_{\Psi+}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [h(\mathbf{r}) \hat{e}_V + v(\mathbf{r}) \hat{e}_H], \quad (3.46)$$

$$\mathbf{E}_{\Psi-}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [h(\mathbf{r}) \hat{e}_V - v(\mathbf{r}) \hat{e}_H]. \quad (3.47)$$

onde  $\mathbf{E}_{\Phi\pm}$  correspondem aos modos de polarização radial e  $\mathbf{E}_{\Psi\pm}$  aos modos de polarização azimutal. A Figura 23 apresenta a estrutura transversal desses modos.

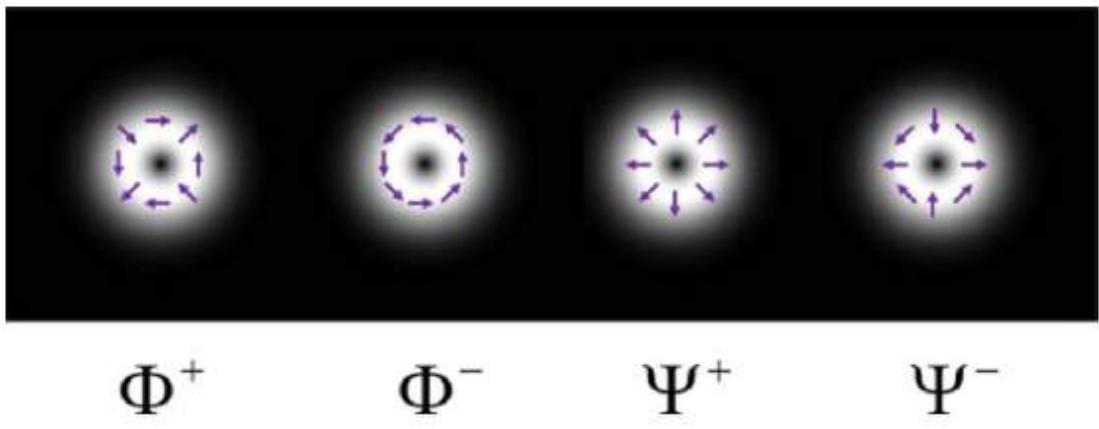


Figura 23 – Modos spin-órbita análogos aos estados de Bell. Fonte: (31).

Passamos agora para a discussão da quantização dos modos spin-órbita. Para descrever um feixe clássico no formalismo quântico, consideramos o operador de campo elétrico de Heisenberg. Na base  $\{\psi_i(\mathbf{r}) \hat{e}_j\}$ , escrevemos

$$\hat{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = e^{i(kz - \omega t)} \sum_{i,j} \hat{a}_{ij} \psi_i(\mathbf{r}) \hat{e}_j, \quad (3.48)$$

onde  $\hat{a}_{ij}$  é o operador aniquilação para um fóton no modo transversal  $\psi_i(\mathbf{r})$  com polarização  $\hat{e}_j$ . Podemos definir novos operadores de aniquilação de modo a mudar a base em que o

operador do campo é descrito. Definindo os operadores de aniquilação nas bases de Bell, temos (31)

$$\hat{a}_{\psi\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{Hh} \pm \hat{a}_{Vv}), \quad (3.49)$$

$$\hat{a}_{\phi\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{Hv} \pm \hat{a}_{Vh}). \quad (3.50)$$

Seus conjugados Hermitianos  $\hat{a}_{\psi\pm}^\dagger$  e  $\hat{a}_{\phi\pm}^\dagger$  são os operadores de criação correspondentes. Portanto, o operador do campo eletrico pode ser reescrito na base de Bell como

$$\hat{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = e^{i(kz - \omega t)} \sum_{\pm} \hat{a}_{\psi\pm} \psi_{\pm} + \hat{a}_{\phi\pm} \phi_{\pm}, \quad (3.51)$$

Uma vez definido o operador de aniquilação  $\hat{a}_{p,\lambda}$  para cada modo, e seu hermitiano conjugado  $\hat{a}_{p,\lambda}^\dagger$ , podemos definir o operador número como

$$\hat{n}_{p,\lambda} = \hat{a}_{p,\lambda}^\dagger \hat{a}_{p,\lambda}. \quad (3.52)$$

O produto tensorial dos autoestados do operador número para os quatro modos da base  $\{Hh, Hv, Vh, Vv\}$  forma o estado de Fock geral

$$|\{n\}\rangle = \bigotimes_{p,\lambda} |n_{p,\lambda}\rangle, \quad (3.53)$$

onde  $\{n\}$  representa o conjunto dos números de ocupação  $\{n_{Hh}, n_{Hv}, n_{Vh}, n_{Vv}\}$ .

O estado coerente, que pode descrever aproximadamente um feixe laser intenso como o utilizado nesta tese, pode ser construído a partir da base de Fock e é definido como

$$|\nu_{p,\lambda}\rangle = e^{-|\nu|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu \hat{a}_{p,\lambda}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad (3.54)$$

onde  $|0\rangle$  é o estado de vácuo,  $\nu$  é um parâmetro complexo que determina a amplitude e a fase do estado coerente, e  $|\nu|^2$  representa o número médio de fótons associado a esse modo. Um feixe de laser intenso caracteriza-se por um número médio macroscópico de fótons.

De forma análoga, para os modos não separáveis associados aos modos de Bell, podemos definir estados coerentes como, por exemplo, para o modo  $|\Psi_+\rangle$ , temos (30)

$$|\nu_{\Psi_+}\rangle = e^{-|\nu|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu \hat{a}_{\Psi_+}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (3.55)$$

Essa formulação permite descrever a quantização dos modos spin-órbita em termos de estados coerentes, possibilitando uma analogia direta entre os modos não separáveis e os estados quânticos emaranhados.

Para estender essa discussão ao grau de liberdade de caminho, retomamos a Eq. (3.48) e acrescentamos o índice  $k$ , obtendo

$$\hat{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = e^{i(kz - \omega t)} \sum_{i,j,k} \hat{a}_{ijk} \psi_i(\mathbf{r}) \hat{e}_j \hat{c}_k, \quad (3.56)$$

onde  $\hat{c}_k$  é o vetor de caminho, com  $k = 1, 2$  representando os dois possíveis caminhos do feixe laser. Os operadores de aniquilação que combinam os três graus de liberdade (polarização  $p$ , modo transverso  $\lambda$  e caminho  $k$ ) podem ser definidos de modo análogo ao caso spin-órbita. Por exemplo, para o modo não-separável que mistura  $Hh$  no caminho 0 com  $Vv$  no caminho 1, escrevemos

$$\hat{a}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{Hh0} \pm \hat{a}_{Vv1}), \quad (3.57)$$

cujos conjugados Hermitianos são os operadores de criação  $\hat{a}_\pm^\dagger$ . A partir deles, definimos o operador número associado

$$\hat{n}_\pm = \hat{a}_\pm^\dagger \hat{a}_\pm. \quad (3.58)$$

O estado de Fock geral em três graus de liberdade, com ocupações  $\{n_{p,\lambda,k}\}$ , é dado pelo produto tensorial

$$|\{n\}\rangle = \bigotimes_{p,\lambda,k} |n_{p,\lambda,k}\rangle, \quad (3.59)$$

onde  $p \in \{H, V\}$ ,  $\lambda \in \{h, v\}$  e  $k \in \{0, 1\}$ . Essa construção permite estender a quantização para modos que envolvem simultaneamente polarização, perfil espacial e caminho do feixe.

Essa descrição quântica dos três graus de liberdade da luz é equivalente a descrição dos de liberdade de um feixe laser intenso na aproximação paraxial. Com ela, podemos empregar feixes intensos nos processos de tomografia de estados e no cálculo das principais correlações quânticas, como discórdia quântica, emaranhamento e coerência óptica. A coerência óptica é fundamental para a caracterização precisa dessas correlações, possibilitando a extração de informações sobre a natureza dos fenômenos ópticos envolvidos.



## 4 Classificação de não-separabilidade de três q-bits usando graus de liberdade da luz

A classificação de estados emaranhados é um tópico de grande importância. O critério da Transposta Parcial Positiva (PPT) (110, 111) é comumente empregado para classificar estados bipartidos como separáveis ou emaranhados. No entanto, para estados de alta dimensão, o critério PPT pode falhar, exigindo a aplicação de critérios mais robustos (112, 113). A complexidade inerente à caracterização completa de estados quânticos de alta dimensão, que geralmente requer um grande número de medições, impulsionou a busca por métodos mais eficientes.

Nos últimos anos, a Aprendizagem de Máquina (ML, do inglês *Machine Learning*) (114) emergiu como uma ferramenta poderosa para abordar problemas complexos em diversas áreas, incluindo a mecânica quântica (115, 116). No domínio da informação e computação quântica, a ML tem sido utilizada, por exemplo, para reduzir erros de medição em computadores quânticos com q-bits baseados em íons aprisionados (117) e aprimorar a distribuição de chaves quânticas (118). Além disso, técnicas de medição fraca foram aprimoradas com o auxílio da ML (119). No campo da óptica, a ML tem encontrado aplicações em comunicação quântica (120), espectroscopia coerente (121), fibras ópticas (122), sensores (123) e decodificadores de Momento Angular Orbital (124).

O aprendizado de máquina tem sido utilizado para a classificação de emaranhamento (125, 126, 127, 128, 129). No contexto de estados quânticos, a ML permitiu estimativas de alta fidelidade utilizando dados de tomografia parcial, evitando a necessidade de 36 medições de coincidência (130). Classificadores baseados em ML foram propostos para determinar a separabilidade de estados (131), e redes neurais artificiais foram treinadas experimentalmente para classificar a separabilidade de estados quânticos sem a necessidade de todas as informações (132). Medidas parciais também foram empregadas para a estimativa de estados de sistemas de dois q-bits (133, 134).

No contexto da luz estruturada, diversos modos ópticos multidimensionais foram investigados no cenário de emaranhamento clássico (135, 136, 137). Circuitos ópticos lineares para modos spin-órbita, associados a feixes de laser intensos, têm sido utilizados para simular experimentos de fóton único. Por exemplo, fases topológicas previstas na evolução de um par de q-bits emaranhados foram observadas em um feixe de laser intenso (37). Desigualdades quânticas para sistemas bipartidos também foram violadas por modos spin-órbita maximamente não separáveis, como a desigualdade de Bell (138, 30) e a contextualidade (139, 35). Para sistemas tripartidos, um análogo do estado GHZ foi proposto adicionando o grau de liberdade de caminho aos modos spin-órbita (140), e a

desigualdade de Mermin foi violada (34). Uma discussão geral sobre a analogia clássico-quantica da não-separabilidade dos graus de liberdade da luz pode ser encontrada na Ref. (141). Modelos de aprendizagem profunda têm sido aplicada no reconhecimento de estados não ortogonais (142) e multi-singularidades (143) da luz estruturada.

Neste capítulo, apresentamos um estudo detalhado sobre a classificação da não-separabilidade em modos mistos combinando tomografia parcial e métodos de aprendizagem de máquina. Propomos um circuito óptico inovador para gerar estados mistos tripartidos nos três graus de liberdade da luz (caminho, polarização e modo transverso) e aplicamos redes neurais treinadas com dados de tomografia parcial para detectar a não-separabilidade tripartida. Este trabalho integra resultados inéditos desta tese e constitui uma contribuição original (144).

Inicialmente, descreveremos o esquema experimental de preparo e reconstrução tomográfica dos estados tripartidos. Em seguida, apresentaremos o critério de separabilidade adotado para quantificar a não-separabilidade nesses sistemas quânticos. Posteriormente, faremos um breve panorama sobre o modelo de aprendizagem de máquina empregado. Por fim, apresentaremos e discutiremos os resultados obtidos.

## 4.1 Preparo e tomografia dos modos tripartite

Para estender o estudo para sistemas de três q-bits, escolhemos preparar estados de Werner (145) tripartites, os quais são produzidos pela mistura de um estado tripartido maximamente emaranhado, estado GHZ (146), com um estado produto completamente misto. Tal estado pode ser escrito como

$$\rho_{ABC} = a |GHZ\rangle\langle GHZ| + \frac{1-a}{8} \mathbf{I}, \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{I}$  representa a matriz identidade no espaço de Hilbert de três q-bits,  $a \in [0, 1]$  é o parâmetro de mistura, e  $|GHZ\rangle$  é o estado tripartido emaranhado, dado por

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|000\rangle + |111\rangle). \quad (4.2)$$

Para  $a = 1$ , obtemos o estado GHZ puro, que é maximamente emaranhado. Já para  $a = 0$ , o estado é completamente misto e separável. Para valores intermediários de  $a \in (0, 1)$ , o estado pode apresentar separabilidade ou não separabilidade, o que motiva sua preparação e análise em nosso estudo.

Antes de abordarmos a preparação do estado  $\rho_{abc}$ , correspondente ao estado de Werner tripartite, analisamos inicialmente a preparação do estado  $|GHZ\rangle$  de forma isolada. A Ref. (140) apresenta um circuito óptico linear para gerar o análogo clássico do estado GHZ, o qual utilizamos como base para a implementação experimental da preparação do estado.

A Figura 24 ilustra o circuito óptico empregado na preparação do estado  $|GHZ\rangle$ . A preparação dos modos spin-órbita inicia-se com a utilização de uma placa S (SWP, do inglês *S-wave plate*) (147), um elemento óptico projetado para converter a polarização uniforme de um feixe incidente em uma distribuição espacial de polarização não linear, como os modos radiais e azimutais. A ação da SWP está intimamente relacionada ao alinhamento entre a polarização do feixe incidente e o eixo óptico da placa. Quando o feixe verticalmente polarizado incide com sua direção de polarização alinhada ao eixo principal da SWP ( $0^\circ$ ), obtém-se o estado de Bell

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|Hh\rangle + |Vv\rangle). \quad (4.3)$$

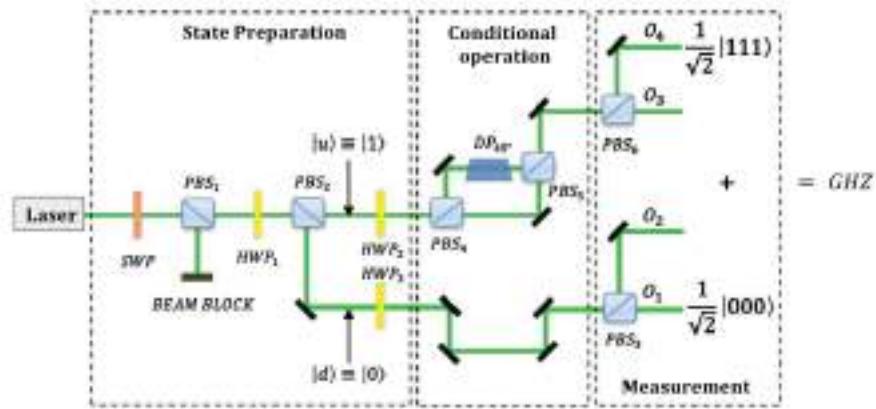


Figura 24 – Circuito óptico para preparação do estado GHZ. Fonte: (140).

Em seguida, o feixe passa pelo primeiro cubo divisor de feixe polarizado ( $PBS_1$ ), que transmite a componente  $|Hh\rangle$  e reflete a  $|Vv\rangle$ . A parte  $|Vv\rangle$  é descartada utilizando um Beam Block, a parte transmitida  $|Hh\rangle$  é então enviada para uma placa de meia-onda ( $HWP_1$ ) ajustada a  $22,5^\circ$ , produzindo o estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|Hh\rangle + |Vh\rangle). \quad (4.4)$$

Esse estado, então, passa pelo segundo cubo divisor de feixe polarizado ( $PBS_2$ ), que introduz o grau de liberdade de caminho: a componente com polarização horizontal é transmitida pelo  $PBS_2$ , seguindo pelo caminho  $|k_1\rangle$ , enquanto a componente vertical é refletida, seguindo pelo caminho  $|k_0\rangle$ . Dessa forma, pelo caminho  $|k_1\rangle$  obtemos o estado  $\frac{1}{\sqrt{2}}|k_1Hh\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|100\rangle$ , e pelo caminho  $|k_0\rangle$  obtemos o estado  $\frac{1}{\sqrt{2}}|k_0Vh\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|010\rangle$ .

A parte do feixe que percorre o caminho  $|k_0\rangle$  então passa pela  $HWP_3$  com ângulo  $45^\circ$ , e a rotação na polarização gera o estado

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle \quad (4.5)$$

Para o caminho  $|k_1\rangle$ , temos também uma placa de meia-onda (HWP<sub>2</sub>) ajustada a  $45^\circ$ , que resulta no estado  $\frac{1}{\sqrt{2}}|110\rangle$ . Ao passar pelo PBS<sub>4</sub>, essa componente é refletida e, em seguida, atravessa um prisma de Dove girado em  $45^\circ$  (DP<sub>45°</sub>), o qual promove uma rotação no modo transverso e leva ao estado

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle \quad (4.6)$$

Combinando as duas partes do feixe, obtemos o estado  $|GHZ\rangle$ .

A preparação do modo análogo ao estado de Werner tripartite pode ser realizada pelo circuito óptico mostrado na Figura 25. O bloco vermelho rotulado “GHZ States” representa a preparação do estado GHZ que acabamos de apresentar. O filtro neutro NF<sub>GHZ</sub> de transmitância  $T_{GHZ}$  é associado ao parâmetro de mistura  $a$ , controlando o peso de GHZ no estado no estado  $\rho_{ABC}$ .

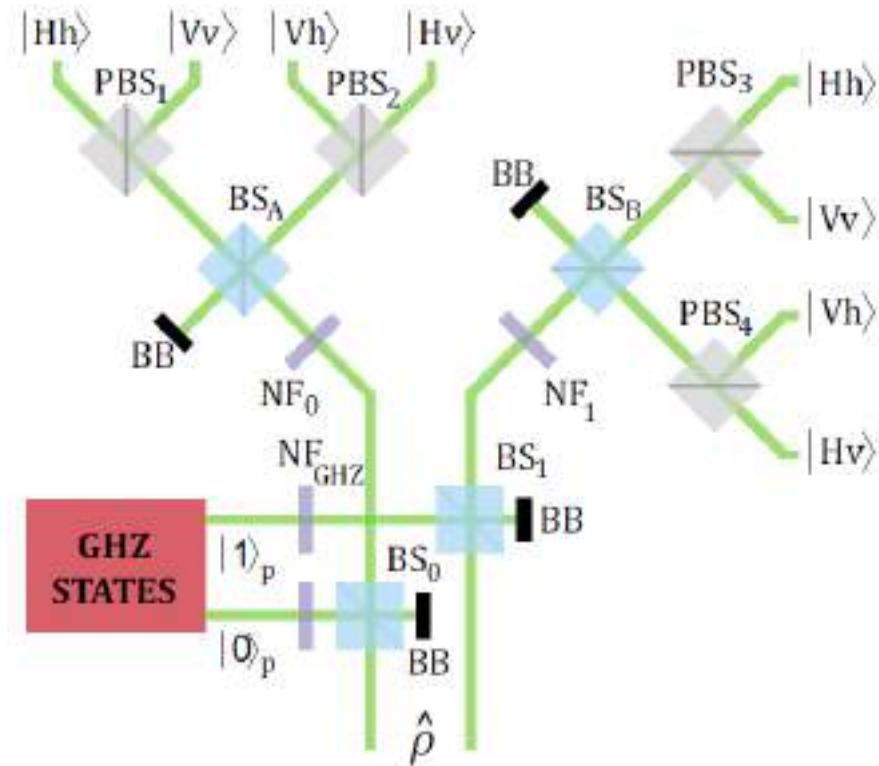


Figura 25 – Circuito óptico para preparação do estado de Werner tripartite. Fonte: (144).

A mistura do modo GHZ com o estado completamente misto  $\mathbf{I}$  é feita usando um divisor de feixes (BS) em cada caminho do modo GHZ. No caminho  $k_0$ , o BS<sub>0</sub> mistura o modo  $|0ij\rangle$ , onde  $i = H, V$  e  $j = h, v$ , representando modos spin-órbita produto. Esses modos são gerados por quatro lasers independentes e cada um com a mascara holografica e polarização para o modo desejado, preparando  $|Hh\rangle$ ,  $|Vh\rangle$ ,  $|Vv\rangle$  e  $|Hv\rangle$ , e então combinados por PBS<sub>1</sub>, PBS<sub>2</sub> e BS<sub>A</sub>. No caminho  $k_1$ , o BS<sub>1</sub> faz a mistura do modo

$|1\ i\ j\rangle$ , preparado por mais quatro lasers e unidos por  $\text{PBS}_3$ ,  $\text{PBS}_4$  e  $\text{BS}_B$ . Após  $\text{BS}_A$  e  $\text{BS}_B$ , utilizam-se os filtros neutros  $\text{NF}_0$  e  $\text{NF}_1$ , ambos com transmitância

$$T_0 = T_1 = \frac{1-a}{8}, \quad (4.7)$$

de modo a controlar o peso dos modos produto na mistura final.

A Figura 26 representa o circuito óptico para a tomografia do modo tripartite. O quadro *Spin-Orbit Tomo*, corresponde à tomografia dos modos spin-órbita, conforme descrito na Seção 2.4.4. Observe que a tomografia do estado tripartite nada mais é do que a tomografia de caminho, apresentada na Seção 2.4.3, realizada simultaneamente com a tomografia dos modos spin-órbita, o que implica um acréscimo de complexidade considerável.

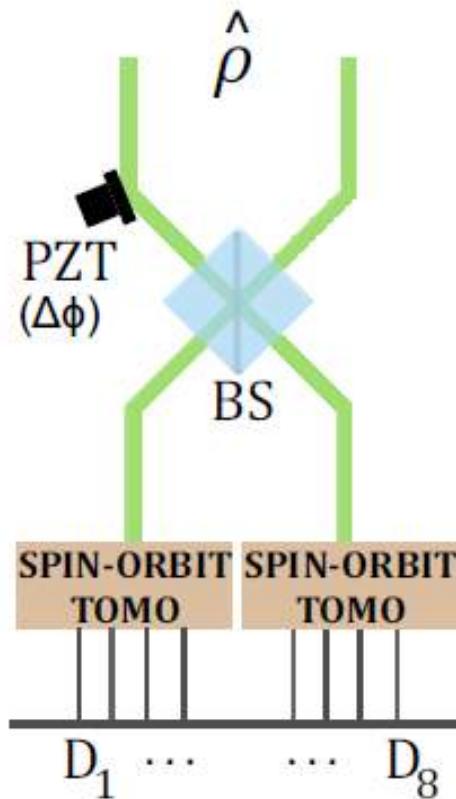


Figura 26 – Circuito óptico para tomografia de três q-bits. Fonte: (144).

Para o estado bipartite, temos a medida de três bases para cada sistema, com 9 combinações dos elementos ópticos, o que gera 36 saídas a serem registradas. No caso tripartite, teremos 216 saídas a serem registradas, tomadas 8 a 8 para cada configuração de base, totalizando 27 combinações dos elementos ópticos. Portanto, a complexidade cresce de 9 para 27 configurações distintas.

Simulamos computacionalmente tanto o circuito de preparação do estado quanto a tomografia do sistema tripartite, empregando o formalismo de Jones em MATLAB. Para o

treinamento da rede neural, realizamos a tomografia completa de três q-bits. Para o teste, consideramos uma tomografia parcial, incluindo o erro experimental, em que as medições foram restritas a  $S_Z$ , isto é, à base computacional.

## 4.2 Classificação de separabilidade via rede neural

### 4.2.1 Critério de separabilidade utilizado

Para implementar aprendizado supervisionado com rede neural (NN, do inglês *Neural Network*), é necessário fornecer rótulos de atributo durante o processo de treinamento. No nosso caso, devemos atribuir “separável” e “não separável” a cada modo utilizado no treinamento da NN.

Para sistemas bipartites, o critério de Peres-Horodecki, também conhecido como Transposição Parcial Positiva (PPT), é uma condição suficiente para determinar a separabilidade ou não separabilidade de um estado misto bipartite.

No entanto, para sistemas de três q-bits, o critério PPT pode falhar, sendo necessário o uso de outros critérios. Gühne e Seevinck (113) propuseram critérios diretos baseados em elementos das matrizes densidade.

É importante distinguir dois tipos de separabilidade em sistemas tripartites: o estado totalmente separável (FS, do inglês *Fully Separable*) e o estado bisseparável (BS, do inglês *Biseparable*).

Um estado tripartite puro totalmente separável pode ser escrito como o produto tensorial de estados individuais,

$$|\Psi_{FS}^{A,B,C}\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle \otimes |\psi_C\rangle, \quad (4.8)$$

enquanto um estado misto tripartite será totalmente separável se sua matriz densidade puder ser expressa como soma convexa de estados puros totalmente separáveis,

$$\rho_{FS}^{ABC} = \sum_k p_k |\Psi_{FS}^k\rangle \langle \Psi_{FS}^k|. \quad (4.9)$$

Um estado puro bisseparável pode ser escrito como

$$|\Psi_{BS}^{A,B,C}\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_{BC}\rangle, \quad (4.10)$$

onde a partição bipartite  $BC$  pode estar emaranhada. Combinações de diferentes partições também são consideradas bisseparáveis. Um estado misto bisseparável é dado por

$$\rho_{BS} = \sum_k p_k |\Psi_{BS}^k\rangle \langle \Psi_{BS}^k|. \quad (4.11)$$

Seguindo, utilizamos dois critérios para classificar separabilidade no processo de aprendizado supervisionado. Para qualquer estado tripartite bisseparável, vale (113)

$$\rho_{1,8} \leq \sqrt{\rho_{2,2} \rho_{7,7}} + \sqrt{\rho_{3,3} \rho_{6,6}} + \sqrt{\rho_{4,5} \rho_{5,5}}, \quad (4.12)$$

sendo  $\rho_{i,j}$  o elemento  $(i, j)$  da matriz densidade. Essa desigualdade é condição necessária e suficiente para estados bisseparáveis, e sua violação implica emaranhamento tripartite genuíno.

Para um estado tripartite totalmente separável, o critério é (113)

$$|\rho_{1,8}| \leq \left( \rho_{2,2} \rho_{3,3} \rho_{4,4} \rho_{5,5} \rho_{6,6} \rho_{7,7} \right)^{1/6}, \quad (4.13)$$

que é condição necessária e suficiente para avaliar a separabilidade de estados de Werner.

Com isso, definimos os rótulos para o aprendizado supervisionado: “1” para estados separáveis e “0” para não separáveis. Em seguida, apresentamos a arquitetura da rede neural implementada.

#### 4.2.2 Rede Neural para classificação de separabilidade

Não é objetivo desta tese aprofundar-se nas especificidades da técnica de aprendizagem de máquina utilizada. Por isso, apresentamos a seguir um breve resumo do seu funcionamento, suficiente para a compreensão dos resultados obtidos. Para uma descrição mais detalhada, indica-se a Ref. (144).

A ideia central consiste em treinar a rede neural com um conjunto de dados simulados, onde as matrizes densidade são calculadas numericamente a partir da simulação da tomografia total e rotuladas como separáveis ou não-separáveis de acordo com os critérios de Gühne–Seevinck.

A estrutura da rede neural adotada neste estudo consiste em três camadas principais:

- **Camada de entrada:** composta por  $N$  neurônios correspondentes aos elementos reais e imaginários da matriz densidade a ser analisada. Para o estado tripartite,  $N = 64$ , referentes à matriz densidade  $8 \times 8$ .
- **Camada oculta:** composta por 10 neurônios, cada um com ativação do tipo ReLU (Rectified Linear Unit) (148), cuja função é dada por

$$f_{\text{ReLU}}(x) = \max(0, x).$$

Esta camada é responsável por identificar padrões não-lineares nas correlações entre os elementos da matriz densidade.

- **Camada de saída:** um único neurônio com função de ativação sigmoide (149),

$$f_\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \quad (4.14)$$

cuja saída é um valor no intervalo  $[0, 1]$ : valores próximos a 1 indicam que o estado é separável, e valores próximos a 0 indicam que o estado é emaranhado.

Durante o treinamento, as matrizes densidade simuladas foram associadas a rótulos binários, seguindo o critério de Gühne–Seevinck, sendo "0" para estados emaranhados e "1" para estados separáveis. A função custo utilizada na otimização dos pesos da rede foi a entropia cruzada binária, minimizada por meio do método do gradiente descendente estocástico, com taxa de aprendizado de 0,3. O processo de treinamento foi realizado por 10.000 épocas, com divisão dos dados em 70% para treinamento e 30% para validação, garantindo que os estados do conjunto de teste não fossem previamente apresentados à rede.

No contexto de redes neurais, uma época corresponde a uma varredura completa por todo o conjunto de dados de treinamento. Ou seja, em cada época, todos os exemplos de entrada (neste caso, matrizes densidade simuladas) são apresentados à rede uma vez, com os pesos sendo ajustados iterativamente em busca da minimização do erro entre a saída predita e o rótulo conhecido. A repetição desse processo por múltiplas épocas permite à rede aprender os padrões presentes nos dados, refinando progressivamente os pesos das conexões internas.

### 4.3 Resultados

Estudamos os estados tripartite considerando o critério de bisseparabilidade (Eq. (4.12)) e o critério de separabilidade total (Eq. (4.13)).

Em ambos os casos, realizamos, utilizando o formalismo de Jones, simulações da preparação e da tomografia completa de todos os estados, a fim de obter sua classificação de separabilidade. Em seguida, efetuamos uma nova simulação envolvendo a preparação e uma tomografia parcial. Nesse segundo cenário, para o grau de liberdade de caminho, restringimos à base computacional, sem incluir projeções nas bases diagonal/antidiagonal ou circular direita/esquerda.

Para bisseparabilidade, os resultados são apresentados na Figura 27(a). O critério aponta não separabilidade para  $a > 0,43$ , delimitada pela região cinza. Os pontos azul-escuros indicam os estados classificados como não separáveis pela rede neural, e os azul-claros, bisseparáveis. A classificação pela rede neural mostrou-se muito precisa.

Para separabilidade total, os resultados são apresentados na Figura 27(b). Nesse caso, os estados apresentam não-separabilidade para  $a > 0,2$ , o que também foi verificado pela classificação da rede neural.

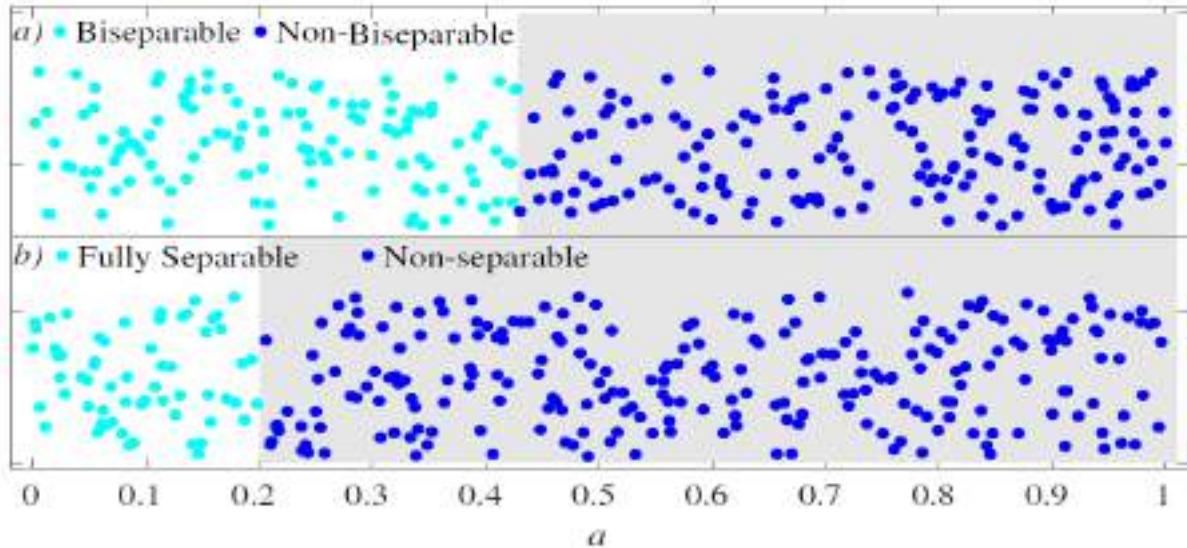


Figura 27 – Classificação por rede neural para sistemas tripartite, simulando erros nos dispositivos ópticos: (a) treinamento e teste usando o critério de bisseparabilidade; (b) usando o critério de separabilidade total. A região cinza indica a região de emaranhamento utilizando o critério de Gühne e Seevinck (113).  
Fonte: (144), adaptado pelo autor.

Considerando a dificuldade da tomografia completa de modos, especialmente para estados de maior dimensão que exigem elementos ópticos astigmáticos e controle de fase, uma contribuição importante é o estudo da classificação de separabilidade apoiada por Aprendizado de Máquina. Ao treinar o ML com medidas tomográficas parciais, identificamos a não-separabilidade com eficiência máxima mesmo medindo apenas na base computacional para o caminho, o que é notável, pois permite avaliar a separabilidade de modos tripartites com 72 medidas projetivas em vez das 216 necessárias para uma tomografia completa.



## 5 Estudo de correlações quânticas geométricas em modos spin-órbita

Como abordado no Capítulo 3, correlações quânticas são essenciais em diversos processos, sendo caracterizadas por diferentes quantificadores. A caracterização destas correlações entre partes de um sistema quântico, bem como a compreensão das relações entre elas, é um tema central tanto do ponto de vista fundamental quanto aplicado. Entender e quantificar essas correlações é de extrema importância para compreender a origem das vantagens quânticas em computação e no processamento de informação quântica.

O estudo das correlações quânticas, em particular da coerência, do emaranhamento e da discórdia, tem motivado diversos trabalhos que buscam compreender suas inter-relações e respectivas implicações físicas. A Ref.(150) apresenta um estudo relevante nesse contexto, cujo propósito é estabelecer relações analíticas explícitas entre discórdia e coerência, bem como entre emaranhamento e coerência, considerando duas classes específicas de estados de dois q-bits: os estados Bell-diagonais e os estados do tipo X(151, 152).

Essas duas classes de estados são especialmente interessantes do ponto de vista teórico e experimental, pois suas estruturas matemáticas permitem uma descrição simplificada, o que facilita a análise e a quantificação das diferentes formas de correlação quântica.

A classe de estados-X, por exemplo, recebem esse nome devido à forma da sua matriz densidade, apresentando elementos não nulos apenas na diagonal principal e na diagonal secundária (ou antidiagonal), formando visualmente a letra “X”. A estrutura geral de um estado-X é dada por

$$\rho_X = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

Devido a essa estrutura restrita, os estados-X têm sido amplamente utilizados em estudos de correlações quânticas, não apenas por permitirem expressões analíticas compactas para medidas como a discórdia quântica e a coerência, mas também por abrangerem, como casos particulares, estados fisicamente relevantes como os estados de Bell e os estados de Werner.

Podemos representar uma classe geral de estados-X a partir da expansão em

operadores de Pauli. Nesse formalismo, o estado é escrito como

$$\rho_X = \frac{1}{4} \left( I_4 + s \sigma_3 \otimes I + c I \otimes \sigma_3 + \sum_{j=1}^3 r_j \sigma_j \otimes \sigma_j \right), \quad (5.2)$$

onde  $\sigma_j$  são as matrizes de Pauli ( $j = 1, 2, 3$ ), e os parâmetros reais  $r_1, r_2, r_3, s$  e  $c$  determinam completamente o estado.

Os estados Bell-diagonais são um caso particular de estado-X que possui uma estrutura ainda mais simples,  $s = c = 0$ , assim sendo caracterizados apenas pelos três parâmetros  $r_1, r_2, r_3$ .

A partir da Eq. (5.2), podemos escrever os elementos da matriz densidade do estado-X como funções dos parâmetros  $r_j, s$  e  $c$ , temos

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \frac{1}{4}(1 + r_3 + s + c), & \rho_{22} &= \frac{1}{4}(1 - r_3 + s - c), \\ \rho_{33} &= \frac{1}{4}(1 - r_3 - s + c), & \rho_{44} &= \frac{1}{4}(1 + r_3 - s - c), \\ \rho_{14} = \rho_{41} &= \frac{1}{4}(r_1 - r_2), & \rho_{23} = \rho_{32} &= \frac{1}{4}(r_1 + r_2). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Os parâmetros  $s$  e  $c$  tornam a análise dos estados do tipo X mais complexa, especialmente no que diz respeito à descrição de sua região de existência. No caso dos estados Bell-diagonais, essa caracterização é mais direta, pois pode ser visualizada em um espaço tridimensional restrito aos parâmetros  $r_1, r_2$  e  $r_3$ . Já para os estados-X, é necessário fixar pelo menos dois dos parâmetros para permitir uma visualização geométrica semelhante.

Para realizar essa análise, utilizamos a condição de positividade da matriz densidade  $\rho$ , que, quando expressa em termos dos parâmetros  $r_j, s$  e  $c$ , impõe as seguintes desigualdades

$$|r_1 - r_2| \leq \sqrt{(1 + r_3)^2 - (s + c)^2}, \quad |r_1 + r_2| \leq \sqrt{(1 - r_3)^2 - (s - c)^2}. \quad (5.4)$$

Essas duas desigualdades determinam o volume de estados-X fisicamente permitidos. Ao variar os valores de  $s$  e  $c$ , a ref. (150) avalia que a região de existência desses estados se modifica, alterando tanto o contorno dos estados físicos quanto a geometria do subconjunto de estados separáveis contido nesse volume.

Para o estudo das relações entre diferentes correlações quânticas, foram escolhidos, como quantificadores, os medidores geométricos definidos por distâncias mínimas em relação a conjuntos específicos de estados de referência. Portanto, as correlações são expressas como

$$E(\rho) = \min_{\rho_{\text{sep}}} d(\rho, \rho_{\text{sep}}), \quad D(\rho) = \min_{\rho_{\text{cc}}} d(\rho, \rho_{\text{cc}}), \quad C(\rho) = \min_{\rho_{\text{inc}}} d(\rho, \rho_{\text{inc}}), \quad (5.5)$$

onde, assim como vimos no capítulo 3,  $\rho_{\text{sep}}$  pertence ao conjunto dos estados separáveis,  $\rho_{\text{cc}}$  pertence ao conjunto dos estados clássico-quânticos e  $\rho_{\text{inc}}$  ao conjunto dos estados incoerentes.

A Ref(150), utiliza a norma traço como medida de distância que é, lembremos, definida por

$$|A|_1 = \text{Tr} [\sqrt{A^\dagger A}] . \quad (5.6)$$

Dessa forma, a distância entre dois estados  $\rho$  e  $\sigma$  é

$$d_1(\rho, \sigma) = |\rho - \sigma|_1. \quad (5.7)$$

Para o emaranhamento a expressão geral da medida geométrica é dada por

$$E(\rho) = \min_{\rho_{\text{sep}} \in S} \frac{1}{2} ||\rho - \rho_{\text{sep}}||_1 = \min_{\rho_{\text{sep}} \in S} \text{Tr} |\rho - \rho_{\text{sep}}|, \quad (5.8)$$

onde  $S$  é o conjunto dos estados separáveis. Para o caso particular dos estados-X, foi demonstrado (81), que

$$E = \frac{1}{2} \max \left\{ 0, |r_1 \pm r_2| - \sqrt{(1 \pm r_3)^2 - (s \pm c)^2} \right\}. \quad (5.9)$$

Para estados-X, a medida geométrica de emaranhamento baseada na norma traço recupera exatamente a expressão da concorrência.

Para discórdia geométrica, vamos nos basear na expressão fechada (150, 153), teremos que

$$D(\rho) = \begin{cases} |r_1|, & \text{se } \Delta > 0, \\ \sqrt{\frac{r_1^2 \max(r_3^2, r_2^2 + s^2) - r_2^2 \min(r_3^2, r_1^2)}{\max(r_3^2, r_2^2 + s^2) - \min(r_3^2, r_1^2) + r_1^2 - r_2^2}}, & \text{se } \Delta \leq 0, \end{cases} \quad (5.10)$$

sendo  $\Delta = r_3^2 - r_1^2 - s^2$ .

Já a coerência geométrica, baseada na norma traço, para os estados do tipo X, assume uma forma particularmente simples, que é

$$C(\rho) = \max (|r_1|, |r_2|). \quad (5.11)$$

A partir dessas relações, a Ref. (150) estuda o comportamento e a relação dessas correlações sob a ação de três canais de ruído: Bit Flip, Phase Damping e Depolarizing.

Para os estados Bell-diagonais, o estudo revelou a existência de relações analíticas entre emaranhamento e coerência, bem como entre discórdia e coerência, sob a ação de todos os canais de ruído considerados. Em muitos desses casos, tais relações se mostraram lineares, o que facilita a compreensão das interdependências entre as diferentes formas de correlação quântica.

Por outro lado, a análise dos estados do tipo X introduziu uma camada adicional de complexidade, uma vez que sua descrição completa requer cinco parâmetros. Essa complexidade se reflete, por exemplo, na modificação da região de existência desses estados.

No caso dos estados-X, a ref(150) descreve diferentes regiões que determinam a forma da discórdia geométrica, e para cada uma dessas regiões, investigou-se a possibilidade de uma relação analítica com a coerência. Foi demonstrado que a discórdia pode exibir três comportamentos distintos:(i) regiões em que permanece constante, independentemente da coerência;(ii) regiões em que decai de forma quadrática, sem depender diretamente da coerência;(iii) regiões onde depende da coerência de maneira mais ou menos trivial, dependendo do canal de ruído aplicado.

A principal conclusão do estudo apresentado em Ref. (150) é que, entre as três correlações quânticas consideradas, a coerência, a discórdia e o emaranhamento, apenas a coerência se mostra essencial para a existência das demais. Em outras palavras, a coerência é a correlação fundamental, sendo condição necessária para que um estado bipartido apresente emaranhamento ou discórdia.

Mostrando acordo com trabalhos anteriores. Tan *et al.*(154) demonstraram que a coerência correlacionada em sistemas bipartidos é uma condição necessária para a presença de discórdia. Por outro lado, Streltsov *et al.*(155) mostraram que a coerência é necessária para a geração de emaranhamento.

Este resultado reforça a compreensão de que a coerência quântica exerce um papel central na estrutura das correlações quânticas, funcionando como o recurso primordial para as demais correlações.

Motivados por esses estudos e pelo fato de que a abordagem geométrica do cálculo das correlações quânticas não foi abordada no cenário de modos spin-órbita, neste capítulo exploraremos essas grandezas, coerência, discórdia e emaranhamento para outras classes de estados do tipo X, utilizando para isso a codificação em modos spin-órbita da luz. É importante ressaltar, portanto, que neste capítulo estamos usando a definição geométrica das três correlações conforme a referência (150).

## 5.1 Aplicação para modos spin-órbita tipo X

Conforme discutido no Capítulo 3, existe uma correspondência entre certas correlações quânticas e propriedades de estados de feixes clássicos. Dessa forma, ao utilizarmos feixes intensos com modos spin-órbita, torna-se possível calcular análogos clássicos dessas correlações, permitindo a investigação de aspectos estruturais do emaranhamento, da coerência e da discórdia por meio de óptica clássica.

Para nós, os estados do tipo-X são particularmente interessantes, uma vez que já realizamos tanto simulações teóricas (156) quanto implementações experimentais (157) nesse contexto. A proposta deste trabalho é expandir o estudo apresentado em (150) utilizando feixes intensos com graus de liberdade spin-órbita, adotando uma abordagem inicialmente computacional e, posteriormente, experimental.

### 5.1.1 Resultados de simulação de circuitos ópticos

Apresentaremos aqui o resultado da simulação de circuitos ópticos de preparação e de tomografia para modos spin-órbita tipo X. São apresentadas três classes de estados.

A primeira classe de estados considerada corresponde a uma mistura entre o estado de Bell  $|\phi^+\rangle$  e o estado produto  $|Vv\rangle$ , descrita por

$$\rho_1 = a |\phi^+\rangle \langle \phi^+| + (1 - a) |Vv\rangle \langle Vv|, \quad (5.12)$$

em que  $a \in [0, 1]$  é o parâmetro de mistura. Essa família de estados é particularmente interessante para análise, pois permite investigar a transição contínua de um estado puramente separável ( $a = 0$ ) para um estado maximamente emaranhado ( $a = 1$ ), possibilitando o acompanhamento do comportamento das correlações quânticas ao longo dessa interpolação.

A Figura 28 apresenta a montagem experimental utilizada para a preparação dessa classe de estados. O *laser* 1, inicialmente polarizado verticalmente, ao atravessar a *S-Plate* ajustada em  $0^\circ$  ( $\text{SWP}_{0^\circ}$ ), gera o estado de Bell  $|\phi^+\rangle$ . Por sua vez, o *laser* 2, também verticalmente polarizado, ao incidir sobre a máscara holográfica ( $M_{01}$ ), é convertido para o modo transverso  $HG_{01}$ , produzindo assim o estado produto  $|Vv\rangle$ . Os dois feixes são combinados em um cubo divisor de feixes (BS), sendo que a transmitância dos filtros neutros ( $NF_1$  e  $NF_2$ ) posicionados em cada caminho é responsável pelo controle dos pesos estatísticos na mistura final. O estado preparado é então conduzido ao circuito óptico de tomografia dos modos spin-órbita, conforme descrito na Seção 2.4.4. A tomografia permite a reconstrução da matriz densidade do estado, a partir da qual é possível calcular os parâmetros  $r_i$ ,  $s$  e  $c$ . Com esses valores, determinamos as correlações quânticas de interesse e a coerência geométrica por meio das Equações (5.9), (5.10) e (5.11).

Estes circuitos são simulados utilizando o formalismo de Jones, conforme descrito no Capítulo 1. O estado spin-órbita é representado de forma vetorial, enquanto os aparatos ópticos que atuam sobre ele durante o processo são modelados por matrizes. A partir dessa representação, é possível reconstruir a matriz densidade de cada estado e, a partir dela, calculamos discordância, emaranhamento e coerência geométricos.

A Figura 29 apresenta os resultados dos cálculos das correlações para o estado  $\rho_1$ . As linhas representam os valores teóricos, enquanto os pontos correspondem aos valores da simulação do preparo e tomografia. As diferentes grandezas calculadas estão representadas por cores distintas: a discordância geométrica em vermelho, a coerência em

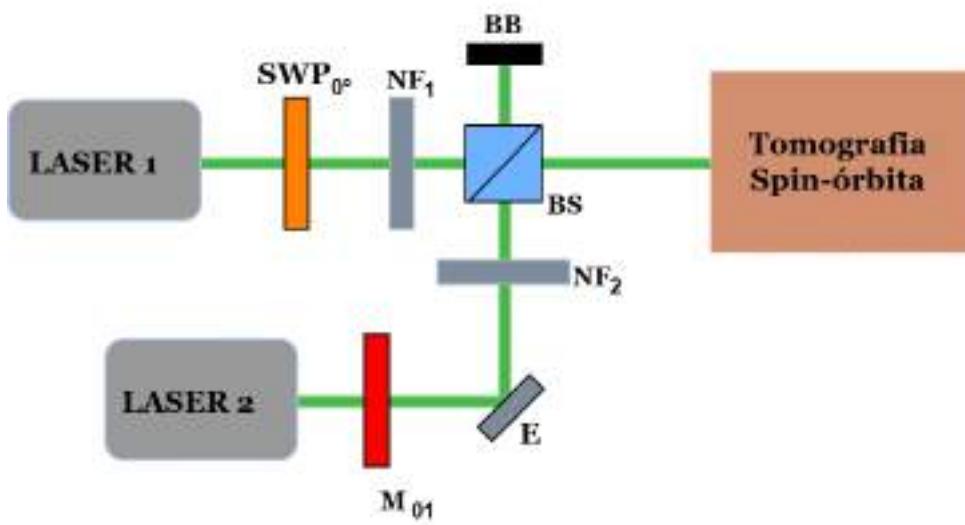


Figura 28 – Circuito óptico para preparação do estado de  $\rho_1$ . Fonte: Autor.

verde e o emaranhamento geométrico em cinza. A simulação foi implementada em *Python*, utilizando o formalismo de Jones para modelar tanto a preparação quanto a tomografia dos estados.

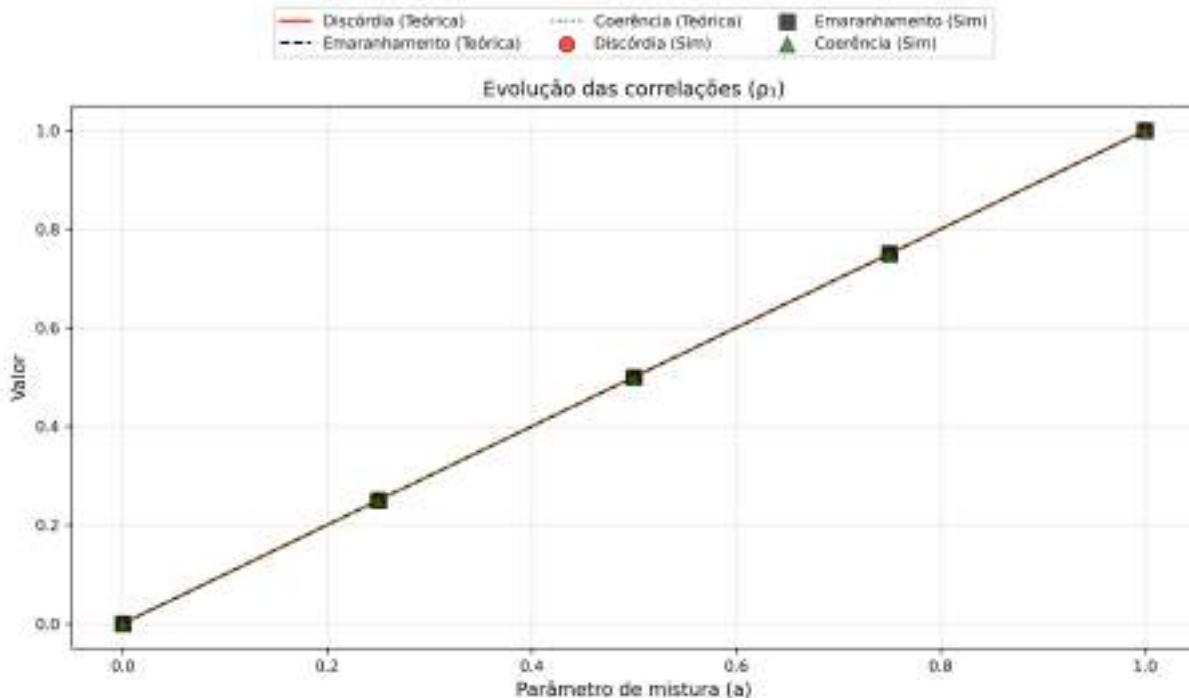


Figura 29 – Evolução das correlações para simulação de  $\rho_1$ . Fonte: Autor.

Simulamos as medidas para os valores de mistura  $a = 0,; 0,25,; 0,5,; 0,75,; 1$ . Nesse caso, todas as grandezas analisadas exibiram um crescimento aproximadamente

linear, o que é consistente com a transição linear de um estado puro separável para um estado maximamente emaranhado. É interessante notar que o comportamento da discordia geométrica difere daquele da discordia quântica, apresentado na ref. (156).

O segundo estado que estudamos corresponde à mistura de estados de Bell com paridades distintas, definida por

$$\rho_2 = a |\phi^+\rangle\langle\phi^+| + (1 - a) |\psi^-\rangle\langle\psi^-|. \quad (5.13)$$

Lembramos que os estados de Bell envolvidos são dados por

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|Hh\rangle + |Vv\rangle), \quad (5.14)$$

e

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|Hv\rangle - |Vh\rangle). \quad (5.15)$$

Essa mistura é particularmente interessante, pois combina dois estados com correlações máximas, mas com paridades distintas. A Figura 30 apresenta o esquema experimental utilizado para o preparo e a medição desses estados. O *laser 1*, assim como no preparo do estado anterior, ao passar pela S-Plate ajustada em  $0^\circ$  (SWP $_{0^\circ}$ ) com polarização vertical, gera o estado de Bell  $|\phi^+\rangle$ . Já o *laser 2*, também com polarização vertical, produz o estado  $|\psi^-\rangle$  ao atravessar a S-Plate ajustada em  $90^\circ$  (SWP $_{90^\circ}$ ). A mistura entre os dois feixes é realizada no cubo divisor de feixes, e os filtros neutros (NF) posicionados nos caminhos ópticos controlam o peso estatístico de cada componente na mistura. As simulações foram

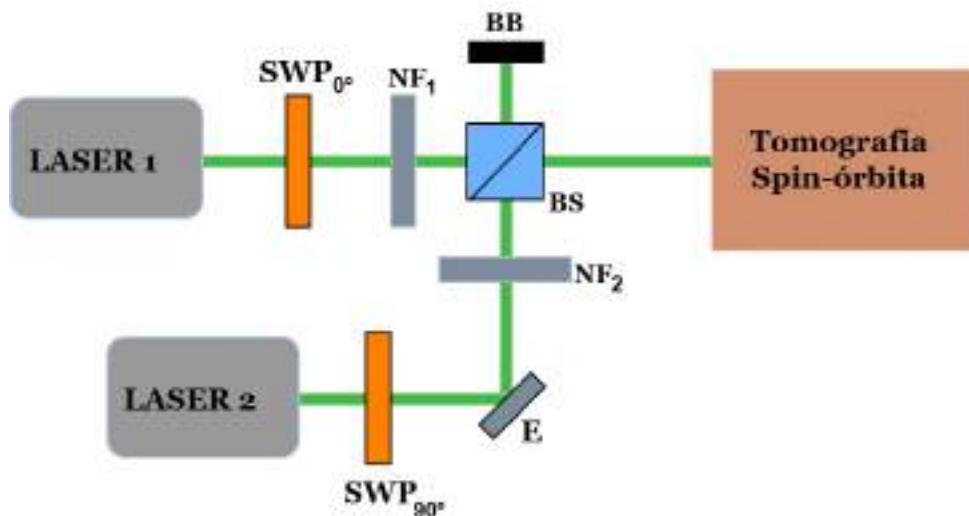


Figura 30 – Circuito óptico para preparação do estado de  $\rho_2$ . Fonte: Autor.

realizadas para os mesmos valores de  $a$ . A Figura 31 apresenta os resultados obtidos para as correlações quânticas do estado  $\rho_2$ . Observa-se que, à medida que a mistura se

aproxima da condição de pesos balanceados ( $a = 0,5$ ), as correlações decrescem de forma aproximadamente linear, enquanto a coerência se mantém no valor máximo. Nesse ponto, tanto a discórdia geométrica quanto o emaranhamento geométrico se anulam, embora a coerência permaneça diferente de zero. Esse comportamento ilustra um dos aspectos discutidos em (150): discórdia e emaranhamento dependem da coerência, mas a coerência não depende diretamente desses correlações. Por fim estudamos o estado de Werner, uma

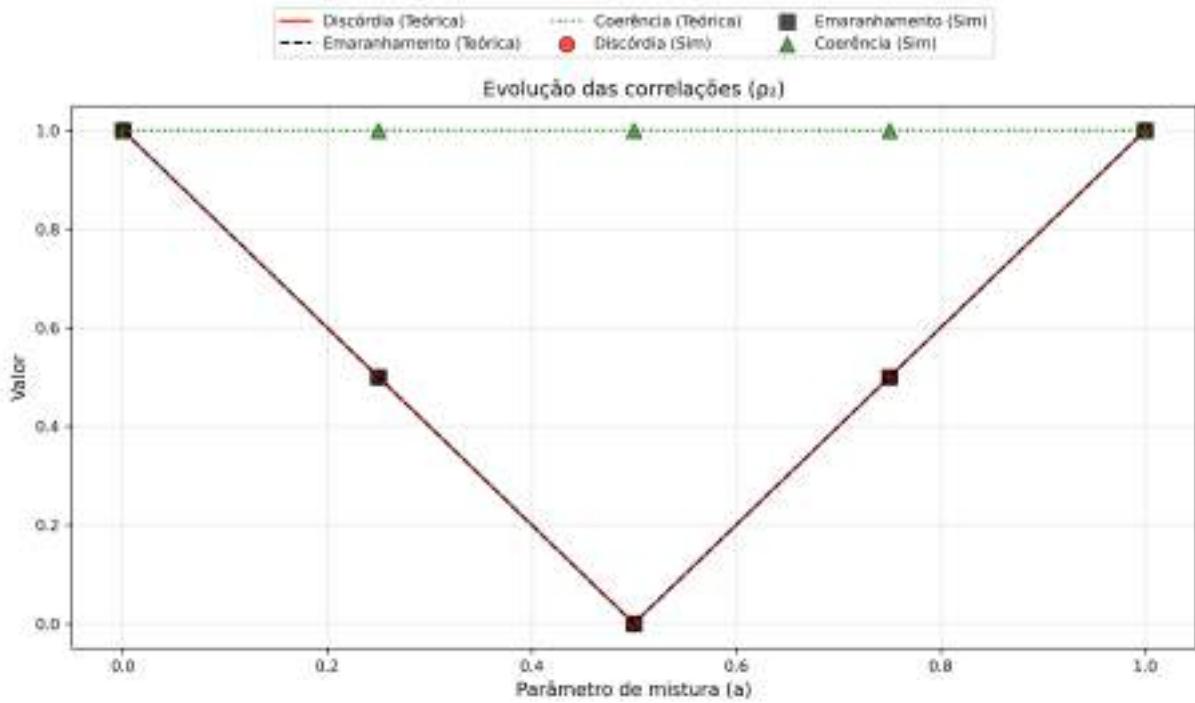


Figura 31 – Evolução das correlações para simulação de  $\rho_2$ . Fonte: Autor.

classe de estados bipartidos que desempenha um papel fundamental em diversos cenários da informação quântica. Esse estado é definido como uma combinação entre um estado maximamente emaranhado de Bell e um estado incoerente (145). Vai ser dado por

$$\rho_W = a|\phi^+\rangle\langle\phi^+| + \frac{(1-a)}{4}I \quad (5.16)$$

onde  $|\psi_{\text{Bell}}\rangle$  é o estado de Bell par,  $I$  é a matriz identidade de dimensão  $4 \times 4$ , e  $a \in [0, 1]$  quantifica o peso da contribuição do estado puro emaranhado na mistura. O estado de Werner é particularmente interessante por apresentar uma transição entre regimes separável e emaranhado: ele é separável para  $a \leq \frac{1}{3}$  e torna-se emaranhado quando  $a > \frac{1}{3}$ . Essa propriedade o torna um modelo relevante para investigar a fronteira entre correlações em sistemas bipartidos.

A Figura 32 mostra o circuito óptico proposto para a preparação do estado de Werner. O estado incoerente,  $I$ , é gerado por meio de quatro lasers independentes, cada um preparando um dos estados produto  $|Hh\rangle$ ,  $|Vv\rangle$ ,  $|Hv\rangle$  e  $|Vh\rangle$ . Para isso, empregamos

polarizadores para definir as polarizações horizontal ( $H$ ) e vertical ( $V$ ), e máscaras holográficas para gerar os modos transversos  $h$  e  $v$ . Filtros neutros (NF) são utilizados para controlar a transmissão de cada feixe, esse parâmetro está associado ao peso estatístico no estado final.

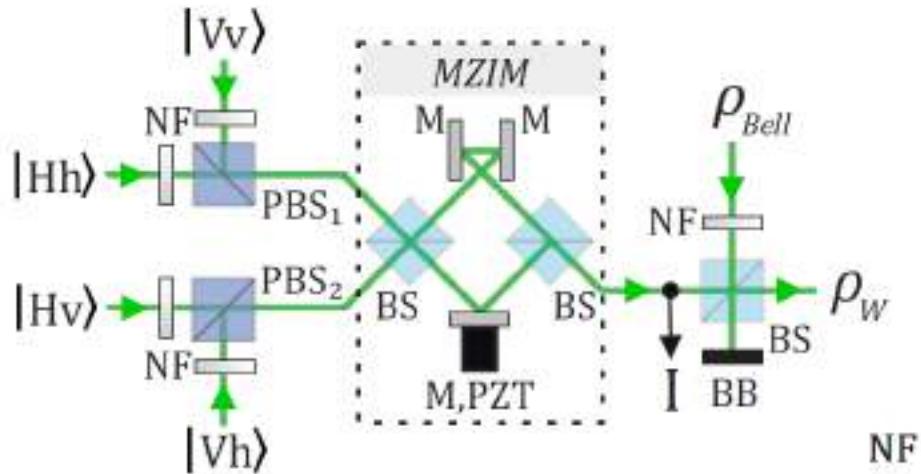


Figura 32 – Circuito óptico para preparação do estado de Werner. Fonte: (144).

Os pares de modos  $\{|Hh\rangle, |Vv\rangle\}$  são combinados no primeiro cubo separador de polarização (PBS1), enquanto os ímpares  $\{|Hv\rangle, |Vh\rangle\}$  se sobrepõem no segundo PBS (PBS2). Em seguida, ambas as saídas são reunidas em um divisor de feixes (BS), que alimenta um interferômetro de Mach-Zehnder com espelho adicional (MZIM). Como mencionado, o MZIM atua como seletor de paridade: os modos pares emergem por uma das saídas, enquanto os ímpares saem pela outra. No entanto, por entrarem em portas distintas, tanto os modos pares quanto os ímpares emergem pela mesma saída do interferômetro, garantindo assim a mistura uniforme necessária para simular o estado completamente misto.

O estado de Bell é produzido por outro laser independente, ao passar pela S-Plate. Utilizando um feixe polarizado verticalmente, e a S-Plate à  $0^\circ$ , temos  $|\phi^+\rangle$ . Esse feixe então passa por um filtro neutro (NF), de modo que sua transmitância é controlada. Por fim, ambos os feixes são combinados em um divisor de feixes (BS), produzindo o estado de Werner  $\rho_w$ . Esse estado então é enviado para a tomografia de modos spin-órbita.

A Figura 33 apresenta os resultados obtidos para as correlações do estado de Werner. Conforme discutido anteriormente, para  $a \leq \frac{1}{3}$  o estado é separável, embora ainda apresente valores não nulos de discordância e coerência. Esse comportamento evidencia a independência entre essas grandezas e o emaranhamento, reforçando que tanto a discordância quanto a coerência podem estar presentes mesmo na ausência de emaranhamento.

Os resultados de nossas simulações corroboram as conclusões apresentadas em (150)

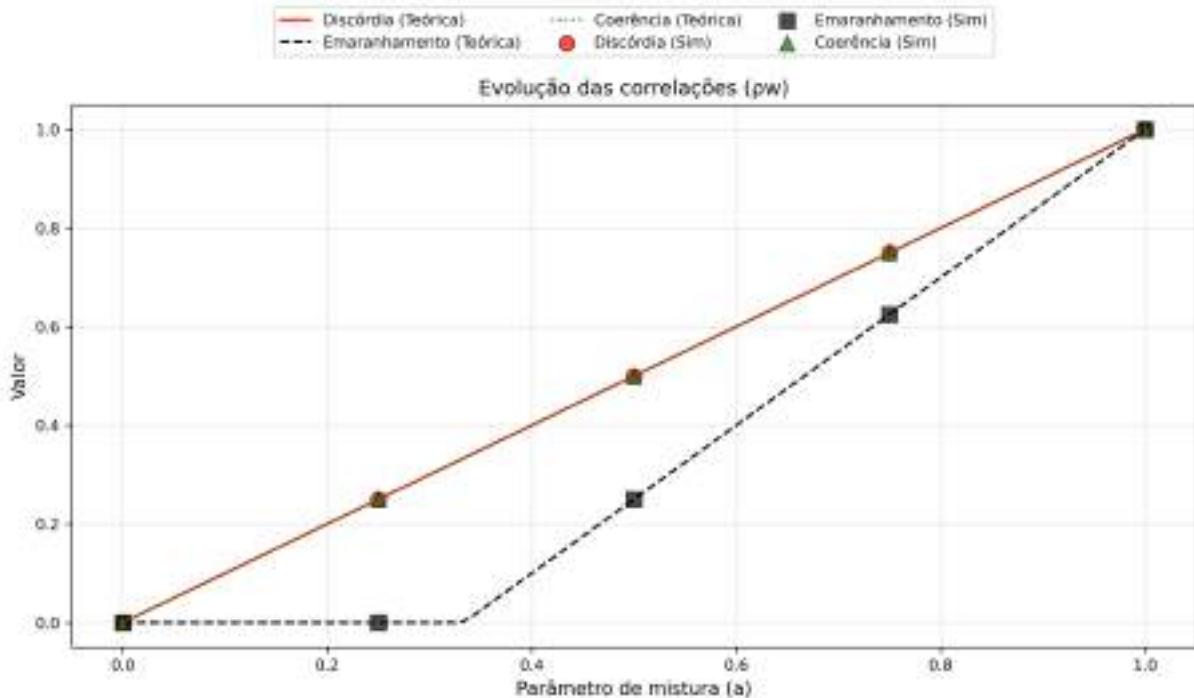


Figura 33 – Evolução das correlações para simulação de  $\rho_w$ . Fonte: Autor.

e reforçam a importância da coerência como um componente fundamental para o surgimento de correlações quânticas. Na subseção seguinte, apresentamos os resultados experimentais obtidos a partir da reconstrução da matriz densidade dos estados preparados em laboratório.

### 5.1.2 Resultados experimentais

Apresentaremos agora os resultados experimentais, obtidos a partir da preparação e realização da tomografia de modos spin-órbita. O estado de Werner, devido à necessidade de pelo menos cinco fontes laser independentes, torna-se extremamente complexo de ser implementado laboratório. Por outro lado, os estados  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são mais viáveis experimentalmente, sendo justamente esses os estados que foram efetivamente medidos.

Para o estado  $\rho_1$  utilizamos a montagem experimental apresentada na Figura 28. Foram utilizados dois lasers independentes Saphire da *Coherent*, de mesmo modelo e ajustados para operar com intensidades equivalentes, de modo a minimizar variações espectrais e reduzir erros associados às diferenças entre as fontes.

A Figura 34 apresenta os resultados dos cálculos das correlações para  $\rho_1$  a partir da matriz de densidade experimental. As curvas cheias são os valores esperados teoricamente. Assim como nas simulações, fizemos para  $a = 0, 0,25, 0,5, 0,75, 1$ , utilizando os filtros NF para controle da intensidade relativa entre os lasers.

Observa-se que a discrepância em relação à curva teórica aumenta com o valor

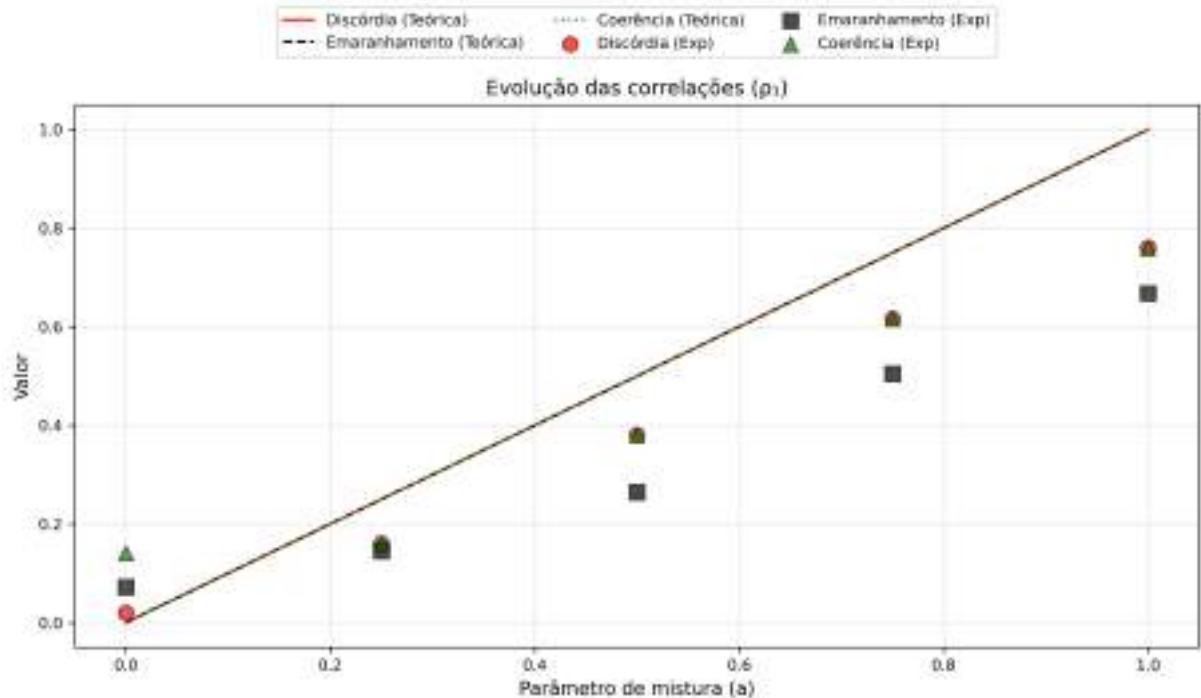


Figura 34 – Evolução das correlações para o resultado experimental de  $\rho_1$ . Fonte: Autor.

de  $a$ , o que indica que efeitos sistemáticos, como imperfeições nos elementos ópticos e desalinhamentos, tornam-se mais significativos à medida que o estado se aproxima do estado de Bell  $|\phi^+\rangle$ . Esses desvios podem ser atribuídos a limitações experimentais, tais como imprecisões no ajuste dos ângulos das placas de onda e do prisma de Dove, redução da visibilidade interferométrica e, de forma particularmente relevante, aos erros associados ao astigmatismo introduzido pelo conjunto de lentes cilíndricas.

Para o estado  $\rho_2$  foi empregada a montagem experimental ilustrada na Figura 30. Os resultados obtidos a partir da reconstrução experimental desse estado são apresentados na Figura 35, onde são exibidos os valores das correlações calculadas. Observa-se que os desvios em relação aos valores teóricos tornam-se mais pronunciados na vizinhança dos estados de Bell, indicando maior sensibilidade desses pontos a imperfeições experimentais. Além disso, verifica-se que a coerência é particularmente afetada pelos erros presentes no processo experimental, refletindo a sua natureza mais suscetível a ruídos e imprecisões de medida.

Em ambos os casos, os resultados experimentais apresentaram boa concordância com as previsões teóricas, embora acompanhados de desvios que evidenciam a sensibilidade das grandezas analisadas. Tais discrepâncias ressaltam a complexidade inerente à medição de correlações quânticas, mesmo em implementações ópticas baseadas em luz clássica. Confirmamos que o uso de lasers intensos se mostra eficaz na emulação de correlações quânticas, reforçando a validade da analogia clássico-quântica para investigar esses fenômenos.

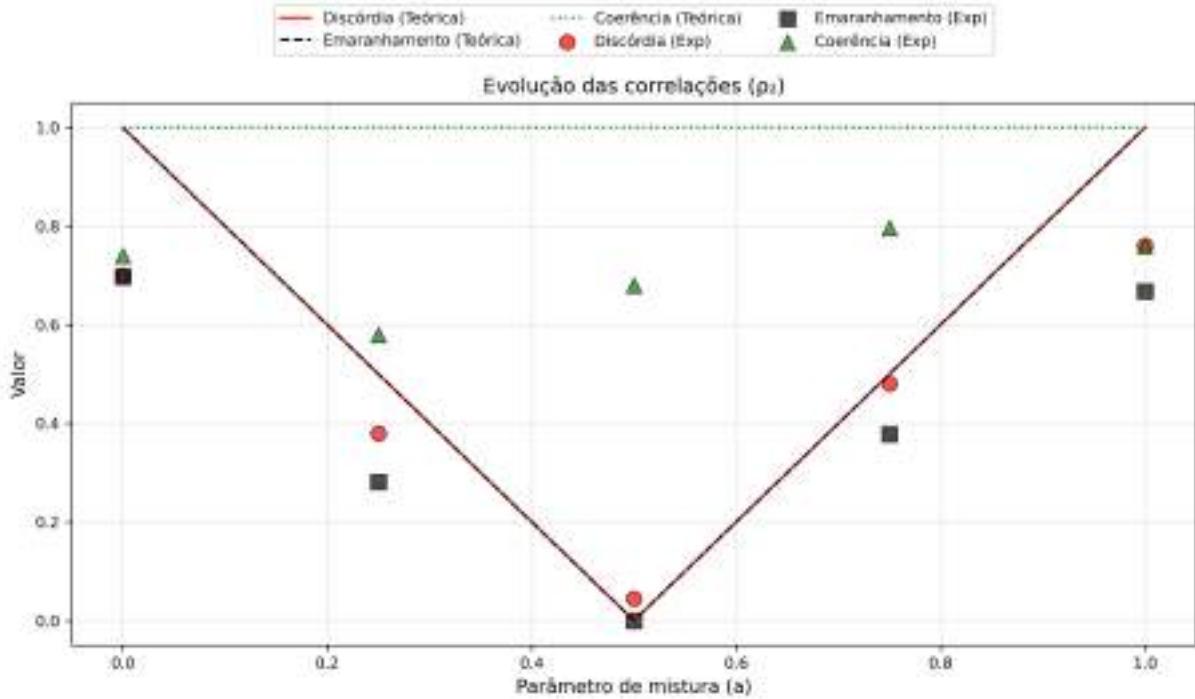


Figura 35 – Evolução das correlações para o resultado experimental de  $\rho_2$ . Fonte: Autor.

### 5.1.3 Resultados de simulação com modelo de ruído

Na Ref. (157) foi proposto um modelo simplificado de ruído branco com o objetivo de descrever os desvios observados entre os resultados experimentais e as previsões teóricas. Esse modelo consiste na mistura estatística entre o estado teórico  $\rho$  e o estado completamente misto  $I$ , resultando no estado efetivo

$$\rho' = (1 - \alpha)\rho + \alpha \left( \frac{1}{4}I \right), \quad (5.17)$$

onde  $\alpha \in [0, 1]$  quantifica a intensidade do ruído.

A Ref. (157) apresenta uma análise desse modelo para diferentes valores de  $\alpha$ , de modo a investigar o comportamento do estado conforme a intensidade do ruído é aumentada. Com isso, é possível ajustar a curva teórica de forma a aproximá-la dos resultados experimentais, permitindo compreender melhor a contribuição dos efeitos de ruído na preparação e medição dos estados.

Com o intuito de aproximar os resultados de nossas simulações daqueles reportados experimentalmente, repetimos as simulações para os três estados propostos, desta vez incorporando o modelo de ruído aos estados simulados numericamente. Para essa análise, fixamos o parâmetro em  $\alpha = 0.15$ , valor que representa uma intensidade moderada de ruído.

Iniciamos pela análise do estado  $\rho_1$ , cujos resultados são apresentados na Figura 36. Observa-se que, apesar da simplicidade do modelo adotado, este é capaz de reproduzir de

forma satisfatória as principais tendências dos resultados experimentais. Entretanto, suas limitações também se tornam evidentes, em especial para  $a = 0$ , caso em que o sistema se encontra no estado produto  $|Vv\rangle$  e o modelo não é capaz de capturar adequadamente os erros associados à medição desse estado.

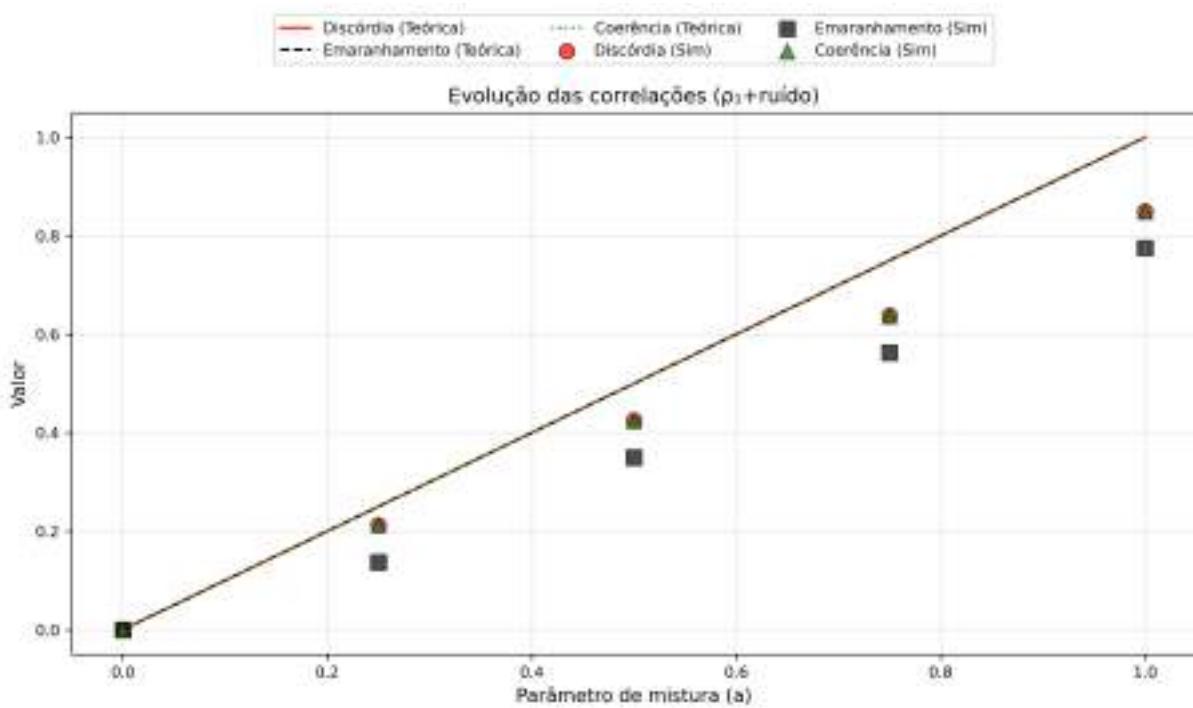


Figura 36 – Evolução das correlações para simulação de  $\rho_1$ . Fonte: Autor.

O próximo estado analisado é  $\rho_2$ , cujos resultados são apresentados na Figura 37. Observa-se novamente que o modelo empregado é capaz de reproduzir de forma satisfatória a tendência geral do comportamento experimental, sendo os desvios em relação à previsão teórica mais pronunciados na vizinhança dos estados de Bell. Neste caso, a maior discrepância entre os resultados simulados e os dados experimentais ocorre na medida da coerência, o que é consistente com a construção do modelo, que se baseia na mistura linear do estado teórico com um estado completamente incoerente. Portanto, a redução da coerência será proporcional à intensidade do ruído, observando-se uma queda linear no valor da coerência.

A partir deste modelo, podemos também aplicá-lo à simulação do estado de Werner ( $\rho_w$ ), de modo a prever o comportamento médio de uma possível realização experimental futura. Os resultados dessa simulação são apresentados na Figura 38.

Em particular, a comparação entre dos estados simulados com acréscimo de ruído em relação aos resultados experimentais revela que a principal limitação do modelo está relacionada à sua incapacidade de capturar efeitos mais sutis de imperfeições ópticas específicas, como desalinhamentos, problemas polarização, ruído de fase introduzido por

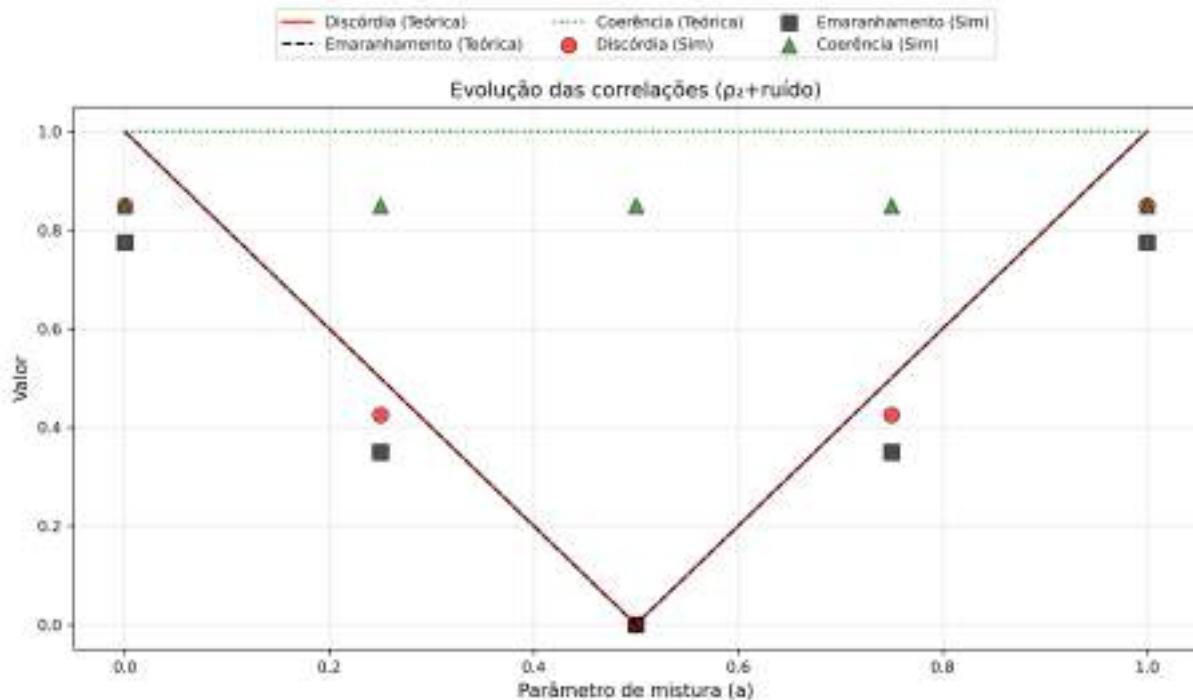


Figura 37 – Evolução das correlações para simulação de  $\rho_2$ . Fonte: Autor.

elementos ópticos e os efeitos de astigmatismo. Apesar disso, o modelo ainda se mostra útil para fornecer uma estimativa inicial do impacto do ruído, permitindo uma análise comparativa entre diferentes configurações experimentais.

Dessa forma, os resultados obtidos a partir da inclusão do modelo de ruído demonstram que, embora simplificado, ele é capaz de capturar a tendência do efeito dos erros observados experimentalmente, fornecendo um ponto de partida relevante para o desenvolvimento de modelos mais sofisticados.

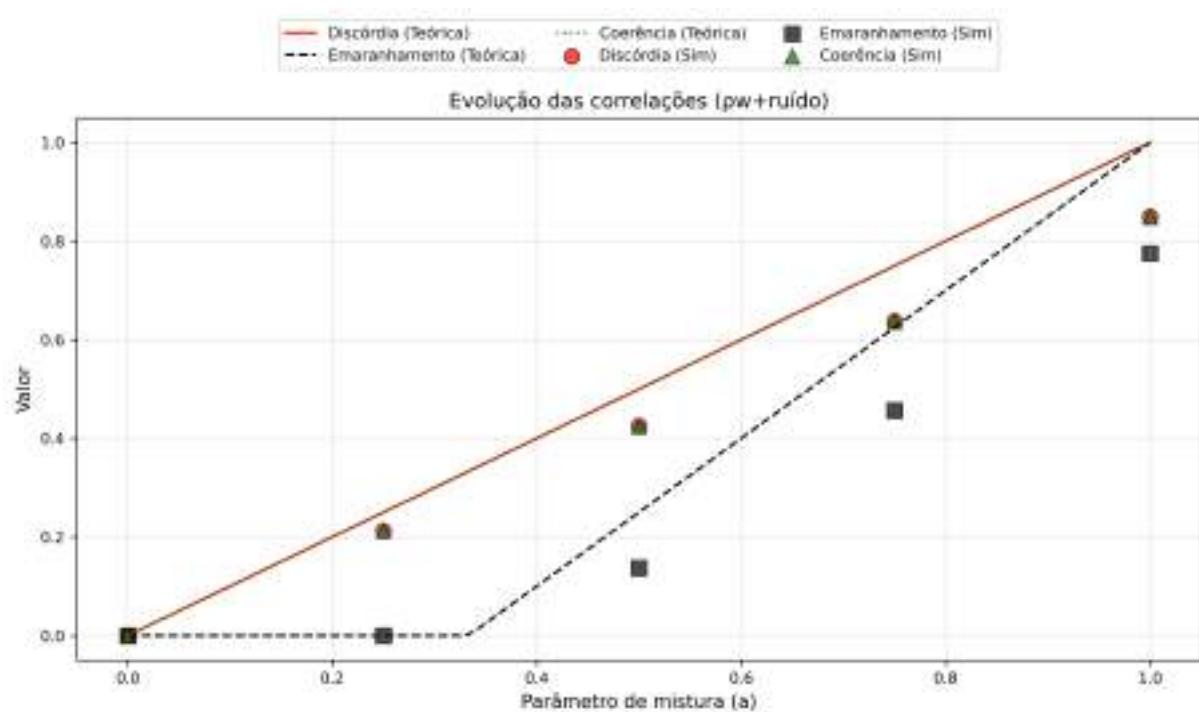


Figura 38 – Evolução das correlações para simulação de  $\rho_w$ . Fonte: Autor.



## 6 Tomografia de modos spin-órbita utilizando lente inclinada

A utilização de luz estruturada tem se mostrado promissora tanto para comunicações clássicas quanto para aplicações quânticas. Temos aplicações, por exemplo, em protocolos de criptografia e distribuição de chave quântica QKD (158) e BB84 (159). De modo similar, há esquemas de criptografia quântica de alta dimensão baseados em luz estruturada (160, 161). Na comunicação óptica, a utilização dos graus de liberdade orbital e de polarização traz benefícios (162, 163), mostrando que essa mesma plataforma experimental é aplicável em contextos diversos.

A luz estruturada também é uma ferramenta poderosa para codificar informação tanto em esquemas clássicos (164) quanto quânticos (165). Essa versatilidade tem permitido investigar várias tarefas quânticas emuladas ou implementadas com modos spin-órbita clássicos não separáveis. Por exemplo, o emaranhamento induzido pelo ambiente foi explorado em feixes intensos para estudar efeitos de decoerência (166). Caminhadas quânticas foram implementadas utilizando o Momento Angular Orbital (OAM) de um feixe clássico (167), e a transição entre caminhadas quânticas e clássicas puderam ser investigadas utilizando luz estruturada (168). A simulação de processos Markovianos e não-Markovianos também se beneficia dessa plataforma (109, 106).

Além disso, conceitos termodinâmicos quânticos podem ser explorados de forma análoga, foi apresentado uma simulação de máquina térmica quântica utilizando graus de liberdade de um feixe intenso (169). Também com aplicações em portas lógicas quânticas (170, 171, 172), outro exemplo interessante de aplicabilidade dos modos spin-órbita para um análogo clássico do teleporte quântico (173). A caracterização de canais quânticos simulados com luz estruturada também é viabilizada (174). Mesmo em contextos de jogos quânticos, modos não separáveis viabilizam a implementação experimental de estratégias e medições que simulam cenários com recursos quânticos (175, 176).

Para explorarmos o máximo dessas funcionalidades, a caracterização completa do estado via tomografia quântica adaptada aos graus de liberdade spin-órbita é essencial. A tomografia quântica se apresenta como ferramenta indispensável para experimentos com luz estruturada, garantindo a possibilidade de realizações experimentais e abrindo caminho para aplicações cada vez mais sofisticadas.

Tradicionalmente, a tomografia de modos transversais tem sido realizada através do uso de conversores de modo e prismas de Dove, conforme apresentamos no capítulo 2. Contudo, a implementação experimental desses métodos pode ser desafiadora, especial-

mente quando se lida com elementos ópticos astigmáticos que podem introduzir erros e dificultar a obtenção de resultados precisos, como observado em estudos sobre o cálculo de discordia em estados  $X$  utilizando modos spin-órbita (157). A necessidade de um método simplificado e robusto para a tomografia dos modos spin-órbita é evidente.

Neste capítulo, apresentaremos a realização experimental de um método simplificado para a tomografia de dois q-bits, utilizando os graus de liberdade de polarização e modos transversos. Através da combinação da tomografia regular da polarização e análise de imagem de modos que passam por uma lente inclinada, é possível obter a matriz densidade com alta fidelidade em relação ao estado quântico correspondente. Este método oferece uma alternativa eficiente e precisa para a caracterização de modos spin-órbita, superando as dificuldades associadas às técnicas convencionais.

## 6.1 Análise de modo transverso

O reconhecimento da estrutura espacial da luz pode ser formulado como um problema de tomografia de estado quântico. A probabilidade de se realizar uma detecção em um detector que cobre uma região  $\mathcal{R}$  do plano transversal é dada por

$$p(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} I(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (6.1)$$

onde  $I(\mathbf{r})$  é a intensidade normalizada no plano de detecção. Ela é definida como  $I(\mathbf{r}) = \langle |u(\mathbf{r})|^2 \rangle$ , onde  $u(\mathbf{r})$  é a função de campo.

A conexão com a tomografia de estado quântico é feita a partir da interpretação física de que a probabilidade é a representação da posição de um estado quântico  $\rho$  no espaço de Hilbert com funções de quadrado-integráveis (177, 178, 179). Definimos os operadores  $\rho$  e  $\Pi(\mathcal{R})$  em termos dos autovalores de posição  $|\mathbf{r}\rangle$  como  $\langle \mathbf{r}'|\rho|\mathbf{r}\rangle = \langle u^*(\mathbf{r}')u(\mathbf{r}) \rangle$  e  $\Pi(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} |\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r}| d\mathbf{r}$ . A probabilidade de detecção pode, então, ser escrita como

$$p(\mathcal{R}) = \text{Tr} [\Pi(\mathcal{R})\rho]. \quad (6.2)$$

Se realizarmos detecções sobre várias regiões disjuntas  $\{\mathcal{R}_m\}$  que cobrem todo o plano transversal (o que é uma boa aproximação para a medição realizada por uma câmera), temos  $\sum_m \Pi(\mathcal{R}_m) = I$ . Importante notar que, embora os projetores pontuais  $|\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r}|$  constituam, no limite contínuo, uma resolução projetiva, os operadores  $\Pi(\mathcal{R}_m)$  correspondem a projeções, que em geral não são mutualmente ortogonais, sobre um número de pixels finito. Por essa razão, o conjunto finito  $\{\Pi(\mathcal{R}_m)\}$  deve ser tratado como um conjunto de operadores positivos cuja soma aproxima a identidade, uma medida de POVM (do inglês *positive operator-valued measure*). Em termos experimentais, cada pixel da câmera corresponde a um elemento desse POVM.

A inovação central deste método é a utilização de uma lente inclinada que atuará como um conversor de modo. A ação dessa lente pode ser representada por um operador unitário  $U_\theta$  que atua sobre a base de modos de Hermite–Gauss (HG) da seguinte forma (180)

$$U_\theta = \sum_{m,n=0}^{\infty} e^{i(m-n)\theta} |HG_{mn}\rangle \langle HG_{mn}|. \quad (6.3)$$

O parâmetro  $\theta$  pode ser ajustado experimentalmente através da inclinação da lente e da distância de propagação e representa a diferença de fase relativa introduzida entre componentes modais com índices distintos. A aplicação de  $U_\theta$  antes da medição produz um POVM aumentado  $\{\Pi(\mathcal{R})/2, U_\theta^\dagger \Pi(\mathcal{R}) U_\theta/2\}$ , que, na prática, corresponde a registrar duas imagens: uma direta e outra convertida, que sofre alteração ao passar pela lente inclinada. Cada pixel em cada uma das duas imagens passa, assim, a representar um elemento experimental do POVM aumentado.

Intuitivamente, a medição de intensidade registra principalmente as componentes diagonais da matriz densidade na base modal. Escrevendo  $u(\mathbf{r}) = \sum_j a_j \phi_j(\mathbf{r})$  e  $\rho_{jk} = \langle a_k^\dagger a_j \rangle$ , obtemos

$$I(\mathbf{r}) = \langle |u(\mathbf{r})|^2 \rangle = \sum_{j,k} \rho_{jk} \phi_j^*(\mathbf{r}) \phi_k(\mathbf{r}). \quad (6.4)$$

Nessa expressão, as intensidades carregam informação apenas das combinações que sobrevivem à soma espacial, de modo que uma única imagem direta não distingue completamente as fases relativas entre os coeficientes de modo. Em particular, certas combinações envolvendo as partes imaginárias dos elementos fora da diagonal de  $\rho$  não são acessíveis.

A introdução da lente inclinada, descrita pelo operador  $U_\theta$ , altera as fases relativas das componentes de modo, fazendo com que os elementos da matriz densidade fora da diagonal principal adquiram fatores  $e^{i(k-j)\theta}$ . Assim, as probabilidades medidas após o conversor contêm combinações lineares diferentes das que aparecem na imagem direta e passam a ser sensíveis justamente às componentes de fase antes inacessíveis, sempre que  $\sin[(k-j)\theta] \neq 0$ . A combinação das duas imagens fornece, portanto, equações independentes suficientes para recuperar tanto amplitudes quanto fases relativas, restaurando o rank necessário da matriz tomográfica no subespaço considerado. Para o caso do modo de ordem  $N = 1$ , gerado por  $|HG_{10}\rangle$  e  $|HG_{01}\rangle$ , a escolha prática  $\theta = \pi/2$  é suficiente para garantir que o POVM aumentado seja informacionalmente completo (IC), conforme demonstrado na ref. (177).

A extensão para modos spin-órbita é direta: esses estados pertencem a  $\mathcal{H}_{SO} = \mathcal{H}_P \otimes \mathcal{H}_{TS}$ , onde  $\mathcal{H}_P$  descreve a polarização e  $\mathcal{H}_{TS}$  a estrutura transversa. Se uma configuração das placas de onda projeta a polarização em  $|\psi\rangle$ , a medida de imagem direta em um pixel tem probabilidade

$$p(\mathcal{R}, \psi) = \text{Tr} \left[ (\Pi(\mathcal{R}) \otimes |\psi\rangle \langle \psi|) \rho \right], \quad (6.5)$$

e análogos são válidos para as imagens obtidas após o conversor. Na prática, alterna-se entre um conjunto de projeções de polarização que formam um conjunto informacionalmente completo em  $\mathcal{H}_P$  e as duas imagens que garantem a IC em  $\mathcal{H}_{TS}$ . A combinação das duas técnicas fornece, portanto, um POVM experimental que é IC em  $\mathcal{H}_{SO}$ , permitindo a reconstrução de  $\rho$  por métodos estabelecidos de tomografia de estado quântico. Neste trabalho utilizamos o algoritmo de máxima verossimilhança descrito em (181).

## 6.2 Realização experimental e resultados

Para entendermos o experimento proposto para a tomografia dos modos spin-órbita utilizando lente inclinada vamos dividir a explicação em duas etapas principais: preparo e medição. O preparo visa gerar o tipo de estado que desejamos caracterizar, incluindo estados puros e mistos. A medição, por sua vez, envolve um processo de tomografia de polarização e a análise da estrutura transversa dos modos após passarem por uma lente inclinada.

A Fig. 39 mostra o esquema experimental para o preparo dos estados que serão submetidos à tomografia. Para gerar estados mistos, empregamos dois lasers. Para estados puros, utilizamos apenas o Laser 1. O bloqueador de feixes (BB, do inglês *Beam Blocker*) permite inserir ou retirar o segundo laser conforme necessário. As setas indicam quais componentes móveis são colocados ou removidos em cada configuração. Partindo do cenário

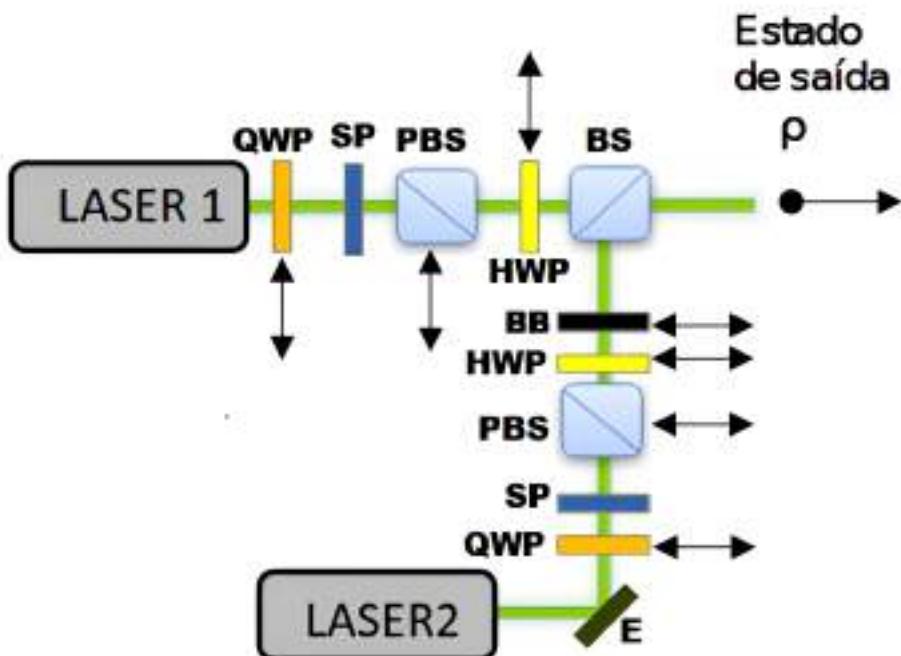


Figura 39 – Esquema experimental para preparo dos estados  $\rho_i$ . Fonte: Autor.

em que todos os elementos removíveis estão fora do caminho do feixe, exceto o bloqueador de feixe (BB), consideramos apenas o *Laser 1*, que emite um feixe verticalmente polarizado ( $|V\rangle$ ). Ao incidir sobre a S-plate orientada a  $0^\circ$ , esse feixe é transformado no estado

$$|V\rangle \xrightarrow{\text{SP}_{0^\circ}} |\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H, h\rangle + |V, v\rangle). \quad (6.6)$$

Esse é o primeiro estado que desejamos gerar. Esse estado é particularmente interessante, por ser análogo ao estado maximamente emaranhado.

Se inserirmos um PBS após a S-plate, lembrando que ele transmite a polarização horizontal e reflete a vertical, temos

$$|\phi^+\rangle \xrightarrow{\text{PBS}} |H, h\rangle, \quad (6.7)$$

que corresponde ao segundo estado desejado.

Agora, inserindo uma *Quarter-Wave Plate* (QWP) com eixo rápido orientado a  $0^\circ$  antes a S-plate em  $0^\circ$ , e retirando o PBS, geramos o estadp

$$|LG_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + |V\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|h\rangle + i|v\rangle). \quad (6.8)$$

Se, em vez disso, girarmos a QWP para  $90^\circ$  aplicada à S-plate em  $0^\circ$ , ela produz o modo

$$|LG_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + |V\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|h\rangle - i|v\rangle), \quad (6.9)$$

O último estado puro que desejamos preparar é o estado  $|V, v\rangle$ . Para isso utilizamos a S-plate em  $90^\circ$ , produzindo o estado  $|\psi^-\rangle$ . Em seguida, colocamos o PBS e selecionamos apenas o feixe transmitido, correspondente ao componente  $|H, v\rangle$ , a menos de uma fase global. Por fim, posicionamos uma HWP a  $45^\circ$  após o PBS, que realiza

$$|H, v\rangle \xrightarrow{\text{HWP}_{45^\circ}} |V, v\rangle. \quad (6.10)$$

Dessa forma, obtemos os cinco estados puros

$$\begin{aligned} \rho_1 &= |\phi^+\rangle \langle \phi^+|, & \rho_2 &= |H, h\rangle \langle H, h|, \\ \rho_3 &= |LG_+\rangle \langle LG_+|, & \rho_4 &= |LG_-\rangle \langle LG_-|, \\ \rho_5 &= |V, v\rangle \langle V, v|. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Ao remover o bloqueador de feixe (BB) e explorando as mesmas configurações para o Laser 2, após combinarmos os dois laser em um BS, preparamos os seguintes estados mistos

$$\begin{aligned} \rho_6 &= \frac{1}{2} (|\phi^+\rangle \langle \phi^+| + |V, v\rangle \langle V, v|), & \rho_7 &= \frac{1}{2} (|H, h\rangle \langle H, h| + |V, v\rangle \langle V, v|), \\ \rho_8 &= \frac{1}{2} (|LG_+\rangle \langle LG_+| + |V, v\rangle \langle V, v|), & \rho_9 &= \frac{1}{2} (|LG_-\rangle \langle LG_-| + |V, v\rangle \langle V, v|). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Uma vez preparados os estados desejados, eles seguem para o circuito de tomografia ilustrado na Fig. 40. Primeiro, um PBS projeta cada estado na base de polarização, separando-o em feixe transmitido ( $|H\rangle$ ) e feixe refletido ( $|V\rangle$ ). Em seguida, ambos os feixes passam por um cubo divisor de feixes (BS), então o feixe transmitido incide diretamente no CCD, onde sua intensidade é registrada, enquanto o feixe refletido atravessa uma lente inclinada, responsável por introduzir a variação de fase espacial necessária, antes de chegar ao CCD.

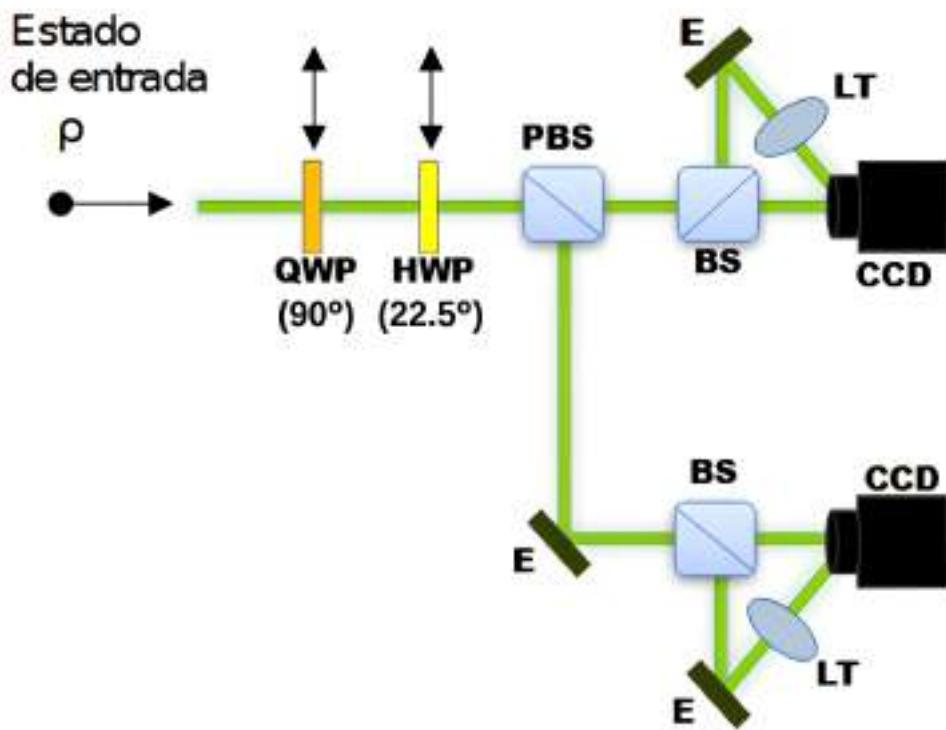


Figura 40 – Esquema experimental da tomografia com lente inclinada. Fonte: Autor.

Sabemos que para  $\theta = \pi/2$  na Eq. (6.3), a transformação do modo transverso é tal que

$$LG_+ \longleftrightarrow HG_{0,1}^{45^\circ}, \quad LG_- \longleftrightarrow HG_{0,1}^{135^\circ}, \quad (6.13)$$

onde os modos  $HG_{0,1}^{45^\circ}$  e  $HG_{0,1}^{135^\circ}$  correspondem aos modos  $HG_{01}$  rotacionados de  $45^\circ$  e  $135^\circ$ , respectivamente. Utilizamos essa transformação para otimizar o ângulo de inclinação da lente, utilizamos uma lente de foco  $f = 50\text{cm}$ . Utilizando o modo transmitido como referência e o modo que passou pela lente inclinada, é possível caracterizar o modo transverso.

Em seguida, inserimos uma Half-wave plate (HWP) ajustada a  $22.5^\circ$  antes do PBS, o que promove uma rotação de  $45^\circ$  na base de polarização, permitindo que realizemos medições nas bases diagonal e antidiagonal

$$|D\rangle = \frac{|H\rangle + |V\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |A\rangle = \frac{|H\rangle - |V\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (6.14)$$

Posteriormente, colocamos uma quarter-wave plate (QWP) a  $90^\circ$  e medimos na base circular direita e esquerda

$$|R\rangle = \frac{|H\rangle + i|V\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |L\rangle = \frac{|H\rangle - i|V\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (6.15)$$

Com isso, completamos a tomografia de polarização. A combinação dessas projeções de polarização com a análise de imagem do modo transverso fornece a tomografia completa dos modos spin-órbita.

Vamos agora discutir alguns dos resultados obtidos. Na Figura 41, apresentamos o resultado para o estado de Bell  $\rho_1$ , utilizamos o filtro de false color para destacar as intensidades. Em *A* temos as imagens teóricas, enquanto em *B* mostramos os dados experimentais. As colunas representam as diferentes bases de projeção da polarização, e as duas linhas correspondem, respectivamente, ao feixe transmitido pelo BS, que incide diretamente (DIR) sobre a CCD, e ao feixe refletido, que atravessa a lente inclinada antes de alcançar a CCD, apresentando uma transformação astigmática (AST).

Na Fig. 41, conseguimos notar efeitos de distorção dos modos ao compararmos as imagens experimentais com o esperado teoricamente. Esses efeitos são decorrentes das imperfeições dos aparelhos ópticos, principalmente a lente astigmática que produz pequenas deformações no modo. O efeito é mais destacado nas medidas de *A* e *R*.

A Figura 42 apresenta uma comparação entre a matriz densidade teórica e a matriz reconstruída experimentalmente a partir dos resultados da tomografia. A diferença de fase entre as partes real e imaginária dos elementos da matriz é representada pelo mapa de cores. Para esse estado, obtivemos uma fidelidade de  $F = 99,4\%$ , indicando uma melhora considerável em relação ao resultado obtido com a tomografia convencional (157).

Apresentamos na Figura 43 as imagens correspondentes ao estado produto  $\rho_2 = |Hh\rangle\langle Hh|$ . Novamente conseguimos notar distorções nos resultados experimentais, causados principalmente pela lente astigmática.

A comparação entre a matriz densidade teórica e a reconstruída, mostrada na Figura 44, revela alta fidelidade de  $F = 98,3\%$ , evidenciando a eficácia da técnica de tomografia spin-órbita empregada. Este gráfico permite visualizar mais claramente os erros da medida. Ao compará-lo com a previsão teórica, que apresenta apenas uma barra, observamos no resultado experimental a presença de barras adicionais em outras bases. Esse desvio é atribuído à imprecisão nos ângulos das placas responsáveis por rotacionar a base de medida, bem como a pequenas imperfeições no PBS.

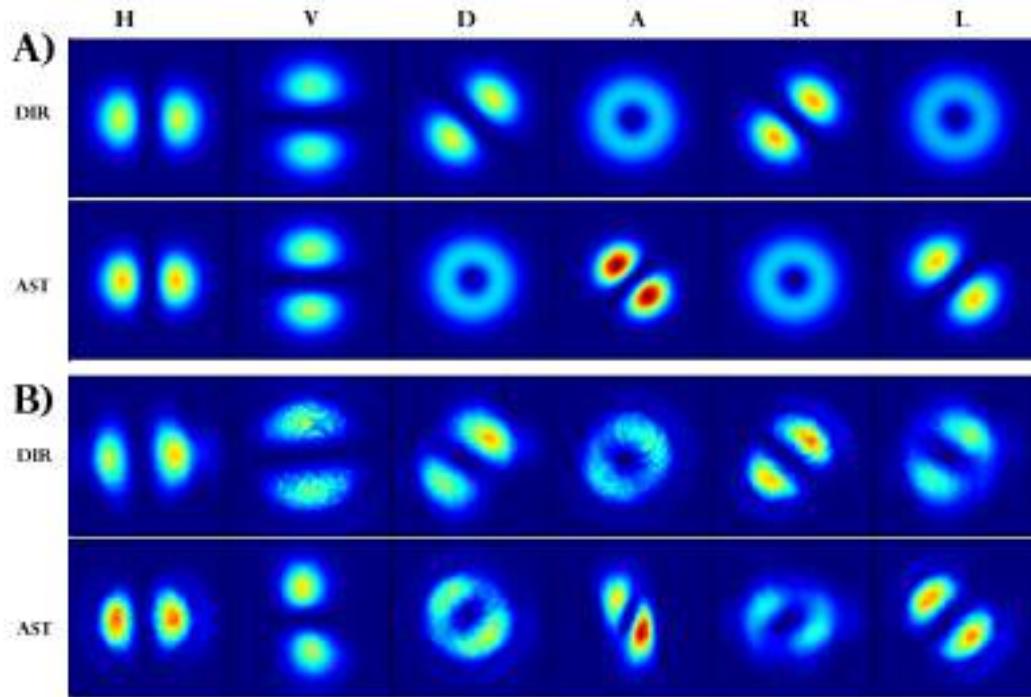


Figura 41 – Imagens teóricas (A) e experimentais (B) para o modo puro  $\rho_1 = |\Phi^+\rangle \langle \Phi^+|$ . As colunas apresentam as imagens nas diferentes bases de polarização. As linhas apresentam as imagens diretas (DIR), correspondentes ao feixe transmitido pelo BS direto para CCD, e as imagens astigmáticas (AST), obtidas com o feixe passando pela lente inclinada.

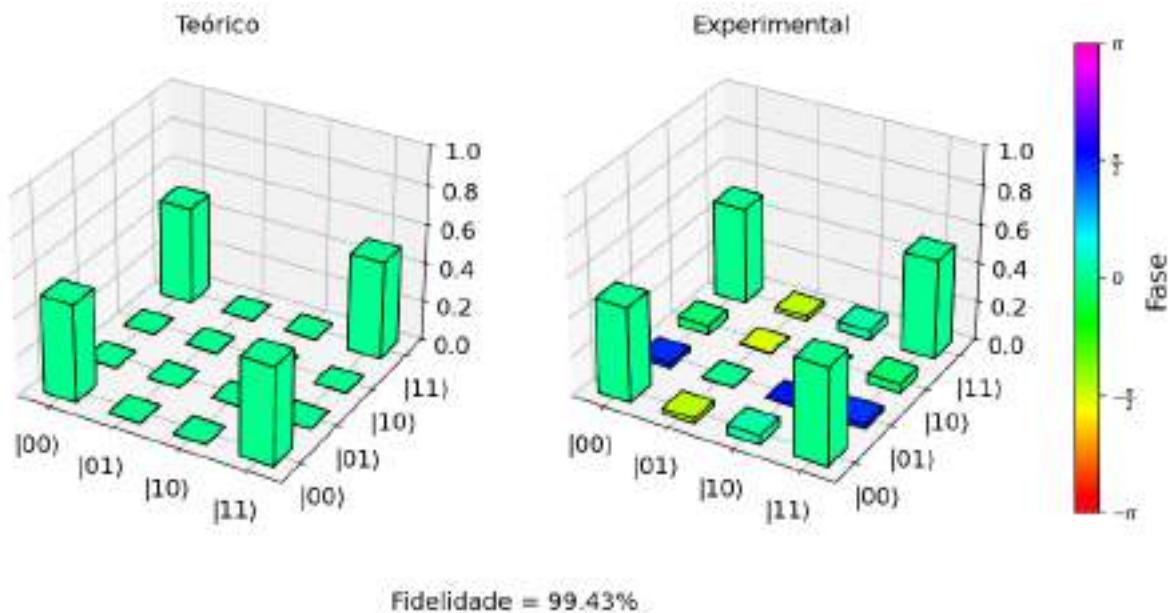


Figura 42 – Comparação da matriz teórica para obtida experimentalmente para o estado  $\rho_1 = |\Phi^+\rangle \langle \Phi^+|$  e a fidelidade.

O ultimo estado puro que apresentaremos é  $\rho_3 = |LG_+\rangle \langle LG_+|$ , as imagens associ-

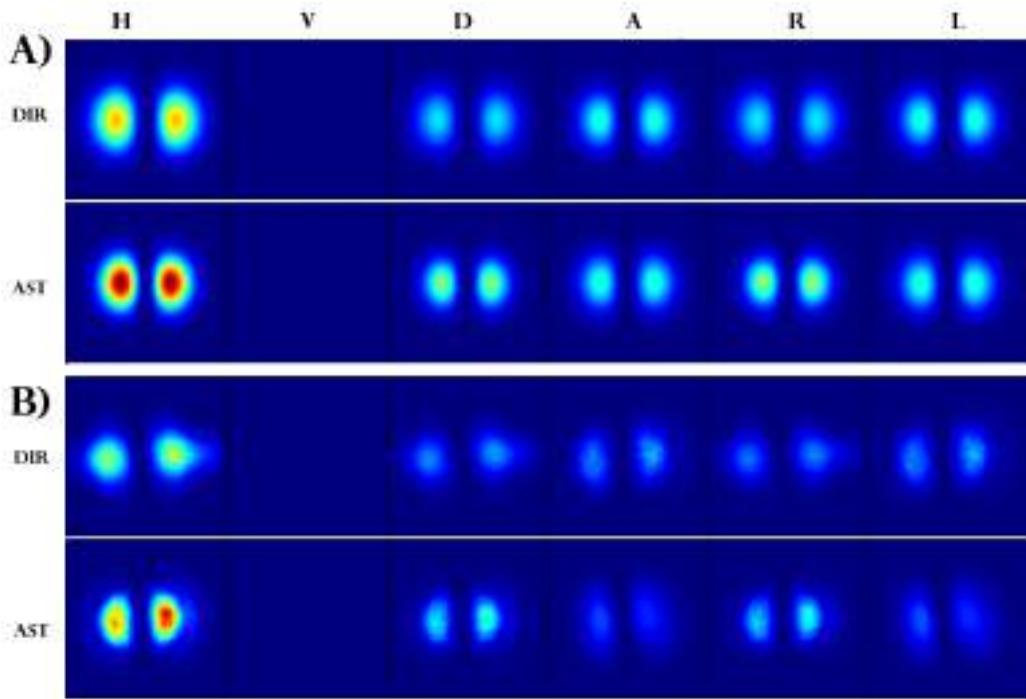


Figura 43 – Resultado teórico (A) e experimental (B) para  $\rho_2 = |Hh\rangle \langle Hh|$ . Colunas: bases de polarização; linhas: DIR (transmissão pelo BS) e AST (reflexão com lente inclinada).

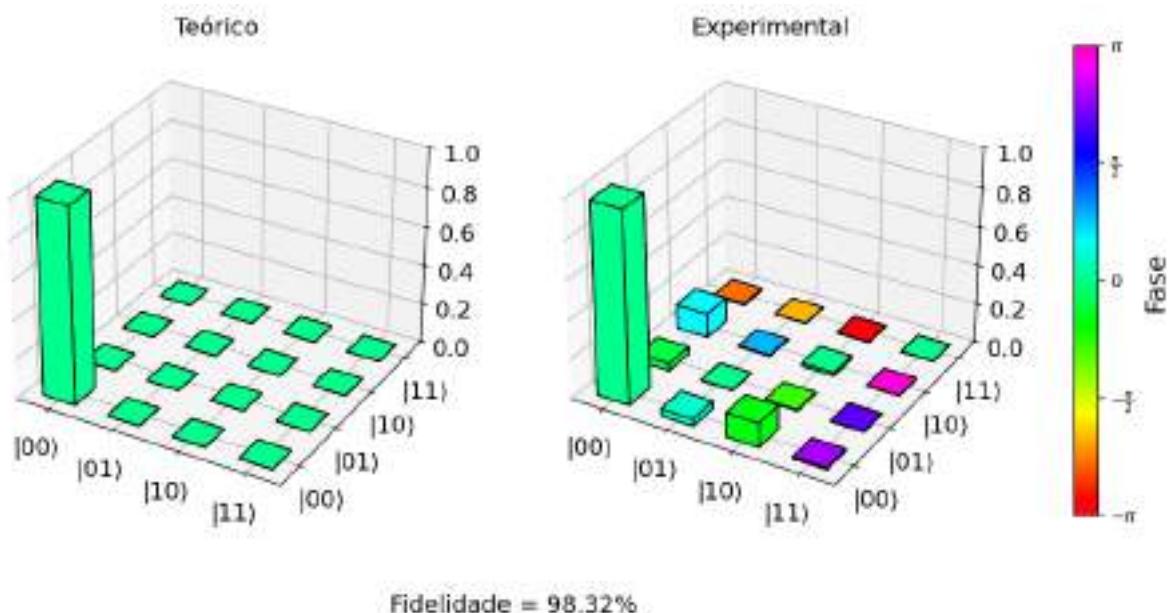


Figura 44 – Comparação da matriz teórica para obtida experimentalmente para o estado  $\rho_2 = |Hh\rangle \langle Hh|$  e a fidelidade.

adas a esse estado são apresentadas na Fig. 45. Neste caso, os efeitos de distorção são um pouco mais pronunciados, especialmente na medida em L, onde teoricamente não deveríamos observar intensidade. No entanto, experimentalmente, ainda registramos um

pequeno sinal. Destacando os erros presentes nas placas de onda e PBS, que citamos anteriormente.

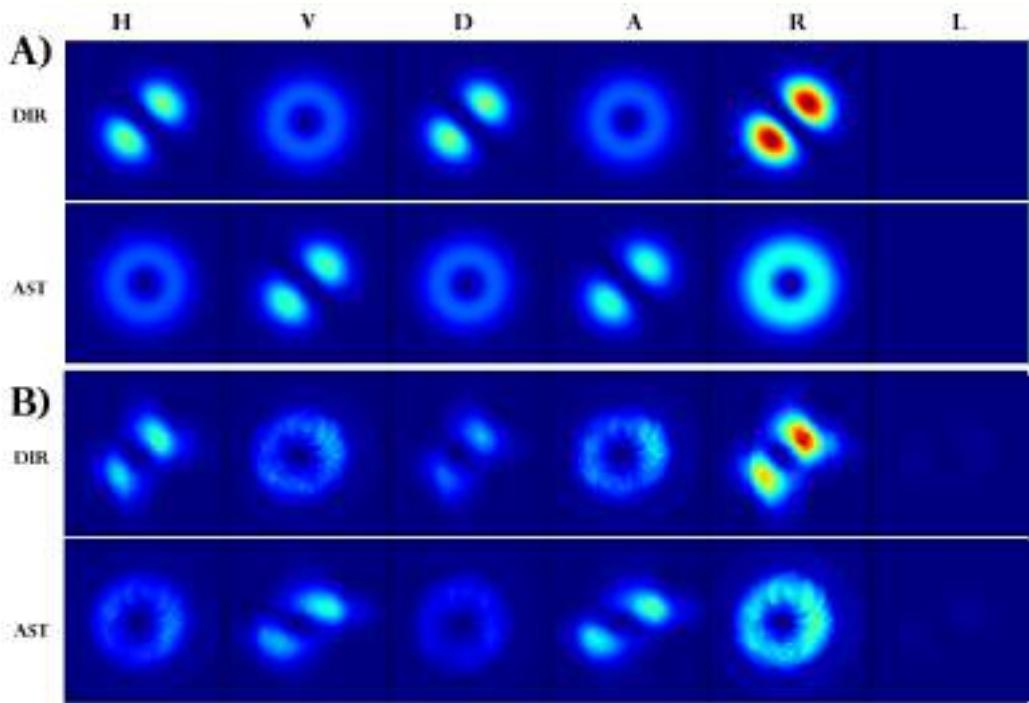


Figura 45 – Imagens teóricas (A) e experimentais (B) para o modo puro  $\rho_3 = |LG_+\rangle\langle LG_+|$ . As colunas apresentam as imagens nas diferentes bases de polarização. As linhas apresentam as imagens diretas (DIR), correspondentes ao feixe transmitido pelo BS direto para CCD, e as imagens astigmáticas (AST), obtidas com o feixe passando pela lente inclinada.

A comparação entre as matrizes densidade teórica e reconstruída, mostrada na Figura 46, revela uma fidelidade de  $F = 97,84\%$ , valor ligeiramente inferior aos demais, mas ainda indicativo de ótima qualidade na reconstrução.

Para os estados mistos, apresentamos  $\rho_6$ , o resultado referente à mistura entre o estado de Bell  $|\phi^+\rangle$  e o estado produto  $|Vv\rangle$ , o resultado esta ilustrado na Figura 47. Observa-se uma estrutura semelhante àquela apresentada pelo estado de Bell puro, embora com diferenças nas intensidades, atribuídas à contribuição do estado produto na composição da mistura. A Figura 48 apresenta a comparação entre a matriz densidade teórica e a reconstruída experimentalmente. Embora a fidelidade tenha apresentado uma leve redução em relação aos estados puros, o resultado ainda é bastante satisfatório, com  $F = 94,56\%$ .

Por fim apresentemos o resultado referente a  $\rho_8 = \frac{1}{2}(|LG_+\rangle\langle LG_+| + |V, v\rangle\langle V, v|)$ , apresentado na Figura 49. Temos a comparação entre a matriz teórica e a experimental apresentada pela Figura 50, nesse caso tivemos a Fidelidade  $F = 92.0\%$ . Mostrando que mesmo nesses casos de estados mais complexos ainda conseguimos obter uma boa fidelidade, mostrando precisão do método.

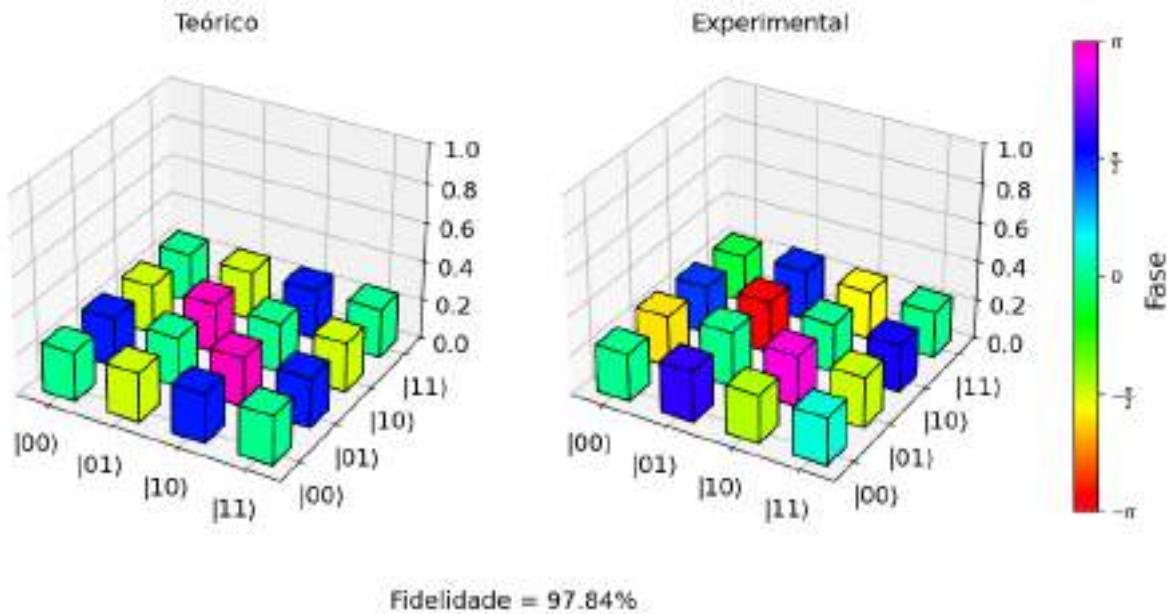


Figura 46 – Comparaçāo da matriz teórica para obtida experimentalmente para o estado  $\rho_3 = |LG_+\rangle \langle LG_+|$  e a fidelidade.

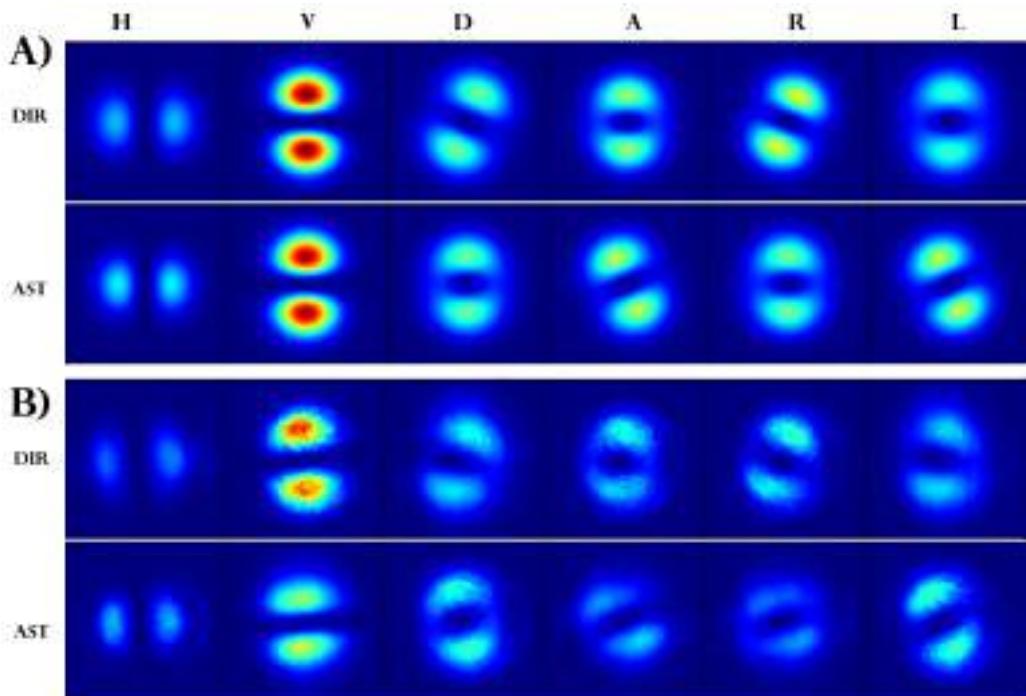


Figura 47 – Imagens teóricas (A) e experimentais (B) para o modo puro  $\rho_6 = \frac{1}{2}(|\phi^+\rangle \langle \phi^+| + |V, v\rangle \langle V, v|)$ . As colunas apresentam as imagens nas diferentes bases de polarizaçāo. As linhas apresentam as imagens diretas (DIR), correspondentes ao feixe transmitido pelo BS direto para CCD, e as imagens astigmáticas (AST), obtidas com o feixe passando pela lente inclinada.

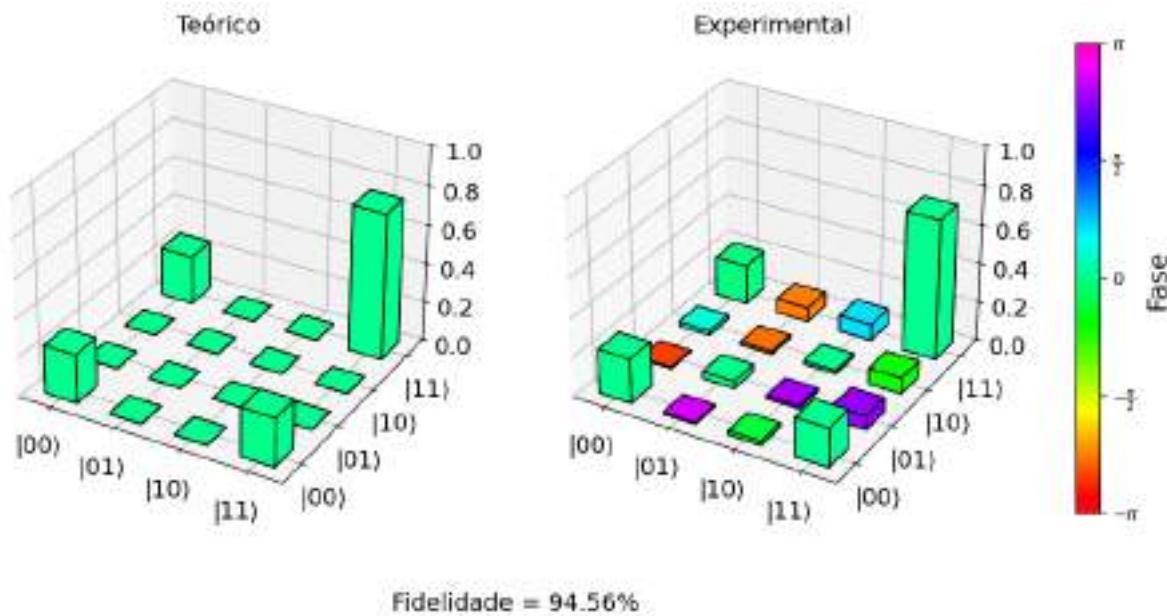


Figura 48 – Comparaçāo da matriz teórica para obtida experimentalmente para o estado  $\rho_6 = \frac{1}{2}(|\phi^+\rangle\langle\phi^+| + |V,v\rangle\langle V,v|)$  e a fidelidade.

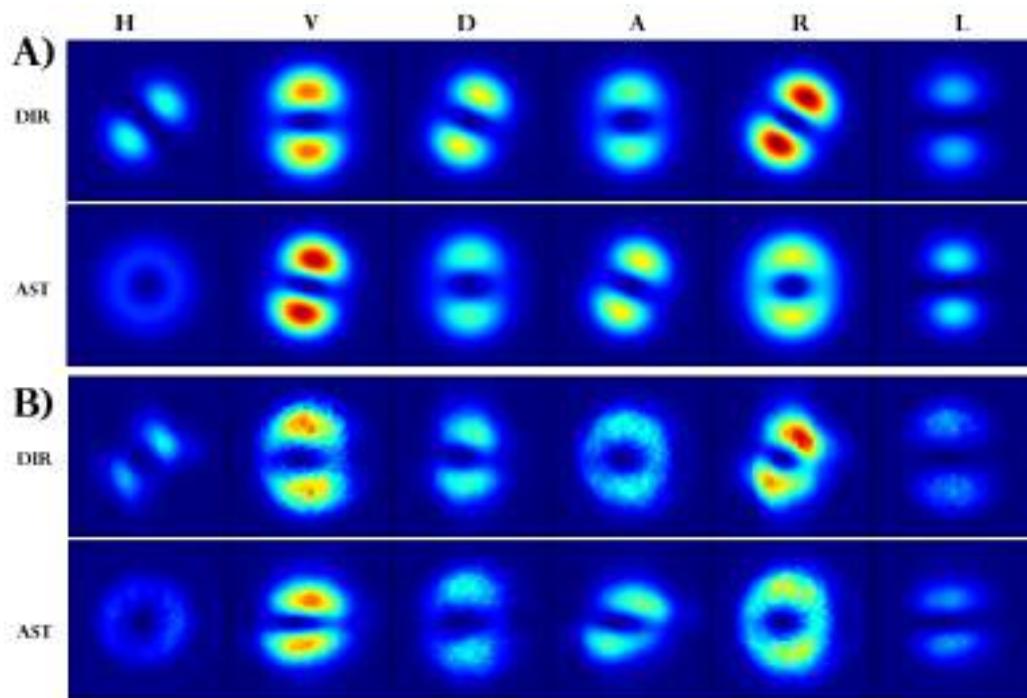


Figura 49 – Imagens teóricas (A) e experimentais (B) para o modo puro  $\rho_8 = \frac{1}{2}(|LG_+\rangle\langle LG_+| + |V,v\rangle\langle V,v|)$ . As colunas apresentam as imagens nas diferentes bases de polarização. As linhas apresentam as imagens diretas (DIR), correspondentes ao feixe transmitido pelo BS direto para CCD, e as imagens astigmáticas (AST), obtidas com o feixe passando pela lente inclinada.

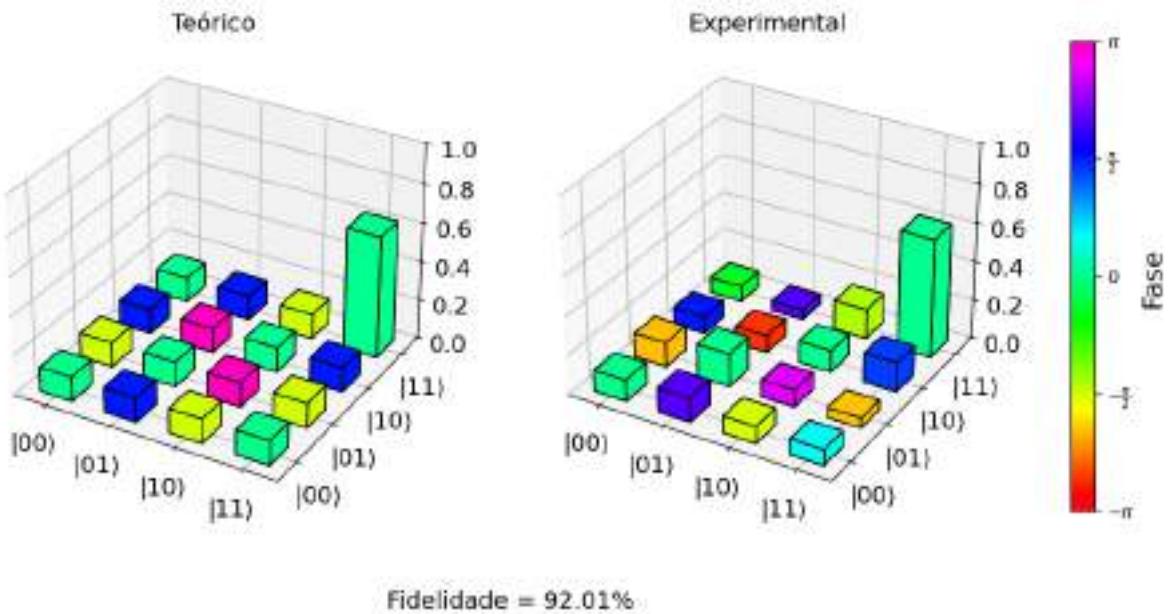


Figura 50 – Comparação da matriz teórica para obtida experimentalmente para o estado  $\rho_8 = \frac{1}{2}(|LG_+\rangle \langle LG_+| + |V, v\rangle \langle V, v|)$  e a fidelidade.

A Figura 51 apresenta um gráfico com as fidelidades dos estados reconstruídos experimentalmente. Foram investigados tanto modos puros quanto modos mistos, abrangendo uma ampla gama de estados. Para os modos puros, obtivemos excelentes resultados, com fidelidades superiores a  $F > 96,0\%$ . Mesmo nos casos de estados mistos, nos quais a fidelidade foi ligeiramente inferior, ainda alcançamos valores elevados, com  $F > 91,0\%$ .

Essa diferença é justificável, uma vez que a preparação dos estados mistos envolve a utilização simultânea de dois feixes laser, o que exige um controle mais rigoroso do alinhamento e da correspondência entre as divergências de ambos.

Concluindo, demonstramos experimentalmente uma abordagem alternativa para a tomografia de dois q-bits em modos spin-órbita. Ao combinarmos a análise de imagens do modo transverso de primeira ordem, obtida por meio de uma lente inclinada, com a tomografia de polarização, foi possível reconstruir a matriz densidade completa do estado spin-órbita.

A principal vantagem do método de tomografia com lente inclinada é a simplificação do aparato experimental e do procedimento de medição. Ao evitar a necessidade do converso de modo com lentes cilíndricas e prisma de Dove, esse método reduz significativamente a complexidade do arranjo óptico e minimiza fontes de erro experimental. Além disso, sua capacidade de caracterizar estados mistos com alta fidelidade amplia as possibilidades para a investigação de correlações quânticas e o desenvolvimento de protocolos de informação quântica baseados em luz estruturada.



Figura 51 – Gráfico ilustrativo mostrando a fidelidade dos estados reconstruídos experimentalmente. Os estados considerados são apresentados nas Eqs. (6.11) e (6.12).

Esse avanço é especialmente relevante em contextos que exigem a reconstrução precisa da matriz densidade, como nas medidas de correlação e na validação de estados quânticos. A superação das limitações que tradicionalmente comprometem a fidelidade da tomografia representa um progresso significativo para a implementação e a verificação experimental de fenômenos quânticos complexos em sistemas ópticos.

# 7 Modos spin-órbita mistos maximamente discordantes

Neste capítulo, apresentamos uma contribuição original desta tese. Nele, propomos e simulamos computacionalmente uma implementação de estados mistos maximamente discordantes (MDMS, do inglês *Maximally Discordant Mixed States*) utilizando modos spin-órbita da luz (182).

## 7.1 Estados mistos maximamente discordantes

Para compreender este trabalho, primeiramente, devemos entender com o que estamos lidando quando falamos de estados mistos maximamente discordantes. Conforme discutido no Capítulo 3, a discórdia quântica é uma medida de correlação quântica além do emaranhamento, sendo de particular interesse, pois existem estados separáveis que apresentam discórdia quântica. Além disso, como demonstrado em (183), mesmo na presença de ruído de decoerência do ambiente, para certas famílias de estados iniciais, a discórdia pode se manter robusta ao longo de um intervalo de tempo. Com esse contexto, a ref. (184) propõe famílias de estados mistos que visam maximizar essa grandeza em relação às correlações clássicas.

Para estados puros, aqueles que apresentam o maior valor de discórdia quântica coincidem com os estados maximamente emaranhados, como os estados de Bell. Dessa forma, essa classe de estados constitui um ponto de partida natural na busca por estados mistos maximamente discordantes (MDMS). No entanto, ao considerarmos misturas de dois estados de Bell, observamos uma redução nas correlações quânticas. Uma alternativa promissora consiste na mistura entre um estado de Bell e um estado produto de paridade trocada, como, por exemplo

$$\rho = \epsilon |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + (1 - \epsilon) |01\rangle\langle10|, \quad (7.1)$$

em que  $|\Phi^+\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$  e  $\epsilon$  representa o fator de mistura estatística. Nesse caso, temos uma combinação entre um estado de Bell par e uma base produto ímpar. Com o objetivo de maximizar a discórdia quântica, propõe-se uma nova forma de mistura, uma quebra maior de simetria, em que parte do emaranhamento é sacrificada para favorecer o aumento das correlações quânticas, como discutido em (184). Esse procedimento leva ao *ansatz* para estados de rank 2, dado por

$$\rho^{(R2)} = \epsilon |\tilde{\Phi}^+\rangle\langle\tilde{\Phi}^+| + (1 - \epsilon) |01\rangle\langle01|, \quad (7.2)$$

onde  $|\tilde{\Phi}^+\rangle = \sqrt{p}|00\rangle + \sqrt{1-p}|11\rangle$  é um estado de Bell desbalanceado. A otimização da discordia com relação as correlações clássicas é feita utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange.

A busca pelo estados que maximizam a discordia mostra que é necessário o uso de estados de rank 3, neste caso, a assimetriação do componente do estado de Bell não se mostra vantajosa. A melhor escolha é uma combinação de um estado de Bell com dois componentes de paridade oposta da base computacional, o que nos leva a uma família de estados de rank  $\rho^{(R3)}$ , dadas por

$$\rho^{(R3)} = \epsilon|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + (1-\epsilon)\left[m|01\rangle\langle01| + (1-m)|10\rangle\langle10|\right], \quad (7.3)$$

Por fim temos que a família de estados mistos maximamente discordantes será (184)

$$\rho^{\text{MDMS}} = \epsilon|\tilde{\Phi}^+\rangle\langle\tilde{\Phi}^+| + (1-\epsilon)\left[m|01\rangle\langle01| + (1-m)|10\rangle\langle10|\right]. \quad (7.4)$$

Na sequencia, apresentaremos uma proposta de circuito óptico para o preapre o estudo dos estados MDMS com os modos spin-órbita.

## 7.2 Proposta experimental e simulação do circuito óptico

A proposta do nosso trabalho (182) foi preparar, por meio dos modos spin-órbita, a família de estados apresentados na eq.(7.4). Dada a base de polarização linear  $\{\hat{e}_H, \hat{e}_V\}$  e os modos de Hermite–Gauss de primeira ordem  $\{\text{HG}_{01}(x, y), \text{HG}_{10}(x, y)\}$ , o modo spin-órbita mais geral pode ser escrito como

$$\tilde{E}_{\text{SO}}(\mathbf{r}) = c_1 \text{HG}_{10}(x, y) \hat{e}_H + c_2 \text{HG}_{10}(x, y) \hat{e}_V + c_3 \text{HG}_{01}(x, y) \hat{e}_H + c_4 \text{HG}_{01}(x, y) \hat{e}_V, \quad (7.5)$$

onde  $c_i \in \mathbb{C}$ . Esta base serve para a quantização do campo eletromagnético. Definindo  $\hat{e}_H \equiv H$ ,  $\hat{e}_V \equiv V$ ,  $\text{HG}_{01}(\mathbf{r}) \equiv h$ ,  $\text{HG}_{10}(\mathbf{r}) \equiv v$  o estado quântico geral de um único fóton pode ser escrito como

$$|\psi_{\text{SO}}\rangle = a_{Hh}|Hh\rangle + a_{Hv}|Hv\rangle + a_{Vh}|Vh\rangle + a_{Vv}|Vv\rangle, \quad (7.6)$$

onde  $a_{ij}$  são amplitudes de probabilidade normalizadas com  $i \in \{H, V\}$  e  $j \in \{h, v\}$ . As bases computacionais nos respectivos subespaços são  $|0\rangle_P = |H\rangle$ ,  $|1\rangle_P = |V\rangle$ ,  $|0\rangle_M = |h\rangle$ ,  $|1\rangle_M = |v\rangle$ . Para  $a_{Hh} = a_{Vv} = 1/\sqrt{2}$  e  $a_{Hv} = a_{Vh} = 0$ , obtemos o estado de Bell spin-órbita

$$|\Phi_{\text{SO}}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|Hh\rangle + |Vv\rangle), \quad (7.7)$$

com emaranhamento máximo entre polarização e modo transverso de um único fóton (37). Os estados produto de base ímpar correspondem aos modos  $|Hv\rangle$  e  $|Vh\rangle$ . Para obter o estado misto  $\rho^{\text{MDMS}}$ , é necessário realizar uma superposição incoerente desses modos,

controlando-se a proporção de cada contribuição. Essa superposição pode ser implementada utilizando três fontes independentes de fôtons.

Para a geração dos estados spin–órbita pertencentes à família MDMS, propomos o circuito óptico apresentado na Figura 52.

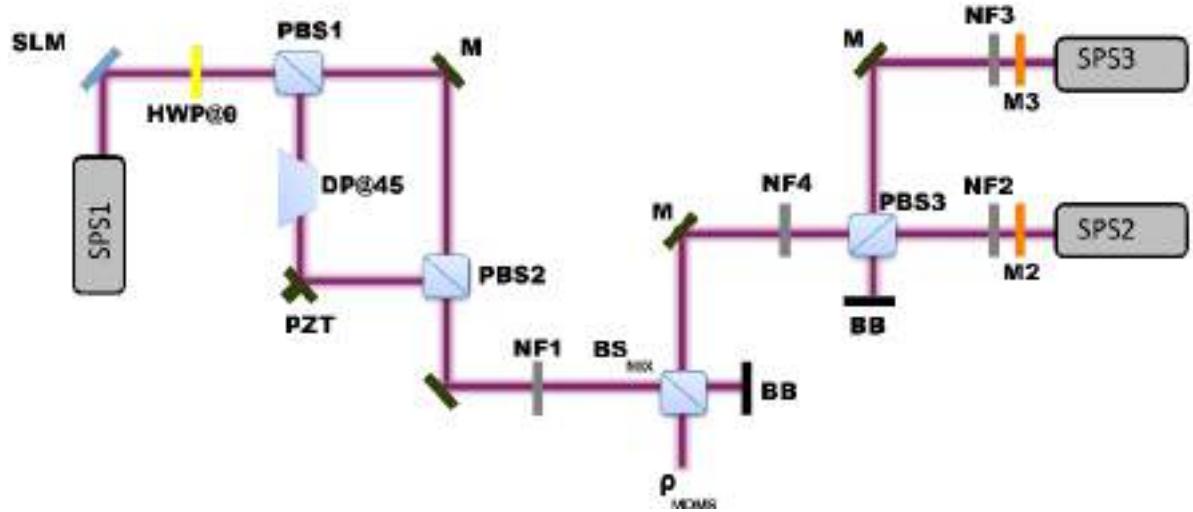


Figura 52 – Circuito óptico para preparação dos MDMS com modos spin–órbita. Fonte: (182).

Comecemos a explicação do arranjo experimental pelo lado esquerdo. Uma fonte de fôtons individuais (SPS1, do inglês *Single Photon Source*), com probabilidade  $p^I$ , prepara um fôton no estado de polarização horizontal, representado por  $|H\rangle$ . Em seguida, um modulador espacial de luz (SLM, do inglês *Spatial Light Modulator*) converte o modo transverso de Hermite–Gaussianas no estado  $|h\rangle$ , resultando no estado composto  $|\Psi_{\text{in}}\rangle = |Hh\rangle$ . Um SLM consiste em um dispositivo com uma tela de cristal líquido (LCD) em que o índice de refração de cada pixel é controlado individualmente, permitindo implementar, por exemplo, modulação de fase na frente de onda incidente (185).

Esse fôton, então, passa por uma placa de meia-onda (HWP1) orientada com ângulo  $\theta$  em relação ao eixo horizontal, gerando a superposição

$$|\tilde{\Phi}(\theta)\rangle = \cos(2\theta)|Hh\rangle + \sin(2\theta)|Vh\rangle. \quad (7.8)$$

A seguir, a superposição entra em um interferômetro do tipo Mach–Zehnder, composto por dois cubos de feixe polarizado (PBS1 e PBS2) e dois espelhos (M, do inglês *Mirror*). No braço refletido pelo PBS1, correspondente à polarização vertical, colocamos um prisma de Dove (DP) girado em  $45^\circ$ , que rotaciona o modo  $|h\rangle$  para  $|v\rangle$ . Um dos espelhos desse braço está montado em uma cerâmica piezoelétrica (PZT), permitindo o ajuste fino da diferença de fase  $\phi$  entre os dois caminhos.

Após a recombinação no PBS2, o estado de saída do interferômetro é descrito por

$$|\tilde{\Phi}(\theta, \phi)\rangle = \cos(2\theta)|Hh\rangle + e^{i\phi} \sin(2\theta)|Vv\rangle. \quad (7.9)$$

Assim, ao ajustarmos  $\phi = 2n\pi$ , sendo  $n$  um inteiro, e definirmos  $\sqrt{p} = \cos(2\theta)$ , preparamos o estado de Bell desbalanceado. Em particular, para  $p = \frac{1}{2}$ , ou seja  $\theta = 22,5^\circ$ , obtemos o estado de Bell padrão.

Após a saída do interferômetro, o feixe incide em um filtro neutro ( $NF_1$ , do inglês *Neutral Filter*), cujo coeficiente de amplitude de transmissão é dado por  $t_1 = \sqrt{\epsilon}$ . Esse elemento permite controlar o peso estatístico do estado de Bell na mistura final. Em seguida, o fóton incide em um divisor de feixes  $BS_{MIX}$ , que o combina com o estado preparado no braço direito do arranjo. O  $BS_{MIX}$  reflete ou transmite o fóton com probabilidade igual a  $1/2$ ; a parte transmitida é bloqueada, enquanto a parte refletida contribui para a mistura do estado final. Assim, com probabilidade  $p^I/2$ , obtemos o elemento de densidade  $\epsilon |\tilde{\Phi}(\theta)\rangle \langle \tilde{\Phi}(\theta)|$ .

Vamos agora abordar o lado direito do arranjo experimental, a fonte de fótons individuais  $SPS_2$  gera fótons polarizados horizontalmente  $|H\rangle$  com probabilidade  $p^{II}$ , que ao passar pela máscara holográfica  $M_2$  converte-se no modo transverso  $|v\rangle$ , resultando no estado produto  $|Hv\rangle$ ; em seguida, esse fóton atravessa o filtro neutro  $NF_2$  cujo coeficiente de amplitude de transmissão é  $t_2 = \sqrt{m}$  e é transmitido pelo  $PBS_3$ .

De forma análoga, a fonte  $SPS_3$  produz, com probabilidade  $p^{III}$ , um fóton polarizado verticalmente  $|V\rangle$  que, ao passar pela máscara holográfica  $M_3$ , converte-se no modo transverso  $|h\rangle$ , formando o estado produto  $|Vh\rangle$ . Esse fóton então incide no  $PBS_3$ , é refletido e se junta ao fóton proveniente de  $SPS_2$ , compondo a mistura de estados produto ímpares.

Em seguida, ambos os fótons atravessam o filtro neutro  $NF_4$ , cujo coeficiente de amplitude de transmissão é dado por  $t_4 = \sqrt{1-\epsilon}$ . Após o  $NF_4$ , esses fótons são encaminhados ao divisor de feixes  $BS_{MIX}$ , sendo transmitidos com probabilidade  $1/2$  cada um. A partir da contribuição combinada das três fontes SPS, o elemento de densidade resultante é

$$\rho_{SO}^{MDMS} = \epsilon |\tilde{\Phi}(\theta)\rangle \langle \tilde{\Phi}(\theta)| + (1-\epsilon) [m |Hv\rangle \langle Hv| + (1-m) |Vh\rangle \langle Vh|] \quad (7.10)$$

com probabilidade  $(p^I p^{II} p^{III})/8$ . Enfim, obtemos o estado misto maximamente discordante geral produzido a partir de modos spin-órbita.

Para preparar especificamente o estado  $\rho^{R2}$ , ajustamos os filtros neutros de modo que  $t_2 = 1$  e  $t_3 = 0$ , obtendo

$$\rho_{SO}^{R2} = \epsilon |\tilde{\Phi}(\theta)\rangle \langle \tilde{\Phi}(\theta)| + (1-\epsilon) |Hv\rangle \langle Hv|. \quad (7.11)$$

E, para  $\rho^{\text{R3}}$ , ajustamos o ângulo da HWP para  $\theta = 22.5^\circ$ , resultando em

$$\rho_{\text{SO}}^{\text{R3}} = \epsilon |\Phi(\theta)\rangle\langle\Phi(\theta)| + (1 - \epsilon) [m |Hv\rangle\langle Hv| + (1 - m) |Vh\rangle\langle Vh|]. \quad (7.12)$$

Como discutido no Capítulo 1, os estados de polarização e os modos transversais podem ser representados por vetores de Jones, enquanto o grau de liberdade spin-órbita é descrito pelo produto tensorial desses vetores. Utilizamos esse formalismo para simular, no MATLAB®, o circuito óptico mostrado na Fig. 52 e o circuito de tomografia dos modos spin-órbita, como descrito no capítulo 2. Para a preparação cada matriz de Jones associada a um elemento óptico atua diretamente sobre o estado spin-órbita do fóton. O estado final é então caracterizado por meio da tomografia, o que permite reconstruir a matriz densidade  $\rho$ . A partir de  $\rho$ , calculamos a concorrência  $C'$ , conforme definida na seção 3.1.1, para quantificar o emaranhamento, bem como as correlações clássicas  $\mathcal{C}$  e a discórdia quântica  $Q$ , de acordo com o procedimento descrito na seção 3.2.1.

Lembremos que a discórdia quântica é definida por

$$Q(\rho_{AB}) = I(\rho_{AB}) - \mathcal{C}(\rho_{AB}), \quad (7.13)$$

sendo  $\mathcal{C}(\rho_{AB})$  as correlações clássicas, dadas por

$$\mathcal{C}(\rho_{AB}) = S(\rho_A) - \min_{\{B_k\}} S(\rho_{AB} | \{B_k\}), \quad (7.14)$$

o que implica uma minimização sobre as possíveis medidas locais  $\{B_k\}$ . Para isso, definimos

$$B_k = V \Pi_k V^\dagger, \quad \Pi_k = |k\rangle\langle k| \quad (k = 0, 1), \quad V \in \text{SU}(2). \quad (7.15)$$

Para calcular explicitamente  $Q(\rho)$ , parametrizamos o operador  $V$  como

$$V = |\Psi\rangle\langle\Psi|, \quad (7.16)$$

onde  $|\Psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\phi}|1\rangle$ . A discórdia quântica  $Q(\rho)$  então se obtém realizando a otimização numérica sobre os ângulos  $\theta \in [0, \pi]$  e  $\phi \in [0, 2\pi]$  (186).

Para a concorrência, fizemos o cálculo conforme descrito no Capítulo 3, sendo

$$C'(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (7.17)$$

onde  $\lambda_i$  são as raízes quadradas dos autovalores da matriz  $R = \sqrt{\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}}$ , em ordem decrescente.

De modo a avaliar o comportamento das correlações com a variação do parâmetro de mistura  $\epsilon$ , simulamos o estado  $R2$  com o parâmetro  $p$  fixado em 0.5. O resultado está apresentado na Fig. 53. Os pontos circulares vermelhos correspondem aos valores da simulação experimental para a correlação clássica  $C$ , enquanto a linha tracejada vermelha

representa a previsão teórica de  $C(\epsilon)$ . Os quadrados verdes indicam os valores simulados de concorrência  $C'$ , sendo a linha pontilhada verde a curva teórica correspondente. Por fim, os triângulos azuis representam os valores de discórdia quântica  $Q$  da simulação, com a linha contínua azul mostrando a previsão teórica de  $Q(\epsilon)$ . As barras de erro foram determinadas a partir de simulações numéricas que consideram fontes realistas de ruído nos circuitos ópticos, como variações angulares de  $\pm 1^\circ$  em placas de meia-onda e incertezas nos coeficientes de transmissão e reflexão dos cubos divisores de feixe ( $R = 48\%$ ,  $T = 49\%$ ). Essas perturbações foram implementadas estatisticamente em múltiplas execuções dos circuitos simulados, permitindo estimar a dispersão dos resultados.

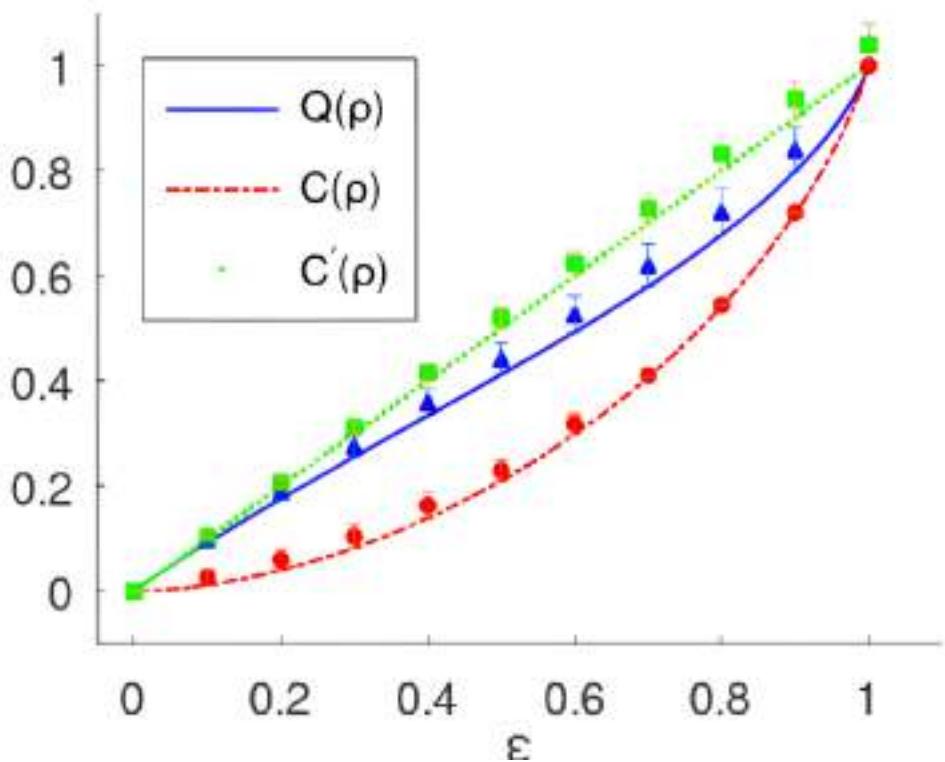


Figura 53 – Correlações em função do fator de mistura para o estado  $R2$  com  $p = 0.5$ : discórdia quântica (azul), correlação clássica (vermelho) e concorrência (verde).  
Fonte: (182).

De modo análogo, simulamos o estado  $R3$  com o parâmetro de mistura  $m = 0.5$ . O resultado dessa simulação está apresentado na Fig. 54. O esquema gráfico segue o mesmo padrão do caso anterior, incluindo a modelagem das barras de erro para os pontos simulados. Observa-se que, para  $\epsilon > 0.5$ , temos estados separáveis, mas que apresentam discórdia quântica não nula. Além disso, no intervalo  $\frac{1}{3} \leq \epsilon \leq 0.385$  nota-se uma redução das correlações clássicas concomitante a um aumento da discórdia, conforme discutido em (184).

Por fim, estendemos a análise a todos os estados MDMS, variando os parâmetros

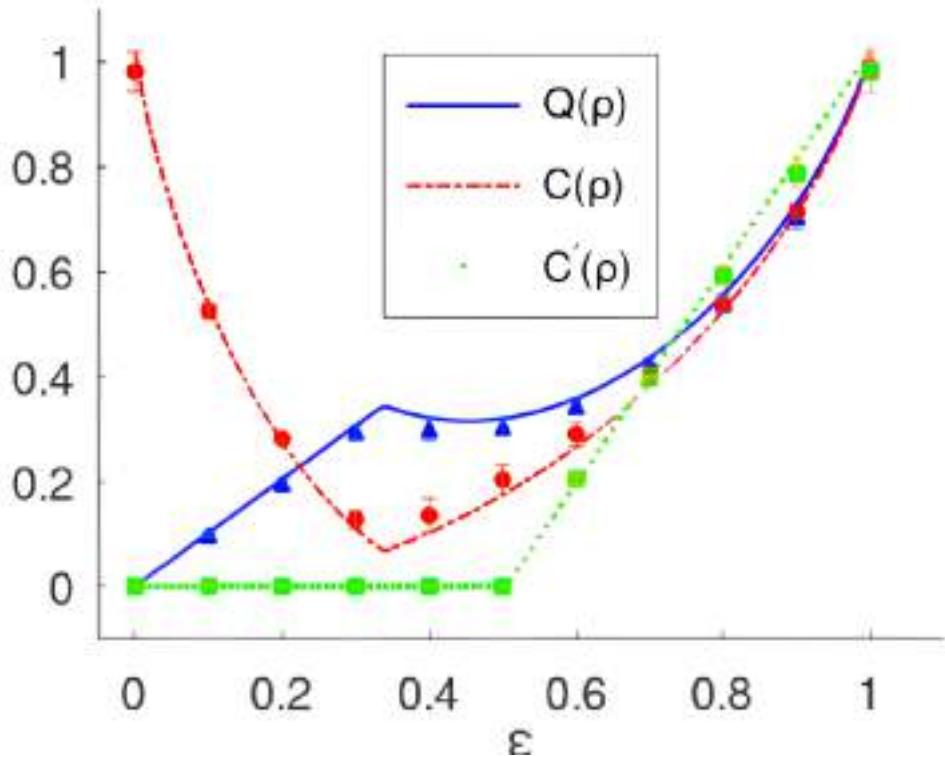


Figura 54 – Correlações em função do fator de mistura para o estado  $R3$  com  $m = 0.5$ : discórdia quântica (azul), correlação clássica (vermelho) e concorrência (verde).  
Fonte: (182).

$\epsilon$ ,  $m$  e  $p$  em incrementos de 0,01. Calculamos a discórdia quântica em função da correlação clássica, e apresentamos o resultado na Fig. 55. Os estados de Rank 2 ( $R2$ ) estão representados pelos pontos cinza, enquanto os círculos pretos correspondem aos estados de Rank 3 ( $R3$ ). Vale ressaltar que os estados puros se localizam sobre a reta  $x = y$ ; portanto, excetuando-se os pontos extremos, os estados MDMS exibem valores de discórdia superiores aos estados puros. Os resultados obtidos mostram excelente concordância com a teoria desenvolvida em (184).

O resultado está em acordo com a ref. (184), pois gera três curvas: duas para estados de rank 3 e uma para estados de rank 2. A primeira curva de rank 3 vai de discórdia zero até um ponto de cúspide, restrita ao domínio  $m \in [0, 1], \epsilon \in [0, \frac{1}{3}]$ . A segunda ramificação de MDMS é obtida para  $\rho^{(R3)}$  com  $m = \frac{1}{2}, \nu \in [\frac{1}{3}, 0.385]$ . Ambas as curvas de rank 3 correspondem a estados separáveis. A curva restante de MDMS é a família de rank 2 com  $\epsilon \approx [0.408, 1]$ .

Conforme apresentado, a simulação da proposta experimental demonstra que o circuito óptico é eficaz na geração dos estados desejados, evidenciando seu potencial para ampliar o leque de aplicações envolvendo modos spin-órbita da luz.

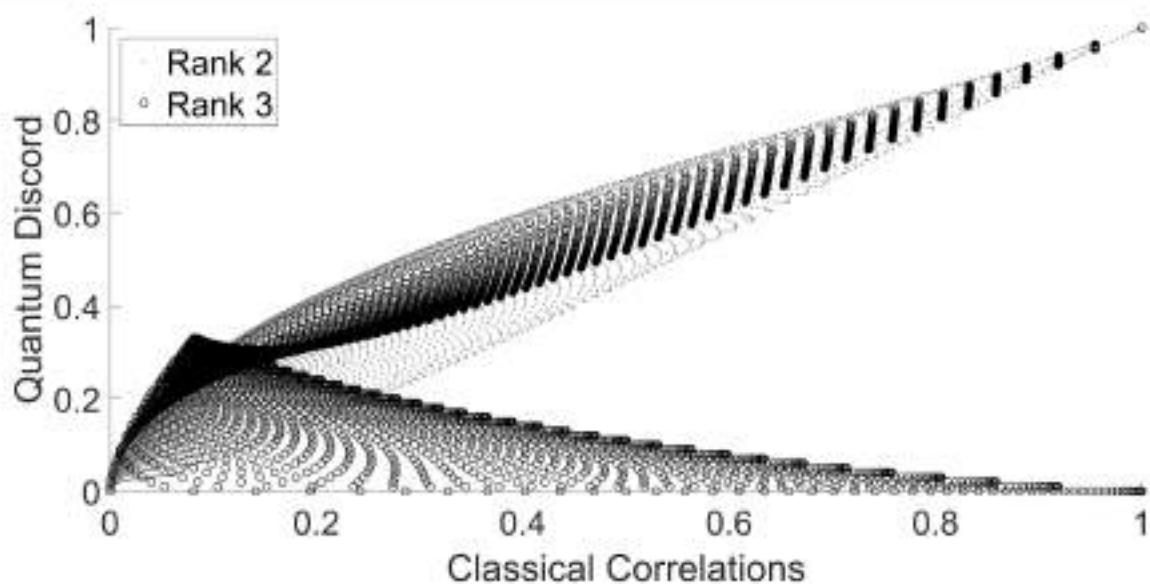


Figura 55 – Discórdia quântica em função da correlação clássica para estados MDMS. Pontos cinza: estados  $R2$ ; círculos pretos: estados  $R3$ . Fonte: (182).

# Conclusão

Para concluirmos, apresentaremos um panorama geral desta tese, destacando seus principais contribuições. Apresentamos uma síntese dos resultados obtidos ao longo do trabalho, evidenciando os avanços teóricos e experimentais alcançados. Por fim, discutimos possíveis direções para pesquisas futuras, sugerindo desdobramentos das propostas desenvolvidas e caminhos promissores para a continuidade e aplicação dos conceitos explorados.

Nesta tese, exploramos de forma abrangente os graus de liberdade da luz, incluindo polarização, modos transversos e caminho, e conduzimos um estudo sistemático da caracterização de estados quânticos bipartites e tripartites. Para isso, desenvolvemos modelos teóricos e implementamos simulações computacionais que emulam sistemas e esquemas ópticos experimentais, possibilitando o preparo de uma ampla variedade de estados e a análise de suas correlações por meio de diferentes quantificadores.

As simulações realizadas não apenas apresentam resultados de acordo com as teorias quânticas vigentes, como também pavimentam o caminho para investigações futuras em. Embora apresentem limitações inerentes, as simulações desempenham um papel fundamental ao pavimentar o caminho para futuras realizações experimentais, oferecendo um referencial teórico sólido e orientando o desenvolvimento de novas arquiteturas experimentais.

A possibilidade de classificar da não-separabilidade de modos mistos de graus de liberdade da luz, mesmo com medições tomográficas parciais, demonstra a potencialidade do uso de métodos de Aprendizado de Máquina. Representando um avanço crucial ao reduzir a complexidade necessária para caracterizar estados multipartidos. Nesse contexto é importante explorarmos as limitações desse método, bem como buscarmos novas possibilidades de uso.

A quantificação de correlações geométricas via modos spin-órbita aprofunda a compreensão de correlações quânticas e expande suas aplicações potenciais. Ao integrarmos resultados simulados e experimentais, estabelecemos uma ponte robusta entre teoria e prática, validando modelos teóricos e demonstrando a viabilidade de controle dessas correlações em sistemas reais.

A tomografia utilizando lente inclinada oferece uma solução simplificada para a tomografia de dois qubits em modos spin-órbita, utilizando uma combinação de análise de imagem e polarimetria. A alta fidelidade alcançada com este método, que dispensa o uso de conversores de modo astigmáticos, ressalta a importância de abordagens mais diretas e robustas. A simplificação do alinhamento experimental e sua robustez são contribuições

práticas notáveis, facilitando a investigação de correlações quânticas em laboratório. Sua possibilidade de expansão é ainda maior uma vez que essa técnica não se limita a feixes intensos, podendo ser aplicada em regimes de fóton único.

Ao propor um circuito óptico para gerar estados mistos maximamente discordantes (MDMS), aprofundamos a compreensão das correlações quânticas e as possibilidades para modos spin-órbita. Este trabalho é fundamental para explorar a otimização das correlações quânticas, mesmo na ausência de emaranhamento. A simulação realista do circuito e a excelente concordância com as previsões teóricas abrem perspectivas para futuras implementações experimentais.

Uma expansão natural e promissora dos trabalhos aqui apresentados é a investigação mais aprofundada de sistemas tripartidos. Nesse contexto, destacam-se as correlações geométricas, que já contam com diversos estudos teóricos aplicados a sistemas com três q-bits. Do ponto de vista experimental, surge como uma possibilidade relevante a realização da tomografia de estados compostos por três q-bits. Para isso, o processo baseado no uso de lentes inclinadas pode se mostrar especialmente vantajoso, uma vez que, em sistemas com muitos q-bits, não apenas o número de medidas necessárias cresce exponencialmente, como também os erros experimentais tendem a se acumular e escalar com o tamanho do sistema. Assim, métodos alternativos e mais eficientes de reconstrução da matriz densidade, como esse, tornam-se essenciais para viabilizar estudos experimentais em regimes multipartidos mais complexos.

Para além da proposta e simulação experimental apresentada neste trabalho, os estados maximamente discordantes mistos (MDMS) se destacam como ferramentas relevantes para a compreensão e aplicação de correlações quânticas além do emaranhamento. A possibilidade de preparar, de forma controlada, estados que maximizam a discordia quântica para um dado valor de correlação clássica amplia o leque de recursos disponíveis para protocolos de informação quântica, especialmente em regimes nos quais o emaranhamento não é facilmente preservado. Outra abordagem que pode se mostrar interessante no futuro é explorar a família de estados mistos que são construídos no intuito de maximização do emaranhamento (187).

“O correr da vida embrulha tudo,  
a vida é assim: esquenta e esfria,  
aperta e daí afrouxa,  
sossega e depois desinquieta.  
O que ela quer da gente é coragem.”

– **Guimarães Rosa**, *Grande Sertão: Veredas*



# Referências

- 1 PLANCK, M. Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspectrum. *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, v. 2, p. 237–245, 1900.
- 2 EINSTEIN, A. Über einen die erzeugung und verwandlung des lichtes betreffenden heuristischen gesichtspunkt. *Annalen der Physik*, v. 322, p. 132–148, 1 1905.
- 3 BOHR, N. The Quantum Postulate and the Recent Development of Atomic Theory. *Nature*, v. 121, n. 3050, p. 580–590, 1928.
- 4 HEISENBERG, W. Über den anschaulichen inhalt der quantentheoretischen kinematik und mechanik. *Zeitschrift für Physik*, v. 43, p. 172–198, 1927.
- 5 EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Physical Review*, v. 47, n. 10, p. 777–780, 1935.
- 6 BELL, J. S. On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. *Physics Physique Fizika*, v. 1, n. 3, p. 195–200, 1964.
- 7 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information*. 10th anniversary. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. 676 p. ISBN 9781107002173.
- 8 SHOR, P. W. Algorithms for Quantum Computation: Discrete Logarithms and Factoring. In: *Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*. [S.l.]: IEEE, 1994. p. 124–134.
- 9 GROVER, L. K. A Fast Quantum Mechanical Algorithm for Database Search. In: *Proceedings of the Twenty-Eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*. [S.l.]: ACM, 1996. p. 212–219.
- 10 DAVID; JOZSA, R. D. Rapid solution of problems by quantum computation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, v. 439, p. 553–558, 12 1992.
- 11 EKERT, A. K. Quantum cryptography based on bell's theorem. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 67, p. 661–663, Aug 1991.
- 12 BENNETT, C. H.; BRASSARD, G. Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing. *Theoretical Computer Science*, v. 560, p. 7–11, 12 2014.
- 13 BERNSTEIN, E.; VAZIRANI, U. Quantum complexity theory. *SIAM Journal on Computing*, v. 26, p. 1411–1473, 10 1997.
- 14 LLOYD, S. Universal quantum simulators. *Science*, v. 273, p. 1073–1078, 8 1996.
- 15 GISIN, N.; THEW, R. Quantum communication. *Nature Photonics*, v. 1, p. 165–171, 3 2007.
- 16 LONG, G. lu et al. Quantum secure direct communication and deterministic secure quantum communication. *Frontiers of Physics in China*, v. 2, p. 251–272, 7 2007.

- 17 TÓTH, G.; APPELLANIZ, I. Quantum metrology from a quantum information science perspective. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 47, p. 424006, 10 2014.
- 18 GIOVANNETTI, V.; LLOYD, S.; MACCONE, L. Advances in quantum metrology. *Nature Photonics*, v. 5, p. 222–229, 4 2011.
- 19 BABICHEV, S. A.; RIES, J.; LVOVSKY, A. I. Quantum scissors: Teleportation of single-mode optical states by means of a nonlocal single photon. *Europhysics Letters (EPL)*, v. 64, p. 1–7, 10 2003.
- 20 KAGALWALA, K. H. et al. Single-photon three-qubit quantum logic using spatial light modulators. *Nature Communications*, v. 8, p. 739, 9 2017.
- 21 KOK, P. et al. Linear optical quantum computing with photonic qubits. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 79, p. 135–174, Jan 2007.
- 22 GOYAL, S. K. et al. Qudit-teleportation for photons with linear optics. *Scientific Reports*, v. 4, p. 4543, 4 2014.
- 23 KILIN, S. Y.; MIKHALYCHEV, A. B. Optical qudit-type entanglement creation at long distances by means of small cross-kerr nonlinearities. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 83, p. 052303, May 2011.
- 24 BLIOKH, K. Y. et al. Spin–orbit interactions of light. *Nature Photonics*, v. 9, p. 796–808, 12 2015.
- 25 CARDANO, F.; MARRUCCI, L. Spin–orbit photonics. *Nature Photonics*, v. 9, p. 776–778, 12 2015.
- 26 SHEN, Y. et al. Optical vortices 30 years on: Oam manipulation from topological charge to multiple singularities. *Light: Science & Applications*, v. 8, p. 90, 10 2019.
- 27 JAMES, D. F. V. et al. Measurement of qubits. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 64, p. 052312, Oct 2001.
- 28 LVOVSKY, A. I.; RAYMER, M. G. Continuous-variable optical quantum-state tomography. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 81, p. 299–332, Mar 2009.
- 29 FLAMMIA, S. T.; AL. et. Quantum tomography via compressed sensing. *New Journal of Physics*, v. 14, p. 095022, 2012.
- 30 BORGES, C. V. S. et al. Bell-like inequality for the spin-orbit separability of a laser beam. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 82, p. 033833, Sep 2010.
- 31 PEREIRA, L. J.; KHOURY, A. Z.; DECHOUM, K. Quantum and classical separability of spin-orbit laser modes. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 90, p. 053842, Nov 2014.
- 32 MISHRA, S.; ANWAR, A.; SINGH, R. Generating arbitrary non-separable states with polarization and orbital angular momentum of light. *Optics Communications*, v. 554, p. 130223, 3 2024.
- 33 LEAMER, J. M. et al. Classical optical analogue of quantum discord. *The European Physical Journal Special Topics*, v. 232, p. 3345–3351, 12 2023.

- 34 BALTHAZAR, W. F. et al. Tripartite nonseparability in classical optics. *Optics Letters*, v. 41, p. 5797, 12 2016.
- 35 PASSOS, M. H. M. et al. Classical analog of quantum contextuality in spin-orbit laser modes. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 98, p. 062116, Dec 2018.
- 36 BLASIAK, P. Classical systems can be contextual too: Analogue of the mermin–peres square. *Annals of Physics*, v. 353, p. 326–339, 2 2015.
- 37 SOUZA, C. E. R. et al. Topological Phase for Spin-Orbit Transformations on a Laser Beam. *Physical Review Letters*, v. 99, p. 160401, 2007.
- 38 KOCH, J. et al. Charge-insensitive qubit design derived from the cooper pair box. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 76, p. 042319, Oct 2007.
- 39 MONROE, C.; KIM, J. Scaling the ion trap quantum processor. *Science*, v. 339, p. 1164–1169, 3 2013.
- 40 KNILL, E.; LAFLAMME, R.; MILBURN, G. J. A scheme for efficient quantum computation with linear optics. *Nature*, v. 409, p. 46–52, 1 2001.
- 41 CHILDRESS, L.; HANSON, R. Diamond nv centers for quantum computing and quantum networks. *MRS Bulletin*, v. 38, p. 134–138, 2 2013.
- 42 LOSS, D.; DIVINCENZO, D. P. Quantum computation with quantum dots. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 57, p. 120–126, Jan 1998.
- 43 HECHT, E. *Optics*. 5. ed. [S.l.]: Pearson, 2016. 720 p. ISBN 978-0133977226.
- 44 JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*. 3. ed. [S.l.]: Wiley, 1998. 832 p. ISBN 978-0471309321.
- 45 GRIFFITHS, D. J. *Eletrodinâmica*. 3. ed. [S.l.]: Pearson Universidades, 2010. 424 p. ISBN 8576058863.
- 46 BORN, M.; WOLF, E. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. 7. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1999. 985 p. ISBN 978-0521642224.
- 47 GERRARD, A.; BURCH, J. M. *Introduction to Matrix Methods in Optics*. [S.l.]: Dover Publications, 2012. 384 p. ISBN 0486680444.
- 48 COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. *Quantum Mechanics*. 1. ed. [S.l.]: Wiley-Vhc, 1991. 914 p. ISBN 978-0471164333.
- 49 SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Modern Quantum Mechanics*. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017. 568 p. ISBN 978-1108422413.
- 50 PEATROSS, J.; WARE, M. *Physics of light and optics*. 2015. ed. [S.l.]: Brigham Young University, Department of Physics, 2025. 339 p. ISBN 9781312929272.
- 51 MALYKIN, G. B. Use of the poincare sphere in polarization optics and classical and quantum mechanics. review. *Radiophysics and Quantum Electronics*, v. 40, p. 175–195, 3 1997.

- 52 BALTHAZAR, W. F. *Não-separabilidade de graus de liberdade de um feixe laser e aplicações em informação quântica*. 147 p. Tese (Tese de Doutorado) — Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, RJ, Brasil, 2016. Orientador: José Augusto Oliveira Huguenin.
- 53 YAO, A. M.; PADGETT, M. J. Orbital angular momentum: origins, behavior and applications. *Advances in Optics and Photonics*, v. 3, p. 161, 6 2011.
- 54 SALEH, B. E. A.; TEICH, M. C. *Fundamentals of Photonics*. 3. ed. [S.l.]: Wiley, 2019. 1520 p. ISBN 1119506875.
- 55 SIEGMAN, A. E. *Lasers*. 1. ed. [S.l.]: University Science Books, 1986. 1283 p. ISBN 0935702113.
- 56 MANDEL, L.; WOLF, E. *Optical Coherence and Quantum Optics*. 1. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. 1194 p. ISBN 0521417112.
- 57 ALTEPETER, J. B.; JAMES, D. F.; KWIAT, P. G. Qubit quantum state tomography. In: MATTEO, J. P.; ŘEHÁČEK (Ed.). *Quantum State Estimation*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2004. p. 113–145. ISBN 978-3-540-44481-7.
- 58 ALTEPETER, J. B.; JEFFREY, E. R.; KWIAT, P. G. Photonic state tomography. In: BERMAN, P. R.; LIN, C. C. (Ed.). [S.l.]: Academic Press, 2005. v. 52, p. 105–159.
- 59 LIANG, Y.-C. et al. Quantum fidelity measures for mixed states. *Reports on Progress in Physics*, v. 82, p. 076001, 7 2019.
- 60 MENDONÇA, P. E. M. F. et al. Alternative fidelity measure between quantum states. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 78, p. 052330, Nov 2008.
- 61 JOZSA, R. Fidelity for mixed quantum states. *Journal of Modern Optics*, v. 41, p. 2315–2323, 12 1994.
- 62 SASADA, H.; OKAMOTO, M. Transverse-mode beam splitter of a light beam and its application to quantum cryptography. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 68, p. 012323, Jul 2003.
- 63 KUMAR, M. *Quantum : Einstein, Bohr and the great debate about the nature of reality*. [S.l.]: W.W. Norton, 2011. 448 p. ISBN 9780393078299.
- 64 HORODECKI, R. et al. Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 81, p. 865–942, Jun 2009.
- 65 PLENIO, M. B.; VIRMANI, S. S. An introduction to entanglement theory. In: ANDERSSON, E.; ÖHBERG, P. (Ed.). *Quantum Information and Coherence*. [S.l.]: Springer International Publishing, 2014. p. 173–209. ISBN 978-3-319-04063-9.
- 66 ASPECT, A.; GRANGIER, P.; ROGER, G. Experimental tests of realistic local theories via bell's theorem. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 47, p. 460–463, Aug 1981.
- 67 EKERT, A.; KNIGHT, P. L. Entangled quantum systems and the schmidt decomposition. *American Journal of Physics*, v. 63, p. 415–423, 5 1995.

- 68 BARENCO, A.; EKERT, A. K. Dense coding based on quantum entanglement. *Journal of Modern Optics*, v. 42, p. 1253–1259, 6 1995.
- 69 MATTLE, K. et al. Dense coding in experimental quantum communication. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 76, p. 4656–4659, Jun 1996.
- 70 YEO, Y.; CHUA, W. K. Teleportation and dense coding with genuine multipartite entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 96, p. 060502, Feb 2006.
- 71 CHEN, P.-X.; ZHU, S.-Y.; GUO, G.-C. General form of genuine multipartite entanglement quantum channels for teleportation. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 74, p. 032324, Sep 2006.
- 72 WOOTTERS, W. K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits. *Physical Review Letters*, v. 80, n. 10, p. 2245–2248, 1998.
- 73 HILL, S. A.; WOOTTERS, W. K. Entanglement of a pair of quantum bits. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 78, p. 5022–5025, Jun 1997.
- 74 WOOTTERS, W. K. Entanglement of formation and concurrence. *Quantum Information and Computation*, v. 1, p. 27–44, 7 2001.
- 75 CHEN, L.; AULBACH, M.; HAJDUŠEK, M. Comparison of different definitions of the geometric measure of entanglement. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 89, p. 042305, Apr 2014.
- 76 BARNUM, H.; LINDEN, N. Monotones and invariants for multi-particle quantum states. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 34, p. 6787–6805, 9 2001.
- 77 WEI, T.-C.; GOLDBART, P. M. Geometric measure of entanglement and applications to bipartite and multipartite quantum states. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 68, p. 042307, Oct 2003.
- 78 SHAPIRA, D.; SHIMONI, Y.; BIHAM, O. Groverian measure of entanglement for mixed states. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 73, p. 044301, Apr 2006.
- 79 STRELTSOV, A.; KAMPERMANN, H.; BRUSS, D. Simple algorithm for computing the geometric measure of entanglement. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 84, p. 022323, Aug 2011.
- 80 BIHAM, O.; NIELSEN, M. A.; OSBORNE, T. J. Entanglement monotone derived from grover's algorithm. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 65, p. 062312, Jun 2002.
- 81 FELDMAN, V.; MAZIERO, J.; AUYUANET, A. Direct-dynamical entanglement–discord relations. *Quantum Information Processing*, v. 16, p. 128, 5 2017.
- 82 OZAWA, M. Entanglement measures and the hilbert–schmidt distance. *Physics Letters A*, v. 268, p. 158–160, 4 2000.
- 83 SPEHNER, D.; ORSZAG, M. Geometric quantum discord with bures distance. *New Journal of Physics*, v. 15, p. 103001, 10 2013.

- 84 MARIAN, P.; MARIAN, T. A. Bures distance as a measure of entanglement for symmetric two-mode gaussian states. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 77, p. 062319, Jun 2008.
- 85 COCCHIARELLA, D. et al. Entanglement distance for arbitrary  $m$ -qudit hybrid systems. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 101, p. 042129, Apr 2020.
- 86 RAMACHANDRAN, D.; VATHSAN, R. A sharp geometric measure of entanglement. *Quantum Information Processing*, v. 24, p. 257, 8 2025.
- 87 KNILL, E.; LAFLAMME, R. Power of one bit of quantum information. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 81, p. 5672–5675, Dec 1998.
- 88 HENDERSON, L.; VEDRAL, V. Classical, quantum and total correlations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 34, p. 6899–6905, 9 2001.
- 89 OLLIVIER, H.; ZUREK, W. H. Quantum discord: A measure of the quantumness of correlations. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 88, p. 017901, Dec 2001.
- 90 DATTA, A.; SHAJI, A.; CAVES, C. M. Quantum discord and the power of one qubit. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 100, p. 050502, Feb 2008.
- 91 LANYON, B. P. et al. Experimental quantum computing without entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 101, p. 200501, Nov 2008.
- 92 MODI, K. et al. The classical-quantum boundary for correlations: Discord and related measures. *Reviews of Modern Physics*, v. 84, p. 1655–1707, 11 2012.
- 93 LUO, S. Quantum discord for two-qubit systems. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 77, p. 042303, Apr 2008.
- 94 SHANNON, C. E.; WEAVER, W. *The mathematical theory of communication*. [S.l.]: University of Illinois Press, 1963. 144 p. ISBN 9780252725487.
- 95 COVER, T. M.; THOMAS, J. A. *Elements of Information Theory*. 2. ed. [S.l.]: Wiley-Interscience, 2006. v. 1. 748 p. ISBN 0471241954.
- 96 MACKAY, D. J. C. *Information Theory, Inference and Learning Algorithms*. 1. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003. 640 p. ISBN 0521642981.
- 97 WEHRL, A. General properties of entropy. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 50, p. 221–260, Apr 1978.
- 98 VEDRAL, V. The role of relative entropy in quantum information theory. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 74, p. 197–234, Mar 2002.
- 99 NEUMANN, J. V.; BEYER, R. T. *Mathematical foundations of quantum mechanics*. 1. ed. [S.l.]: Princeton University Press, 1955. 464 p. ISBN 0691028931.
- 100 GROISMAN, B.; POPESCU, S.; WINTER, A. Quantum, classical, and total amount of correlations in a quantum state. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 72, p. 032317, Sep 2005.
- 101 SCHUMACHER, B.; WESTMORELAND, M. D. Quantum mutual information and the one-time pad. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 74, p. 042305, Oct 2006.

- 102 BELLOMO, B.; FRANCO, R. L.; COMPAGNO, G. Dynamics of geometric and entropic quantifiers of correlations in open quantum systems. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 86, p. 012312, Jul 2012.
- 103 PIANI, M. Problem with geometric discord. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 86, p. 034101, Sep 2012.
- 104 PAULA, F. M.; OLIVEIRA, T. R. de; SARANDY, M. S. Geometric quantum discord through the schatten 1-norm. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 87, p. 064101, Jun 2013.
- 105 BAUMGRATZ, T.; CRAMER, M.; PLENIO, M. B. Quantifying coherence. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 113, p. 140401, Sep 2014.
- 106 PASSOS, M. H. M. et al. Non-markovianity through quantum coherence in an all-optical setup. *Optics Letters*, v. 44, p. 2478, 5 2019.
- 107 PROTOPOPESCU, V. et al. Robust control of decoherence in realistic one-qubit quantum gates. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 36, p. 2175–2189, 2 2003.
- 108 LONGHI, S. Quantum simulation of decoherence in optical waveguide lattices. *Optics Letters*, v. 38, p. 4884, 11 2013.
- 109 OBANDO, P. C. et al. Simulating markovian quantum decoherence processes through an all-optical setup. *Quantum Information Processing*, v. 19, p. 7, 1 2020.
- 110 PERES, A. Separability criterion for density matrices. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 77, p. 1413–1415, Aug 1996.
- 111 HORODECKI, M.; HORODECKI, P.; HORODECKI, R. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions. *Physics Letters A*, v. 223, p. 1–8, 11 1996.
- 112 DOHERTY, A. C.; PARRILLO, P. A.; SPEDALIERI, F. M. Distinguishing separable and entangled states. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 88, p. 187904, Apr 2002.
- 113 GÜHNE, O.; SEEVINCK, M. Separability criteria for genuine multiparticle entanglement. *New Journal of Physics*, v. 12, p. 053002, 5 2010.
- 114 MICHALSKI, R.; CARBONELL, J.; MITCHELL, T. *Machine Learning*. [S.l.]: Morgan Kaufmann, 2014. 572 p. ISBN 1493303481.
- 115 BIAMONTE, J. et al. Quantum machine learning. *Nature*, v. 549, p. 195–202, 9 2017.
- 116 FLYNN, B. et al. Quantum model learning agent: characterisation of quantum systems through machine learning. *New Journal of Physics*, v. 24, p. 053034, 5 2022.
- 117 SEIF, A. et al. Machine learning assisted readout of trapped-ion qubits. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, v. 51, p. 174006, 9 2018.
- 118 HE, Z.; WANG, Y.; HUANG, D. Wavelength attack recognition based on machine learning optical spectrum analysis for the practical continuous-variable quantum key distribution system. *Journal of the Optical Society of America B*, v. 37, p. 1689, 6 2020.

- 119 LIU, W. et al. Parameter estimation via weak measurement with machine learning. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, v. 52, p. 045504, 2 2019.
- 120 ISMAIL, Y.; SINAYSKIY, I.; PETRUCCIONE, F. Integrating machine learning techniques in quantum communication to characterize the quantum channel. *Journal of the Optical Society of America B*, v. 36, p. B116, 3 2019.
- 121 NAMUDURI, S. et al. Machine learning enabled lineshape analysis in optical two-dimensional coherent spectroscopy. *Journal of the Optical Society of America B*, v. 37, p. 1587, 6 2020.
- 122 TIAN, F.; GAO, Y.; YANG, C. Gmm based low-complexity adaptive machine-learning equalizers for optical fiber communication. *Optics Communications*, v. 517, p. 128312, 8 2022.
- 123 AMIN, M. J.; RIZA, N. Machine learning enhanced optical distance sensor. *Optics Communications*, v. 407, p. 262–270, 1 2018.
- 124 CUI, X. et al. Experimental study of machine-learning-based orbital angular momentum shift keying decoders in optical underwater channels. *Optics Communications*, v. 452, p. 116–123, 12 2019.
- 125 HARNEY, C. et al. Entanglement classification via neural network quantum states. *New Journal of Physics*, v. 22, p. 045001, 4 2020.
- 126 YANG, Z.; ZHANG, X. Entanglement-based quantum deep learning. *New Journal of Physics*, v. 22, p. 033041, 3 2020.
- 127 JIA, Z.-A. et al. Entanglement area law for shallow and deep quantum neural network states. *New Journal of Physics*, v. 22, p. 053022, 5 2020.
- 128 HARNEY, C.; PATERNOSTRO, M.; PIRANDOLA, S. Mixed state entanglement classification using artificial neural networks. *New Journal of Physics*, v. 23, p. 063033, 6 2021.
- 129 CAI, X.-D. et al. Entanglement-based machine learning on a quantum computer. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 114, p. 110504, Mar 2015.
- 130 DANACI, O. et al. Quantum state estimation from partial tomography data using a stack of machine learning models and imputation. In: *Frontiers in Optics / Laser Science*. [S.l.]: Optica Publishing Group, 2020. p. FTu8D.5. ISBN 978-1-943580-80-4.
- 131 LU, S. et al. Separability-entanglement classifier via machine learning. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 98, p. 012315, Jul 2018.
- 132 GAO, J. et al. Experimental machine learning of quantum states. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 120, p. 240501, Jun 2018.
- 133 LOHANI, S. et al. Machine learning assisted quantum state estimation. *Machine Learning: Science and Technology*, v. 1, p. 035007, 9 2020.
- 134 DANACI, O. et al. Machine learning pipeline for quantum state estimation with incomplete measurements. *Machine Learning: Science and Technology*, v. 2, p. 035014, 9 2021.

- 135 WAN, Z. et al. Multipartite classically entangled scalar beams. *Optics Letters*, v. 47, p. 2052, 4 2022.
- 136 SHEN, Y. et al. Structured ray-wave vector vortex beams in multiple degrees of freedom from a laser. *Optica*, v. 7, p. 820, 7 2020.
- 137 SHEN, Y. et al. Creation and control of high-dimensional multi-partite classically entangled light. *Light: Science & Applications*, v. 10, p. 50, 3 2021.
- 138 KAGALWALA, K. H. et al. Bell's measure in classical optical coherence. *Nature Photonics*, v. 7, p. 72–78, 1 2013.
- 139 LI, T. et al. Experimental contextuality in classical light. *Scientific Reports*, v. 7, p. 44467, 3 2017.
- 140 BALTHAZAR, W. F.; HUGUENIN, J. A. O. Conditional operation using three degrees of freedom of a laser beam for application in quantum information. *Journal of the Optical Society of America B*, v. 33, p. 1649, 8 2016.
- 141 SHEN, Y.; ROSALES-GUZMÁN, C. Nonseparable states of light: From quantum to classical. *Laser & Photonics Reviews*, v. 16, 7 2022.
- 142 WANG, H. et al. Deep-learning-assisted communication capacity enhancement by non-orthogonal state recognition of structured light. *Optics Express*, v. 30, p. 29781, 8 2022.
- 143 WANG, H. et al. Deep-learning-based recognition of multi-singularity structured light. *Nanophotonics*, v. 11, p. 779–786, 2 2022.
- 144 CARVALHO, T. et al. Non-separability classification of degrees of freedom of light assisted by machine learning. *Optics Communications*, v. 545, p. 129665, 10 2023.
- 145 WERNER, R. F. Quantum states with einstein-podolsky-rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 40, p. 4277–4281, Oct 1989.
- 146 GREENBERGER, D. M.; HORNE, M. A.; ZEILINGER, A. Going Beyond Bell's Theorem. In: KAFATOS, M. (Ed.). *Bell's Theorem, Quantum Theory and Conceptions of the Universe*. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1989. p. 69–72.
- 147 BERESNA, M. et al. Radially polarized optical vortex converter created by femtosecond laser nanostructuring of glass. *Applied Physics Letters*, v. 98, 5 2011.
- 148 IDE, H.; KURITA, T. Improvement of learning for cnn with relu activation by sparse regularization. In: *2017 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)*. [S.l.]: IEEE, 2017. p. 2684–2691. ISBN 978-1-5090-6182-2.
- 149 SAMARASINGHE, S. *Neural Networks for Applied Sciences and Engineering: From Fundamentals to Complex Pattern Recognition*. [S.l.]: Auerbach Publications, 2006. ISBN 9780849333750.
- 150 YOUNG, J. D.; AUYUANET, A. Entanglement–Coherence and Discord–Coherence Analytical Relations for X States. *Quantum Information Processing*, v. 19, p. 398, 2020.

- 151 RAU, A. R. P. Algebraic characterization of x -states in quantum information. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 42, p. 412002, 10 2009.
- 152 YU, T.; EBERLY, J. H. Evolution from Entanglement to Decoherence of Bipartite Mixed "X" States. *Quantum Info. Comput.*, Rinton Press, Incorporated, v. 7, p. 459–468, 7 2007.
- 153 CICCARELLO, F.; TUFARELLI, T.; GIOVANNETTI, V. Toward computability of trace distance discord. *New Journal of Physics*, v. 16, p. 013038, 1 2014.
- 154 TAN, K. C. et al. Unified view of quantum correlations and quantum coherence. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 94, p. 022329, Aug 2016.
- 155 STRELTSOV, A. et al. Measuring quantum coherence with entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 115, p. 020403, Jul 2015.
- 156 BALTHAZAR, W. F. et al. Spin-orbit  $x$  states. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 103, p. 022411, Feb 2021.
- 157 LAMEGO, V. S. et al. Experimental investigation of quantum discord in spin-orbit  $x$  states. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 110, p. 032601, Sep 2024.
- 158 SIT, A. et al. Quantum cryptography with structured photons through a vortex fiber. *Opt. Lett.*, Optica Publishing Group, v. 43, n. 17, p. 4108–4111, Sep 2018.
- 159 SOUZA, C. E. R. et al. Quantum key distribution without a shared reference frame. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 77, p. 032345, Mar 2008.
- 160 SIT, A. et al. High-dimensional intracity quantum cryptography with structured photons. *Optica*, Optical Society of America, v. 4, n. 9, p. 1006–1010, 2017.
- 161 WANG, Q.-K. et al. High-dimensional quantum cryptography with hybrid orbital-angular-momentum states through 25 km of ring-core fiber: A proof-of-concept demonstration. *Phys. Rev. Appl.*, American Physical Society, v. 15, p. 064034, Jun 2021.
- 162 FICKLER, R.; PRABHAKAR, S. Quantum communication with structured photons. In: *Structured Light for Optical Communication*. [S.l.]: Elsevier, 2021. p. 205–236.
- 163 VILLALBA, N. et al. Transmission of optical communication signals through ring core fiber using perfect vortex beams. *Optics Express*, Optica Publishing Group, v. 31, n. 24, p. 40113–40123, 2023.
- 164 DU, J.; WANG, J. High-dimensional structured light coding/decoding for free-space optical communications free of obstructions. *Optics Letters*, v. 40, p. 4827–30, 11 2015.
- 165 NAPE, I. et al. Quantum structured light in high dimensions. *APL Photonics*, v. 8, 5 2023.
- 166 PASSOS, M. H. M. et al. Experimental Investigation of Environment-Induced Entanglement Using an All-Optical Setup. *Physical Review A*, v. 97, n. 2, p. 022321, 2018.
- 167 GOYAL, S. K. et al. Implementing Quantum Walks Using Orbital Angular Momentum of Classical Light. *Physical Review Letters*, v. 110, n. 26, p. 263602, 2013.

- 168 LAMEGO, V. S. et al. Transition from Quantum-to-Classical Random Walk Distributions with Spin–Orbit Modes. *Optics Letters*, v. 49, n. 24, p. 6904–6907, 2024.
- 169 PASSOS, M. et al. Optical simulation of a quantum thermal machine. *Physical Review A*, APS, v. 100, n. 2, p. 022113, 2019.
- 170 SOUZA, C. E. R.; KHOURY, A. Z. A michelson controlled-not gate with a single-lens astigmatic mode converter. *Optics Express*, v. 18, p. 9207–12, 4 2010.
- 171 BALTHAZAR, W. F. et al. Using polarization to control the phase of spatial modes for application in quantum information. *Brazilian Journal of Physics*, v. 44, p. 658–664, 12 2014.
- 172 CRUZ, G. T. C. et al. Quantum phase gates with geometric phases of spin-orbit modes. *Quantum Information Processing*, v. 23, p. 160, 4 2024.
- 173 SILVA, B. P. da et al. Spin–orbit laser mode transfer via a classical analogue of quantum teleportation. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, v. 49, p. 055501, 3 2016.
- 174 PASSOS, M. H. M. et al. Spin-orbit implementation of the solovay-kitaev decomposition of single-qubit channels. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 102, p. 062601, Dec 2020.
- 175 PINHEIRO, A. R. C. et al. Vector vortex implementation of a quantum game. *Journal of the Optical Society of America B*, v. 30, p. 3210–3214, 12 2013.
- 176 BALTHAZAR, W. F. et al. Experimental realization of the quantum duel game using linear optical circuits. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, v. 48, p. 165505, 8 2015.
- 177 OLIVEIRA, M. G. de et al. Informationally complete orbital-angular-momentum tomography with intensity measurements. *Phys. Rev. Appl.*, American Physical Society, v. 24, p. 024031, Aug 2025.
- 178 JEŽEK, M.; HRADIL, Z. Reconstruction of spatial, phase, and coherence properties of light. *Journal of the Optical Society of America A*, v. 21, p. 1407, 8 2004.
- 179 ŘEHÁČEK, J. et al. Full tomography from compatible measurements. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 103, p. 250402, Dec 2009.
- 180 BUONO, W. T. et al. Eigenmodes of aberrated systems: the tilted lens. *Journal of Optics*, v. 24, p. 125602, 12 2022.
- 181 SHANG, J.; ZHANG, Z.; NG, H. K. Superfast maximum-likelihood reconstruction for quantum tomography. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 95, p. 062336, Jun 2017.
- 182 BRAGA, D. G. et al. Spin-orbit maximally discordant mixed states. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 106, p. 062403, Dec 2022.
- 183 MAZZOLA, L.; PILO, J.; MANISCALCO, S. Sudden transition between classical and quantum decoherence. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 104, p. 200401, May 2010.

- 184 GALVE, F.; GIORGI, G. L.; ZAMBRINI, R. Maximally discordant mixed states of two qubits. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 83, p. 012102, Jan 2011.
- 185 ROSALES-GUZMÁN, C.; FORBES, A. *How to Shape Light with Spatial Light Modulators*. [S.l.]: SPIE, 2017. v. 1. ISBN 9781630818333.
- 186 GIROLAMI, D.; ADESSO, G. Quantum discord for general two-qubit states: Analytical progress. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 83, p. 052108, May 2011.
- 187 ISHIZAKA, S.; HIROSHIMA, T. Maximally entangled mixed states under nonlocal unitary operations in two qubits. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 62, p. 022310, Jul 2000.

# ANEXO A – Lista de trabalhos desenvolvidos durante a tese

Listamos aqui a produção bibliográfica decorrente da realização da tese.

1- BRAGA, D. G. ; FONSECA, I. ; BALTHAZAR, W. F. ; SARANDY, M. S. ; HUGUENIN, J A O . Spin-orbit maximally discordant mixed states. PHYSICAL REVIEW A, v. 106, p. 062403, 2022.

<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.106.062403>

2- CARVALHO, T. F. ; BRAGA, D. G. ; BALTHAZAR, W. F. ; HUGUENIN, J. A. O. . Non-separability classification of degrees of freedom of light assisted by machine learning. OPTICS COMMUNICATIONS, v. 545, p. 129665,2023.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.optcom.2023>.

3- D.G. BRAGA, M. GIL DE OLIVEIRA, G.T.C. CRUZ, B. PINHEIRO DA SILVA, W.F. BALTHAZAR, A.Z. KHOURY, AND J.A.O. HUGUENIN. Simplified vector beam tomography from intensity measurements . 2025

Trabalho submetido para *Optics Letters*

4- D.G. BRAGA, V.S. LAMEGO, W.F. BALTHAZAR, AND J.A.O. HUGUENIN. Geometric Discord and entanglement via spin-orbit modes. 2025.

Trabalho em fase final de redação para submissão.