

INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

Juscelino Campos de Carvalho Junior

Compensação do Astigmatismo em uma cavidade dobrada

Niterói-RJ

2022

Juscelino Campos de Carvalho Junior

Compensação do Astigmatismo em uma cavidade dobrada

Dissertação apresentada ao programa de pós-graduação em Física da Universidade Federal Fluminense como requisito para obtenção do grau de Mestre em Física.

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo Rodrigues de Souza (IF-UFF)

Niterói-RJ

2022

Ficha catalográfica automática - SDC/BIF
Gerada com informações fornecidas pelo autor

C331c Carvalho Junior, Juscelino Campos de
Compensação do Astigmatismo em uma cavidade dobrada /
Juscelino Campos de Carvalho Junior. - 2022.
90 p.: il.

Orientador: Carlos Eduardo Rodrigues de Souza.
Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,
Instituto de Física, Niterói, 2022.

1. Cavidades ópticas. 2. Momento angular orbital da luz. 3.
Óptica paraxial. 4. Astigmatismo. 5. Produção intelectual.
I. Souza, Carlos Eduardo Rodrigues de, orientador. II.
Universidade Federal Fluminense. Instituto de Física. III.
Título.

CDD - XXX



INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade Federal Fluminense

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

RUA GAL MILTON TAVARES DE SOUZA, SN

24210-346 – NITERÓI - RIO DE JANEIRO

TEL: (21)2629-5878 - FAX: 2629-5887

E-MAIL: cp@ if.uff.br

Ata dos trabalhos finais da Comissão Examinadora da dissertação apresentada por **Juscelino Campos de Carvalho Junior**. No nono dia do mês de novembro de dois mil e vinte e dois, às quinze horas e trinta minutos, reuniram-se remotamente os membros da Comissão Examinadora constituída pelos professores doutores Carlos Eduardo Rodrigues de Souza (IF/UFF), Alcenísio José de Jesus Silva (UFAL), Jose Augusto Oliveira Huguenin (IF/UFF) e Renné Luiz Câmara Medeiros de Araújo (UFSC); sob a presidência do primeiro, para prova pública de apresentação da dissertação intitulada **“Compensação do Astigmatismo em uma cavidade dobrada”**, tendo em vista as exigências do Regulamento Específico do curso de Física relacionadas com a conclusão do Mestrado em Física pela Universidade Federal Fluminense. A dissertação foi elaborada sob a orientação do professor Carlos Eduardo Rodrigues de Souza. Após a exposição do trabalho, o aluno respondeu às questões formuladas pelos integrantes da Comissão Examinadora, que apresentou parecer no sentido de aprová-lo. Para constar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada pelos membros da Comissão Examinadora e pelo mestrando.

Niterói, nove de novembro de dois mil e vinte e dois.

Dr. Carlos Eduardo Rodrigues de Souza

Carlos Eduardo Rodrigues de Souza

Dr. Alcenísio José de Jesus Silva

Alcenísio José de Jesus Silva

Dr. Jose Augusto Oliveira Huguenin

José Augusto Oliveira Huguenin

Dr. Renné Luiz Câmara Medeiros de Araújo

Renné Luiz Câmara Medeiros de Araújo

Juscelino Campos de Carvalho Junior

Juscelino Campos de Carvalho Junior

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus e a Nossa Senhora de Aparecida pela oportunidade de realizar meu sonho em cursar uma pós-graduação em física e a minha família em especial a minha mãe. Agradeço também ao professor Zé por ter me apresentado ao professor Cadu que é meu orientador de trabalho. Agradeço com imenso carinho o Cadu pela acompanhamento e pela paciência que teve até os últimos momentos da minha jornada de aluno. Pois a reta final do curso de mestrado foi muito difícil para mim. Aos amigos do grupo de óptica, Gabriel, Bié e Rafão, que durante a pandemia foram os percussores da minha jornada na área de óptica e que compartilharam as ideias deste trabalho nos encontros virtuais e isso teve uma grande importância na construção desse dissertação. Sou grato aos professores e amigos que conheci na UFF nas disciplinas do mestrado, ao Lucas que me ajudou em mecânica quântica e que é uma pessoa com uma sabedoria incrível. Sou grato também as dificuldades que passei em eletromagnetismo e MQ (risos), pois além de serem disciplinas difíceis, o professor Reinaldo e Marcelo souberam conduzir de maneira harmoniosa. Também agradeço ao meu amigo Igor pelos conselhos e horas de conversas sobre o mestrado. Aos demais colegas e amigos da UFF sou muito grato em ter conhecido e pelas amizades que conquistei.

Também não tem como deixar de registrar o momento mais difícil que passamos, a pandemia do covid-19, que levou muitas pessoas queridas ao longo desses últimos três anos pela incompetência e a má gestão do bem público que é a saúde e também ao não comprometimento com a ciência. E que foram graças aos cientistas e pesquisadores que em tempo recorde em prol de um bem comum conseguiram elaborar vacinas que ajudaram e ajudam a salvar milhares de vidas pelo mundo. É em tempos como este, que vemos o quanto importante é a ciência para a sociedade, no período em que escrevo este trabalho a ciência brasileira vive um de seus piores momentos, o descrédito e a falta de financiamento do poder público, milhares de jovens cientistas vivem com a falta de investimento básico na carreira de pesquisador.

E é através da dificuldade e dos tempos difíceis que eu acredito que a Ciência sai

fortalecida, é no acreditar de nós pesquisadores que se faz a chama do espírito científico iluminar e prevalecer sobre a escuridão.

"Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes".

—*Isaac Newton*

Resumo

No presente trabalho apresentamos uma proposta teórica para a compensação do astigmatismo em uma cavidade dobrada com o uso de cristais birrefringentes. Na literatura em óptica o termo astigmatismo se faz presente nos estudos que envolvem luz estruturada, no uso de Oscilador Paramétrico Óptico e também em cavidades ópticas. Normalmente, o astigmatismo nos sistemas ópticos é um efeito a ser corrigido ou eliminado. Neste trabalho utilizando a óptica matricial, descreveremos teoricamente a propagação da luz em uma cavidade óptica astigmática de geometria não linear composta por três espelhos posicionados nos vértices de um triângulo. Além disso, considerando o uso desta cavidade com base para OPO's, estudamos também a dinâmica deste sistema com meios birrefringentes, como cristais não lineares. Como resultado desse estudo, apresentamos uma proposta experimental de cavidade com dois cristais KTP e ressonantes para os modos LG_{01} . A presente proposta busca o desenvolvimento de OPO's para geração de feixes com Momento Angular Orbital e feixes estruturados e aborda o problema prático de compensação do astigmatismo da luz em sistemas ópticos.

Palavras-chaves: cavidades ópticas, momento angular orbital da luz, óptica paraxial, astigmatismo.

Abstract

In the present work we present a theoretical proposal for the compensation of astigmatism in a folded cavity with the use of birefringent crystals. In the optical literature, the term astigmatism is present in studies involving structured light, in the use of Optical Parametric Oscillators and also in optical cavities. Typically, astigmatism in optical systems is an effect to be corrected or eliminated. In this work using matrix optics, we will theoretically describe the propagation of light in an astigmatic optical cavity of non-linear geometry composed of three mirrors positioned at the vertices of a triangle. Furthermore, considering the use of this cavity as a base for OPO's, we also studied the dynamics of this system with birefringent media, such as non-linear crystals. As a result of this study, we present an experimental proposal for a cavity with two resonant KTP crystals for the LG_{01} modes. The present proposal seeks the development of OPO's for the generation of beams with Orbital Angular Momentum and structured beams and addresses the practical problem of compensation of light astigmatism in optical systems.

Key-words: optical cavities, orbital angular moment of light, paraxial optics, astigmatism.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	FEIXES PARAXIAIS	13
2.1	A luz como onda eletromagnética	13
2.1.1	Ondas eletromagnéticas	14
2.1.2	Feixes paraxiais	15
2.2	Feixes gaussianos de ordem superior	21
2.2.1	Modo de Hermite-Gauss (HG)	21
2.2.2	Modo de Laguerre-Gauss (LG)	22
2.2.3	Relação dos Modos LG e HG	24
3	ÓPTICA DE CAVIDADES	26
3.1	Interferometro Fabry-Perot	26
3.2	Propagação de feixes em meios homogêneos e materiais isotrópicos	32
3.2.1	Matriz ABCD - Propagação do feixe gaussiano	34
3.3	Álgebra de Cavidade	37
3.4	Astigmatismo em Cavidades Ópticas	39
3.4.1	Feixe Gaussiano Elíptico	40
4	BIRREFRINGÊNCIA	43
4.1	A luz em meios anisotrópicos	43
5	COMPENSANDO O ASTIGMATISMO EM UMA CAVIDADE DOBRADA	53
5.1	A cavidade dobrada	53
5.1.1	Ressonância na cavidade dobrada	60
5.2	Cavidade dobrada com meio Birrefringente	63
5.2.1	Compensando o Astigmatismo com o uso de Cristais Birrefringentes	64
6	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS	72
	REFERÊNCIAS	73
	APÊNDICE A FASE DE GOUY NA CAVIDADE DOBRADA	77
	APÊNDICE B MODELO TEÓRICO DA CAVIDADE DOBRADA UTILIZANDO MATHEMATICA	81

Capítulo

1

Introdução

A natureza da luz sempre foi tema de estudo do homem pela sua curiosidade em descobrir as propriedades que esse fenômeno físico é capaz de despertar, sendo tema de interesse desde a antiguidade na busca pela compreensão desse fenômeno [1]. Na Grécia antiga esse fenômeno ganhou notoriedade com afirmações dos filósofos da época que acreditavam que a luz saíam dos nossos olhos e dos objetos. A partir do século XVII, esse fenômeno natural ganhou relevância com a lei da refração descrita por Snell e nesse mesmo período já havia experimentos que utilizavam lentes e cristais para a construção de dispositivos ópticos [2]. No mesmo período um experimento ficou famoso que é experimento da decomposição de cores de um prisma realizada por Isaac Newton, esse experimento provou que a luz branca é formada por diversas cores do espectro visível. No mesmo período existiam duas correntes que tentavam explicar o fenômeno da luz, a teoria corpuscular e a teoria ondulatória. Contudo, a luz ganhou grande contribuição a partir dos trabalhos desenvolvidos por Maxwell que reuniu duas vertentes, uma no campo da eletrostática e a outra no campo do magnetismo e ele não só reuniu esses trabalhos como também provou teoricamente que campos eletromagnéticos se propagam no vácuo com uma velocidade limite [3-5].

Em meados do século XX surgiu o primeiro feixe coerente de luz, o laser, do inglês (*Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation Light*), que possibilitou muitos campos de estudo experimental e teóricos, além dos avanços tecnológicos que este dispositivo possibilitou. Feixes de laser tem sido uma fonte de luz coerente e confiável para aplicação em diversos campos da área científica como o da comunicação [6] e na área da saúde [7]. Em se tratando de comunicação, feixes de laser são utilizados como fonte de comunicação segura e eficaz quando comparada a comunicação tradicional que é desenvolvida a partir de sistemas clássicos. A partir da contribuição de Maxwell para o desenvolvimento do eletromagnetismo foi descrito que ondas eletromagnéticas carregam momento angular, posteriormente em 1992, Allen e colaboradores descreveram que feixes

de fase helicoidal carregam momento angular orbital e que estão associados ao spin de um fóton [8, 9]. O acesso quântico do estado de polarização da luz possibilitou a abertura de temas de estudo na computação quântica, uma vez que a criptografia clássica está baseada em um sistema binário clássico e a criptografia quântica baseada em sistemas emaranhados [10] que possibilitam criar canais de comunicação seguros [11–14].

É comum no estudo da luz, utilizar circuitos ópticos a partir de arranjos de elementos ópticos como espelhos e cristais. Arranjos de espelhos são tratados como cavidades ópticas, feixes de luz como o laser, podem sofrer aberrações ópticas provocadas pela sua interação com materiais que apresentam birrefringência ou por meio da inclinação desses elementos [15]. Em se tratando de inclinação desses elementos, um feixe de laser pode sofrer astigmatismo dentro de uma cavidade com espelhos inclinados e isso caracteriza que o feixe de luz possui pontos de focalização distintos, essa condição impossibilita preparar modos de ordem superior e transferir MAO (momento angular orbital) [16]. Compensar o astigmatismo em cavidades ópticas têm grande relevância no estudo de feixes estruturados em OPO (oscilador paramétrico orbital) [17]. Existem algumas técnicas que possibilitam compensar feixes astigmáticos em cavidades, como o uso de cristais birrefringentes [18], geometria não planar de cavidade [19, 20] e outros arranjos que incluem elementos fora do eixo propagação [21] e ângulos de corte no cristal [22].

Diante dessas possibilidades, temos como proposta compensar o astigmatismo através de uma cavidade dobrada, uma cavidade de geometria não linear, constituída por três espelhos e dois cristais birrefringentes típico de um OPO. Em especial, nesta dissertação estudamos a configuração da cavidade ser capaz de transmitir um modo $LG_0^{\pm 1}$.

No segundo capítulo desse trabalho, partiremos das equações de Maxwell e chegamos a equação paraxial de Helmholtz. A partir do seu desenvolvimento chegamos a uma solução que descreve um feixe paraxial que dá origem ao feixe de laser. Essa solução também é conhecida no campo da óptica como modo fundamental do feixe gaussiano e essa solução, também pode ser escrita em coordenadas cartesianas e cilíndricas que dão origem aos modos Hermite Gauss e Laguerre Gauss.

No terceiro capítulo descrevemos o funcionamento e as condições de ressonância de uma cavidade óptica. Estudamos a cavidade (interferômetro) de Fabry-Perot. A partir do feixe gaussiano, conseguimos determinar a propagação de um feixe via formalismo da matriz ABCD. Além disso, considerando o formalismo da óptica matricial, obtemos os parâmetros geométricos do feixe tais como cintura e o parâmetro de Rayleigh.

No capítulo quatro, descrevemos a propagação da luz em meios birrefringentes, uma vez que utilizamos dois cristais na cavidade. E por se tratar de meio birrefringente, estamos interessados em descrever a propagação de feixes nesse meio levando em consideração o

índice de refração que esse meio apresenta.

Por fim, no último capítulo apresentaremos a nossa proposta teórica de correção do astigmatismo com o uso de cristais em uma cavidade dobrada de geometria não linear, composta por três espelhos (sendo um côncavo e dois planos) posicionados nos vértices de um triângulo. Verificamos que na situação em que a cavidade se encontra vazia os modos HG_{01} e HG_{10} não são simultaneamente ressonantes de forma que a mesma não consegue transmitir feixes com momento angular orbital (MAO) dado por um $LG_0^{\pm 1}$. Todavia, considerando o efeito da birrefringência, projetamos uma configuração na qual usa-se dois cristais birrefringentes no interior desta cavidade e se compensa o astigmatismo, possibilitando a transmissão de feixes com MAO. O trabalho é finalizado com as conclusões e perspectivas.

Capítulo 2

Feixes Paraxiais

Neste capítulo apresentaremos os conceitos básicos do eletromagnetismo e a descrição teórica dos feixes paraxiais, tipicamente utilizados na explicação dos fenômenos e instrumentos ópticos baseados em lasers. O desenvolvimento desse capítulo foi baseado nas referências [11, 18, 23–28]. Em especial, desenvolveremos a partir das equações de Maxwell a equação de Helmholtz que nos permite descrever um feixe de laser com base na chamada aproximação paraxial e a partir dela as soluções para o modo fundamental e os modos de Hermite Gauss (HG) e Laguerre Gauss (LG). A construção dessas soluções dão origem a bases ortogonais quando combinadas linearmente. Por fim, discutiremos a utilização das soluções de HG e LG, com base nas funções ortogonais para descrição geral desses modos.

2.1 A luz como onda eletromagnética

Nosso ponto de partida começa com as contribuições de James Clerk Maxwell (1831-1879) com a unificação dos trabalhos da eletrostática e da magnetostática [3], fruto dos trabalhos desenvolvidos por Karl Gauss (1777-1855), André Ampère (1775-1836) e Michael Faraday (1791-1867) entre outros. Os trabalhos até períodos anteriores à Maxwell seguiam caminhos distintos, uma vertente no campo da eletrostática e outra vertente no campo da magnetoestática. Contudo, uma das grandes contribuições de Maxwell veio com a correção teórica da Lei de Ampère. Numa notação moderna [4], as equações atribuídas

à Maxwell se resumem a:

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (a)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad (b)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (c) \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (d)$$

Em suma, a primeira é conhecida como Lei de Gauss, a segunda equação se traduz à não existência de monopolos magnéticos, uma vez que não há evidências da existência de "cargas magnéticas", a terceira é a Lei de Faraday a quarta e última equação é a Lei de Ampère corrigida por Maxwell, correção esta que ficou conhecida como **corrente de deslocamento**. Todo esse conjunto de equações, permitem descrever e relacionar a dinâmica de campos eletrostáticos e magnetoestáticos a partir das densidades de carga elétrica ρ e de corrente \vec{J} .

2.1.1 Ondas eletromagnéticas

Conceituamos anteriormente as equações atribuídas à Maxwell que descrevem o comportamento de campos elétricos e magnéticos, equações estas que descrevem também a evolução de ondas eletromagnéticas. Portanto, considerando um meio isotrópico, as equações de Maxwell 2.1 se reduzem a:

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0, \quad (a)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad (b)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (c) \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (d)$$

onde as constantes μ_0 e ϵ_0 são as constantes de permissividade elétrica e permeabilidade magnética do vácuo. Agora, se aplicarmos a propriedade do rotacional na equação 2.2 (c) de modo que

$$\vec{\nabla} \times (\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t)) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\partial t}, \quad (2.3)$$

do lado esquerdo, utilizando a identidade $\vec{\nabla} \times (\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t)) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$, obtemos

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\partial t}, \quad (2.4)$$

onde o termo ∇^2 é denominado laplaciano. Como o meio é considerado ser isotrópico, o divergente de \vec{E} é nulo, restando apenas o laplaciano, utilizando a equação 2.2 (d) temos que:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right), \quad (2.5)$$

reagrupando os termos obtemos:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.6)$$

que é a *equação de onda* para o campo elétrico. De modo geral, a equação (2.6) pode ser reescrita em termos das demais coordenadas cartesianas x , y , z . Similarmente, uma manipulação matemática como a desenvolvida anteriormente, nos permite demonstrar que o campo magnético $\vec{B}(\vec{r}, t)$ também satisfaz a equação de onda [4]. Os campos eletromagnéticos se propagam no vácuo com uma velocidade limite determinada por:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 2,99792 \times 10^8 m/s, \quad (2.7)$$

a constante da equação 2.7 é a *velocidade da luz* no vácuo.

2.1.2 Feixes paraxiais

Como descrito anteriormente, mostramos a partir do conjunto de equações 2.2 (c), (d) que as equações de Maxwell 2.6 permitem descrever a evolução de campos eletromagnéticos no espaço. No caso de um feixe de laser, temos um feixe com pouca divergência ao longo do eixo de propagação sendo descrita a partir da equação (2.6). Se assumirmos como solução uma onda monocromática do tipo:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = U(\vec{r}) \exp^{-i\omega t}, \quad (2.8)$$

onde $U(\vec{r})$ é a amplitude e $\exp^{-i\omega t}$ uma fase temporal desse campo. Substituindo a equação (2.8) na equação (2.6) e resolvê-la, chegamos a uma equação diferencial do tipo:

$$\nabla^2 U(\vec{r}) + k^2 U(\vec{r}) = 0, \quad (2.9)$$

sendo $k = \frac{\omega}{c}$ o número de onda. A equação (2.9) é conhecida como *Equação de Helmholtz*. Uma solução para equação (2.9) é considerar um feixe de luz cujo fluxo de energia é predominantemente ao longo do eixo de propagação \hat{z} [24], então podemos escrever a amplitude $U(\vec{r})$ do campo por:

$$U(\vec{r}) = \psi(x, y, z) \exp^{-ikz}, \quad (2.10)$$

onde o termo $\psi(x, y, z)$ descreve a estrutura radial do feixe e a componente de fase dado por \exp^{-ikz} descreve a variação espacial rápida. No caso de um feixe de laser, temos um feixe

com pouca divergência ao longo do eixo de propagação, logo é conveniente considerar que esse feixe possui simetria cilíndrica, portanto, podemos escrever o laplaciano da equação (2.9) em coordenadas cilíndricas de modo que:

$$\nabla^2 = \nabla_T^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (2.11)$$

por conta da simetria do problema, o termo ϕ do laplaciano é desprezado. Utilizando a equação (2.10) na equação (2.9) e considerando a equação (2.11), chegamos a seguinte expressão:

$$\nabla_T^2 \psi(x, y, z) + \frac{\partial^2 \psi(x, y, z)}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial \psi(x, y, z, \vec{z})}{\partial z} = 0. \quad (2.12)$$

No regime paraxial, para que a condição seja satisfeita, a função $\psi(x, y, z)$ deve variar muito lentamente quando levamos em consideração \exp^{-ikz} ao longo do eixo de propagação \hat{z} [24], desse modo:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \ll \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|; 2k \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|. \quad (2.13)$$

Essa aproximação é conhecida como aproximação do envelope lentamente variável ou aproximação paraxial.

Agora levando em consideração a aproximação paraxial descrita anteriormente, o segundo termo da equação (2.12) é negligenciado. De maneira que agora temos:

$$\nabla_T^2 \psi(\vec{r}, \vec{z}) - 2ik \frac{\partial \psi(\vec{r}, \vec{z})}{\partial z} = 0. \quad (2.14)$$

A equação (2.14) é conhecida como *equação de onda no regime paraxial de Helmholtz*, que pode ser reescrita de forma mais simplificada por:

$$\nabla_T^2 \psi - 2ik\psi' = 0. \quad (2.15)$$

A equação (2.15) não possui uma solução trivial. Portanto, seguindo a referência [24], podemos buscar uma solução tentativa da seguinte forma:

$$\psi = \exp \left\{ -i \left[P(z) + \frac{Q(z)r^2}{2} \right] \right\}. \quad (2.16)$$

A função ψ depende do parâmetro complexo $P(z)$ que representa a fase associada a propagação do feixe e do parâmetro complexo $Q(z)$ que descreve a variação da intensidade do feixe radialmente [15]. Substituindo essa função na equação (2.15), encontramos uma relação das funções complexas $P(z)$ e $Q(z)$ da seguinte maneira:

$$Q^2 r^2 + 2iQ + kr^2 Q' + 2kP' = 0, \quad (2.17)$$

com $Q' = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $P' = \frac{\partial P}{\partial z}$. Essa equação possui componentes da variável r quadrática e de r elevado à zero (no segundo e quarto argumento da equação), portanto, a equação (2.17)

deve ser verdadeira para qualquer r . Logo, a partir dessa condição temos:

$$\begin{aligned} Q^2(z) + kQ'(z) &= 0, & (a) \\ Q(z) + ikP'(z) &= 0. & (b) \end{aligned} \quad (2.18)$$

A partir da equação (2.18) (a) e (b), podemos encontrar as funções $P(z)$ e $Q(z)$, realizado uma integração direta na equação 2.18 (a) afim de obtermos $Q(z)$ e que quando substituído na equação 2.18 (b), nos permite novamente integrar e obter $P(z)$. Logo, as funções que procuramos para $Q(z)$ e $P(z)$ são:

$$\begin{aligned} Q(z) &= k/(z + q_0), & (a) \\ P(z) &= -i \ln \left(1 + \frac{z}{q_0} \right), & (b) \end{aligned} \quad (2.19)$$

sendo o termo imaginário definido como $q_0 = i\pi w_0^2 n/\lambda = iz_R$. Substituindo os parâmetros $P(z)$ e $Q(z)$ na equação (2.16) e resolvendo algebricamente a equação (2.8) do campo, chegamos a seguinte equação para o campo elétrico do feixe:

$$E(x, y, z) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp \left\{ -i[kz - \eta(z)] - r^2 \left(\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2R(z)} \right) \right\}, \quad (2.20)$$

onde $k = 2\pi n/\lambda$. A equação (2.20) é conhecida como envelope complexo do **feixe gaussiano ou modo fundamental**. Veremos na próxima subseção que existem feixes de ordem mais alta (ordem superior).

Estamos interessados no perfil de intensidade do feixe. Portanto, uma vez que a intensidade do feixe é dado a partir de $I(r, z) = |E(r, z)|^2$, onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, temos:

$$I(r, z) = I_0 \left[\frac{w_0}{w(z)} \right]^2 \exp \left[-2 \frac{r^2}{w^2(z)} \right], \quad (2.21)$$

onde $I_0 = |E_0|^2$. A intensidade do campo é apresentado na Figura 1 a seguir:

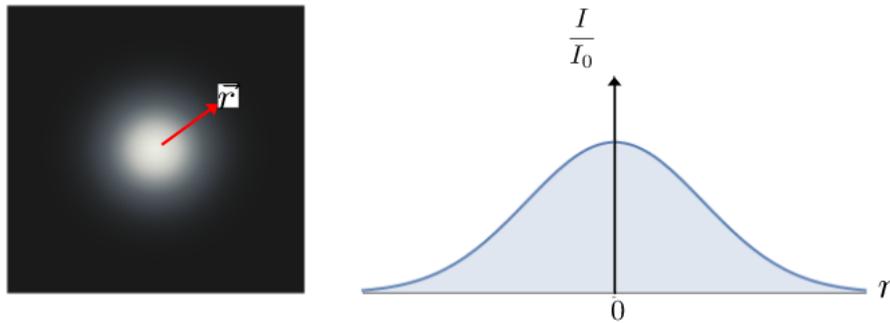


Figura 1 – O perfil de distribuição de intensidade do feixe é descrito por uma função gaussiana.

A intensidade do feixe apresenta uma estrutura gaussiana no perfil de intensidade do campo, cujo máximo ocorre no centro e diminui à medida que r aumenta de valor. E essa característica do campo dá origem ao nome de **feixe gaussiano**.

Os parâmetros que compõem equação (2.20) de campo, são definidos a seguir por:

- **Largura transversa do feixe**

A largura do feixe de um laser é definida como a distância do eixo z até o ponto onde $I = I_0 \frac{1}{e^2}$ e dada pelo parâmetro,

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}, \quad (2.22)$$

onde w_0 é a cintura do feixe e em inglês (*waist*). O termo z_R é conhecido como comprimento de *Rayleigh* e expresso por:

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}. \quad (2.23)$$

No caso, z_R é a distância entre a cintura e a posição em que a largura do feixe vale $w(z) = \sqrt{2}w_0$ (quando $z = z_R$). E o parâmetro confocal b é descrito como $b = 2z_R$.

Na Figura 2, temos a ilustração dos parâmetros de um feixe de laser de acordo com as definições apresentadas anteriormente.

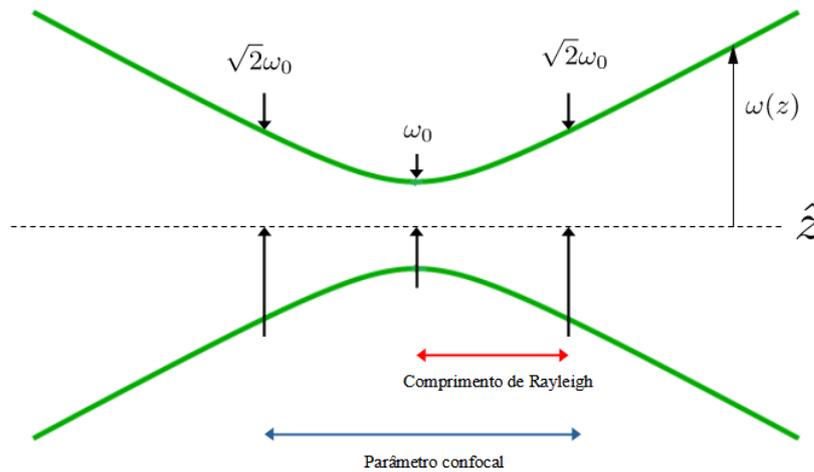


Figura 2 – Ilustração das definições do comprimento de Rayleigh z_R e do parâmetro confocal.

- **Raio de curvatura do feixe gaussiano**

As frentes de onda de um feixe gaussiano apresentam um raio de curvatura $R(z)$ em relação ao eixo de propagação \hat{z} [29], que é dado por:

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z}\right)^2 \right]. \quad (2.24)$$

Em especial, quando $z \rightarrow 0$, $R(z)$ é infinito, de forma que temos frentes de onda plana e o mesmo ocorre quando $z \rightarrow \infty$. No caso, para $z = z_R$ temos o raio de curvatura mínimo do feixe e esta relação é ilustrada na Figura 3 a seguir.

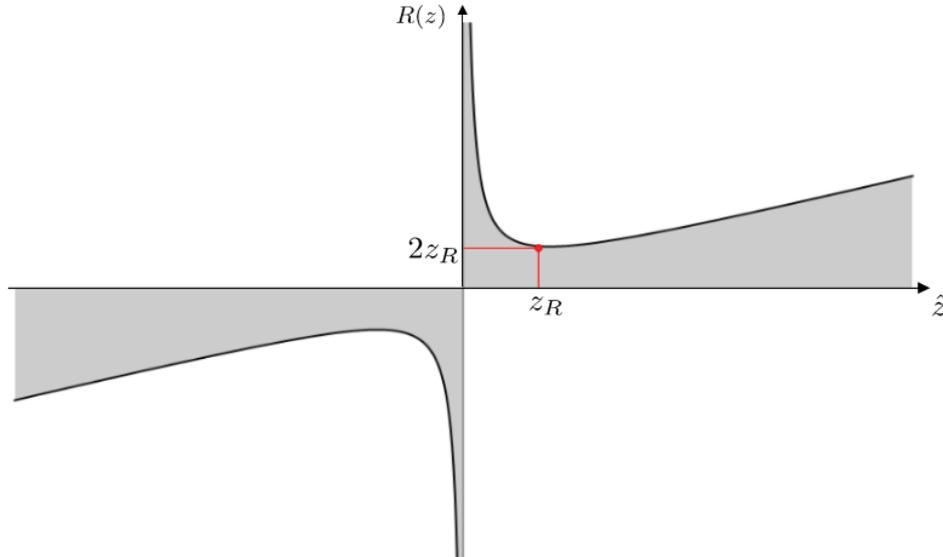


Figura 3 – Situação na qual $z = z_R$, o raio de curvatura admite um valor mínimo de $2z_R$.

• Fase de Gouy

A fase de Gouy pode ser compreendida como a diferença de fase de um feixe gaussiano e uma onda plana quando o feixe passa por um ponto focal [30]. Para um feixe que se propaga de $z \rightarrow \pm\infty$ e que passa por um ponto focal, ocorre uma mudança de fase de π [23, 29]. A descrição dessa fase é expressa por:

$$\eta(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right), \quad (2.25)$$

sendo $\eta(z)$ a fase de *Gouy*, z o eixo de propagação e z_R o comprimento de *Rayleigh*.

Graficamente a fase de Gouy é ilustrada pela figura a seguir.

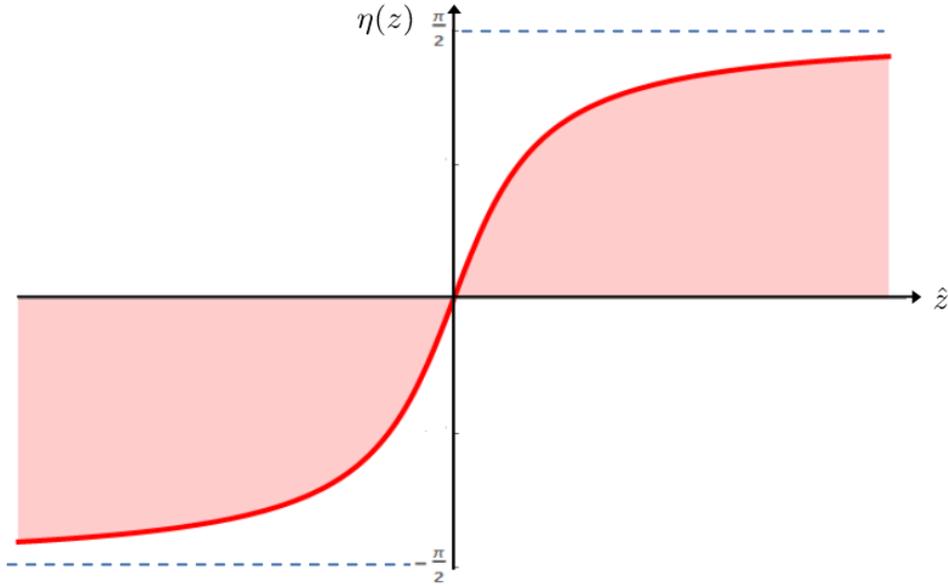


Figura 4 – Adição da fase de Gouy quando o feixe passa por uma região de focalização do feixe acrescentando uma fase de $\pi/2$ que se acumula a medida que o feixe se propaga.

A fase de Gouy tem um papel importante para determinar as frequências de ressonância de uma cavidade óptica [31].

• Raio de curvatura complexo

A evolução dos parâmetros de um feixe paraxial através de elementos ópticos como lentes e espelhos, geralmente é contabilizada por meio de um formalismo matricial, conhecido como óptica matricial [15, 24, 32] (que será um assunto a ser tratado em seções posteriores aqui neste trabalho). Neste formalismo, usamos o *raio de curvatura complexo* $q(z)$ que relaciona o raio de curvatura do feixe $R(z)$ e a largura $w(z)$, sendo então definido por:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi n w_0^2(z)}, \quad (2.26)$$

com λ sendo o comprimento de onda, n o índice de refração do meio, $R(z)$ o raio de curvatura, $w(z)$ a largura do feixe. Se a direção de propagação é ao longo do eixo \hat{z} , com a cintura localizada em iz_R , o raio de curvatura complexo têm equivalência de:

$$q(z) = z + iz_R, \quad (2.27)$$

onde z representa a parte real e iz_R a parte complexa.

Em seções posteriores veremos que o parâmetro de raio complexo, nos permite relacionar as características dos elementos ópticos através do chamado formalismo da matriz ABCD.

2.2 Feixes gaussianos de ordem superior

Da seção anterior 2.1, vimos que a partir da equação de onda, escrevemos uma equação de campo para um feixe no regime paraxial, no qual definimos como feixe gaussiano. Contudo, existem outras soluções da equação de onda paraxial. Em particular, a solução em coordenadas cartesianas é conhecida como modo de Hermite Gauss (descritas pelos polinômios de Hermite), outra solução particular é desenvolvida a partir de coordenadas cilíndricas que são os modos de Laguerre Gauss (descritos pelos polinômios de Laguerre). Logo, podemos obter soluções particulares para a equação de Helmholtz que descrevem feixes de lasers.

2.2.1 Modo de Hermite-Gauss (HG)

A solução da equação paraxial em coordenadas cartesianas, dá origem aos modos de Hermite-Gauss ($HG_{m,n}$)[15], cuja solução geral é dada por:

$$\begin{aligned} \psi_{m,n}(x, y, z) = & \frac{A_{m,n}}{w(z)} H_m \left(\sqrt{2} \frac{x}{w(z)} \right) H_n \left(\sqrt{2} \frac{y}{w(z)} \right) \times \\ & \times \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} + ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} - i\Phi_{m,n}(z) \right], \end{aligned} \quad (2.28)$$

com,

$$\Phi_{m,n}(z) = (m + n + 1) \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right). \quad (2.29)$$

$A_{n,m}$ é uma constante de normalização, H_m , H_n , são os polinômios de *Hermite* e a ordem dos modos transversos é definida por $N = m + n$ e a fase de Gouy por $\Phi_{m,n}(z)$.

A Figura 5 mostra o perfil transverso de distribuição de intensidade de três primeiros modos de $HG_{m,n}$.

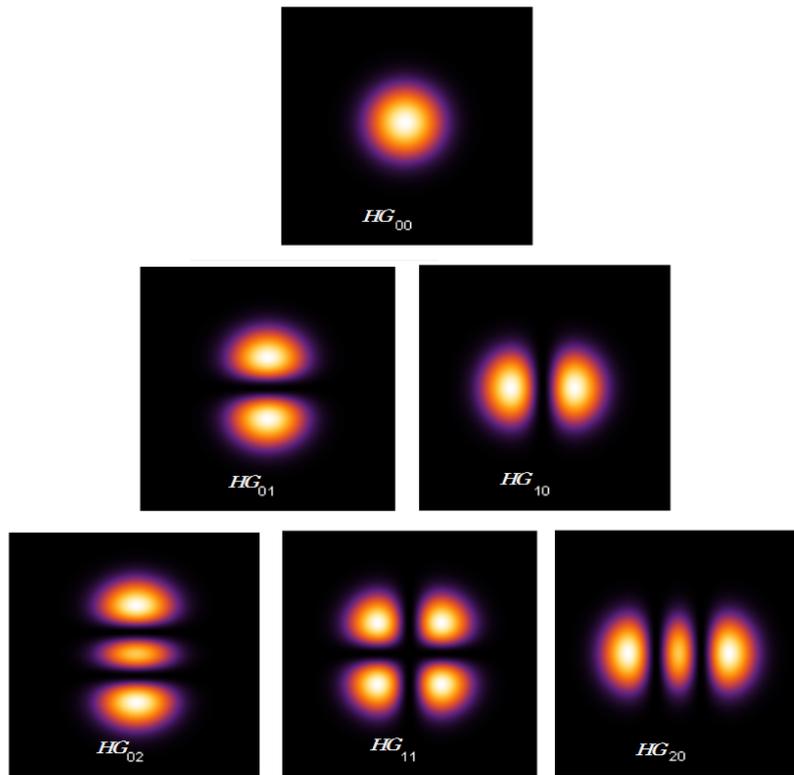


Figura 5 – Perfil de intensidade de três modos de Hermite Gauss, onde cada índice (m,n) representa uma linha nodal no perfil transverso de intensidade do feixe.

Um caso particular é quando a ordem for $m + n = 0$. Neste caso, retornamos ao **modo fundamental** HG_{00} do feixe gaussiano, conforme ilustra a primeira imagem da Figura 5¹.

2.2.2 Modo de Laguerre-Gauss (LG)

Em coordenadas cilíndricas, as soluções da equação paraxial são denominados modos de Laguerre-Gauss (LG_{ρ}^l).

$$\begin{aligned} \psi_{\rho}^l(\rho, \phi, z) = & \frac{A_{\rho}^l}{w(z)} \left(\frac{\rho\sqrt{w}}{w(z)} \right)^{|l|} L_{\rho}^{|l|} \left[\frac{2\rho^2}{w^2(z)} \right] \exp \left[-\frac{\rho^2}{w^2(z)} \right] \times \\ & \times \exp \left[ik \frac{\rho^2}{2R(z)} + il\phi + ikz - i\Phi_{\rho,l}(z) \right] \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde $L_{\rho}^{|l|}$ é o polinômio de *Laguerre*, A_{ρ}^l termo de normalização da função, ρ é o índice radial que caracteriza a quantidade de anéis que surgem nos perfis de intensidade do feixe, l sendo o índice azimutal que também é conhecido como *helicidade* ou *carga topológica*,

¹ Figura elaborada pelo autor a partir do código disponível em <https://mathematica.stackexchange.com/questions/141726/plotting-hermite-gaussian-polynomial-for-gaussian-beams>.

onde o índice radial é representado por um número natural e o índice azimutal por um valor inteiro. A fase de Gouy é definida por:

$$\Phi_{p,l}(z) = (2\rho + |l| + 1) \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right), \quad (2.31)$$

sendo a ordem do modo expressa por $N = 2\rho + |l|$.

O termo de fase azimutal $\exp\{l\phi\}$ tem grande importância, pois é o termo que carrega momento angular orbital (MAO), tema de estudo em óptica quântica e a estrutura da frente de onda é helicoidal [8, 9, 12, 33, 34]. Esse termo de fase apresenta um ponto de singularidade (uma região sem luz) na região central do perfil de intensidade do feixe quando $l \neq 0$.

Na Figura 6² temos alguns perfis de intensidade para o modo LG.

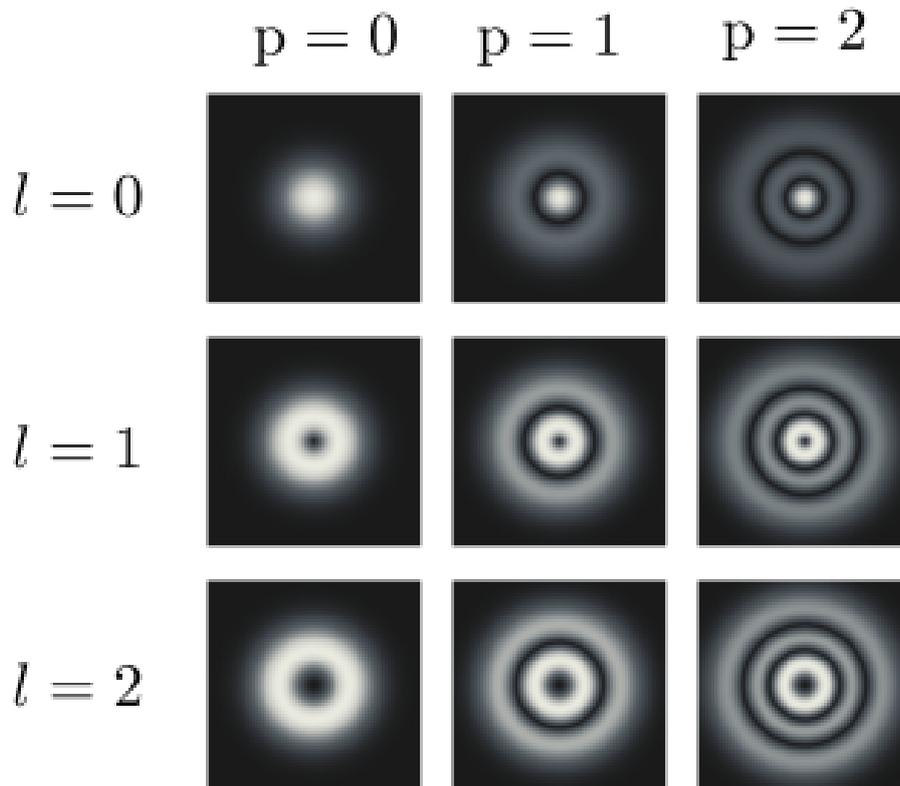


Figura 6 – Intensidade dos modos de Laguerre-Gauss cujo os índices radial e azimutal variam de 0 até 2.

O valor de l determina o sentido de rotação da frente de onda helicoidal, uma vez que ele é definido como sendo um número inteiro (sentido horário; sentido anti-horário) [33]. Na Figura 7, temos a ilustração para dois valores de l .

² Figura elaborada pelo autor a partir do código disponível em <https://mathematica.stackexchange.com/questions/202641/plot-of-laguerre-gaussian-wavefront>.

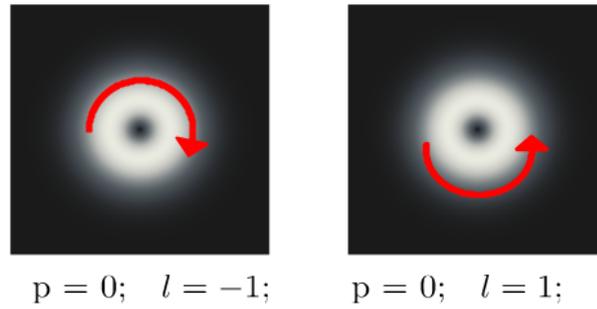


Figura 7 – Variação do índice azimutal e o sentido de rotação da frente helicoidal para um modo LG de primeira ordem.

2.2.3 Relação dos Modos LG e HG

Tanto as soluções da equação paraxial solucionadas em coordenadas cartesianas quanto em cilíndricas, formam uma base completa em um espaço vetorial, pois ambas são ortogonais entre si e qualquer combinação linear também é solução da equação paraxial. Em particular, podemos escrever um modo de primeira ordem *LG* com dois *HG* de primeira ordem [35, 36] e estes, se relacionam por:

$$LG_0^{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (HG_{0,1} \pm iHG_{1,0}). \quad (2.32)$$

A Figura 8 ilustra essa relação.

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} \text{[Intensity plot of } LG_{01} \text{ with clockwise rotation]} \\ LG_{01} \end{array} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{c} \text{[Intensity plot of } HG_{01} \text{ with two spots]} \\ HG_{01} \end{array} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{c} \text{[Intensity plot of } HG_{10} \text{ with two spots]} \\ HG_{10} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \text{[Intensity plot of } LG_{01} \text{ with counter-clockwise rotation]} \\ LG_{01} \end{array} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{c} \text{[Intensity plot of } HG_{01} \text{ with two spots]} \\ HG_{01} \end{array} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{c} \text{[Intensity plot of } HG_{10} \text{ with two spots]} \\ HG_{10} \end{array}
 \end{aligned}$$

Figura 8 – Representação dos modos de primeira ordem LG escritos na base de HG.

É possível também escrever os modos de primeira ordem HG inclinados por um ângulo $\theta = 45^\circ$ ou 135° e que se relacionam por:

$$HG_{0,1}^{\pm 45} = \frac{1}{\sqrt{2}} (HG_{1,0} \pm HG_{0,1}), \quad (2.33)$$

$$HG_{0,1}^{\pm 135} = \frac{1}{\sqrt{2}} (HG_{1,0} \pm HG_{0,1}).$$

Logo podemos escrever um hermite (HG) rodado a partir de dois hermites de primeira ordem não rodados [11, 12]. A figura a seguir ilustra a relação.

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} \text{Imagem de } HG_{0,1}^{-45^\circ} \\ HG_{0,1}^{-45^\circ} \end{array} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{c} \text{Imagem de } HG_{0,1} \\ HG_{0,1} \end{array} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{c} \text{Imagem de } HG_{1,0} \\ HG_{1,0} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \text{Imagem de } HG_{0,1}^{45^\circ} \\ HG_{0,1}^{45^\circ} \end{array} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{c} \text{Imagem de } HG_{0,1} \\ HG_{0,1} \end{array} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{c} \text{Imagem de } HG_{1,0} \\ HG_{1,0} \end{array}
 \end{aligned}$$

Figura 9 – Representação de dois hermites (HG) rodados a $\theta = \pm 45^\circ$ escritos em termos de dois hermites não rodados.

Capítulo 3

Óptica de cavidades

Nesse capítulo vamos abordar os conceitos básicos que permitem descrever um feixe de laser em uma cavidade óptica. Discutiremos a intensidade dos campos transmitidos pela cavidade óptica, assim como a condição de ressonância, em particular a cavidade (interferômetro) de Fabry-Perot. Formalizaremos também a descrição de um feixe de laser a partir do formalismo da matriz ABCD. Em termos gerais, podemos definir cavidade óptica como sendo um conjunto de elementos ópticos tais como um arranjo de espelhos que tem por finalidade confinar um feixe de luz [15]. Na literatura existem inúmeros tipos de cavidades com geometrias que possibilitam manipular e caracterizar propriedades dos feixes [37].

3.1 Interferometro Fabry-Perot

O interferômetro de Fabry-Perot tem esse nome em homenagem aos seus idealizadores Charles Fabry e Alfred Perot (1889), trata-se de uma cavidade linear que possui dois semi espelhos frontalmente alinhados [24, 32, 38]. A Figura 10 a seguir ilustra o que seria o interferômetro de Fabry-Perot.

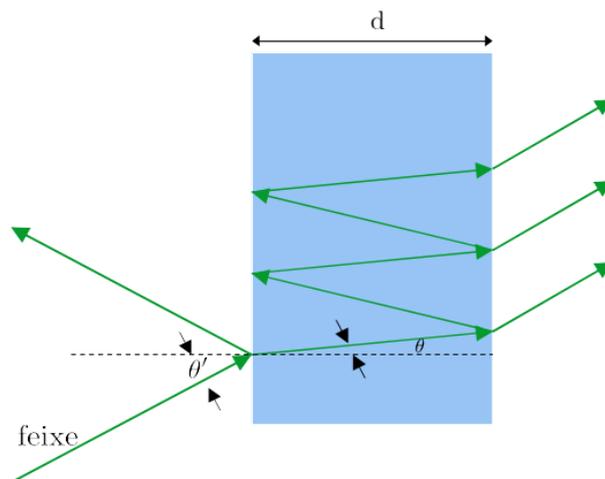


Figura 10 – Exemplo hipotético de uma cavidade Fabry-Perot constituída por uma placa de vidro cujo comprimento é d .

Se considerarmos uma onda plana que interage com a superfície semi-refleitora dada por M_1 e se propaga até uma outra superfície M_2 , cuja distância de separação é dada por d . Sendo o raio de luz incidindo com um ângulo θ' e com amplitude E_0 , podemos ilustrar esta situação através da Figura 11:

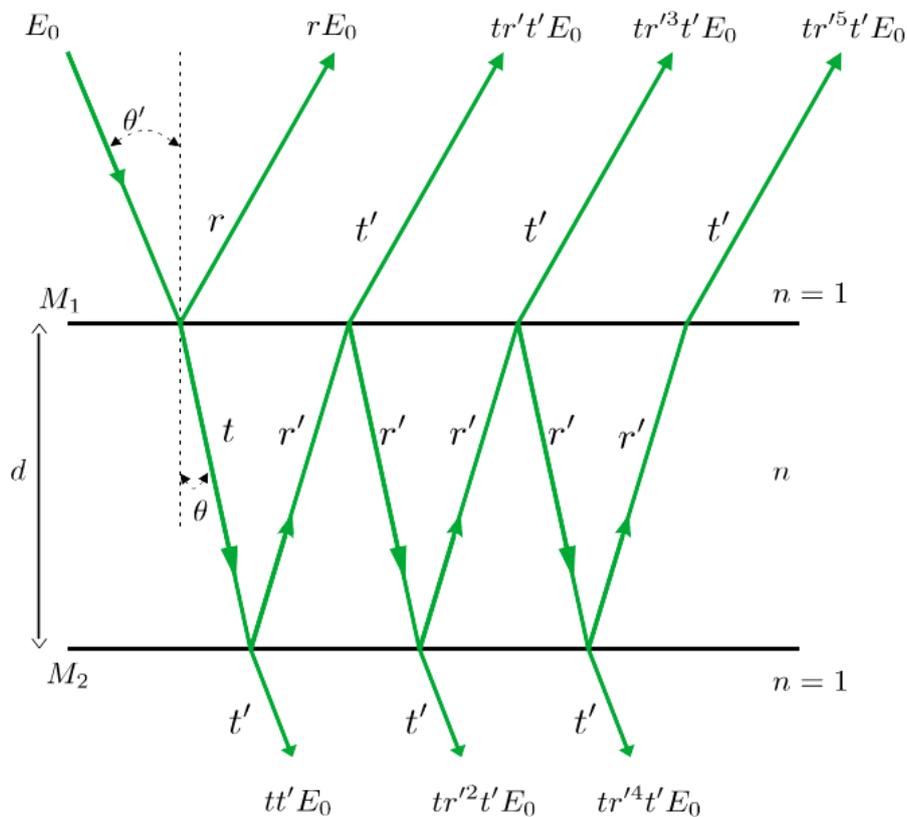


Figura 11 – Feixe incidindo na superfície M_1 por um ângulo θ' e sofrendo múltiplas reflexões e transmissões dentro da região entre M_1 e M_2 separadas por d .

A diferença de caminho entre dois feixes consecutivos é caracterizada pela Figura 12 a seguir.

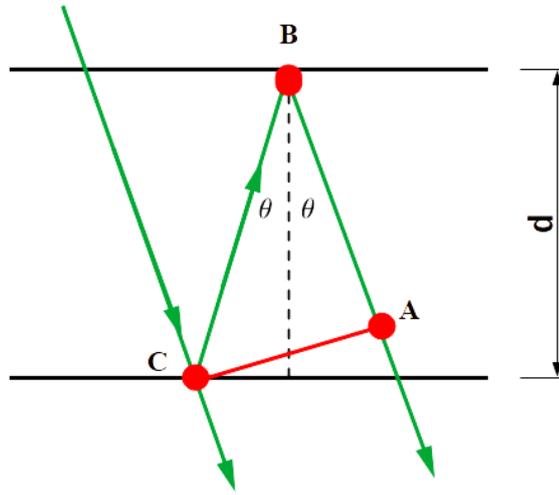


Figura 12 – Diferença de caminho entre dois feixes consecutivos.

Onde ΔL é a diferença de caminho, com $\Delta L = AB + BC$, conforme referência [24] consultada.

Sendo $\overline{AB} = \overline{BC} \cos(2\theta)$ e $\overline{BC} = \frac{d}{\cos\theta}$, a diferença de caminho entre dois feixes consecutivos pode ser expressa por:

$$\Delta L = 2d \cos \theta, \quad (3.1)$$

após uma volta completa dentro da região d , o feixe adquire uma fase que é dada por:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (\Delta L)n, \quad (3.2)$$

sendo n o índice de refração do meio. Substituindo a equação (3.1) na equação (3.2), podemos obter a diferença de fase que o feixe ganha na cavidade, portanto:

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} nd \cos \theta, \quad (3.3)$$

Dessa forma, considerando a geometria do problema e que o campo incidente é dado por uma onda plana, estamos interessados em uma expressão que descreva a amplitude dos campos transmitidos pela cavidade. A relação dos campos transmitidos pela cavidade é a seguinte:

$$\begin{aligned} E_1 &= tt' E_0, \\ E_2 &= tt' r'^2 e^{i\delta} E_0, \\ E_3 &= tt' r'^4 e^{2i\delta} E_0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

sendo E_0 é a amplitude do campo incidente, r' o campo refletido entre as duas superfícies M_1 e M_2 , t o coeficiente de transmissão, t' sendo o coeficiente de transmissão após o feixe sofrer uma nova reflexão. O fator $e^{i\delta}$ corresponde a fase adquirida após o feixe completar um caminho de ida e volta na cavidade. Pelo princípio da superposição, o campo total transmitido pela cavidade é definido como:

$$E_T = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n, \quad (3.5)$$

onde $n = 1, 2, 3, \dots$ é o enésimo campo transmitido pela cavidade.

Escrevendo os campos de transmissão a partir da equação (3.4) podemos obter que:

$$E_T = tt'(1 + r'^2 e^{i\delta} + r'^4 e^{2i\delta} + \dots)E_0, \quad (3.6)$$

cuja expressão é uma série geométrica de razão $r'^2 e^{i\delta}$. Logo,

$$E_T = \frac{tt'E_0}{1 - r'^2 e^{i\delta}}. \quad (3.7)$$

Podemos relacionar o coeficiente de transmissão tt' e de reflexão r'^2 , pela seguinte relação: $tt' = 1 - r'^2$, com $R = |r'|^2$ e $T = |tt'|^2$ [24]. Em se tratando de um meio onde não há perdas, os campos totais transmitidos e refletidos se relacionam por: $R + T = 1$, onde R é a refletância da superfície e T sendo a transmissão da superfície. Por fim, o campo transmitido pode ser reescrito em termos da refletância da superfície, logo:

$$E_T = E_0 \frac{(1 - R)}{1 - Re^{i\delta}}. \quad (3.8)$$

Sendo a intensidade do campo definida como $I_\delta = |E_T|^2$, temos:

$$\begin{aligned} I_\delta &= E_0^2 \frac{(1 - R)^2}{(1 - Re^{i\delta})(1 - Re^{-i\delta})}, \\ &= E_0^2 \frac{(1 - R)^2}{(1 + R^2 - 2R \cos(\delta))}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Além disso, escrevendo $I_0 = |E_0|^2$, temos:

$$I_\delta = I_0 \frac{(1 - R)^2}{(1 + R^2 - 2R \cos(\delta))}. \quad (3.10)$$

Por fim, escrevendo $\cos(\delta) = 1 - 2 \sin^2(\frac{\delta}{2})$, a expressão de intensidade fica:

$$I(\delta) = I_0 \frac{1}{\left[1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\right]}, \quad (3.11)$$

onde $\frac{1}{\left[1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\right]}$ é conhecido como função de *Airy*. O termo $\frac{4R}{(1-R)^2}$ que relaciona a refletância da superfície é escrito como:

$$\mathcal{F} = \frac{4R}{(1 - R)^2}. \quad (3.12)$$

Finalmente, temos uma expressão de intensidade transmitida pela cavidade:

$$I(\delta) = I_0 \frac{1}{[1 + \mathcal{F} \sin^2(\frac{\delta}{2})]}. \quad (3.13)$$

A função de intensidade do campo transmitido dado pela equação (3.13), admite transmissão máxima quando $\sin^2(\frac{\delta}{2}) = 0$ com $\delta = 2N\pi$ e admite transmissão mínima quando $\sin^2(\frac{\delta}{2}) = 1$, onde $\delta = (2N + 1)\pi$, sendo N um número inteiro. A seguir, na Figura 13 temos a ilustração da transmissão da cavidade quando: $R = 10\%$, $R = 40\%$ e $R = 90\%$ em função de δ .

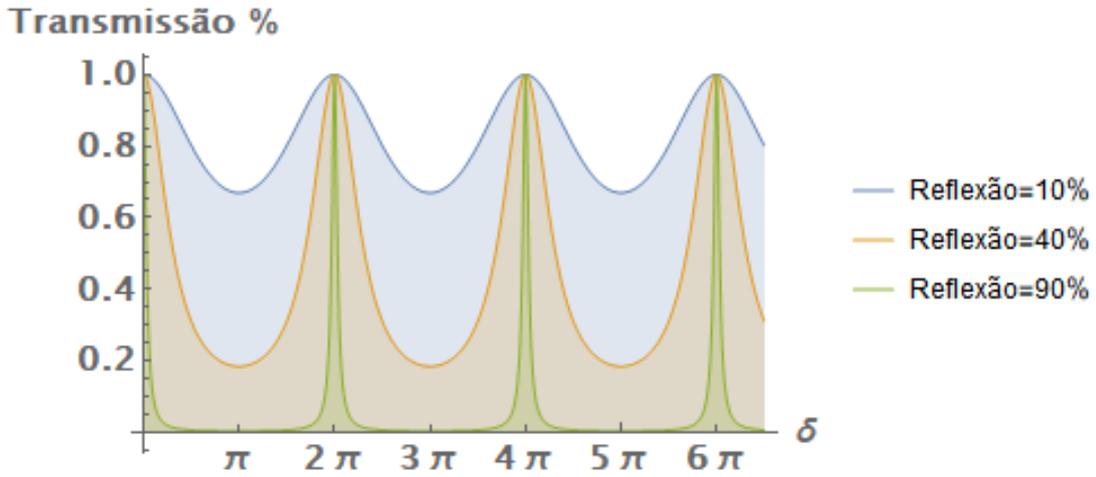


Figura 13 – Distribuição de intensidade dos campos transmitidos pela interferômetro de Fabry-Perot, quando: $R = 10\%$, $R = 40\%$ e $R = 90\%$. Sendo a transmissão mínima a curva em azul e máxima em verde.

É conveniente expressarmos a transmissão máxima da cavidade em função da frequência. Os picos de transmissão máxima ocorrem quando a fase vale $2N\pi$ (com N sendo um número inteiro). Expressando a fase em termos da condição para a transmissão máxima, temos:

$$\delta = \frac{4\pi\nu}{c} nd \cos \theta = 2N\pi, \quad (3.14)$$

onde $c = \lambda\nu$. Isolando o termo ν , podemos obter a seguinte equação:

$$\nu_N = N \frac{c}{2nd \cos \theta}. \quad (3.15)$$

Considerando uma incidência normal à superfície, $\theta = 0$ e fazendo que ($d = L$) com $n = 1$, a diferença entre dois picos ressonantes consecutivos é:

$$\Delta\nu = \nu_{N+1} - \nu_N = \frac{c}{2L} = FSR, \quad (3.16)$$

onde **FSR** é chamado de *Free Spectral Range* ou *Intervalo Espectral Livre*, com $FSR = c/2L$, sendo L a distância entre as superfícies refletoras e c velocidade da luz. Na Figura 14 temos a ilustração do FSR e da largura de banda da cavidade.

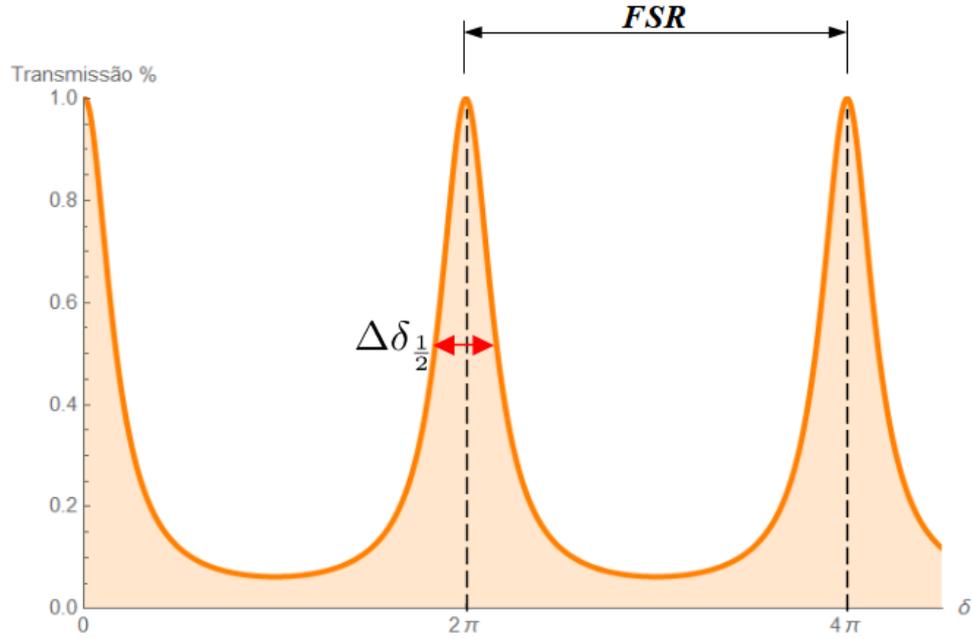


Figura 14 – Intervalo Espectral Livre de uma cavidade Fabry-Perot e a largura de banda.

O conceito de largura de banda $\Delta\delta_{\frac{1}{2}}$ ou largura a meia altura é a condição em que a transmissão máxima da cavidade cai pela metade e isso ocorre quando:

$$\mathcal{F} \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 1, \quad (3.17)$$

e,

$$\delta = \pm 2 \sin^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{\mathcal{F}}} \right]. \quad (3.18)$$

Portanto,

$$\Delta\delta_{\frac{1}{2}} = \delta_+ - \delta_- = 4 \sin^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{\mathcal{F}}} \right], \quad (3.19)$$

e podemos escrever $\Delta\delta_{\frac{1}{2}}$ em termos da frequência utilizando a equação (3.16), ou seja,

$$\nu_{\frac{1}{2}} = \frac{2 \sin^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{\mathcal{F}}} \right] \Delta\nu}{\pi}. \quad (3.20)$$

Logo a *finesse* representada pela letra **F** é definida como a razão entre FSR e a largura de banda, portanto:

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta\nu}{\nu_{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{2 \sin^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{\mathcal{F}}} \right]}, \quad (3.21)$$

a finesse da cavidade é um parâmetro utilizado para avaliar a qualidade da transmissão de uma cavidade e serve de parâmetro para indicar perdas [24].

3.2 Propagação de feixes em meios homogêneos e materiais isotrópicos

Em se tratando de feixes paraxiais é possível descrever um feixe que se propaga entre dois planos ao longo do eixo de propagação. Todavia, os raios de luz são perpendiculares às frentes de onda dos feixes luminosos, o que conceitualmente justifica o uso da óptica de raios no estudo de feixes paraxiais [39]. Esses raios são descritos por vetor que acompanha tanto a posição quanto o deslocamento em relação ao eixo de propagação do feixe. A Figura 15 ilustra a situação.

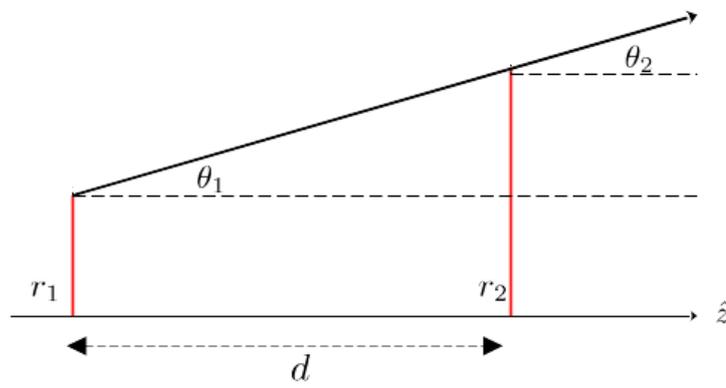


Figura 15 – Exemplo de propagação livre de um feixe paraxial ao longo de uma distância d .

Considerando o regime paraxial, para θ pequeno, podemos fazer $\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta$. E as posições são descritas em $\theta_1 = \theta_2$ com $r_2 = r_1 + d \cdot \theta_1$ para $r_1 = r_2$. Logo, a relação de transformação do vetor coluna nas posições (r_1, θ_1) e (r_2, θ_2) é dada que:

$$\begin{vmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{vmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{vmatrix}, \quad (3.22)$$

onde a matriz 2×2 é a propagação livre do feixe e esta relacionado por:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

onde $A = 1$, $B = d$, $C = 0$ e $D = 1$. Portanto, essa é a transformação da matriz ABCD para o caso de uma propagação livre por uma distância d .

- **Raio óptico atravessando uma lente delgada.**

Para um raio paraxial atravessando uma lente delgada com a distância focal f , ilustramos a seguir a relação entre os feixes paraxiais de entrada e saída da lente e estes estão representados conforme a Figura 16.

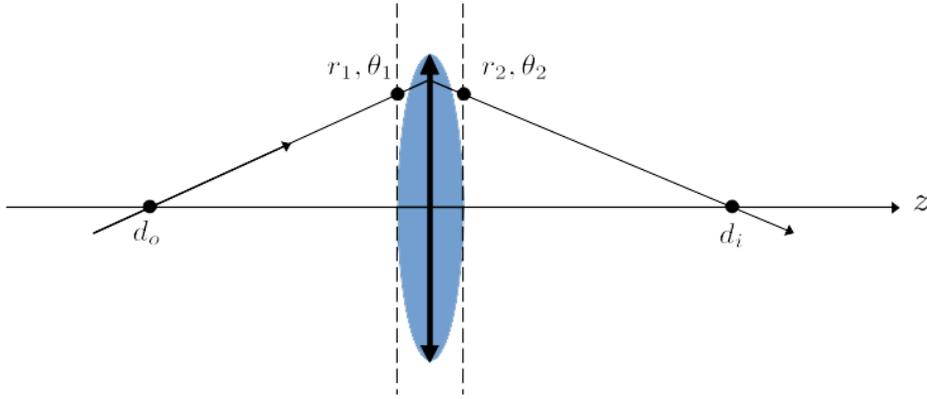


Figura 16 – Exemplo de raio óptico atravessando uma lente delgada.

Seja raio de entrada com posição (r_1, θ_1) e o raio de saída com posição (r_2, θ_2) . Como a lente é delgada, temos que $r_1 = r_2$ [39]. O raio que passa pela lente deve obedecer a relação objeto-imagem, desta forma, temos:

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}, \quad (3.24)$$

sendo d_o a distância do objeto, d_i a distância da imagem e f a distância focal da lente, onde para $f > 0$ temos uma lente convergente e $f < 0$ uma lente divergente.

Com $r_1 = r_2$, a inclinação do raio antes da lente se dá por:

$$\theta_1 = \frac{r_1}{d_o}, \quad (3.25)$$

e após a lente por:

$$\theta_2 = -\frac{r_2}{d_i}, \quad (3.26)$$

onde a validade da situação considerada é para ângulos muito pequenos, com $\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta$.

A partir da equação (3.24) da equação (3.25), podemos obter uma relação para θ_2 da seguinte forma:

$$\theta_2 = \frac{r_1}{f} - \theta_1. \quad (3.27)$$

Portanto a matriz de transformação para um raio de luz que atravessa uma lente delgada é:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

onde os elementos da matriz ABCD associada a lente são descritos como: $A = 1$, $B = 0$, $C = -1/f$ e $D = 1$.

3.2.1 Matriz ABCD - Propagação do feixe gaussiano

Através da ótica paraxial descrevemos uma matriz 2×2 para um elemento ótico quando um feixe o atravessa. Essa matriz é conhecida como matriz ABCD e permite descrever elementos óticos como: lentes, espelhos e meios como um cristal. Podemos então relacionar a matriz ABCD de acordo com a referência [24] por:

$$\begin{bmatrix} q_{s+1}(z) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_s(z) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

que é escrito também como:

$$q_{s+1}(z) = \frac{Aq_s(z) + B}{Cq_s(z) + D}, \quad (3.30)$$

onde A, B, C e D são elementos de uma matriz 2×2 e o termo $q_{s+1}(z)$ é o parâmetro complexo após a transformação do feixe e $q(z)$ antes de sofrer a transformação. Podemos então relacionar com a equação (2.26) que é expressa por:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi n w^2(z)}, \quad (3.31)$$

e através da equação (3.30) conhecer os parâmetros como a largura do feixe $w(z)$ e o raio de curvatura $R(z)$ do feixe.

Portanto, conhecendo a matriz ABCD, podemos determinar os parâmetros (A,B,C e D) associado a um determinado elemento ótico [23]. A contabilização da passagem do feixe por elementos óticos é representada a seguir por:

$$[M_{Transformação}] = [M_n][M_{n+1}] \dots [M_2][M_1], \quad (3.32)$$

onde $M_{Transformação}$ é a matriz ABCD de uma série de elementos óticos, com n representando a quantidade de matrizes do sistema. A matriz M_1 é a primeira a contabilizar a passagem do feixe.

A seguir, na Figura 17, temos exemplos de representação matricial de alguns elementos óticos.

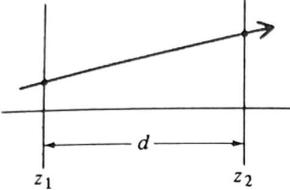
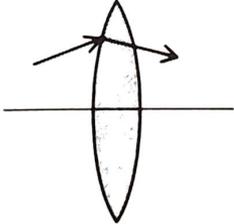
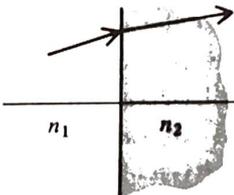
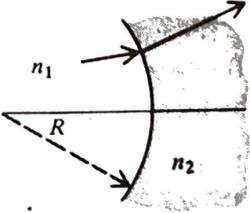
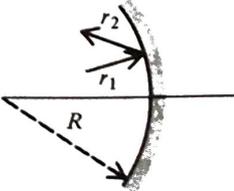
	$\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2}{R} & 1 \end{bmatrix}$

Figura 17 – Exemplo de elementos ópticos e suas respectivas matrizes ABCD 2×2 . Retirado de [24]

- **Focalização de um feixe gaussiano.**

Considerando um exemplo conforme a referência [24] de um feixe gaussiano se propagando por uma lente cuja distância focal é f , podemos determinar a localização da cintura a partir da equação (3.30) e também a cintura. A figura a seguir ilustra esse caso.

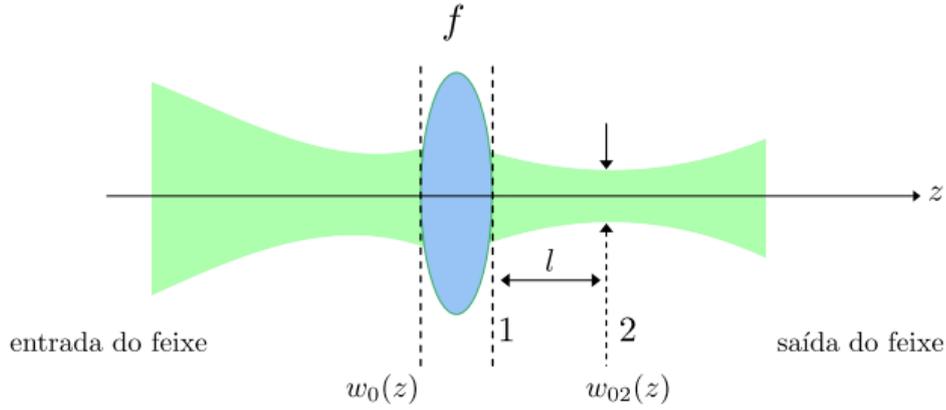


Figura 18 – Feixe gaussiano sendo focalizando por uma lente convergente e l sendo a distância da nova cintura após a focalização da lente.

Conforme ilustra a figura 18, antes da focalização da lente, o feixe possui cintura $w(z) = w_0(z)$ e raio de curvatura $R_0 = \infty$. Portanto:

$$q_1 = in\pi w_0^2/\lambda = iz_0. \quad (3.33)$$

onde z_0 é o comprimento de Rayleigh.

A matriz ABCD da figura 18 é:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{l}{f} & l \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

aplicando a equação (3.30), temos:

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} = \frac{(1 - l/f)iz_0 + l}{-iz_0/f + 1}. \quad (3.35)$$

Aplicando a equação (3.31) e separando em parte real e imaginária, temos:

$$\frac{1}{q_2} = \frac{l - z_0^2/f(1 - l/f)}{(1 - l/f)^2 z_0^2 + l^2} - i \frac{z_0}{(1 - l/f)^2 z_0^2 + l^2}, \quad (3.36)$$

onde:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_2} &= \frac{l - z_0^2/f(1 - l/f)}{(1 - l/f)^2 z_0^2 + l^2}, & (a) \\ \frac{\lambda}{n\pi w_0^2} &= \frac{z_0}{(1 - l/f)^2 z_0^2 + l^2}. & (b) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Como no plano 2 está localizado a cintura, temos que o raio de curvatura é $R_2 = \infty$, logo, a equação (3.37) (a) fica:

$$\left(\frac{l}{z_0^2}\right) - \frac{1}{f}(1 - l/f) = 0, \quad (3.38)$$

simplificando os termos, a cintura do feixe gaussiano fica localizada por uma distância l dada por:

$$l = \frac{f}{1 + (f/z_0)^2}. \quad (3.39)$$

A equação (3.37) (b) permite determinar a cintura do feixe a partir da equação (3.39), portanto:

$$w_{02} = \frac{\lambda}{n\pi w_0} \frac{1}{\sqrt{1 + (f/z_0)^2}}, \quad (3.40)$$

Através da matriz ABCD podemos contabilizar a passagem de um feixe paraxial através de uma série de elementos ópticos que formaliza uma cavidade óptica. Essa relação é útil para se descrever a região de estabilidade, como também determinar a cintura e as demais características de um feixe.

3.3 Álgebra de Cavidade

Na seção anterior, vimos que o método ABCD possibilita descrever um feixe óptico através de um arranjo como no caso de uma lente delgada. Vejamos a estrutura da matriz ABCD aplicada a uma cavidade simples constituída por dois espelhos curvos conforme ilustra a Figura 19.

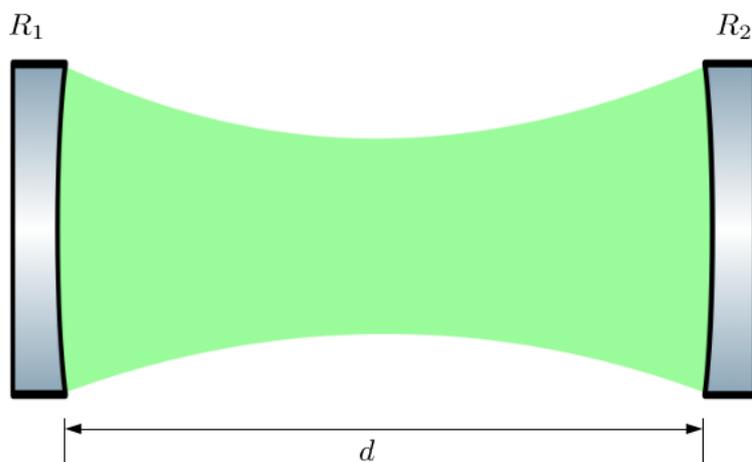


Figura 19 – Cavidade formada por dois espelhos curvos de raios curvatura R_1 e R_2 e separados por uma distância d .

Consideramos aqui o caso em que $R_1 = R_2 = R$ e d a distância de separação dos espelhos.

Para a matriz ABCD desse sistema, contabilizamos a propagação do feixe tomando como ponto de partida $\frac{d}{2}$, logo:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2}{R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2}{R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 2\frac{d}{R}(\frac{d}{2} - 2) & \frac{d}{R}(2R - 3d + \frac{d^2}{R}) \\ \frac{4}{R}(\frac{d}{R} - 1) & 2\frac{d}{R}(\frac{d}{R} - 2) + 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

a primeira matriz é referênte a propagação em $d/2$, a segunda matriz é a reflexão do espelho R_2 , a terceira é a propagação do feixe ao longo da distância d (propagação livre), a quarta matriz é a reflexão do feixe no espelho R_1 a quinta e última matriz é a propagação no espaço até o ponto de escolha inicial de propagação do feixe. Logo, temos uma matriz ABCD que descreve uma volta completa do feixe na cavidade. Onde utilizamos a definição da matriz transformação dada pela definição 3.32.

Conhecendo os parâmetros da matriz ABCD da cavidade após uma volta completa, o feixe deve obedecer a condição de autoconsistência para que a mesma seja estável, isto é, o feixe deve possuir a mesma estrutura do início de um plano arbitrário após uma volta completa. Nessas condições, podemos resolver a equação (3.30) para $1/q_s$ [24, 31], temos então:

$$\frac{1}{q_s} = \frac{(D - A) \pm \sqrt{(D - A)^2 + 4BC}}{2B}. \quad (3.42)$$

Uma vez que a matriz ABCD possui determinante igual a 1 ($AD - BC = 1$), determina-se que:

$$\frac{1}{q_s} = \frac{D - A}{2B} \pm i \frac{\sqrt{1 - \frac{(D+A)^2}{2}}}{B}, \quad (3.43)$$

onde,

$$|D + A| \leq 2, \quad (3.44)$$

é a condição de estabilidade da cavidade.

Por fim, a partir do resultado da equação (3.43) é possível determinar o raio de curvatura e a cintura do feixe na cavidade, logo:

$$R = \frac{2B}{D - A}, \quad (3.45)$$

e,

$$w = \left(\frac{\lambda}{\pi n} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{|B|^{\frac{1}{2}}}{\left[1 - \left(\frac{D+A}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{4}}}. \quad (3.46)$$

Para ilustrar a cintura associada a matriz ABCD da cavidade linear, utilizamos o programa Mathematica¹ com os seguintes parâmetros:² $\lambda = 1064nm$, $R_1 = R_2 = 100mm$. Na Figura 20 temos a cintura (*waist*) associado a cavidade linear,

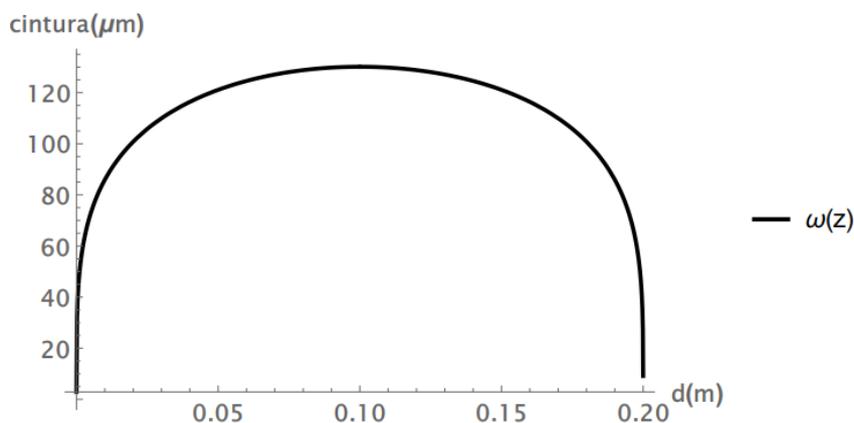


Figura 20 – Cintura obtida em função da separação entre os espelhos curvos R_1 e R_2 . A região de estabilidade da cavidade está nos limites da distância $d(m)$ em que a cintura é nula.

A região de estabilidade da cavidade está nos limites onde os valores da cintura são zero. A partir dos parâmetros da cavidade descritos anteriormente o valor da cintura com essa simulação foi de $129\mu m$ para $d = 100mm$.

O resultado da cavidade linear é importante, pois uma vez conhecido os parâmetros geométricos e os parâmetros da matriz ABCD, podemos descrever o comportamento de um feixe em outras geometrias de cavidade. É também interessante esse caso, pois existe uma única cintura associada a essa cavidade.

3.4 Astigmatismo em Cavidades Ópticas

Um conceito geral sobre astigmatismo pode ser entendido como quebra de simetria cilíndrica do feixe e ocorre com espelhos curvos ou lentes inclinadas em relação ao eixo óptico provocando aberrações conhecidas como astigmatismo. Nesta dissertação, seguimos as discussões sobre astigmatismo a partir das referências [24, 27, 31]. Em especial, quando tratamos do astigmatismo produzido por um espelho curvo inclinado é conveniente tratar esse espelho como sendo uma lente convergente ligeiramente inclinada em relação ao plano focal. O astigmatismo causado por essa inclinação causa uma distorção na direção de propagação do feixe, ou seja, as componentes transversas do feixe não possuem simetria cilíndrica.

¹ Software não gratuito. Para mais informações <https://www.wolfram.com/mathematica/>.

² O Software requer que uma variável seja "livre" e o parâmetro escolhido foi d .

3.4.1 Feixe Gaussiano Elíptico

Em se tratando de astigmatismo, podemos escrever uma expressão para o campo elétrico do feixe gaussiano no qual consideramos que as cinturas e os raios de curvatura do feixe nas direções x e y sejam diferentes [40,41]. O campo a ser considerado também deve ser solução da equação paraxial desenvolvida na subseção 2.1.2, logo procuramos soluções em que:

$$E \propto \exp \left\{ \left[\frac{-x^2}{w_x^2(z)} - \frac{-y^2}{w_y^2(z)} \right] \right\} \quad (3.47)$$

onde estamos interessados em determinar uma equação de campo de modo que as cinturas do feixe sejam $w_x \neq w_y$ e que os raios de curvatura se diferem em relação aos planos $x - z$ e $y - z$. Como apontado anteriormente, esses feixes astigmáticos podem ser ocasionados por inclinação nos elementos ópticos, como no caso de um espelho curvo inclinado que possui pontos focais diferentes nos planos $x - z$ e $y - z$. Desse modo, seguindo a referência [24], podemos escrever que esse campo análogo a equação (2.16) seja dado pela seguinte solução tentativa:

$$\psi = \exp \left\{ -i \left[P(z) + \frac{Q_x(z)x^2}{2} + \frac{Q_y(z)y^2}{2} \right] \right\}, \quad (3.48)$$

o termo $P(z)$ da equação (3.48) é definido na subseção 2.1.2 e os termos complexos Q_x e Q_y apresentam um sistema de equações análogos aos obtidos em (2.16) e assumem a seguinte forma:

$$Q_x^2 + kQ'_x = 0, \quad Q_y^2 + kQ'_y = 0, \quad (3.49)$$

e,

$$P' = -i \left(\frac{Q_x + Q_y}{2k} \right). \quad (3.50)$$

Podemos então definir:

$$q_x(z) = \frac{k}{Q_x(z)}, \quad q_y(z) = \frac{k}{Q_y(z)}, \quad (3.51)$$

o parâmetro k é o vetor de onda, que no caso é expresso como; $k^2(x, y) = k^2 - k k_{2x} x^2 - k k_{2y} y^2$, para o caso em que $k_{2x} = k_{2y} = 0$, retornamos a expressão $q(z) = z + C$, onde C é uma constante de integração cujo argumento que satisfaz essa contante é a soma de uma parte real mais uma parte imaginária. Integrando a equação (3.50) encontramos $P(z)$:

$$P(z) = \frac{i}{2} \left[\ln \left(1 + \frac{z - z_x}{q_{0x}} \right) + \ln \left(1 + \frac{z - z_y}{q_{0y}} \right) \right], \quad (3.52)$$

onde,

$$q_{0(x,y)} = i \frac{n\pi w_{0(x,y)}^2}{\lambda}, \quad (3.53)$$

sendo z_x e z_y posições arbitrárias de propagação do feixe.

Utilizando a equação (3.52) e substituindo na equação (3.48), podemos utilizar o resultado para determinar o campo elétrico $E(x, y, z)$ para um feixe gaussiano elíptico

conforme a referência [24], neste caso, temos:

$$E(x, y, z) = E_0 \frac{\sqrt{w_{0x}w_{0y}}}{\sqrt{w_x(z)w_y(z)}} \exp \{-i[kz - \eta(z)]\} \times \exp \left\{ -x^2 \left(\frac{1}{w_x^2(z)} + \frac{ik}{2R_x(z)} \right) - y^2 \left(\frac{1}{w_y^2(z)} + \frac{ik}{2R_y(z)} \right) \right\}, \quad (3.54)$$

que é a equação para o campo elétrico de um feixe gaussiano elíptico.

A Figura 21 ilustra a situação em que um feixe com simetria circular atravessa uma lente cilíndrica que é paralela ao eixo y . Que em consequência, o feixe adquire duas cinturas que não necessariamente são as mesmas, ou seja, podemos tratar de dois feixes como sendo “independentes” [24].

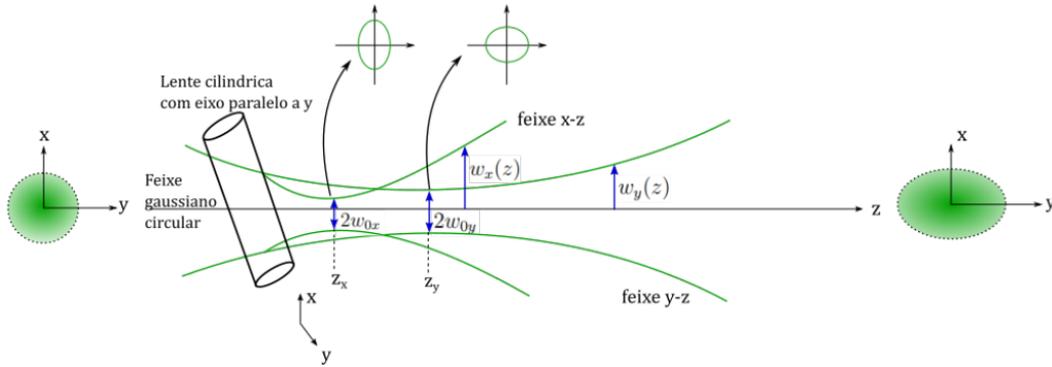


Figura 21 – Feixe elíptico produzido por uma lente ligeiramente inclinada em relação ao plano $x - y$ com as respectivas cinturas $w_x(z)$ e $w_y(z)$ e os perfis transversos do feixe: Retirado de [25, [18]].

A partir da equação (3.54), a fase de Gouy para um feixe gaussiano astigmático é escrita por [24]:

$$\eta(z) = \frac{1}{2} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\lambda(z - z_x)}{\pi w_{0x}^2 n} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\lambda(z - z_y)}{\pi w_{0y}^2 n} \right) \right]. \quad (3.55)$$

O raio de curvatura complexo associado a equação (3.54) para cada direção de propagação são definidos por:

$$\frac{1}{q_x(z)} = \frac{1}{R_x(z)} - i \frac{\lambda}{\pi n w_x^2(z)}, \quad (3.56)$$

$$\frac{1}{q_y(z)} = \frac{1}{R_y(z)} - i \frac{\lambda}{\pi n w_y^2(z)},$$

e a largura do feixe para cada direção é dada por:

$$w_x(z) = w_{0x} \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda(z - z_x)}{\pi w_{0x}^2 n} \right)^2}, \quad (3.57)$$

$$w_y(z) = w_{0y} \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda(z - z_y)}{\pi w_{0y}^2 n} \right)^2},$$

e os raios de curvatura do feixe elíptico são descritos como:

$$R_x(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi w_{0x}^2 n}{\lambda(z - z_x)} \right)^2 \right], \quad (3.58)$$

$$R_y(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi w_{0y}^2 n}{\lambda(z - z_y)} \right)^2 \right].$$

Portanto o conjunto de parâmetros da equação (3.54) definem um feixe gaussiano elíptico. Podemos aplicar o formalismo da matriz ABCD para cada direção de propagação do feixe astigmático separadamente a fim de conhecermos a largura do feixe como o raio de curvatura. Feixes elípticos são utilizados para caracterizar feixes astigmáticos [23].

Capítulo 4

Birrefringência

A birrefringência é um fenômeno óptico que se manifesta quando a luz atravessa um meio material transparente e anisotrópico, um meio material cujo índice de refração depende da polarização e da direção de propagação. Tendo em vista a descrição da compensação do astigmatismo em feixes de luz dentro da cavidade óptica, neste capítulo, formalizaremos os conceitos básicos da birrefringência a partir da teoria eletromagnética clássica descrevendo a propagação de campos eletromagnéticos em meios anisotrópicos como nos cristais não lineares [42]. No próximo capítulo reuniremos as ideias centrais de propagação de feixes em cavidade ópticas (visto no capítulo anterior) com a birrefringência de forma a descrevermos a proposta teórica desta dissertação.

4.1 A luz em meios anisotrópicos

Grande parte dos meios materiais usados nos sistemas ópticos são meios isotrópicos lineares, caracterizados por não possuírem cargas livres em sua constituição. Isso implica que qualquer parte do material não produz campo quando este é utilizado como meio de propagação. Porém, caso haja nesse material densidade de cargas ρ_{livre} e correntes e \mathbf{j}_{livre} , tais densidades produzem fontes intrínsecas de campos que induzem a reorganização das cargas, produzindo novas fontes de radiação que contribuem para o campo total dentro e fora do material [3]. Portanto, de forma a descrevermos o comportamento desses materiais com cargas e correntes livres, ditos materiais anisotrópicos, partimos das seguintes relações:

$$\rho = \rho_{livre} - (\nabla \cdot \mathbf{P}), \tag{4.1}$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{livre} + \nabla \times \mathbf{M} + \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right),$$

onde ρ_{livre} e \mathbf{j}_{livre} são a densidade de carga e corrente livre do material, assim como $-\nabla \cdot \mathbf{P}$ que relaciona as cargas ligadas do material, $\mathbf{j}_{mag} = \nabla \times \mathbf{M}$ que relaciona a corrente de

magnetização do material e $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ a corrente de polarização do meio material. Os chamados campos auxiliares de polarização dielétrica e magnetização são descritos como:

$$\begin{aligned} D &= \epsilon_0 E + P, & (a) \\ H &= \mu_0^{-1} B + M. & (b) \end{aligned} \tag{4.2}$$

A partir do conjunto dos campos auxiliares dados pela equação (4.2), podemos modificar as equações de (*Maxwell*) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot D &= \rho_{livre}, & (a) \\ \nabla \cdot B &= 0, & (b) \\ \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t}, & (c) \\ \nabla \times H &= \mu_0 \mathbf{j}_{livre} + \mu_0 \frac{\partial D}{\partial t}, & (d) \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde o conjunto de equações (4.3) são conhecidas como *Equações de Maxwell* na matéria ou equações *macroscópicas*. Essas equações são equivalentes ao conjunto de equações (2.1). As relações constitutivas dos campos auxiliares estão relacionados com a resposta linear do material, que no caso de meios dielétricos são dadas por:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \epsilon_0 \chi_{el} \vec{E}, & (a) \\ \vec{M} &= \chi_{mg} \vec{H}, & (b) \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde χ_{el} e χ_{mg} são denominados tensores de susceptibilidade elétrica e magnética do material, sendo tratados como escalares quando o meio é isotrópico e ϵ_0 sendo a permissividade no vácuo [43]. O nosso interesse é o tratamento dessas relações em meios anisotrópicos (que são meios onde o índice de refração muda com a direção), como no caso de cristais. A polarização \mathbf{P} em meios anisotrópicos é descrita como:

$$\begin{aligned} P_x &= \epsilon_0 (\chi_{11} E_x + \chi_{12} E_y + \chi_{13} E_z), & (a) \\ P_y &= \epsilon_0 (\chi_{21} E_x + \chi_{22} E_y + \chi_{23} E_z), & (b) \\ P_z &= \epsilon_0 (\chi_{31} E_x + \chi_{32} E_y + \chi_{33} E_z), & (c) \end{aligned} \tag{4.5}$$

e o conjunto de equações se resumem a:

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}, \tag{4.6}$$

que normalmente é descrito por:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \overleftrightarrow{\chi} \vec{E}, \tag{4.7}$$

onde o termo χ é conhecido como termo de susceptibilidade e por natureza é representado por um tensor,

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

O correspondente vetor deslocamento \mathbf{D} que descreve a resposta dielétrica de um cristal é também dado por meio de um tensor de permissividade $\epsilon_{i,j}$ [44], que é descrito:

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{11}E_x + \epsilon_{12}E_y + \epsilon_{13}E_z, & (a) \\ D_y &= \epsilon_{21}E_x + \epsilon_{22}E_y + \epsilon_{23}E_z, & (b) \\ D_z &= \epsilon_{31}E_x + \epsilon_{32}E_y + \epsilon_{33}E_z, & (c) \end{aligned} \quad (4.9)$$

que pode ser reescrito:

$$\vec{D} = \epsilon_0 (\mathbf{1} + \overleftrightarrow{\chi}) \vec{E} = \overleftrightarrow{\epsilon} \vec{E}, \quad (4.10)$$

onde $\mathbf{1}$ é uma matriz unitária, $\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Com:

$$\overleftrightarrow{\epsilon} = \epsilon_0 (\mathbf{1} + \overleftrightarrow{\chi}), \quad (4.11)$$

que é o tensor dielétrico.

No caso de cristais, o tensor χ é simétrico e assume a forma de:

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

com, $\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{33}$ sendo os eixos do cristal.

O índice de refração do material depende também do tensor dado na equação (4.11), pois ele varia conforme a polarização do campo incidente no dielétrico.

Ondas se propagando em um meio anisotrópico

Se considerarmos uma onda plana monocromática se propagando em um cristal, cujo meio é anisotrópico e que $\rho = 0$ e $j = 0$, os campos elétrico e magnético são dados por:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbb{E}} &= \vec{E} e^{-i[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t]}, & (a) \\ \vec{\mathbb{H}} &= \vec{H} e^{-i[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t]}, & (b) \end{aligned} \quad (4.13)$$

podemos mostrar que a partir da equação 4.3 (c) e (d), chega-se a:

$$\begin{aligned} \vec{k} \times \vec{E} &= \mu_0 \omega \vec{B}, & (a) \\ \vec{k} \times \vec{H} &= -\omega \epsilon \vec{E}, & (b) \end{aligned} \quad (4.14)$$

que pode ser reescrito em termos do campo E tomando o produto vetorial da equação 4.14 (a) de modo a obter:

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = -\omega^2 \mu \epsilon \vec{E}. \quad (4.15)$$

Podemos ainda reescrever a equação (4.15) em termos do tensor dielétrico e é escrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \omega^2 \mu_0 \epsilon_x - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_y k_x & \omega^2 \mu_0 \epsilon_y - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & \omega^2 \mu_0 \epsilon_z - k_x^2 - k_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0. \quad (4.16)$$

Para que não exista solução não trivial o determinante da expressão anterior tem que ser nulo [24, 32, 43], isso implica que:

$$\det \begin{bmatrix} \omega^2 \mu_0 \epsilon_x - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_y k_x & \omega^2 \mu_0 \epsilon_y - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & \omega^2 \mu_0 \epsilon_z - k_x^2 - k_y^2 \end{bmatrix} = 0. \quad (4.17)$$

A equação anterior é representada por uma superfície tridimensional conhecida como *superfície normal*, onde possui duas camadas que em geral possuem quatro pontos em comum [32, 43]. No caso de cristais uniaxiais, possuem dois pontos, cristais biaxiais quatro pontos. As retas que ligam dois pontos coincidem com o eixo óptico do cristal.

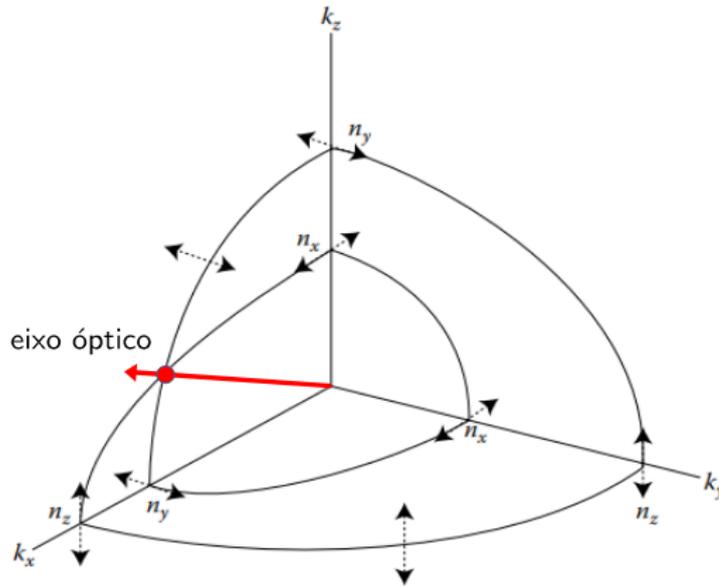


Figura 22 – Figura esquemática de representação da Superfície Normal com as respectivas interseções no eixo do cristal, Retirado e adaptado de [pg.38,[45]].

Para o valor \mathbf{k} existem dois valores que são soluções da equação (4.17) e ambas coincidem com a direção de propagação do feixe considerado. Isso significa que a onda

experimenta duas polarizações que são ortogonais entre si e se propagam de forma independente possuindo velocidades de fase distintas [43]. Quando a onda se propaga na direção do eixo óptico ambas velocidades de fase possuem o mesmo valor.

Os valores dos índices são de difícil caracterização, uma sugestão é visualizar através das curvas de nível da superfície, seguimos então a referência [32].

I - Plano XY - Onda Ordinária

Ao considerarmos uma onda se propagando paralelamente XY (onda ordinária), ou seja, para $k_z = 0$ a equação (4.17) para esse caso se reduz à:

$$[\omega^2 \mu_0 \epsilon_z - k_x^2 - k_y^2] ([\omega^2 \mu_0 \epsilon_x - k_y^2] [\omega^2 \mu_0 \epsilon_y - k_x^2] - k_x^2 k_y^2) = 0. \quad (4.18)$$

Logo, o produto de fatores deve ser igual a zero. Isso implica que teremos duas condições para que a equação (4.18) seja zero, a primeira sendo:

$$k_x^2 + k_y^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_z = \left(n_z \frac{\omega}{c} \right)^2, \quad (4.19)$$

onde $\epsilon_z = \epsilon_0 n_z^2$, com $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$ e $k = \omega/c$. Que é a equação de uma esfera de raio $\omega^2 \mu_0 \epsilon_z$. E a segunda condição é:

$$\frac{k_x^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_y} + \frac{k_y^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_x} = 1, \quad (4.20)$$

que é a equação de uma elipse.

A seguir na Figura 23 temos a ilustração das curvas de nível para os índices de refração nos eixos *ordinário* e *extraordinário*.

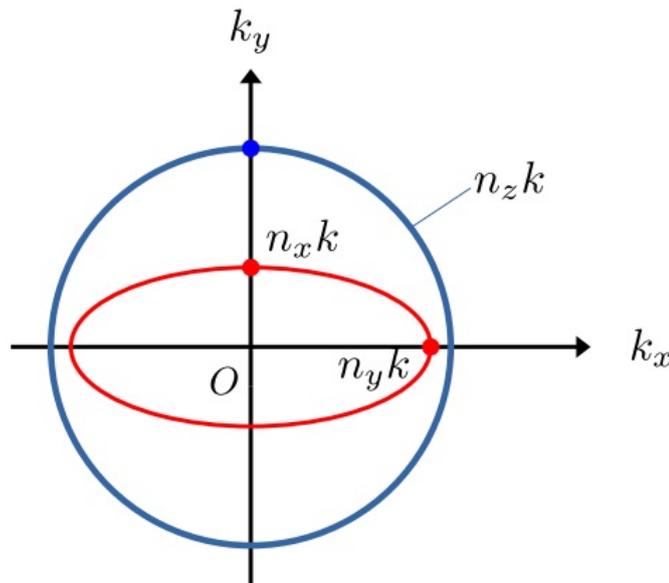


Figura 23 – Representação cartesiana da superfície normal quando k_z é nulo. Sendo a superfície azul representando uma circunferência (raio ordinário) e a superfície vermelha (raio extraordinário).

II - Plano XZ - Onda extraordinária

De forma análoga a expressão anterior, agora com $k_y = 0$, podemos obter duas expressões para uma onda se propagando no plano XZ. Partindo da equação (4.17), temos:

$$[\omega^2 \mu_0 \epsilon_y - k_x^2 - k_z^2] ([\omega^2 \mu_0 \epsilon_x - k_z^2] [\omega^2 \mu_0 \epsilon_z - k_x^2] - k_x^2 k_z^2) = 0, \quad (4.21)$$

e que novamente nos leva a:

$$k_x^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_y = \left(n_y \frac{\omega}{c} \right)^2, \quad (4.22)$$

com $\epsilon_y = \epsilon_0 n_y^2$, $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$ e $k = \omega/c$. Sendo a segunda solução descrita por:

$$\frac{k_x^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_z} + \frac{k_z^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_x} = 1, \quad (4.23)$$

que são as representações de uma circunferência e de uma elipse conforme ilustra a figura seguinte.

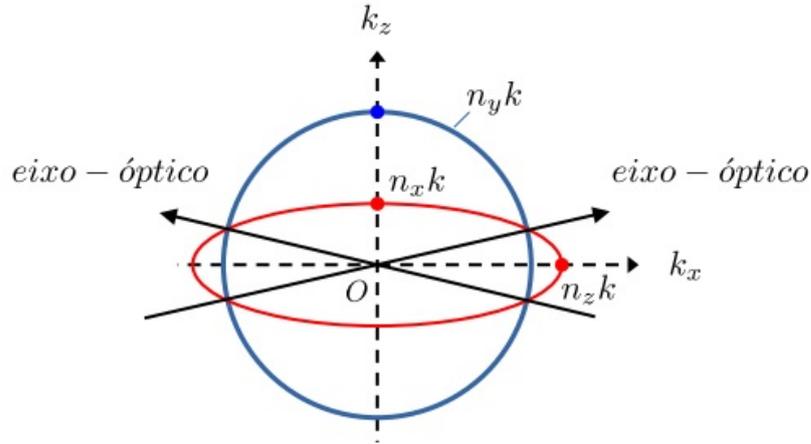


Figura 24 – Representação cartesiana da superfície normal quando k_y é nulo e os respectivos eixos ópticos.

III - Plano YZ

Novamente, com $k_x = 0$ e partindo da equação (4.17), temos:

$$[\omega^2 \mu_0 \epsilon_x - k_y^2 - k_z^2] ([\omega^2 \mu_0 \epsilon_y - k_z^2] [\omega^2 \mu_0 \epsilon_z - k_y^2] - k_y^2 k_z^2) = 0, \quad (4.24)$$

obtendo:

$$k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_x = \left(n_x \frac{\omega}{c} \right)^2, \quad (4.25)$$

com $\epsilon_x = \epsilon_0 n_x^2$, $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$ e $k = \omega/c$. E a outra solução é:

$$\frac{k_y^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_z} + \frac{k_z^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_y} = 1, \quad (4.26)$$

onde ambas são equações de uma circunferência e de uma elipse e que representam curvas de nível da equação (4.17).

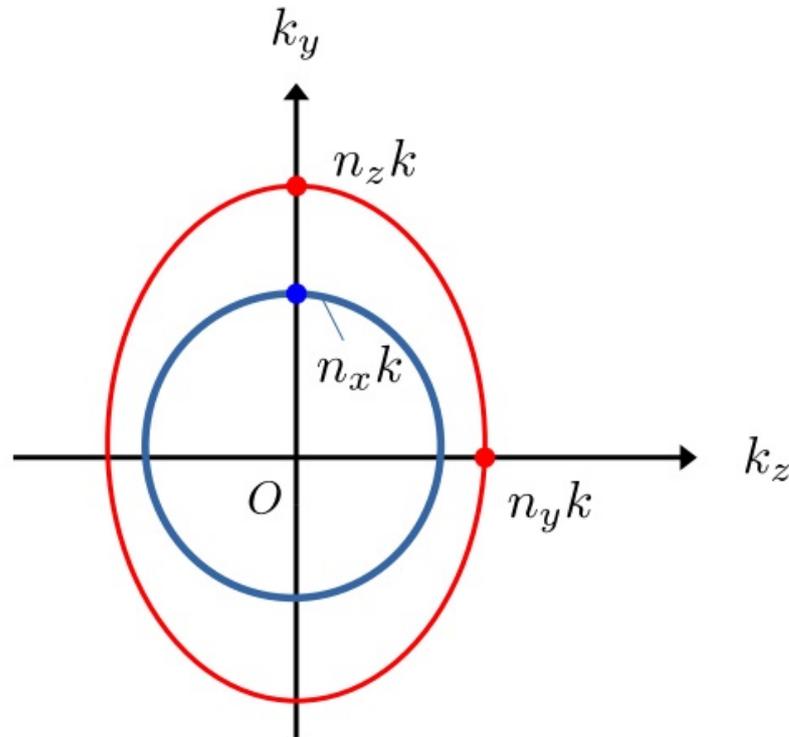


Figura 25 – Representação cartesiana da superfície normal quando k_x é nulo.

Elipsóide de Índices

Um formalismo que auxilia na descrição da permissividade do cristal e que nos permite entender a propagação de uma onda eletromagnética é denominado **elipsóide de índices**. No caso, como o índice de refração do meio depende de $\vec{\epsilon}$, o índice muda conforme a direção de propagação e de polarização do feixe [43], logo, é conveniente usarmos a seguinte definição para o índice de refração:

$$n_i^2 = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_0}, \quad (4.27)$$

onde ($i = x, y, z$). Assumindo que o meio é homogêneo, não absorvedor e não magnético a densidade de energia do campo elétrico no material anisotrópico é escrita a partir da equação (4.10) e se relaciona por [43]:

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{\epsilon_0}{2} \sum_i n_i^2 E_i E_i. \quad (4.28)$$

Ao usarmos a equação (4.27) na equação (4.28), podemos chegar na seguinte relação:

$$2\epsilon_0 U_e = \left(\frac{D_x^2}{n_x^2} + \frac{D_y^2}{n_y^2} + \frac{D_z^2}{n_z^2} \right), \quad (4.29)$$

onde usamos a definição do deslocamento elétrico \mathbf{D} e esse resultado é análogo ao obtido por [32, 43]. Ao considerarmos uma superfície onde U_e seja constante, podemos reescrevermos a equação (4.29) em termos de \mathbf{r} e $D_i/\sqrt{2U_e}$, onde ($i = x, y, z$) [43]. Logo:

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1, \quad (4.30)$$

essa equação obtida é conhecida como **elipsóide de índices** e ela indica como uma onda se propaga em um meio de índices de refração n_x, n_y, n_z . No caso de cristais isotrópicos, recebem esse nome pois seus índices de refração são iguais em todas as direções $n_x = n_y = n_z = n$. A equação (4.30) para esse caso fica:

$$x^2 + y^2 + z^2 = n^2. \quad (4.31)$$

Nos chamados cristais anisotrópicos existem duas classificações:

(1) Cristal uniaxial: No caso do cristal uniaxial, temos que $n_x = n_y \neq n_z$ e o índice de refração n_x e n_y é chamado de índice ordinário (n_o) e o índice de refração n_z recebe o nome de índice extraordinário (n_e). Eles também são classificados de acordo com os valores dos índices de refração, quando $n_o > n_e$ é dito negativo e $n_o < n_e$ positivo [46]. A equação (4.30) do elipsóide para um cristal uniaxial é descrito por:

$$\frac{x^2}{n_o^2} + \frac{y^2}{n_o^2} + \frac{z^2}{n_e^2} = 1. \quad (4.32)$$

A considerarmos a propagação de um feixe paralelo ao plano yz , cuja direção é \mathbf{s} [24], temos:

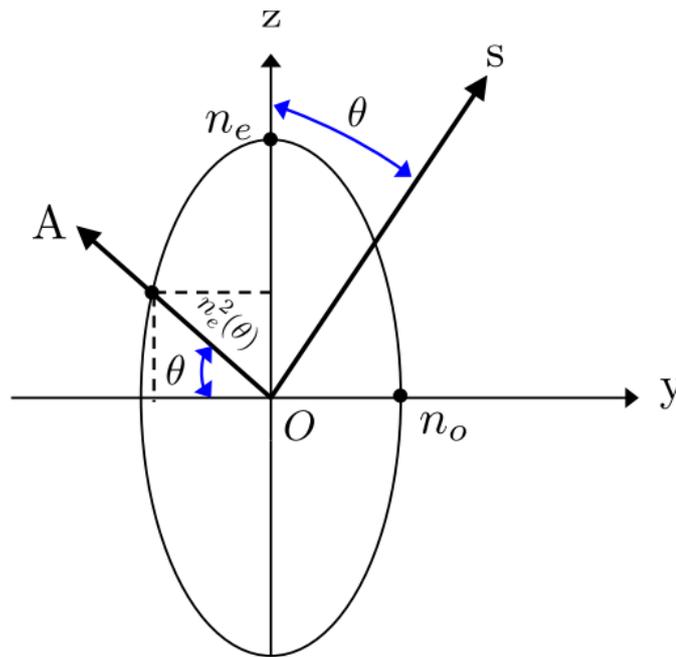


Figura 26 – Ilustração da propagação de um feixe paralelo ao plano yz com direção \mathbf{s} - Adaptado de [43].

Onde o comprimento do semi-eixo OA é o índice de refração $n_e(\theta)$. Temos então as seguintes relações geométricas:

$$\frac{y^2}{n_o^2} + \frac{z^2}{n_e^2} = 1, \quad (4.33)$$

que é a elipse.

E temos a relação em que:

$$y = n_e(\theta) \cos(\theta), \quad (4.34)$$

$$z = n_e(\theta) \sin(\theta).$$

Portanto, podemos mostrar que:

$$\frac{\cos^2(\theta)}{n_o^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{n_e^2} = \frac{1}{n_e(\theta)}. \quad (4.35)$$

(2) Cristal Biaxial: Quando $n_x \neq n_y \neq n_z$ sua seção transversa é uma elipse e são classificados como biaxiais. E para $n_x < n_y < n_z$ a equação (4.30) dá origem a três diferentes semieixos [43].

CLASSIFICAÇÃO DE MEIOS MATERIAIS

A partir da equação (4.17), é possível determinar as características do meio de propagação quando o material for:

(1) isotrópico

No meio isotrópico, o índice de refração é $n_x = n_y = n_z = n$, logo o tensor do dielétrico para o material isotrópico é:

$$\epsilon = \epsilon_0 \begin{bmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

(2) uniaxial

No caso do cristal uniaxial o índice de refração é $n_x = n_y \neq n_z$, logo o tensor do dielétrico para o material uniaxial é:

$$\epsilon = \epsilon_0 \begin{bmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

(3) biaxial

Para o cristal biaxial, temos que o índice de refração é diferente para cada direção de propagação, ou seja, $n_x \neq n_y \neq n_z$. Logo os campos experimentam índices de refração diferentes a medida que se propagam no meio, portanto, o tensor dielétrico no caso de um cristal biaxial é:

$$\epsilon = \epsilon_0 \begin{bmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

os índices de refração seguem a ordem de $n_x < n_y < n_z$ segundo a referência [43].

Neste capítulo apresentamos os conceitos básicos que nos permite conhecer as propriedades de materiais anisotrópicos quando uma onda eletromagnética se propaga nesse meio. A partir das relações apresentadas, podemos descrever os índices de refração de um cristal por exemplo. Como estamos interessados em utilizar meios birrefringentes nessa dissertação, os conceitos explorados aqui nos permite entender o mecanismo físico desses materiais.

Capítulo 5

Compensando o astigmatismo em uma cavidade dobrada

Nesse capítulo, apresentaremos uma proposta de uso de cristais birrefringentes para a compensação do astigmatismo em uma cavidade linear dobrada - cavidade dobrada - formada por três espelhos: um curvo e dois planos. Inicialmente, apresentamos o formalismo ABCD para a descrição dos parâmetros do feixe de luz que se propagam dentro da cavidade proposta, tais como: *parâmetro complexo* e a *cintura do feixe*. Na sequência, definimos a quantidade *comprimento efetivo* da cavidade óptica e estudamos a sua relação com os parâmetros do cristal e a fase de Gouy de um feixe de luz. Por fim, mostraremos um caso particular de contabilizar o caminho óptico da cavidade para a obtenção da oscilação simultânea de modos de Hermite-Gauss de primeira ordem HG_{01} e HG_{10} , favorecendo a transmissão de modos de Laguerre-Gauss LG com momento angular orbital (MAO). A proposta de implementação da cavidade dobrada surgiu como desdobramento de um estudo teórico a partir do trabalho [16] que investigou a transferência de MAO em um OPO (Oscilador Paramétrico Óptico) no qual o astigmatismo se fez presente.

5.1 A cavidade dobrada

A cavidade estudada neste trabalho é composta por três espelhos conforme a Figura 27 a seguir indica.

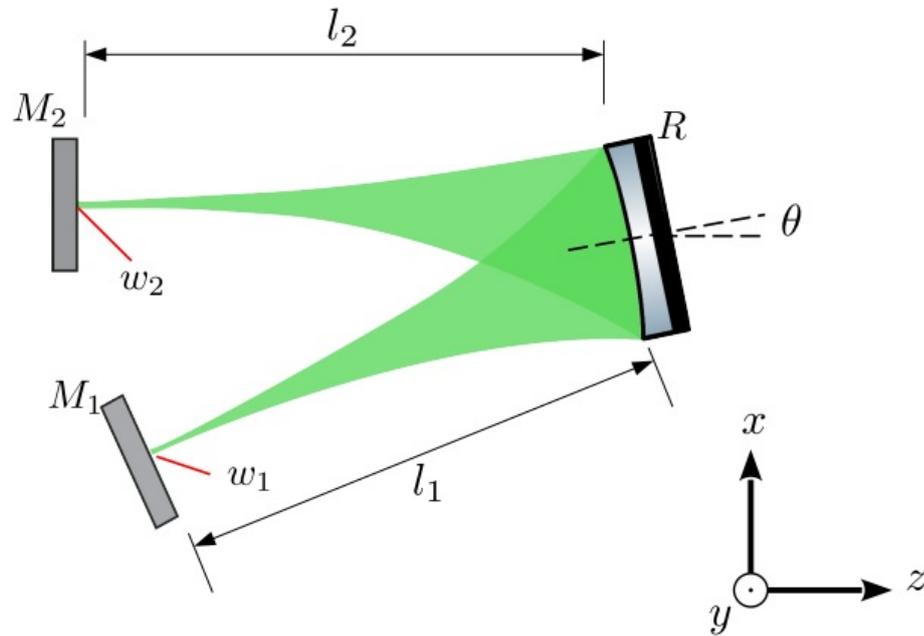


Figura 27 – Cavidade óptica formada por três espelhos, sendo dois planos e um curvo. E a localização das cinturas do feixe na cavidade.

O espelho R é um espelho curvo (espelho de dobra), sendo M_1 e M_2 espelhos planos respectivamente. O comprimento da cavidade vazia é definido com l_1 sendo a distância entre M_1 a R e l_2 a distância entre M_2 e R . Uma característica desta cavidade é a existência de duas cinturas, denominadas w_1 e w_2 . Ambas cinturas estão localizadas nos espelhos planos. Essas cinturas são astigmáticas devido ao fato do espelho curvo R estar inclinado de um ângulo θ em relação ao eixo principal do espelho e isso implica em diferentes raios de curvatura do feixe ao longo de sua propagação. A proposta então é investigar uma possibilidade de compensar o astigmatismo desse tipo de geometria de cavidade. Formalmente, a propagação de um feixe de luz nessa cavidade pode ser contabilizada a partir do formalismo da matriz ABCD.

Para calcular a multiplicação das matrizes e determinar os parâmetros A , B , C e D , da matriz ABCD, utilizamos o *Software Mathematica*^{TM1}. Que possibilitou determinar duas cinturas no plano tangencial (\mathbf{xz}) e duas no plano sagital (\mathbf{yz}) da cavidade. Na simulação dessa cavidade os parâmetros definidos foram: $\lambda = 1064nm$, l_1 comprimento livre², $l_2 = 225,5mm$, $R = 100mm$, índice de refração $n = 1$ e o ângulo de inclinação do espelho curvo sendo $\theta = 6,7^\circ$.

O formalismo da matriz ABCD associado a um feixe que percorre uma volta

¹ Software não gratuito. Para mais informações <https://www.wolfram.com/mathematica/>

² Para simular é necessário que algum parâmetro esteja em função dos demais, no caso, foi escolhido l_1 .

completa na cavidade descrita pela Figura 27 é:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2}{R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2}{R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

inicialmente a contabilização do feixe ocorreu a partir do espelho M_1 .

Como estamos interessados no estudo do astigmatismo nesta cavidade, é necessário levarmos em conta os planos de propagação do feixe, um denominado plano tangencial (paralelo a Figura 27) e o sagital que é perpendicular ao plano tangencial [31]. Essa consideração é útil quando lidamos com espelhos ou cristais inclinados e é justamente essa relação que nos permite contabilizar o astigmatismo em um dispositivo óptico como um espelho curvo por exemplo. As distâncias focais para o planos tangencial e sagital são definidas por:

$$\begin{aligned} f_{\text{tangencial}} &= \frac{R \cos \theta}{2}, \\ f_{\text{sagital}} &= \frac{R}{2 \cos \theta}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

A partir do conjunto das equações (5.2) e sabendo que o foco do espelho curvo é $f = R/2$, a matriz que descreve um espelho esférico pode ser modificada a partir dessa relação por:

$$M_{\text{tangencial}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2}{R \cos \theta} & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

$$M_{\text{sagital}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2 \cos \theta}{R} & 1 \end{pmatrix}.$$

Procedendo de forma análoga a realizada na subseção 3.3 para a cavidade linear, podemos contabilizar a passagem do feixe na cavidade dobrada a partir da relação da matriz ABCD que a descreve. No caso dessa geometria de cavidade, temos quatro cinturas.

• Propagação Tangencial

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2}{R \cos \theta} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2}{R \cos \theta} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

que descreve a propagação do feixe levando em consideração a primeira cintura do feixe (ver Figura 27) a partir do espelho M_1 .

Os parâmetros ABCD da cavidade são:

$$\begin{aligned}
 A &= 1 - \frac{2}{R \cos \theta} \left[l_1 + 2l_2 - 2 \frac{l_1 l_2}{R \cos \theta} \right], \\
 B &= l_1 \left(1 - 4 \frac{l_2}{R \cos \theta} \right) + 2 \frac{l_1^2}{R \cos \theta} \left(4 \frac{l_2}{R \cos \theta} - 1 \right), \\
 C &= \frac{4}{R \cos \theta} \left(2 \frac{l_2}{R \cos \theta} - 1 \right), \\
 D &= -\frac{4}{R \cos \theta} (l_1 + l_2) + 8 \frac{l_1 l_2}{R^2 \cos^2 \theta} + 1.
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

A partir da equação (3.46) e com os parâmetros da equação (5.5), podemos calcular a primeira cintura w_{1x} com:

$$w_{1x} = \left(\frac{\lambda}{\pi n} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{|B|^{\frac{1}{2}}}{\left[1 - \left(\frac{D+A}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{4}}}. \tag{5.6}$$

No caso da segunda cintura, precisamos conhecer a matriz que descreve a evolução do feixe da cintura w_{1x} até a cintura w_{2x} . A matriz associada à segunda cintura é descrita por:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2}{R \cos \theta} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Novamente, os parâmetros ABCD associados a matriz ABCD (5.7) são:

$$\begin{aligned}
 A &= 1 - 2 \frac{l_1}{R \cos \theta}, \\
 B &= l_2 + l_1 \left[-2 \frac{l_2}{R \cos \theta} + 1 \right], \\
 C &= -\frac{2}{R \cos \theta}, \\
 D &= -2 \frac{l_2}{R \cos \theta} + 1.
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Determinando os parâmetros ABCD, podemos calcular a segunda cintura a partir da primeira cintura w_{1x} . Para isso, inicialmente definimos o parâmetro complexo relativo

a primeira cintura por:

$$q_{1x} = i \frac{\pi n w_{1x}^2}{\lambda}, \quad (5.9)$$

onde n é o índice de refração do meio (sendo igual à 1).

Em seguida, associamos o parâmetro q_{2x} a partir da matriz ABCD utilizando a equação (3.30), logo chegamos a:

$$q_{2x} = \frac{Aq_{1x} + B}{Cq_{1x} + D}. \quad (5.10)$$

Podemos então relacionar o parâmetro complexo dado pela equação (2.26) com (5.10) e calcular a segunda cintura w_{2x} através da seguinte expressão:

$$w_{2x} = \sqrt{-\frac{\lambda}{n\pi \operatorname{Im}\left(\frac{C \cdot q_{2x} + D}{A \cdot q_{2x} + B}\right)}}. \quad (5.11)$$

Em resumo, na Figura 28 temos a relação gráfica entre as duas cinturas (w_{1x} e w_{2x}) em função de l_1 . Observa-se que as duas cinturas só existem no intervalo $[0,048; 0,062]$ m, que é a região de estabilidade da cavidade.

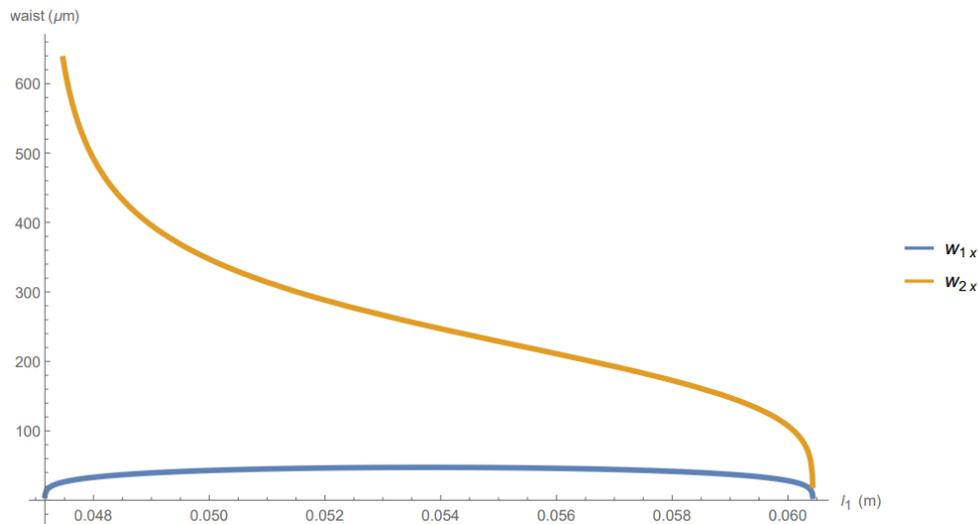


Figura 28 – Cinturas w_{1x} e w_{2x} associadas ao plano tangencial com a cavidade vazia.

Em particular, escolhendo $l_1 = 52\text{mm}$, encontramos as cinturas $w_{1x} = 46\mu\text{m}$ e $w_{2x} = 288\mu\text{m}$.

• Propagação Sagital

De forma análoga a realizada para o plano tangencial, utilizamos o mesmo procedimento para encontrarmos as cinturas w_{1y} e w_{2y} . Neste caso, temos:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2 \cos \theta}{R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2 \cos \theta}{R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

novamente os parâmetros ABCD são:

$$\begin{aligned} A &= 1 - \frac{2 \cos \theta}{R} \left[l_1 + 2l_2 - 2 \frac{l_1 l_2 \cos \theta}{R} \right], \\ B &= l_1 \left(1 - 4 \frac{l_2 \cos \theta}{R} \right) + 2 \frac{l_1^2 \cos \theta}{R} \left(4 \frac{l_2 \cos \theta}{R} - 1 \right), \\ C &= \frac{4 \cos \theta}{R} \left(2 \frac{l_2 \cos \theta}{R} - 1 \right), \\ D &= -\frac{4 \cos \theta}{R} (l_1 + l_2) + 8 \frac{l_1 l_2 \cos^2 \theta}{R^2} + 1. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Para a segunda cintura, temos o seguinte conjunto de matrizes:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2 \cos \theta}{R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

e os parâmetros associados são:

$$\begin{aligned} A &= 1 - 2 \frac{l_1 \cos \theta}{R}, \\ B &= l_2 + l_1 \left[-2 \frac{l_2 \cos \theta}{R} + 1 \right], \\ C &= -\frac{2 \cos \theta}{R}, \\ D &= -2 \frac{l_2 \cos \theta}{R} + 1. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Novamente utilizando a mesma abordagem para o plano tangencial a cintura é descrita por:

$$\omega_{1y} = \left(\frac{\lambda}{\pi n} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{|B|^{\frac{1}{2}}}{\left[1 - \left(\frac{D+A}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{4}}}, \quad (5.16)$$

com,

$$q_{2y} = \frac{Aq_{1y} + B}{Cq_{1y} + D}, \quad (5.17)$$

onde $q_{1y} = i \frac{\pi \cdot n \omega_{1y}^2}{\lambda}$.

A segunda cintura é determinada por:

$$w_{2y} = \sqrt{-\frac{\lambda}{n\pi \operatorname{Im}\left(\frac{C \cdot q_{2y} + D}{A \cdot q_{2y} + B}\right)}}. \quad (5.18)$$

Utilizando esse conjunto de equações, podemos determinar as duas cinturas w_{1y} e w_{2y} para o plano sagital conforme a ilustra a Figura 29.

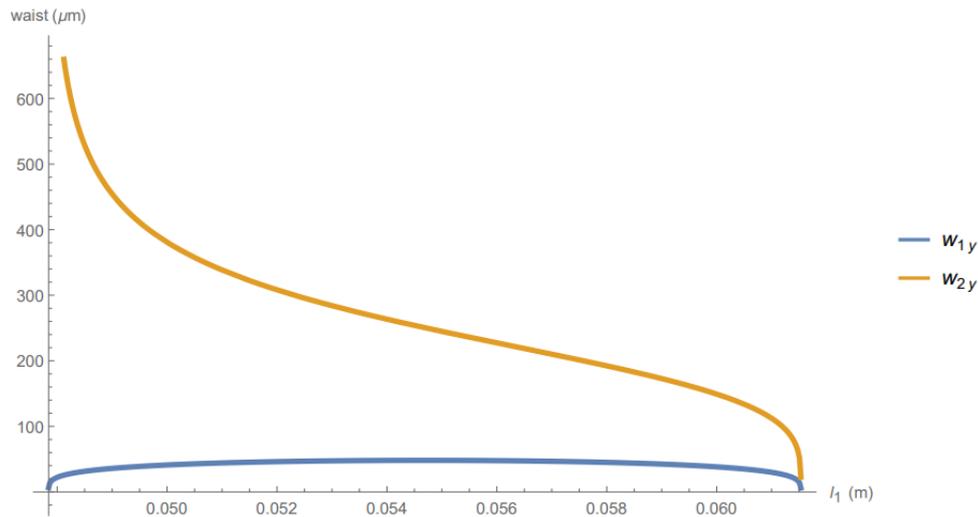


Figura 29 – Cinturas w_{1y} e w_{2y} associadas ao plano sagital na cavidade vazia.

Novamente, escolhendo $l_1 = 52\text{mm}$, encontramos as cinturas para $w_{1y} = 46\mu\text{m}$ e $w_{2y} = 308\mu\text{m}$.

A Figura 30 e a Figura 31 a seguir, ilustra o astigmatismo presente na cavidade dobrada quando inclinamos o espelho curvo por um ângulo θ (em relação ao eixo principal do espelho), e que pela relação dada na equação (5.2), o feixe focaliza em pontos diferentes ao longo do eixo de propagação e isso implica que ambas cinturas possuem raios de curvatura $R(z)$ diferentes [conforme discutido 3.4]. Nessa situação, a única exceção é quando $l_1 = 52,6\text{mm}$, nesse ponto não há astigmatismo associado a primeira cintura (Figura 30), porém na segunda cintura há astigmatismo (Figura 31). Portanto, as relações entre as cinturas e a inclinação do espelho curvo torna a cavidade dobrada astigmática.

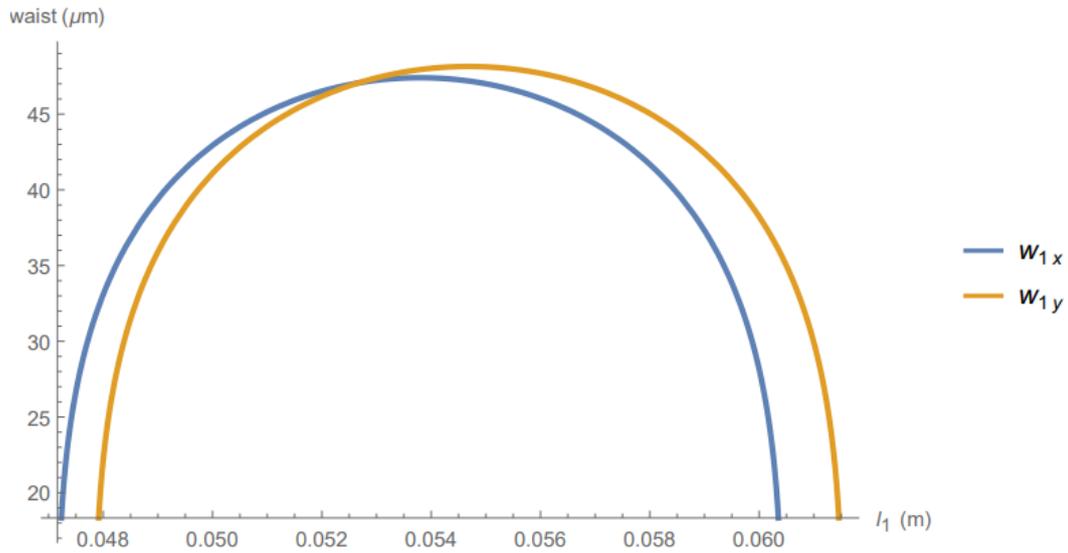


Figura 30 – Astigmatismo presente no conjunto de cinturas associadas ao comprimento l_1 da cavidade dobrada vazia (sem elemento birrefringente) em função do mesmo. E possui um único ponto onde não há astigmatismo.

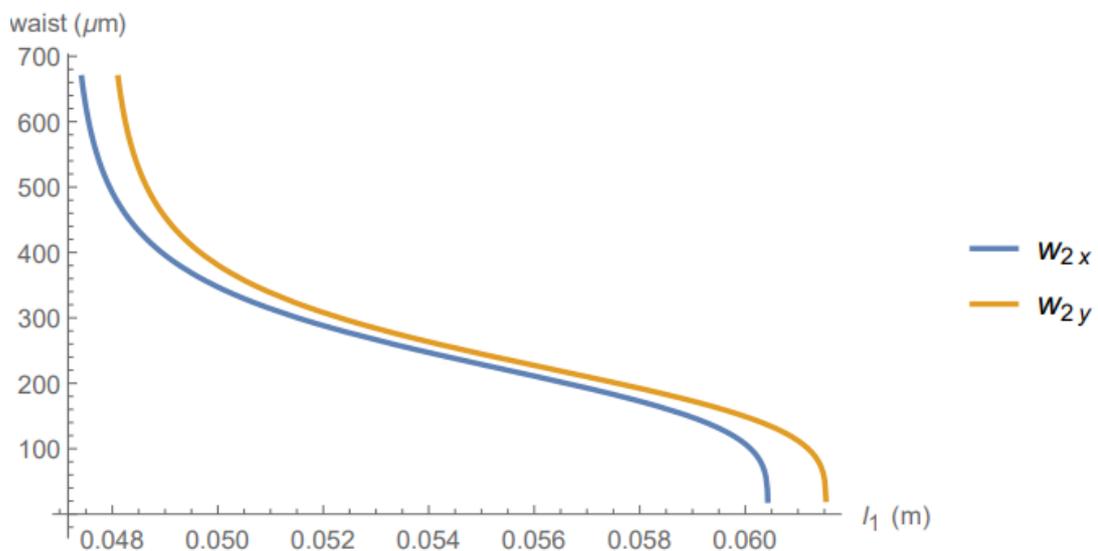


Figura 31 – Astigmatismo presente em duas cinturas da cavidade dobrada vazia ao longo do comprimento l_2 em função de l_1 .

5.1.1 Ressonância na cavidade dobrada

Portanto, de forma a estudar as condições de ressonância, partimos da consideração inicial de que um feixe de luz deve ganhar uma fase que seja proporcional a $2q\pi$ quando completa um caminho de ida e volta dentro de uma cavidade vazia. Essa consideração inicial é facilmente formalizada no caso da cavidade linear formada por dois espelhos e separados por uma distância $L = z_2 - z_1$ [24]. Assim, a condição de ressonância para o

modo $HG_{m,n}$ é dada por:

$$\eta_{m,n}(L) - \eta_{m,n}(0) = 2q\pi, \quad (5.19)$$

onde q é um número inteiro e $\eta_{m,n}(L) = \overbrace{kL}^{\text{Fase Normal}} - \overbrace{(m+n+1) \tan^{-1} \left[\frac{L}{z_R} \right]}^{\text{Fase de Gouy}}$.

Podemos então determinar as frequências de ressonância em função de ν , que se relaciona por:

$$kL - (m+n+1) \tan^{-1} \left[\frac{L}{z_R} \right] = 2q\pi, \quad (5.20)$$

onde $k = 2\pi\nu/c$. Isolando ν , podemos obter:

$$\nu = \nu_{FSR} \left[q + \frac{1}{2\pi} (m+n+1) \tan^{-1} (L/z_R) \right] \quad (5.21)$$

A equação (5.21) informa as posições de ressonância dos modos longitudinais de uma cavidade linear que depende da ordem $m+n$.

Fase acumulada na cavidade dobrada

Mostramos a partir do referencial [37, 47] [anexo A] que a fase de Gouy acumulada na cavidade dobrada é dada por:

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{z_{Rx}}{f_x - l_1(x)} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{z_{Ry}}{f_y - l_1(y)} \right). \quad (5.22)$$

Como tratamos de feixe astigmático, temos diferentes raios de curvatura para cada direção de propagação e essa consideração no leva que a fase de Gouy para um feixe astigmático é descrito por [23, 24]

$$\phi_{m,n} = \left(m + \frac{1}{2} \right) \phi_G^x + \left(n + \frac{1}{2} \right) \phi_G^y, \quad (5.23)$$

onde,

$$\phi_G^x = \tan^{-1} \left(\frac{z - z_x}{z_{Rx}} \right), \quad (5.24)$$

$$\phi_G^y = \tan^{-1} \left(\frac{z - z_y}{z_{Ry}} \right).$$

No caso do sistema considerado aqui nesta dissertação, a cavidade dobrada vazia ganha uma fase em uma volta completa partido da cintura w_1 até w_2 , a fase acumulada é:

$$2q\pi = kL - \left\{ \left(m + \frac{1}{2} \right) [\phi_G^{1x} + \phi_G^{2x}] + \left(n + \frac{1}{2} \right) [\phi_G^{1y} + \phi_G^{2y}] \right\}, \quad (5.25)$$

onde ϕ_G^x e ϕ_G^y são as fases de Gouy na direção horizontal e vertical e são descritas por:

$$\begin{aligned}\phi_G^{1x} &= \left[\tan^{-1} \left(\frac{l_1}{z_{R1x}} \right) \right], \\ \phi_G^{2x} &= \left[\tan^{-1} \left(\frac{l_2}{z_{R2x}} \right) \right], \\ \phi_G^{1y} &= \left[\tan^{-1} \left(\frac{l_1}{z_{R1y}} \right) \right], \\ \phi_G^{2y} &= \left[\tan^{-1} \left(\frac{l_2}{z_{R2y}} \right) \right].\end{aligned}\tag{5.26}$$

Portanto, utilizando que $k = 2\pi\nu/c$ na equação (5.25), podemos mostrar que as frequências de ressonância da cavidade dobrada é dada por:

$$v_{q,m,n} = FSR \left[q + \frac{1}{2\pi} \left\{ \left(m + \frac{1}{2} \right) [\phi_G^{1x} + \phi_G^{2x}] + \left(n + \frac{1}{2} \right) [\phi_G^{1y} + \phi_G^{2y}] \right\} \right],\tag{5.27}$$

onde novamente $FSR = c/2L$ que é o intervalo espectral livre da cavidade dobrada e q o modo longitudinal.

Conforme [Anexo A], mostramos que a fase de Gouy acumulada na cavidade, pode ser simplificada, portanto, utilizando a equação (5.22) para a contabilização das fases, a equação (5.27) torna-se:

$$v_{q,m,n} = FSR \left[q + \frac{1}{2\pi} \left\{ \left(m + \frac{1}{2} \right) \tan^{-1} \left(\frac{z_{Rx}}{f_x - l_{1(x)}} \right) + \left(n + \frac{1}{2} \right) \tan^{-1} \left(\frac{z_{Ry}}{f_y - l_{1(y)}} \right) \right\} \right].\tag{5.28}$$

Em especial, no presente trabalho consideramos os modos de primeira ordem de forma a estudar o regime de ressonância destes. Sendo assim, podemos calcular a posição de ressonância de dois hermites de primeira ordem $HG_{1,0}$ e $HG_{0,1}$, dado um mesmo modo longitudinal.

Portanto,

$$\begin{aligned}v_{q,m,n} &= v_{q,(1,0)} - v_{q,(0,1)}, \\ &= FSR \left[\frac{1}{2\pi} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{z_{Rx}}{f_x - l_{1(x)}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{z_{Ry}}{f_y - l_{1(y)}} \right) \right\} \right]\end{aligned}\tag{5.29}$$

para modos longitudinais de dois hermites de primeira ordem.

Calculamos então as posições de ressonância para os modos de primeira ordem conforme a figura seguinte:

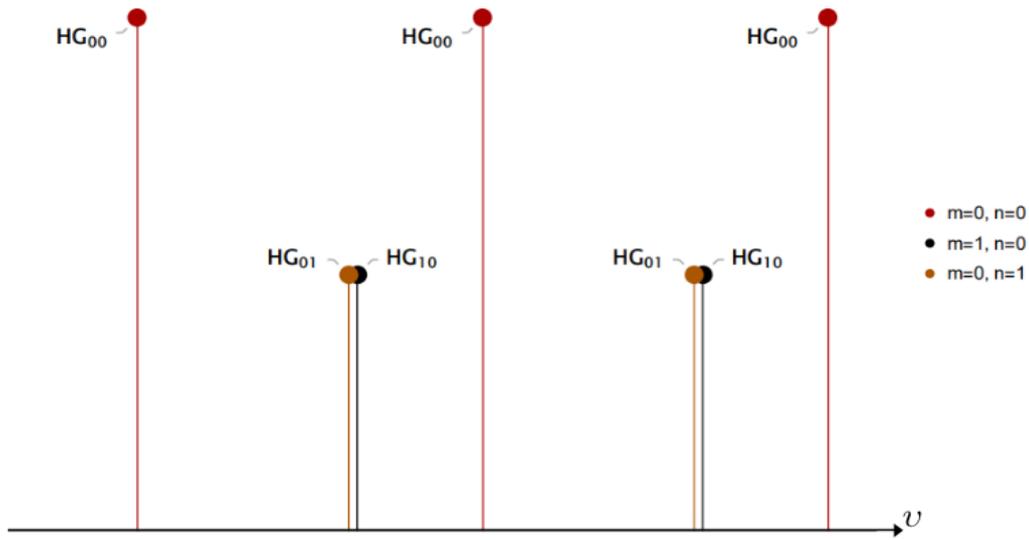


Figura 32 – Posição das frequências de ressonância dos modos de primeira ordem HG_{01} e HG_{10} para uma cavidade dobrada vazia sem elemento birrefringente.

A Figura 32 ilustra a posição de ressonância do hermite HG_{01} e HG_{10} como também do modo fundamental HG_{00} .

Os parâmetros que foram utilizados durante a simulação no **Mathematica**^{TM3} foram: l_1 comprimento livre⁴, $l_2 = 225.5mm$, comprimento de onda $\lambda = 1064nm$, ângulo do espelho curvo $\theta = 6,7$ e o raio de curvatura do espelho $R = 100mm$. A diferença de ressonância para HG_{01} e HG_{10} foi de $\nu_{(q,1,0)} - \nu_{(q,0,1)} = 0.0434008\Delta_{FSR}$. Portanto, o deslocamento entre os picos de ressonância dos modos de primeira ordem é proveniente do astigmatismo no espelho curvo, uma vez que o mesmo está inclinado por um ângulo θ e a contabilização da fase longitudinal depende do mesmo na fase de Gouy. Essa separação nos picos de ressonância, no caso de primeira ordem, impede a transmissão de um modo de primeira ordem de LG .

5.2 Cavidade dobrada com meio Birrefringente

A cavidade dobrada birrefringente é representada na figura 33. Trata-se da cavidade descrita na seção 5.1 e que possui dois cristais birrefringentes fixados em M_1 e M_2 .

³ Programa desenvolvido por [18] e adaptado pelo autor.

⁴ Para simular a ressonância na cavidade dobrada o parâmetro livre foi l_1 .

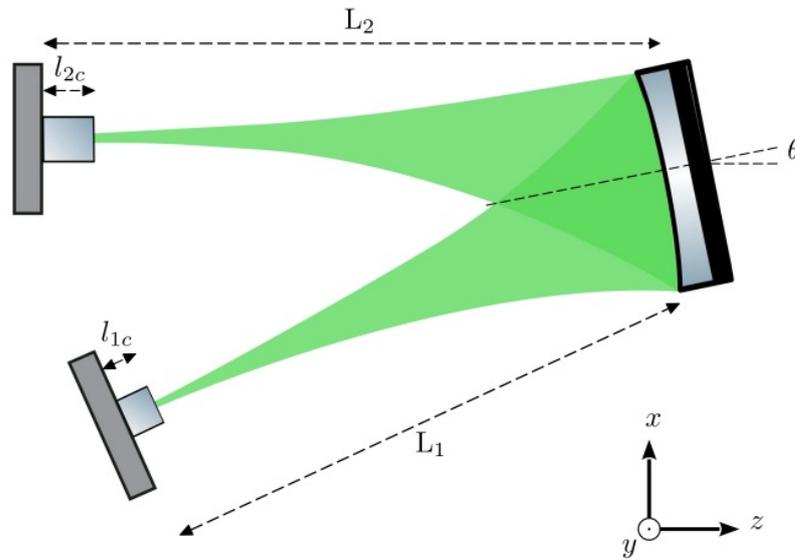


Figura 33 – Cavidade dobrada com dois cristais de comprimento l_{1c} e l_{2c} fixados nos espelhos planos M_1 e M_2 .

Conforme a Figura 33, l_{1c} e l_{2c} são comprimentos dos cristais.

Nesta cavidade com os cristais, o caminho óptico de difração da luz depende da polarização da mesma, devido à birrefringência do cristal. Isto significa que, variando-se os índices de refração ou as dimensões geométricas do cristal, podemos controlar a sintonia e as condições de ressonância da cavidade. O propósito aqui é determinar a geometria e as dimensões dos cristais de forma a favorecer a ressonância simultânea dos modos HG_{01} e HG_{10} , permitindo o acoplamento e a ressonância para o modo de LG de primeira ordem.

5.2.1 Compensando o Astigmatismo com o uso de Cristais Birrefringentes

Conforme observado na Figura 33 a cavidade de dobrada possui um espelho curvo esférico inclinado por um ângulo θ , responsável pela produção de duas cinturas astigmáticas (conforme descrito na seção 5.1). E estão localizadas nos espelhos planos M_1 e M_2 . O fato do espelho curvo estar inclinado, implica diferentes raios de curvaturas ou distâncias focais para feixes paralelos ou perpendiculares ao plano da cavidade. Portanto, conforme a equação (5.3), podemos caracterizar as cinturas dentro da cavidade ao longo dos planos de propagação do feixe considerando a inclinação do espelho. Dessa forma, dizemos que o feixe é astigmático se w_x for diferente w_y e isso implica em raios de curvatura distintos.

Considerando agora a propagação dos modos de primeira ordem HG_{01} e HG_{10} dentro da cavidade, observamos que estes, por dependerem da distância de Rayleigh (z_R), não são simultaneamente ressonantes, conforme aponta o diagrama da Figura 32. Isso constitui uma severa limitação de uso dessas cavidades para a transmissão de MAO

conforme discutido no trabalho [16]. Por outro lado, conforme tratado no capítulo 4, a birrefringência característica de meios não lineares, como cristais usados na geração de lasers ou em OPO (Oscilador Paramétrico Óptico), também produz astigmatismo em feixes luminosos. Portanto, considerando que a cavidade dobrada é compatível com feixes astigmáticos e que os cristais afetam o astigmatismo, nesse trabalho estudamos as condições geométricas de um sistema composto por uma cavidade dobrada e dois cristais KTP (tipo II) para a transmissão de um feixe LG_{01} .

Todavia, de forma a simplificar a análise, consideramos aqui uma cavidade equivalente dada pela Figura 34 que já contabiliza todo o caminho óptico (ver figura a seguir).

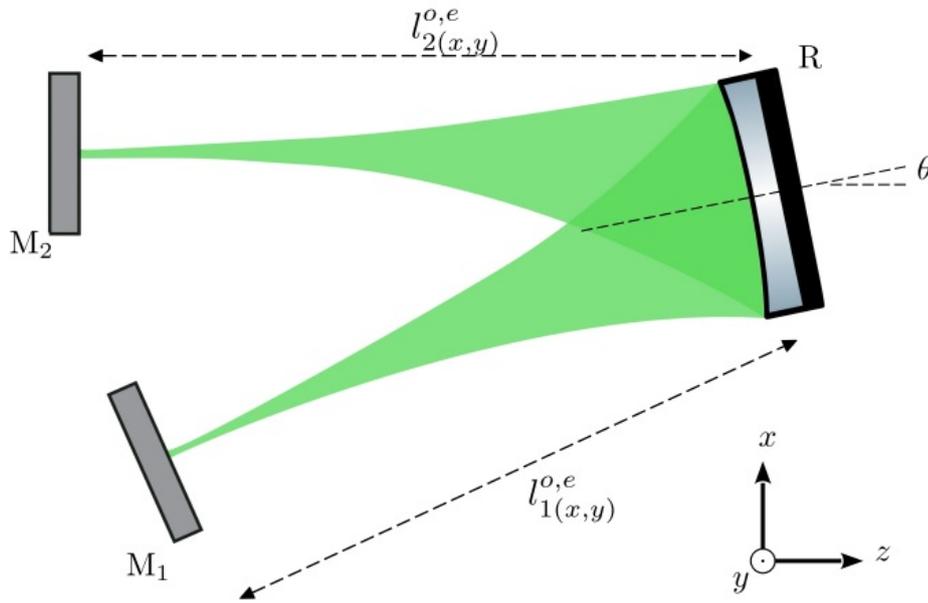


Figura 34 – Cavidade dobrada com as correções efetivas dos caminhos ópticos de propagação do feixe na cavidade dobrada. Cujo os índices $l_{1,2}^i(x,y)$, $l_{1,2}^e(x,y)$ indicando as correções nas polarizações ordinária e extraordinária do feixe.

Ao considerarmos a cavidade com cristal, é necessário corrigirmos os comprimentos geométricos devido à presença dos materiais birrefringentes. Levando em consideração a correção dos comprimentos da cavidade de modo que tenhamos um comprimento efetivo (conforme ilustra a figura 34). Esse mesmo conceito foi abordado pela referência [16, 17, 25, 48, 49]. Em resumo, essa correção é apresentada como:

$$L_{efetivo} = L + l \left(\frac{1}{n} - 1 \right), \quad (5.30)$$

L é o comprimento geométrico da cavidade (sem cristal), l o comprimento do cristal, n o índice de refração do cristal que muda dependendo do meio e $L_{efetivo}$ é o comprimento equivalente.

A figura a seguir ilustra a propagação de um feixe ao passar por um cristal.

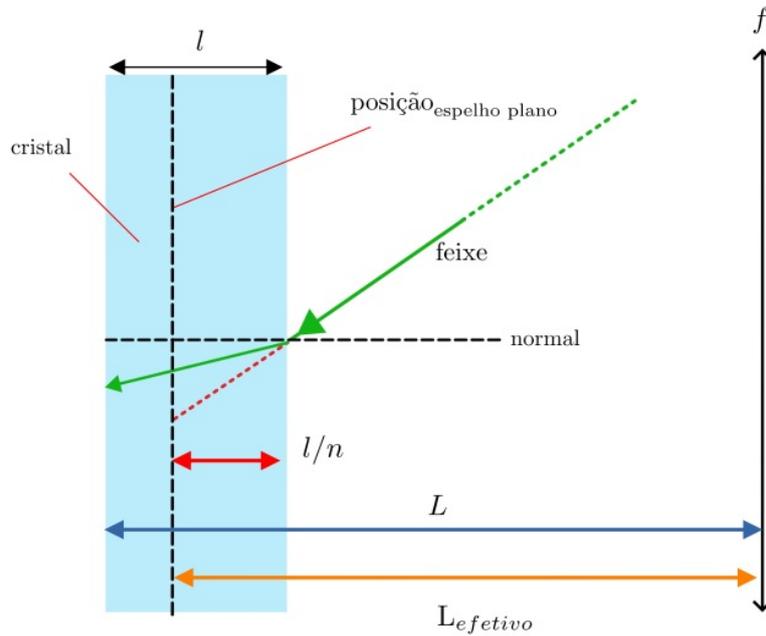


Figura 35 – Correção do caminho óptico na cavidade devido a presença do cristal em seu interior. O caminho efetivo contabiliza o caminho óptico de refração do cristal e seu tamanho.

Conforme ilustrado na Figura 35, o feixe ao passar de um meio para o outro, neste caso ar-cristal, a posição aparente do espelho plano é contabilizada pelo caminho l/n em vez de l , pois nesse caso temos que $n_{cristal} > n_{ar}$. Logo, o caminho total corrigido devido à presença do cristal é equivalente a um comprimento efetivo sem o cristal, onde é levado em consideração o tamanho do cristal, o comprimento geométrico da cavidade e o caminho de refração. Expandimos esse mesmo conceito para cristais birrefringentes, uma vez que levamos em consideração as características desse meio, cujo índice de refração em cada direção é diferente.

Usamos aqui a nomenclatura de birrefringência, discutida no Capítulo [4], em termos das direções ordinárias (x) e extraordinária (y). As correções dos caminhos efetivos l_1 e l_2 devido à presença do cristal nas polarizações ordinária e extraordinária da cavidade podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
 l_{1x}^o &= (l_1 + l_{1c}) - l_{1c}(1 - 1/n_y), \\
 l_{1y}^o &= (l_1 + l_{1c}) - l_{1c}(1 - n_y/n^2), \\
 l_{1x}^e &= (l_1 + l_{1c}) - l_{1c}[1 - (\sin^2 \phi + n_x^2/n_z^2 \cos^2 \phi)/(n_x^2/n)], \\
 l_{1y}^e &= (l_1 + l_{1c}) - l_{1c}(1 - n/n_x^2),
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

e o segundo caminho,

$$\begin{aligned}
l_{2x}^o &= (l_2 + l_{2c}) - l_{2c}(1 - 1/n_y), \\
l_{2y}^o &= (l_2 + l_{2c}) - l_{2c}(1 - n_y/n^2), \\
l_{2x}^e &= (l_2 + l_{2c}) - l_{2c}[1 - (\sin^2 \phi + n_x^2/n_z^2 \cos^2 \phi)/(n_x^2/n)], \\
l_{2y}^e &= (l_2 + l_{2c}) - l_{2c}(1 - n/n_x^2)
\end{aligned} \tag{5.32}$$

com $l_{1(x,y)}^o, l_{2(x,y)}^o$, sendo a correção no caminho entre M_1 e R e $l_{1(x,y)}^e, l_{2(x,y)}^e$ a correção entre R e M_2 . O comprimento geométrico das distâncias são: $L_1 = l_1 + l_{1c}$ e $L_2 = l_2 + l_{2c}$. E os índices (o, e) representa as respectivas polarizações nas direções ordinária e extraordinária do cristal. Os dados do índice de refração foram obtidos a partir da referência [16].

No caso específico do sistema óptico considerado, mostramos que os comprimentos de *Rayleigh* [Anexo A] equação (A.8) são dados por:

$$\begin{aligned}
(z_{R(x,y)}^e)^2 &= \frac{(l_{1(x,y)}^e - f_{x,y})f_{x,y}^2}{l_{2(x,y)}^e - f_{x,y}} - (l_{1(x,y)}^e - f_{x,y})^2, \\
(z_{R(x,y)}^o)^2 &= \frac{(l_{1(x,y)}^o - f_{x,y})f_{x,y}^2}{l_{2(x,y)}^o - f_{x,y}} - (l_{1(x,y)}^o - f_{x,y})^2,
\end{aligned} \tag{5.33}$$

o parâmetro focal representado por $f_{x,y}$, é a relação entre os planos tangencial e sagital descritos pela equação (5.2), sendo x e y a direção paralela à cavidade e perpendicular a mesma. O comprimento de *Rayleigh* também é corrigido a partir dos parâmetros das equações (5.31 e 5.32). Podemos utilizar os resultados anteriores de uma cavidade equivalente ilustrada na Figura 34 no estudo das condições de ressonância do sistema óptico em questão. Efetivamente, desejamos saber o efeito da birrefringência (nos índices de separação de n_o e n_e) e do comprimento do cristal nas ressonâncias dos modos da cavidade. Para isso, contabilizamos as fases dos modos intracavidade por:

$$\begin{aligned}
\phi_{m,n}^o(L) &= \left(m + \frac{1}{2}\right) \tan^{-1} \left(\frac{z_{Rx}^o}{f_x - l_{1(x)}^o} \right) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \tan^{-1} \left(\frac{z_{Ry}^o}{f_y - l_{1(y)}^o} \right), \\
\phi_{m,n}^e(L) &= \left(m + \frac{1}{2}\right) \tan^{-1} \left(\frac{z_{Rx}^e}{f_x - l_{1(x)}^e} \right) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \tan^{-1} \left(\frac{z_{Ry}^e}{f_y - l_{1(y)}^e} \right),
\end{aligned} \tag{5.34}$$

onde $\phi_{m,n}^o(L)$ é a fase de Gouy do modo $HG_{m,n}$ com polarização ordinária, $\phi_{m,n}^e(L)$ é a fase de Gouy do modo $HG_{m,n}$ com polarização extraordinária e L o comprimento efetivo para cada direção.

A diferença de fase entre dois modos está associada ao intervalo em frequência de ressonância observada da Figura 32. Desse modo, com a finalidade de analisarmos de forma

geral as condições de ressonância para os modos com mesma polarização, escrevemos:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{m,n}^i(z) &= \phi_{01}^i - \phi_{10}^i = \tan^{-1} \left(\frac{z_{Rx}^i}{f_x - l_{1(x)}^i} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{z_{Ry}^i}{f_y - l_{1(y)}^i} \right), \\ &= \tan^{-1} \left[\frac{\frac{z_{Rx}^i}{f_x - l_{1(x)}^i} - \frac{z_{Ry}^i}{f_y - l_{1(y)}^i}}{1 + \frac{z_{Rx}^i z_{Ry}^i}{(f_x - l_{1(x)}^i)(f_y - l_{1(y)}^i)}} \right]. \end{aligned} \quad (5.35)$$

onde $i = (o, e)$ são os índices de polarização do cristal.

Com isso observamos de imediato que para haver ressonância $\Delta\phi_{m,n}^i(z) = 0$, devemos ter:

$$\frac{z_{Rx}^i}{f_x - l_{1(x)}^i} = \frac{z_{Ry}^i}{f_y - l_{1(y)}^i} \quad (5.36)$$

De posse desse resultado, partimos para a última etapa que é a verificação da possibilidade da cavidade dobrada de se transmitir o modo de um Laguerre LG_{01} , dado pela ressonância simultânea dos modos HG_{01} e HG_{10} , conforme ilustrado na Figura 36.

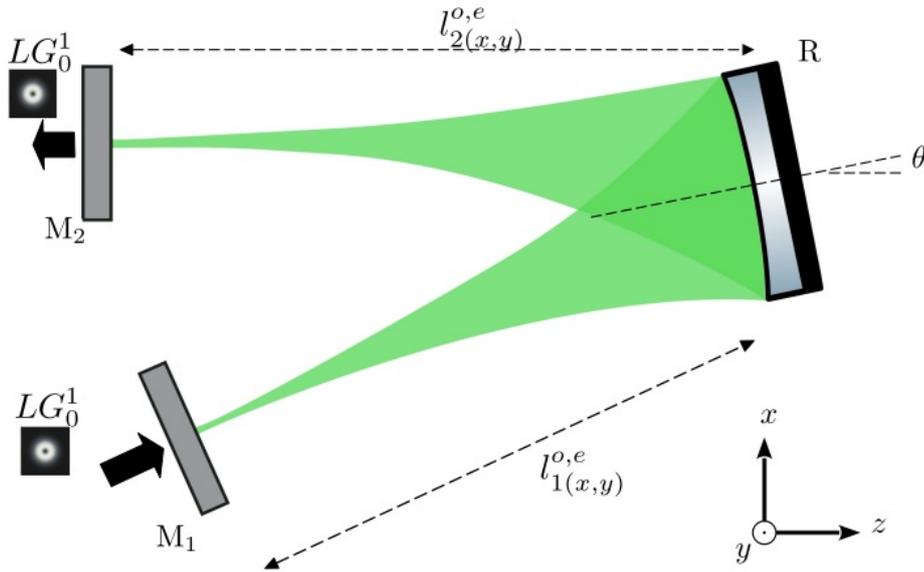


Figura 36 – Cavidade dobrada transmitindo um modo LG_{01} em uma cavidade não astigmática com seus índices de comprimento efetivo $l_{1-efetivo}$ e $l_{2-efetivo}$.

Utilizando os parâmetros e os conceitos discutidos nesta subseção [5.2.1], simulamos os parâmetros através do **Mathematica**TM [Anexo B] a diferença de fase dos modos de primeira ordem se anulando nas polarizações *ordinária* e *extraordinária* do cristal conforme ilustra a Figura 37.

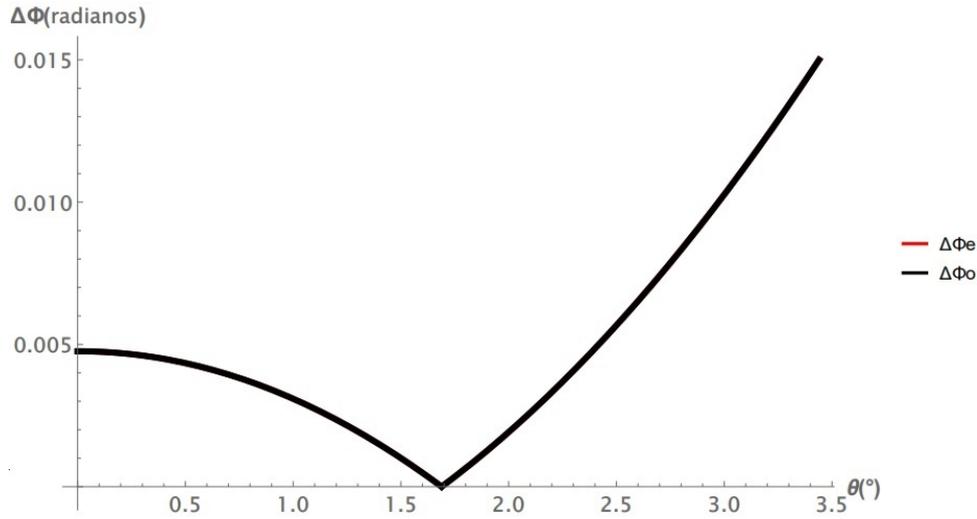


Figura 37 – Fase de Gouy se anulando simultaneamente nas polarizações ordinária e extraordinária para um ângulo $\theta \approx 1.70$ de um cristal KTP tipo II.

A condição $\Delta\phi_e = \Delta\phi_o = 0$ ocorre para um ângulo de $\theta \approx 1.7^\circ$, ângulo para qual o astigmatismo se anula. Portanto, essas configurações são válidas nas seguintes dimensões da cavidade: $l_1 = 81,5mm$, $l_{1c} = 2,5mm$ sendo o comprimento do primeiro cristal, $l_2 = 113mm$ sendo o comprimento do segundo trajeto do feixe após a reflexão do espelho curvo, $l_{2c} = 5mm$ o comprimento do segundo cristal, comprimento de onda $\lambda = 1064nm$, $n_x = 1.7404$, $n_y = 1.7479$, $n_z = 1.8296$, $n = 1.7467$, sendo os dados de índice de refração do cristal obtidos através do trabalho de [16]. Notamos que para chegar a esses resultados, foi necessário girar o cristal 2 (l_{2c}) em $\theta = 90^\circ$, com relação ao seu eixo principal. Neste caso, resultou na compensação do astigmatismo, pois os eixos dos índices de refração do cristal foram trocados, sem essa mudança vimos que as as polarizações não se anulavam simultaneamente.

Observa-se na figura abaixo que não é para qualquer dimensão de cavidade e tamanho de cristal que se satisfaz a compensação do astigmatismo simultaneamente nas polarizações do cristal e isso inviabiliza a ressonância simultânea de dois hermites de primeira ordem, que em consequência prejudica a transmissão de um modo *LG* com MAO.

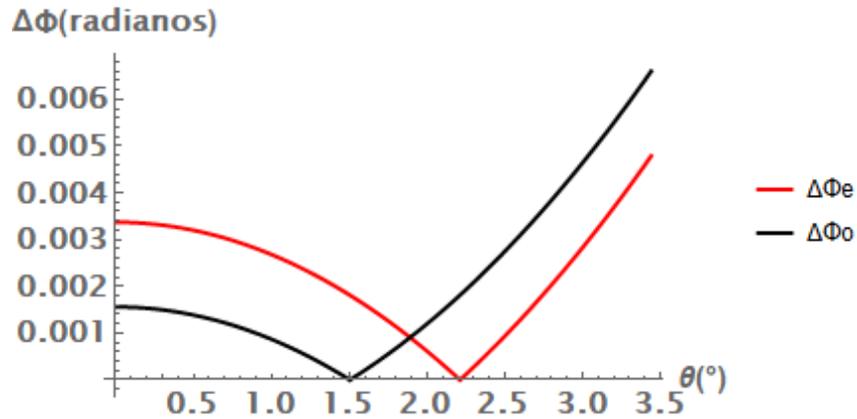


Figura 38 – Observa-se que na presente ilustração que o astigmatismo é compensado com $\theta = 1,5$ na polarização ordinária e enquanto na polarização extraordinária é satisfeita para $\theta = 2,2$. Logo essa configuração não favorece a compensação do astigmatismo nas respectivas polarizações.

Vale salientar que a cavidade dobrada proposta nesse estudo teórico equivale à metade dos parâmetros da fase de Gouy e do cristal de uma cavidade *Bow-Tie* (gravata de borboleta) elaborada por [18] conforme Figura 39.

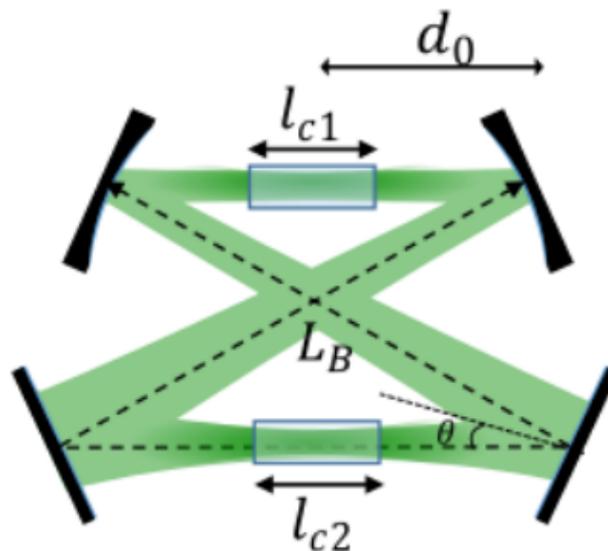


Figura 39 – Cavidade Bow-Tie formada por quatro espelhos, sendo dois curvos e dois planos. Retirado de [18].

Os parâmetros ilustrados são equivalentes à cavidade dobrada de modo que podem ser consultados no trabalho [18]. O parâmetro $d_0 = l_1/2$ na *Bow-Tie* é equivalente ao comprimento l_1 da cavidade dobrada e $L_B/2 = L - 2d_0$ equivalente a l_2 na dobrada.

A cavidade dobrada apresenta como vantagem um número reduzido de elementos ópticos o que facilita as etapas de alinhamento do sistema óptico no laboratório e sendo

uma candidata para a construção de OPO e estudo de processos paramétricos em feixes estruturados com Momento Angular Orbital.

Capítulo 6

Conclusão e Perspectivas

Nesta dissertação, apresentamos uma proposta experimental de uso de uma cavidade dobrada que apresenta resultados interessantes para se compensar o astigmatismo utilizando dois cristais birrefringentes. O modelo de cavidade possibilita a simplificação do seu uso em laboratório, uma vez que essa cavidade possui um arranjo de três espelhos e que além disso existe a possibilidade do fácil alinhamento. Neste estudo teórico, partimos do conceito básico através da matriz ABCD para caracterizar a evolução do feixe nessa geometria. Além da propagação, a matriz nos possibilitou descrever os efeitos da birrefringência nos dois cristais da cavidade. Para que pudéssemos modificar a matriz, corrigimos os caminhos ópticos de refração devido ao uso do cristal. Testamos teoricamente pelo software Mathematica uma configuração de cavidade que se adequasse a nossa proposta de uso, a de se compensar o astigmatismo.

Os parâmetros que utilizamos foram de um cristal KTP (tipo II). As configurações geométricas foram: $l_1 = 81,5mm$, $l_{1c} = 2,5mm$, $l_2 = 113mm$, $l_{2c} = 5mm$ para um ângulo de $\theta \approx 1.7^\circ$ e a diferença de fase obtida na simulação para as polarizações ordinária e extraordinária foi de 5×10^{-3} rad. E esses parâmetros possibilitaram compensar o astigmatismo simultaneamente nas polarizações do cristal utilizado neste trabalho.

A proposta de se montar cavidade ópticas com astigmatismo nulo é de grande relevância no estudo para a produção de feixes gêmeos emaranhados, teletransporte quântico e estados quânticos da luz [10, 16, 37]. Na perspectiva de se contribuir para futuras pesquisas que venham a utilizar a cavidade dobrada com a finalidade de se compensar astigmatismo, os resultados e os caminhos que nos levaram a elaborar essa proposta teórica nos mostrou uma possibilidade de se testar experimentalmente e utilizar outras configurações para essa cavidade. Atualmente no laboratório de Óptica Quântica da UFF está sendo montado um experimento para verificar a possibilidade de uso da cavidade em OPO.

Referências

- 1 AMARAL, J.; LIMA, C. Moldando a luz: a física por trás dos feixes ópticos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 43, 2021.
- 2 MARTINS, R. d. A.; SILVA, C. C. As pesquisas de newton sobre a luz: Uma visão histórica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 37, p. 4202–1, 2015.
- 3 ZANGWILL, A. *Modern electrodynamics*. Cambridge University Press, 2012.
- 4 GRIFFITHS, D. J. *Eletrodinâmica*. [S.l.]: Pearson Addison Wesley, 2011.
- 5 JACKSON, J. D. *Classical electrodynamics*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1999.
- 6 D’AMBROSIO, V. et al. Complete experimental toolbox for alignment-free quantum communication. *Nature communications*, Nature Publishing Group, v. 3, n. 1, p. 1–8, 2012.
- 7 JÚNIOR, R. A. *A revolução dos lasers de femtossegundo na oftalmologia*. [S.l.]: SciELO Brasil, 2011. 207–210 p.
- 8 PADGETT, M.; ALLEN, L. The poynting vector in laguerre-gaussian laser modes. *Optics Communications*, v. 121, n. 1, p. 36–40, 1995. ISSN 0030-4018. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/003040189500455H>>.
- 9 SEGhilani, M. S. et al. Vortex laser based on iii-v semiconductor metasurface: direct generation of coherent laguerre-gauss modes carrying controlled orbital angular momentum. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 6, n. 1, p. 1–12, 2016.
- 10 BUONO, W. T. et al. Arbitrary orbital angular momentum addition in second harmonic generation. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 16, n. 9, p. 093041, sep 2014. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/16/9/093041>>.
- 11 MELO, F. d. V. et al. Produção de feixes com momento angular orbital e estudo experimental da fase de gouy em um modulador espacial de luz. 2018.
- 12 SOUZA, C. E. R. d. et al. Aplicações do momento angular orbital da luz à computação e informação quântica. Programa de Pós-graduação em Física, 2010.
- 13 VAZIRI, A. et al. Entanglement of the angular orbital momentum states of the photons. *Nature*, v. 412, n. 313, 2001.

- 14 SOUZA, C. et al. Quantum key distribution without a shared reference frame. *Physical Review A*, APS, v. 77, n. 3, p. 032345, 2008.
- 15 KOGELNIK, H.; LI, T. Laser beams and resonators. *Applied optics*, Optica Publishing Group, v. 5, n. 10, p. 1550–1567, 1966.
- 16 MARTINELLI, M. et al. Orbital angular momentum exchange in an optical parametric oscillator. *Physical Review A*, APS, v. 70, n. 1, p. 013812, 2004.
- 17 MARTINELLI, M. *Compressão de ruído quântico e efeitos transversos em osciladores paramétricos óticos*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2002.
- 18 DIAS, G. d. O. E. et al. Correção de astigmatismo em cavidades com meios birrefringentes. 2021.
- 19 WINKLER, G. et al. Non-planar femtosecond enhancement cavity for vuv frequency comb applications. *Opt. Express*, Optica Publishing Group, v. 24, n. 5, p. 5253–5262, Mar 2016. Disponível em: <<http://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-24-5-5253>>.
- 20 NOACK, A.; BOGAN, C.; WILLKE, B. Higher-order laguerre–gauss modes in (non-) planar four-mirror cavities for future gravitational wave detectors. *Opt. Lett.*, Optica Publishing Group, v. 42, n. 4, p. 751–754, Feb 2017. Disponível em: <<http://opg.optica.org/ol/abstract.cfm?URI=ol-42-4-751>>.
- 21 QIAO, W. et al. A simple method for astigmatic compensation of folded resonator without brewster window. *Opt. Express*, Optica Publishing Group, v. 22, n. 3, p. 2309–2316, Feb 2014. Disponível em: <<http://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-22-3-2309>>.
- 22 KOGELNIK, H. et al. Astigmatically compensated cavities for cw dye lasers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, v. 8, n. 3, p. 373–379, 1972.
- 23 SIEGMAN, A. E. Lasers university science books. *Mill Valley, CA*, v. 37, n. 208, p. 169, 1986.
- 24 YARIV, A. *Optical electronics*. [S.l.]: Saunders College Publishing, 1985.
- 25 ANDRADE, R. B. d. *Construção de um oscilador paramétrico ótico para uma interface átomo-luz*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2013.
- 26 BUONO, W. T. Soma de momento angular orbital da luz na geração de segundo harmônico. 2017.
- 27 MORAES, F. C. D. d. *Construção e caracterização de um laser contínuo de titânio-safira*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2013.
- 28 ALLEN, L.; PADGETT, M.; BABIKER, M. Iv the orbital angular momentum of light. In: WOLF, E. (Ed.). Elsevier, 1999, (Progress in Optics, v. 39). p. 291–372. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0079663808703913>>.
- 29 SALEH, B. E.; TEICH, M. C. *Fundamentals of photonics*. [S.l.]: john Wiley & sons, 2019.
- 30 FENG, S.; WINFUL, H. G. Physical origin of the gouy phase shift. *Opt. Lett.*, Optica Publishing Group, v. 26, n. 8, p. 485–487, Apr 2001. Disponível em: <<https://opg.optica.org/ol/abstract.cfm?URI=ol-26-8-485>>.

- 31 NAGOURNEY, W. G. *Quantum electronics for atomic physics*. Oxford ; New York: Oxford University Press, 2010. (Oxford graduate texts). OCLC: ocn489631635. ISBN 9780199532629.
- 32 ZÍLIO, S. C. *Óptica moderna: fundamentos e aplicações*. 2009.
- 33 PADGETT, M.; COURTIAL, J.; ALLEN, L. Light's orbital angular. 2004.
- 34 YAO, A. M.; PADGETT, M. J. Orbital angular momentum: origins, behavior and applications. *Adv. Opt. Photon.*, Optica Publishing Group, v. 3, n. 2, p. 161–204, Jun 2011. Disponível em: <<http://opg.optica.org/aop/abstract.cfm?URI=aop-3-2-161>>.
- 35 ROSALES-GUZMÁN, C.; NDAGANO, B.; FORBES, A. A review of complex vector light fields and their applications. *Journal of Optics*, IOP Publishing, v. 20, n. 12, p. 123001, nov 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/2040-8986/aaeb7d>>.
- 36 SOUZA, C. E. R.; HUGUENIN, J. A. O.; KHOURY, A. Z. Topological phase structure of vector vortex beams. *J. Opt. Soc. Am. A*, Optica Publishing Group, v. 31, n. 5, p. 1007–1012, May 2014. Disponível em: <<http://opg.optica.org/josaa/abstract.cfm?URI=josaa-31-5-1007>>.
- 37 BARROS, R.; ALVES, G.; KHOURY, A. Gouy-phase effects in the frequency combs of an optical parametric oscillator. *Physical Review A*, APS, v. 103, n. 2, p. 023511, 2021.
- 38 ÁLVAREZ, M. D. *Optical cavities for optical atomic clocks, atom interferometry and gravitational-wave detection*. [S.l.]: Springer, 2019.
- 39 STECK, D. A. *Classical and modern optics*. Oregon University, 2006.
- 40 ARNAUD, J. A.; KOGELNIK, H. Gaussian light beams with general astigmatism. *Applied optics*, Optical Society of America, v. 8, n. 8, p. 1687–1693, 1969.
- 41 HANNA, D. Astigmatic gaussian beams produced by axially asymmetric laser cavities. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, v. 5, n. 10, p. 483–488, 1969.
- 42 FLECK, J. A.; FEIT, M. D. Beam propagation in uniaxial anisotropic media. *J. Opt. Soc. Am.*, Optica Publishing Group, v. 73, n. 7, p. 920–926, Jul 1983. Disponível em: <<http://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=josa-73-7-920>>.
- 43 YEH, P.; YARIV, A. Optical waves in crystals: Propagation and control of laser radiation. In: *Wiley Series in Pure and Applied Optics*. [S.l.: s.n.], 1984. v. 589.
- 44 BORN, M.; WOLF, E. *Principles of Optics: 60th Anniversary Edition*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. ISBN 9781108806756.
- 45 POWERS, P. E.; HAUS, J. W. *Fundamentals of nonlinear optics*. [S.l.]: CRC press, 2017.
- 46 FOWLES, G. R. *Introduction to modern optics*. [S.l.]: Courier Corporation, 1989.
- 47 QIAO, W. et al. Simple method of optical ring cavity design and its applications. *Opt. Express*, Optica Publishing Group, v. 22, n. 12, p. 14782–14791, Jun 2014. Disponível em: <<https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-22-12-14782>>.

-
- 48 SCHWOB, C. et al. Transverse effects and mode couplings in opo. *Applied Physics B*, Springer, v. 66, n. 6, p. 685–699, 1998.
- 49 DINGJAN, J. *Multi-mode optical resonators and wave chaos*. [S.l.]: Universiteit Leiden, 2003.

APÊNDICE

A

Fase de gouy na cavidade dobrada

A fase de Gouy acumulada na cavidade dobrada pode ser ilustrada conforme a figura 40 por uma lente delgada. Onde l_1 é a distância a partir de z_R até a lente ($f = R/2$) e l_2 sendo a distância da lente a z'_R .

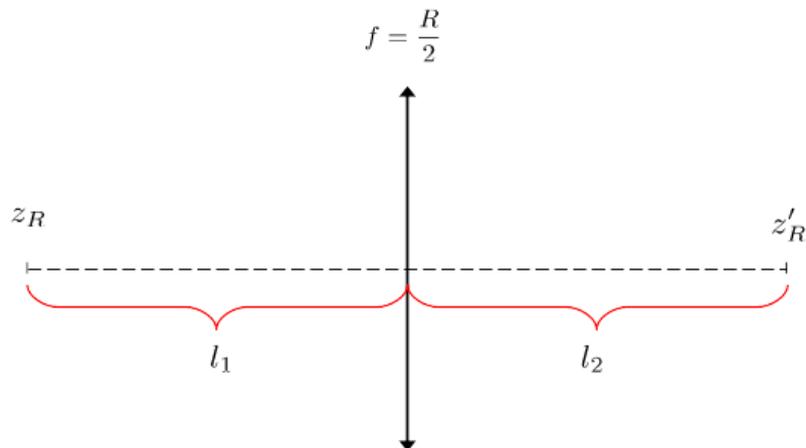


Figura 40 – Representação da posição do comprimento de Rayleigh associado as duas cinturas na cavidade dobrada .

O vínculo da cavidade dobrada é dado por:

$$L = l_1 + l_2. \quad (\text{A.1})$$

A fase de Gouy acumulada conforme a ilustrado na figura 40 é descrita por:

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{l_1}{z_R} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{l_2}{z'_R} \right), \quad (\text{A.2})$$

utilizando a identidade trigonometrica inversa para arco tangente $\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(y) = \tan^{-1} \left(\frac{x+y}{1-xy} \right)$, podemos mostrar que a fase acumulada é reescrita da seguinte maneira:

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{z'_R l_1 + z_R l_2}{z'_R z_R - l_1 l_2} \right). \quad (\text{A.3})$$

Precisamos determinar os comprimentos de Rayleigh (z_R, z'_R) para l_1 e l_2 da cavidade a fim de se contabilizar a fase de Gouy acumulada.

A partir do referencial [37,47] é possível relacionar os comprimentos de Rayleigh em função da distância focal da lente a partir do estudo de uma cavidade em anel, portanto, temos:

$$w_0'^2 = \frac{f^2 w_0^2}{(l-f)^2 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda}\right)^2}, \quad (\text{A.4})$$

e,

$$l' = f + \frac{(l-f)f^2}{(l-f)^2 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda}\right)^2}. \quad (\text{A.5})$$

onde w_0' é a cintura após a lente a uma distância l' .

Portanto, podemos mostrar que a partir da Figura 40 o comprimento de Rayleigh dado pela equação A.4 e a distância l_2 dada pela equação A.5 pode ser descrita por:

$$z'_R = \frac{f^2 z_R}{(l_1 - f)^2 + z_R^2}, \quad (\text{A.6})$$

onde usamos o fato que $z_R = \pi w_0^2 / \lambda$. E a distância l_2 torna-se:

$$l_2 = f + \frac{(l_1 - f)f^2}{(l_1 - f)^2 + z_R^2}, \quad (\text{A.7})$$

isolando o termo do denominador da equação A.7 com o objetivo de obter z_R^2 , é possível mostrar que:

$$z_R^2 = \frac{(l_1 - f)f^2}{l_2 - f} - (l_1 - f)^2, \quad (\text{A.8})$$

$$= \frac{(l_1 - f)f^2}{L - l_1 - f} - (l_1 - f)^2,$$

onde $l_2 = L - l_1$.

A partir do conjunto de equações (A.1), (A.6), (A.7) e (A.8) podemos contabilizar a fase de Gouy acumulada por:

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{f^2 z_R}{(l_1 - f)^2 + z_R^2} l_1 + z_R l_2}{\frac{f^2 z_R}{(l_1 - f)^2 + z_R^2} z_R - l_1 l_2} \right), \quad (\text{A.9})$$

reorganizando os termos utilizando a equação (A.8) para z_R^2 , chega-se a:

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{f^2 z_R}{(l_1-f)^2+z_R^2} l_1 + z_R l_2}{\frac{f^2}{(l_1-f)^2+z_R^2} \left[\frac{(l_1-f)f^2}{L-l_1-f} - (l_1-f)^2 \right] - l_1 l_2} \right), \quad (\text{A.10})$$

novamente, utilizando a equação (A.7) para l_2 , temos:

$$\begin{aligned} \phi &= \tan^{-1} \left(\frac{\frac{f^2 z_R}{(l_1-f)^2+z_R^2} l_1 + z_R \left\{ f + \frac{(l_1-f)f^2}{(l_1-f)^2+z_R^2} \right\} \left(\frac{(l_1-f)^2+z_R^2}{(l_1-f)^2+z_R^2} \right)}{\frac{f^2}{(l_1-f)^2+z_R^2} \left[\frac{(l_1-f)f^2}{L-l_1-f} - (l_1-f)^2 \right] - l_1 \left\{ f + \frac{(l_1-f)f^2}{(l_1-f)^2+z_R^2} \right\} \left(\frac{(l_1-f)^2+z_R^2}{(l_1-f)^2+z_R^2} \right)} \right) \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{z_R f^2 l_1 + z_R \left\{ f + \frac{(l_1-f)f^2}{(l_1-f)^2+z_R^2} \right\} [(l_1-f)^2 + z_R^2]}{f^2 \left[\frac{(l_1-f)f^2}{L-l_1-f} - (l_1-f)^2 \right] - l_1 \left\{ f + \frac{(l_1-f)f^2}{(l_1-f)^2+z_R^2} \right\} [(l_1-f)^2 + z_R^2]} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

o termo $\left(\frac{(l_1-f)^2+z_R^2}{(l_1-f)^2+z_R^2} \right)$ que surge na equação anterior é para simplificar o denominador de forma a reduzir a expressão. O denominador $(L-l_1)$ é substituído pela equação (A.7), de modo que novamente reescrevemos da seguinte forma:

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{z_R f^2 l_1 + z_R \left\{ f + \frac{(l_1-f)f^2}{(l_1-f)^2+z_R^2} \right\} [(l_1-f)^2 + z_R^2]}{f^2 \left[\frac{(l_1-f)f^2}{\left\{ f + \frac{(l_1-f)f^2}{(l_1-f)^2+z_R^2} \right\} - f} - (l_1-f)^2 \right] - l_1 \left\{ f + \frac{(l_1-f)f^2}{(l_1-f)^2+z_R^2} \right\} [(l_1-f)^2 + z_R^2]} \right), \quad (\text{A.12})$$

simplificando os termos,

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{z_R f^2 l_1 + z_R f [(l_1-f)^2 + z_R^2] + z_R (l_1-f) f^2}{f^2 [(l_1-f)^2 + z_R^2] - f^2 (l_1-f)^2 - f [(l_1-f)^2 + z_R^2] l_1 - f^2 (l_1-f) l_1} \right), \quad (\text{A.13})$$

logo, é possível mostrar que:

$$\begin{aligned}
 \phi &= \tan^{-1} \left(\frac{z_R}{f} f \left\{ \frac{fl_1 + [(l_1 - f)^2 + z_R^2] + (l_1 - f)f}{f [(l_1 - f)^2 + z_R^2] - f(l_1 - f)^2 - [(l_1 - f)^2 + z_R^2]l_1 - f(l_1 - f)l_1} \right\} \right), \\
 &= \tan^{-1} \left(z_R \left\{ \frac{fl_1 + [(l_1 - f)^2 + z_R^2] + (l_1 - f)f}{(f - l_1) [(l_1 - f)^2 + z_R^2] - (l_1 - f) [(l_1 - f)f + l_1f]} \right\} \right), \\
 &= \tan^{-1} \left(\frac{z_R}{(f - l_1)} \left\{ \frac{fl_1 + [(l_1 - f)^2 + z_R^2] + (l_1 - f)f}{[(l_1 - f)^2 + z_R^2] + [(l_1 - f)f + l_1f]} \right\} \right), \\
 &= \tan^{-1} \left(\frac{z_R}{(f - l_1)} \left\{ \frac{fl_1 + (l_1 - f)f + [(l_1 - f)^2 + z_R^2]}{fl_1 + (l_1 - f)f + [(l_1 - f)^2 + z_R^2]} \right\} \right), \\
 &= \tan^{-1} \left(\frac{z_R}{(f - l_1)} \left\{ \frac{fl_1 + (l_1 - f)f + [(l_1 - f)^2 + z_R^2]}{fl_1 + (l_1 - f)f + [(l_1 - f)^2 + z_R^2]} \right\} \right),
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

Portanto, é possível mostrar que a fase de Gouy acumulada na cavidade dobrada é reduzida a termos simples que compoe a geometria do problema, logo:

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{z_R}{f - l_1} \right) \tag{A.15}$$

APÊNDICE B

Modelo teórico da cavidade dobrada utilizando Mathematica

Neste capítulo apresento a simulação teórica da proposta desenvolvida no *software Wolfram Mathematica*. O código foi desenvolvido pelo autor dessa dissertação. Os gráficos de cintura e da fase de Gouy foram obtidos do código abaixo. Basicamente, simulamos a matriz ABCD da cavidade no qual verificamos a existência das duas cinturas da cavidade. Propomos a correção do astigmatismo da cavidade com o uso de cristais birrefringentes no qual levamos em consideração o plano focal do espelho curvo. O código é dividido em: parâmetros de entrada, matriz ABCD e plot das cinturas. No final do código é exibido o gráfico da compensação do astigmatismo na polarização ordinária e extraordinária do cristal assim como os valores das quatro cinturas.

In[200]:= ClearAll[n1, l1c, l2c, l1, l2, R1, θ]

[apaga tudo

R1 = $100 * 10^{-3}$; (*espelho curvo*)
 $\lambda = 1064 * 10^{-9}$; (*comprimento de onda*)
n1 = 1.7467; (*índice de refração do cristal*)
n2 = 1; (*índice de refração do ar*)

l1c = $2.5 * 10^{-3}$;
l2c = $5 * 10^{-3}$;

l1 = $81.5 * 10^{-3}$; (*distância entre M1 até R*)
l2 = $113 * 10^{-3}$; (*distância entre M2 até R*)

nx = 1.7404;
ny = 1.7479;
nz = 1.8296;
 $\phi = (23.5) * (\pi / 180)$;

(*Índices de refração/ direções ordinária e extraordinária*)

nzo = $(n1^2 / nz)$;
nyo = nz;
nze = $(ny^2 / n1)$;
nye = $(\left(\left(ny^2 * (\cos[\phi])^2 \right) / nx^2 + (\sin[\phi])^2 \right) / (ny^2 / n1))^{-1}$;

(*-----comprimento efetivo-----*)

(*correção - BRAÇO l1*)

l1zo = $(l1 + l1c) - (l1c) * (1 - (1 / nzo))$
l1yo = $(l1 + l1c) - (l1c) * (1 - (1 / nyo))$
l1ze = $(l1 + l1c) - (l1c) * (1 - (1 / nze))$
l1ye = $(l1 + l1c) - (l1c) * (1 - (1 / nye))$

(*Correção - BRAÇO l2*)

l2zo = $(l2 + l2c) - (l2c) * (1 - (1 / nzo))$
l2yo = $(l2 + l2c) - (l2c) * (1 - (1 / nyo))$
l2ze = $(l2 + l2c) - (l2c) * (1 - (1 / nze))$
l2ye = $(l2 + l2c) - (l2c) * (1 - (1 / nye))$

(*-----*)

(*Matrizes de propagação c/ caminho óptico corrigido*)

(*w1zo-correção no 1 cristal*)

M1z1 = {{1, l1zo}, {0, 1}};

M2z1 = {{1, 0}, {-2 / (R1 / Cos[$\theta * \pi / 180$])}, 1}};
[cosseno [número pi

M3z1 = {{1, l2ze}, {0, 1}}; (*l2zo p/ l2ze*) (*INDICA 2-CRISTAL RODADO*)

$M4z1 = \{\{1, 0\}, \{0, 1\}\};$

$M5z1 = \{\{1, l2ze\}, \{0, 1\}\};$
 (*l2zo p/ l2ze*) (*INDICA 2-CRISTAL RODADO*)

$M6z1 = \{\{1, 0\}, \{-2 / (R1 / \text{Cos}[\theta * \text{Pi} / 180])\}, 1\}\};$
[cosseno [número pi]

$M7z1 = \{\{1, l1zo\}, \{0, 1\}\};$

$Mcavz1 = M7z1.M6z1.M5z1.M4z1.M3z1.M2z1.M1z1;$

$A1zo = Mcavz1[[1, 1]];$

$B1zo = Mcavz1[[1, 2]];$

$C1zo = Mcavz1[[2, 1]];$

$D1zo = Mcavz1[[2, 2]];$

$\Delta = (D1zo - A1zo)^2 + 4 * B1zo * C1zo;$ (*parâmetro avaliar estabilidade*)

$w1z0 = \text{Sqrt}[(\text{Abs}[B1zo] * \lambda) / (nzo * \pi)] * (1 - ((D1zo + A1zo) / 2)^2)^{(-1/4)};$
[raiz q... [valor absoluto]

(*w2zo-correção no 2 cristal*)

$M1z2 = \{\{1, l1zo\}, \{0, 1\}\};$

$M2z2 = \{\{1, 0\}, \{-2 / (R1 / \text{Cos}[\theta * \text{Pi} / 180])\}, 1\}\};$
[cosseno [número pi]

$M3z2 = \{\{1, l2ze\}, \{0, 1\}\};$ (*l2zo p/ l2ze*) (*INDICA 2-CRISTAL RODADO*)

$Mcavz2 = M3z2.M2z2.M1z2;$

$A2zo = Mcavz2[[1, 1]];$

$B2zo = Mcavz2[[1, 2]];$

$C2zo = Mcavz2[[2, 1]];$

$D2zo = Mcavz2[[2, 2]];$

$\Delta = (D2zo - A2zo)^2 + 4 * B2zo * C2zo;$

$q2zo = (I * \text{Pi} * n2 * w1z0^2) / \lambda;$
[u... [número pi]

$w2zo = \text{Sqrt}[-(\lambda / (\text{Pi} * n2 * \text{Im}[(C2zo * q2zo + D2zo) / (A2zo * q2zo + B2zo)]))]];$
[raiz quadrada [número pi [parte imaginária]

(*w1yo-correção no 1 cristal*)

$M1y1 = \{\{1, l1yo\}, \{0, 1\}\};$

$M2y1 = \{\{1, 0\}, \{-2 / (R1 * \text{Cos}[\theta * \text{Pi} / 180])\}, 1\}\};$
[cosseno [número pi]

$M3y1 = \{\{1, l2ye\}, \{0, 1\}\};$ (*l2yo p/ l2ye*) (*INDICA 2-CRISTAL RODADO*)

$M4y1 = \{\{1, 0\}, \{0, 1\}\};$

$M5y1 = \{\{1, l2ye\}, \{0, 1\}\}; (*l2yo \text{ p/ } l2ye*) (*INDICA 2-CRISTAL RODADO*)$

$M6y1 = \{\{1, 0\}, \{-2 / (R1 * \text{Cos}[\theta * \text{Pi} / 180])\}, 1\}\};$
[cosseno [número pi]

$M7y1 = \{\{1, l1yo\}, \{0, 1\}\};$

$Mcavy1 = M7y1.M6y1.M5y1.M4y1.M3y1.M2y1.M1y1;$

$A1yo = Mcavy1[[1, 1]];$

$B1yo = Mcavy1[[1, 2]];$

$C1yo = Mcavy1[[2, 1]];$

$D1yo = Mcavy1[[2, 2]];$

$\Delta = (D1yo - A1yo)^2 + 4 * B1yo * C1yo; (*parâmetro avaliar estabilidade*)$

$w1y0 = \text{Sqrt}[(\text{Abs}[B1yo] * \lambda) / (nyo * \pi)] * (1 - ((D1yo + A1yo) / 2)^2)^{(-1/4)};$
[raiz q... [valor absoluto]

(*w2yo-correção no 2 cristal*)

$M1y2 = \{\{1, l1yo\}, \{0, 1\}\};$

$M2y2 = \{\{1, 0\}, \{-2 / (R1 * \text{Cos}[\theta * \text{Pi} / 180])\}, 1\}\};$
[cosseno [número pi]

$M3y2 = \{\{1, l2ye\}, \{0, 1\}\}; (*l2zo \text{ p/ } l2ze*) (*INDICA 2-CRISTAL RODADO*)$

$Mcavy2 = M3y2.M2y2.M1y2;$

$A2yo = Mcavy2[[1, 1]];$

$B2yo = Mcavy2[[1, 2]];$

$C2yo = Mcavy2[[2, 1]];$

$D2yo = Mcavy2[[2, 2]];$

$\Delta = (D2yo - A2yo)^2 + 4 * B2yo * C2yo;$

$q2yo = (I * \text{Pi} * n2 * w1y0^2) / \lambda;$
[u... [número pi]

$w2yo = \text{Sqrt}[-(\lambda / (\text{Pi} * n2 * \text{Im}[(C2yo * q2yo + D2yo) / (A2yo * q2yo + B2yo)]))];$
[raiz quadrada [número pi [parte imaginária]

(*w1ze-correção no 1 cristal*)

$M1z1 = \{\{1, l1ze\}, \{0, 1\}\};$

$M2z1 = \{\{1, 0\}, \{-2 / (R1 / \text{Cos}[\theta * \text{Pi} / 180])\}, 1\}\};$
[cosseno [número pi]

$M3z1 = \{\{1, l2zo\}, \{0, 1\}\};$

$(*l2ze \text{ p/ } l2zo*) (*INDICA 2-CRISTAL RODADO*)$

$M4z1 = \{\{1, 0\}, \{0, 1\}\};$

```

M5z1 = {{1, l2zo}, {0, 1}};
(*l2ze p/ l2zo*) (*INDICA 2-CRISTAL RODADO*)

M6z1 = {{1, 0}, {-2 / (R1 / Cos[θ * Pi / 180]), 1}};
           [cosseno [número pi]
M7z1 = {{1, l1ze}, {0, 1}};

Mcavz1 = M7z1.M6z1.M5z1.M4z1.M3z1.M2z1.M1z1;

A1ze = Mcavz1[[1, 1]];
B1ze = Mcavz1[[1, 2]];
C1ze = Mcavz1[[2, 1]];
D1ze = Mcavz1[[2, 2]];

Δ = (D1ze - A1ze)^2 + 4 * B1ze * C1ze; (*parâmetro avaliar estabilidade*)

w1zE = Sqrt[(Abs[B1ze] * λ) / (nze * π)] * (1 - ((D1ze + A1ze) / 2)^2)^(-1/4);
           [raiz q... [valor absoluto]

(*w2ze-correção no 2 cristal*)

M1ze2 = {{1, l1ze}, {0, 1}};

M2ze2 = {{1, 0}, {-2 / (R1 / Cos[θ * Pi / 180]), 1}};
           [cosseno [número pi]
M3ze2 = {{1, l2zo}, {0, 1}};
(*l2ze p/ l2zo*) (*INDICA 2-CRISTAL RODADO*)

Mcavze2 = M3ze2.M2ze2.M1ze2;

A1ze2 = Mcavze2[[1, 1]];
B1ze2 = Mcavze2[[1, 2]];
C1ze2 = Mcavze2[[2, 1]];
D1ze2 = Mcavze2[[2, 2]];

Δ = (D1ze2 - A1ze2)^2 + 4 * B1ze2 * C1ze2;

q2ze = (I * Pi * n2 * w1zE^2) / λ;
           [u... [número pi]
w2ze = Sqrt[-(λ / (Pi * n2 * Im[(C1ze2 * q2ze + D1ze2) / (A1ze2 * q2ze + B1ze2)]))];
           [raiz quadrada [número pi] [parte imaginária]

(*w1ye-correção no 1 cristal*)

M1y1 = {{1, l1ye}, {0, 1}};

M2y1 = {{1, 0}, {-2 / (R1 * Cos[θ * Pi / 180]), 1}};
           [cosseno [número pi]
M3y1 = {{1, l2yo}, {0, 1}};
(*l2ye p/ l2yo*) (*INDICA 2-CRISTAL RODADO*)

M4y1 = {{1, 0}, {0, 1}};

```

```

M5y1 = {{1, l2yo}, {0, 1}};
(*l2ye p/ l2yo*) (*INDICA 2-CRISTAL RODADO*)

M6y1 = {{1, 0}, {-2 / (R1 * Cos[θ * Pi / 180]), 1}};
      [cosseno [número pi]
M7y1 = {{1, l1ye}, {0, 1}};

Mcavy1 = M7y1.M6y1.M5y1.M4y1.M3y1.M2y1.M1y1;

A1ye = Mcavy1[[1, 1]];
B1ye = Mcavy1[[1, 2]];
C1ye = Mcavy1[[2, 1]];
D1ye = Mcavy1[[2, 2]];

Δ = (D1ye - A1ye)^2 + 4 * B1ye * C1ye;

w1yE = Sqrt[(Abs[B1ye] * λ) / (nye * π)] * (1 - ((D1ye + A1ye) / 2)^2)^(-1/4);
      [raiz q... [valor absoluto]
(*w2ye-correção no 2 cristal*)

M1ye2 = {{1, l1ye}, {0, 1}};

M2ye2 = {{1, 0}, {-2 / (R1 * Cos[θ * Pi / 180]), 1}};
      [cosseno [número pi]
M3ye2 = {{1, l2yo}, {0, 1}};
(*l2ye p/ l2yo*) (*INDICA 2-CRISTAL RODADO*)

Mcavye2 = M3ye2.M2ye2.M1ye2;

A1ye2 = Mcavye2[[1, 1]];
B1ye2 = Mcavye2[[1, 2]];
C1ye2 = Mcavye2[[2, 1]];
D1ye2 = Mcavye2[[2, 2]];

Δ = (D1ye2 - A1ye2)^2 + 4 * B1ye2 * C1ye2;

q2ye = (I * Pi * n2 * w1yE^2) / λ;
      [u... [número pi]
w2ye = Sqrt[-(λ / (Pi * n2 * Im[(C1ye2 * q2ye + D1ye2) / (A1ye2 * q2ye + B1ye2)]))];
      [raiz quadrada [número pi] [parte imaginária]

(*-----*)

(*Plot[{w1zo*10^6, w2zo*10^6}, {θ, 0, 7},
      [gráfico]
      PlotStyle→{Darker[Blue], Green}, PlotRange→{0, 600},
      [estilo do gráfico... [mais e... [azul] [verde] [intervalo do gráfico]
      PlotLegends→{"w1zo", "w2zo", "w1 (θ=0°)"}, Frame→True, FrameLabel→{"θ (°)", "w (μm)"}]
      [legenda do gráfico] [quadro] [ver... [legenda do quadro]
      Plot[{w1zo*10^6}, {θ, 0, 7}, PlotStyle→{Darker[Blue]}, PlotRange→{0, 600},
      [gráfico] [estilo do gráfico... [mais e... [azul] [intervalo do gráfico]

```

```

[gráfico] [estilo do gráfico] [mais em] [azul] [intervalo do gráfico]
PlotLegends→{"w1zo", "w1 (θ=0°)"}, Frame→True, FrameLabel→{"θ (°)", "w (μm)"}] *)
[legenda do gráfico] [quadro] [ver...] [legenda do quadro]

(*Gráfico DAS CINTURAS*)
(*
Plot[{10^6*w1zo}, {θ, 0, 5}, PlotStyle→{Yellow},
[gráfico] [estilo do gráfico] [amarelo]
AxesLabel→{"θ", "w1zo (μm)"}, Filling→Axis]
[legenda dos eixos] [coloração] [eixo]
Plot[{10^6*w1ze}, {θ, 0, 5}, PlotStyle→{Orange},
[gráfico] [estilo do gráfico] [laranja]
AxesLabel→{"θ", "w1ze (μm)"}, Filling→Axis]
[legenda dos eixos] [coloração] [eixo]
Plot[{10^6*w1yo}, {θ, 0, 5}, PlotStyle→{Pink},
[gráfico] [estilo do gráfico] [rosa]
AxesLabel→{"θ", "w1yo (μm)"}, Filling→Axis]
[legenda dos eixos] [coloração] [eixo]
Plot[{10^6*w1ye}, {θ, 0, 5}, PlotStyle→{Purple},
[gráfico] [estilo do gráfico] [roxo]
AxesLabel→{"θ", "w1ye (μm)"}, Filling→Axis]
[legenda dos eixos] [coloração] [eixo]

Plot[{10^6*w2zo}, {θ, 0, 5},
[gráfico]
PlotStyle→{Red}, AxesLabel→{"θ", "w2zo (μm)"}, Filling→Axis]
[estilo do gráfico] [verm...] [legenda dos eixos] [coloração] [eixo]
Plot[{10^6*w2ze}, {θ, 0, 5}, PlotStyle→{Black},
[gráfico] [estilo do gráfico] [preto]
AxesLabel→{"θ", "w2ze (μm)"}, Filling→Axis]
[legenda dos eixos] [coloração] [eixo]
Plot[{10^6*w2yo}, {θ, 0, 5}, PlotStyle→{Blue},
[gráfico] [estilo do gráfico] [azul]
AxesLabel→{"θ", "w2yo (μm)"}, Filling→Axis]
[legenda dos eixos] [coloração] [eixo]
Plot[{10^6*w2ye}, {θ, 0, 5}, PlotStyle→{Green},
[gráfico] [estilo do gráfico] [verde]
AxesLabel→{"θ", "w2ye (μm)"}, Filling→Axis]
[legenda dos eixos] [coloração] [eixo]
*)
(*-----*)

(*distancia focal - inclinação dos espelhos*)

fz = R1 / (2 * Cos[θ * Pi / 180]);
[cosseno] [número pi]
fy = R1 * Cos[θ * Pi / 180] / 2;
[cosseno] [número pi]

(*-----*)

(*comprimento de rayleigh*)

```

```
Zrzo = Sqrt[(fz^2 * (11zo - fz)) / (12ze - fz) - (11zo - fz)^2];
Zryo = Sqrt[(fy^2 * (11yo - fy)) / (12ye - fy) - (11yo - fy)^2];
Zrze = Sqrt[(fz^2 * (11ze - fz)) / (12zo - fz) - (11ze - fz)^2];
Zrye = Sqrt[(fy^2 * (11ye - fy)) / (12yo - fy) - (11ye - fy)^2];
```

```
(*Plot[{Zrzo,Zryo},{θ,0,5},PlotStyle→{Darker[Blue],Green},
PlotLegends→{"Zrzo","Zryo"},FrameLabel→{"θ(°)","Zrzo,Zryo"}]
Plot[{Zrze,Zrye},{θ,0,5},PlotStyle→{Darker[Black],Green},
PlotLegends→{"Zrze","Zrye"},FrameLabel→{"θ(°)","Zrze,Zrye"}] *)
```

(*-----FASE DE GOUY-----*)

$$\Delta\phi_e = \text{ArcTan}\left[\frac{\frac{Zrye}{fy-11ye} - \frac{Zrze}{fz-11ze}}{\frac{Zrye+Zrze}{(fy-11ye)*(fz-11ze)}}\right];$$

$$\Delta\phi_o = \text{ArcTan}\left[\frac{\frac{Zryo}{fy-11yo} - \frac{Zrzo}{fz-11zo}}{\frac{Zryo+Zrzo}{(fy-11yo)*(fz-11zo)}}\right];$$

(*-----*)

(*-----gráficos-----*)

```
Plot[{Abs[Δφe], Abs[Abs[Δφo]]}, {θ, 0, 3.44}, AxesLabel → {"θ(°)", "Δφ(radianos)"},
PlotRange → Automatic, PlotStyle → {Directive[Red, Thickness[0.008]],
Directive[Darker[Black], Thickness[0.008]]}, PlotLegends → {"Δφe", "Δφo"},
BaseStyle → {FontSize → 15, Bold, FontFamily → "Latin Modern Math"}]
```

(*-----calculo da cintura para um angulo qualquer-----*)

```
θ = 1.5;
Print["w1zo", "=", Re[w1z0] * 10^6, "μm"]
Print["w1ze", "=", Re[w1zE] * 10^6, "μm"]
Print["w1yo", "=", Re[w1y0] * 10^6, "μm"]
```

```

_apresenta o resultado | parte real
Print ["w1ye", "=", Re[w1yE] * 10^6, "μm"]
_apresenta o resultado | parte real
Print ["w2zo", "=", Re[w2zo] * 10^6, "μm"]
_apresenta o resultado | parte real
Print ["w2ze", "=", Re[w2ze] * 10^6, "μm"]
_apresenta o resultado | parte real
Print ["w2yo", "=", Re[w2yo] * 10^6, "μm"]
_apresenta o resultado | parte real
Print ["w2ye", "=", Re[w2ye] * 10^6, "μm"]
_apresenta o resultado | parte real

```

Out[214]= 0.0829992

Out[215]= 0.0828664

Out[216]= 0.0829293

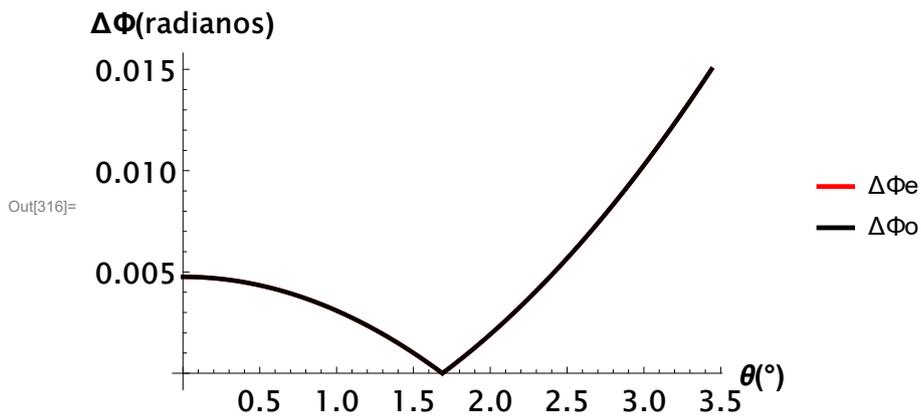
Out[217]= 0.0829397

Out[218]= 0.115998

Out[219]= 0.115733

Out[220]= 0.115859

Out[221]= 0.115879



w1zo=51.1058 μm

w1ze=49.8475 μm

w1yo=48.7896 μm

w1ye=50.1364 μm

w2zo=80.244 μm

w2ze=79.5933 μm

w2yo=78.8931 μm

w2ye=79.7209 μm

