

Universidade Federal Fluminense



Preparação de diferentes classes de modos não separáveis da luz

Igor Ribeiro da Fonseca

Volta Redonda

2022

Igor Ribeiro da Fonseca

Preparação de diferentes classes de modos não separáveis da luz

Dissertação de Mestrado apresentada ao programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Mestre em Física.

Universidade Federal Fluminense – UFF

Instituto de Física

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Prof. Dr. José Augusto Oliveira Huguenin

Volta Redonda – RJ

2022

Igor Ribeiro da Fonseca

Preparação de diferentes classes de modos não separáveis da luz/ Igor Ribeiro da Fonseca. – Volta Redonda – RJ, 2022-

92

DOI: <http://dx.doi.org/10.22409/PPGF.2022.m.42189466806>

Orientador: Prof. Dr. José Augusto Oliveira Huguenin

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Fluminense – UFF

Instituto de Física

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Física , 2022.

1. Modos spin-órbita de um feixe de laser. 2. Estados Quânticos. 3. Emaranhamento.
4. Óptics. 5. Produção intelectual. I. Huguenin, José Augusto Oliveira, Orientador.
- II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Física, Instituição responsável.
- III. Título

CDD

Igor Ribeiro da Fonseca Igor Ribeiro da Fonseca

**Preparação de diferentes classes de modos não
separáveis da luz**
**Preparação de diferentes classes de
modos não separáveis da luz**

Dissertação de Mestrado apresentada ao programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Mestre em Física.

Trabalho aprovado em 18 de maio de 2022:

**Prof. Dr. José Augusto Oliveira
Huguenin**
Orientador

**Prof. Dr. Eduardo Jorge da Silva
Fonseca (UFAL)**
Membro Externo

**Prof. Dr. Carlos Eduardo Rodrigues
de Souza (UFF)**
Membro Interno

Volta Redonda – RJ
2022

Agradecimentos

Inicialmente agradeço a Deus pelas oportunidades que me proporcionou.

Agradeço aos meus pais, Célia e Sérgio por todo o suporte e apoio financeiro, afetivo e pela presença nos momentos mais difíceis, além disso, agradeço também por terem me ensinado a importância dos estudos, serei eternamente grato!

Agradeço aos meus irmãos que nesse tempo todo nunca me deixaram desmotivar e sempre estiveram ali para me apoiar e incentivar a continuar. Agradeço também as minhas sobrinhas, Thais e Cibele, por recarregar minhas energias nos momentos que precisei me afastar para então ter forças para continuar.

Agradeço a todos os meus amigos de infância por sempre terem entendido as vezes que não pude sair, que me incentivaram e tornaram minha mais leve durante essa caminhada. Agradeço em especial minha amiga Telma, que desde o início da graduação sempre esteve ao meu lado compartilhando os melhores e os pior momentos, amiga de verdade e que carregarei para sempre lado esquerdo peito. Agradeço aos amigos Juscelino, Vinicius e Naiza pela disposição em me ensinar o que sabiam e pelas conversas longas sobre os mais variados temas.

Agradeço a professora Jênice Nascimento do ensino médio, por ter sido a minha maior incentivadora pelo ingresso a Física. Agradeço ao professor Wagner por ter acreditado em mim e fornecido todo suporte para que conseguisse o ingresso na vida acadêmica. Agradeço também ao meu orientador Prof^o José Huguenin pela honra de podermos trabalhar juntos, por toda paciência, e conhecimento que a mim transmitiu, serei para sempre grato, e lembrarei sempre com muito carinho. Aos demais professores que fizeram parte dessa minha caminhada acadêmica, um muito obrigado!

*"O homem é do tamanho do rastro que ele deixa no mundo!"
(Profª Lúcia. H. Galvão)*

Resumo

A utilização de graus de liberdade fotônicos para codificação de bit quânticos (q-bits) tem sido amplamente investigada. O estudo de feixes intensos dos chamados modos spin-órbita, que resulta da associação da polarização e modos transversos de primeira ordem, tem se mostrado muito eficiente para simulação de protocolos quânticos e apresentado correlações análogas a estados quânticos, como emaranhamento e discordância. Nesse trabalho apresentamos uma proposta de preparação de modos spin-órbita em uma classe de estados parcialmente não separáveis, os modos tipo Bell desbalanceados. Apresentamos circuitos ópticos de preparação e, fazendo medidas projetivas, obtemos a concorrência destes feixes que variam conforme a previsão da Mecânica Quântica. Também apresentamos uma proposta de violação parcial da Desigualdade de Bell pelos modos parcialmente não-separáveis. Esses resultados ampliam a possibilidade de aplicação da analogia clássico-quântica dos modos spin-órbita para simulação de protocolos de informação quântica.

Palavras-chaves: Modos spin-órbita. Modos parcialmente separáveis. Concorrência. analogia clássico-quântica.

Abstract

The use of photonic degrees of freedom for encoding quantum bits (qubits) has been extensively investigated. The study of intense beams in the so-called spin-orbit modes, which results from the association of polarization and first-order transverse modes, has shown to be very efficient for quantum protocol simulation and presented analogous correlations to quantum states such as entanglement and discord. In this work we present a proposal for preparing spin-orbit modes in a class of modes partially nonseparable, the unbalanced Bell like modes. We present optical circuits for preparation and by performing projective measurements we obtain the concurrence of these beams that vary as predicted by Quantum Mechanics. We also present a propose to verify partial violation of Bell inequalities. These results expand the possibility of application of the classical-quantum analogy of spin-orbit modes for protocol simulation of quantum information.

Key-words: Spin-orbit modes. partial nonseparable modes. Concurrence. Classical-quantum analogy.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Os campos elétricos, E e B são ondas senoidais que oscilam em direções perpendiculares, x e y , respectivamente. E e B são perpendiculares ao vetor k , que é paralelo à direção de propagação da onda – eixo z . Fonte(24)	28
Figura 2 – Representação pictória de uma placa de onda com espessura d , onde o eixo $x(y)$ corresponde ao eixo rápido(lento). Fonte Autor	30
Figura 3 – \mathbf{E} é o vetor campo elétrico, HWP é a placa de meia onda, e QWP é a placa de quarto de onda.Fonte: Autor	32
Figura 4 – Perfil de intensidade dos modos Hermite-Gauss, $H_{m,n}$. Fonte Autor	35
Figura 5 – Perfil de intensidade dos modos Laguerre-Gauss. Fonte Autor	37
Figura 6 – (a) Feixe com frente de onda plana e vetor de onda na direção de propagação do feixe. (b) Feixe Laguerre-Gauss com frente de onda helicoidal, o vetor de onda espirala em relação a direção de propagação. Fonte (32)	37
Figura 7 – Estados de polarização representados na esfera de Poincaré. Fonte Autor	38
Figura 8 – Representação dos Modos transversos de primeira ordem na esfera de Poincaré. Fonte (34)	39
Figura 9 – Representação de um q-bit na Esfera de Bloch. Fonte (35)	41
Figura 10 – Codificação de q -bits nos graus de polarização de modos transversos, onde $ 0\rangle_{Pol}, 1\rangle_{Pol} = H\rangle, V\rangle$ é a codificação na polarização(Pol) e $ 0\rangle_{MT}, 1\rangle_{MT} = h\rangle, v\rangle$ é a codificação nos modos transversos(MT).Fonte: Autor	42
Figura 11 – Modo Laguerre LG_0^1 escrito como uma superposição de modos Hermite $HG_{1,0}$ e $HG_{0,1}$	43
Figura 12 – (a) Placa zonal de Fresnel. Em (b) representamos uma PZE com helicidade $l = 1$. Em (c) representamos uma PZE com helicidade $l = 2$. Fonte (41)	45
Figura 13 – Implementação experimental PZE, Adaptado de (41)	45
Figura 14 – Conversor astigmático. Fonte (42)	46
Figura 15 – (a) Dispositivo SLM com destaque a sua tela de cristal líquido. (b) central de acionamento do SLM. Fonte: Autor	48
Figura 16 – Representação pictória da codificação,via SLM, do modo $HG_{0,1}$ sobre o perfil transversal de um feixe Gaussiano. Fonte:Autor	48
Figura 17 – Concurrencia em função de α , Fonte:Autor	52
Figura 18 – Perfil transversal dos modos não separáveis. Fonte:Autor	59

Figura 19 – Circuito para preparação de modos spin órbita. A máscara holográfia produz os modos hermite a partir do feixe laser inicialmente com modo Gaussiano e polarização vertical. O feixe é dividido entre os braços do interferômetro Mach-Zender sendo feitas operações no modo, na atuação do prisma de Dove, e polarização, com a atuação da HWP. O resultado é a produção dos modos não separáveis na saída.Fonte: (53) .	60
Figura 20 – Circuito experimental para a geração dos estados com pesos variados. Fonte: Autor	64
Figura 21 – Circuito experimental para a criação dos modos spin-órbita separáveis e não separáveis, onde a linha tracejada em preto é a região de preparação dos modos, e a linha tracejada em azul é a região de medição dos modos. Fonte: Autor	66
Figura 22 – Valores de θ , padrões de intensidade e medidas de padrões de intensidade. Fonte Autor	70
Figura 23 – Concorrência para valores teóricos (curva cheia) e experimentais (pontos) em função de θ para os modos pares Fonte: Autor.	72
Figura 24 – Perfis de intensidade dos modos ímpares, e gráficos de barra das Intensidades normalizadas	73
Figura 25 – Concorrência para valores teóricos e experimentais em em função de θ para os modos ímpares	74
Figura 26 – Spacial light modulator-SLM Disponível em: < https://www.gratispng.com/png-mdx5vu/ >	85
Figura 27 – Luz difratada do SLM. As inserções mostram as ordens de difração devido à pixelização da tela: (esquerda) uma longa exposição da tela e (direita) uma imagem CCD do feixe refletido	86
Figura 28 – Representação esquemática de um LCoS SLM. Fonte (44)	87
Figura 29 – Um feixe de vórtice de ordem 3 é criado sem adicionar uma grade, por meio do qual o vórtice se divide em três vórtices de carga unitária devido ao modo gaussiano sobreposto. Quando a grade é adicionada (inserções), a luz moldada (feixe vórtex) se move para fora do eixo, para longe do feixe gaussiano não-difratado. (44)	88
Figura 30 – Hogramas codificados no SLM (linha superior) para gerar feixes de vórtice, cujo perfil de intensidade medido correspondente é mostrado na linha inferior	89
Figura 31 – (superior) Hogramas codificados no SLM para gerar modos Hermite-Gaussianos usando modulação de amplitude complexa (inferior) com o perfil de intensidade medido correspondente.	89
Figura 32 – Hogramas codificados nos perfis de intensidade experimental (superior) SLM e (inferior) dos modos Laguerre-Gaussiano	90

Lista de tabelas

Tabela 1 – Analogia entre a codificação de q -bits nas bases ópticas e base computacional	63
Tabela 2 – Ângulos HWP@ θ	64

Lista de abreviaturas e siglas

MQ	Mecânica Quântica.
BS	Divisor de feixe, do inglês <i>Beam Splitter</i>
PBS	Divisor de feixe polarizado, do inglês <i>Polarization Beam Splitter</i> .
MZIM	Interferômetro de Mach-Zehnder com uma reflexão espelho adicional
CL	Lentes cilíndricas, do inglês <i>Cylindrical lenses</i>
DP	Prisma de Dove, do inglês <i>Dove prism</i> .
QWP	Placa de quarto de onda, do inglês <i>Quarter Wave Plate</i> .
SWP	Placa de onda S, do inglês <i>S Wave Plate</i> .

Sumário

	Introdução	23
1	GRAUS DE LIBERDADE DA LUZ E Q-BITS	27
1.1	Polarização de um feixe laser	28
1.2	Modos transversos de um feixe laser	33
1.3	Esfera de Poincaré para polarização e modos transversos	37
1.4	Codificação de q-bits em graus de liberdade de um feixe laser	39
1.5	Preparação de modos transversos	44
1.5.1	Método Holográfico	44
1.5.2	Conversores Astigmáticos	45
1.5.3	Método Holográfico com um Modulador Espacial da Luz (Spatial Light Modulation - SLM)	47
2	FUNDAMENTOS DE MECÂNICA QUÂNTICA	49
2.1	Emaranhamento e estados de Bell	49
2.2	Estados tipo Bell parcialmente emaranhados	51
2.3	Desigualdade de Bell	52
3	MODOS SPIN-ÓRBITA NÃO SEPARÁVEIS DA LUZ	57
3.1	Modos spin-órbita	57
3.2	Violação de desigualdades tipo Bell por modos spin-órbita	59
3.3	Analogia clássico-quântica dos modos não separáveis	60
4	PREPARAÇÃO CONTROLADA DE DIFERENTES CLASSES DE MODOS SPIN-ÓRBITA NÃO SEPARÁVEIS	63
4.1	Preparação de modos spin-órbita com pesos variáveis	63
4.2	Proposta de experimento para verificação da violação parcial da desigualdade de Bell por modos spin-órbita desbalanceados	66
5	DISCUSSÃO DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS	69
5.1	Modos spin-órbita pares de separabilidade variável	69
5.2	Modos spin-órbita ímpares com separabilidade variável	72
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	77
	REFERÊNCIAS	81

	APÊNDICE A – GERAÇÃO DE MODOS TRANSVERSOS COM	
	O SLM	85
A.1	O que é o SLM?	85
A.2	Máscaras de fase	86
A.3	Máscaras dos modos transversos	88
A.3.1	Feixe Vortex	89
A.3.2	Feixe Hermite-Gauss	89
A.3.3	Feixe Laguerre-Gauss	90
A.4	Como usar o SLM	90
A.5	Passo a passo para a produção de modos	91

Introdução

A origem da teoria quântica no início do século XX representa uma das mais acentuadas mudanças de paradigma já vistas na história da ciência, impactando de forma irreversível o desenvolvimento Física. A recente busca pelo desenvolvimento de tecnologias baseadas nos postulados da teoria quântica se consolidou com estabelecimento de uma variedade de áreas de pesquisa como informação e computação quântica (1), óptica quântica (2), metrologia quântica (3) e entre outras.

Especificamente dentro do campo da Óptica, testemunhamos grandes avanços após a operação do primeiro laser em 1960 (4). Esse dispositivo possibilitou o desenvolvimento de pesquisas nas mais diversas áreas (5, 6), devido a facilitação em aplicações experimentais, chegando até projetos de pesquisas básicas que resultaram na criação de uma nova física experimental, a Óptica Quântica (7). Essa área de pesquisa utiliza esse dispositivo como ferramenta básica para geração de estados cujo estudo nos leva a compreender e aplicar propriedades associadas a sistemas fotônicos. Os trabalhos desenvolvidos tanto teoricamente quando experimentalmente pela óptica quântica, possibilitaram utilizar tais sistemas para codificarmos nos fótons a unidade básica de informação quântica, o q – bit. Dessa forma, a óptica quântica se apresenta como um instrumento a ser utilizado para implementarmos e testarmos os principais conceitos da teoria de informação e computação quântica (1).

No contexto da óptica quântica a codificação de q – bits em graus de liberdade da luz como a polarização (spin), modo transversal (órbita) e caminho, permitiram o avanço de pesquisas voltadas à aplicações ópticas quânticas (8). Os modos spin-órbita tem sido muito estudados no regime de feixe intenso. Isso surge como resultado da analogia clássico quântica entre feixes intensos e fótons únicos, uma vez que fora do regime de quântização, um feixe laser intenso pode ser utilizado como ferramenta para a codificação de q -bits. Com base neste fato, um feixe laser pode ser utilizado como uma ferramenta extremamente útil para gerar os chamados modos spin-órbita, que possibilita investigarmos a fundo os preceitos da mecânica quântica através de estudos de correlações quânticas que, por exemplo, violam a desigualdade de Bell para modos dito não separáveis (9), contextualidade (10) sendo considerados os análogos clássicos aos estados de Bell. Também foi possível a investigação de correlações de estados tripartites com a violação da desigualdade de Mermin por feixes intensos onde se adicionou o caminho como terceiro q-bit (11).

O q – bit é considerado a menor unidade de informação no contexto da teoria de computação e informação quântica e desempenham um papel fundamental, por exemplo, na aplicação de protocolos (BB84 e B92) (12).

Dispondo de uma característica, que em geral, é intrínseca a entes quânticos,

os modos spin-órbita são utilizados para investigações de informação quântica, como a realização de operações condicionais a fim de implementar portas lógicas quânticas (13, 14, 15). Codificação de q – bits em graus de liberdade da luz, tem gerado avanços no desenvolvimento da computação quântica universal, uma vez que, simulações de portas lógicas utilizando elementos da óptica linear tem possibilitado avanços na aplicação de operações lógicas controladas (16). Também foi simulada uma porta de três q-bits (17) e o sistema de modos spin-órbita foi utilizado para realizar jogos quânticos (18). Além disso, com os avanços no processamento de informação, computadores quânticos prometem uma velocidade de processamento muito superior a alcançada com computadores clássicos, colocando em risco a segurança do processo de criptografia atual (19). Nesse cenário, a criptografia quântica (20) e seus protocolos de distribuição de chaves quânticas, utilizando q – bits codificados em graus de liberdade de feixes laser, tem demonstrados resultados expressivos na proteção de informações (21).

Neste trabalho apresentamos uma proposta de geração de modos spin-órbita parcialmente separáveis utilizando um feixe laser intenso como ferramenta para a codificação dos q -bits. A dissertação está organizada como segue. No Capítulo 1 abordamos tópicos de caráter introdutório como as soluções das equações de Helmholtz para coordenadas cilíndricas e cartesianas, além de uma revisão acerca dos estados de polarização da luz e modos transversos, que podem ser modulados sob atuação de dispositivos ópticos e máscaras holográficas, os quais também foram apresentados. O Apêndice A mostra detalhadamente o uso do SLM para produzir diferentes modos transversos.

No capítulo 2 desenvolvemos uma revisão dos fundamentos da mecânica quântica aplicada a teoria de informação, onde tópicos como emaranhamento e estados de Bell foram abordados com o rigor teórico necessário a fim possibilitar a compreensão da aplicação desses temas no desenvolvimento deste trabalho. Além disso, dissertamos também a respeito dos estados de Bell parcialmente emaranhados e da desigualdade de Bell.

Seguindo o desenvolvimento teórico desta dissertação, no capítulo 3 abordamos os modos Spin-órbita não separáveis e sua descrição algébrica, de modo a constatar que analogia desses modos com os chamados estados de Bell reside também em suas definições matemáticas. No contexto da analogia clássico quântico, mostramos por meio da quantização dos campos que modos spin-órbita podem ser utilizados como análogos aos estados de Bell.

O capítulo 4 apresenta o esquema experimental para preparação de modos parcialmente não separáveis no contexto da óptica linear, onde descrevemos um circuito óptico capaz de gerar modos com pesos variáveis, que são os principais objetos de estudo desse trabalho. Ainda nesse contexto, é apresentada uma proposta de circuito para realização das medidas a fim de demonstrar a violação parcial e variável da desigualdade de Bell por modos spin-órbita desbalanceados.

No capítulo 5 apresentamos e descrevemos os dados experimentais obtidos por meio do circuitos apresentado no capítulo 4, onde as imagens associadas a cada um dos padrões de intensidade estudados, foram apresentadas em tabelas juntamente com seus respectivos gráficos de intensidade normalizada. Além disso, com esses dados, apresentamos os gráficos de concorrência em função do peso relativo dos modos tipo Bell pares e ímpares desbalanceados, reforçando a analogia clássico-quântica dessa classe de estados.

Por fim, no capítulo 6, conclusões e perspectivas são apresentadas.

1 Graus de liberdade da luz e q-bits

A teoria eletromagnéticas se consolidou na segunda metade do século XIX com a unificação e interpretação, realizada por James Clerk Maxwell, culminando posteriormente nas quatro equações que são capazes de descrever aspectos dinâmicos de campos elétricos e magnéticos, dadas por (22)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.4)$$

onde as constantes ε_0 e μ_0 são respectivamente, a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica do vácuo. Essas equações diferenciais de primeira ordem fazem parte do grupo de equações diferenciais acopladas, onde percebe-se que se $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \neq 0$ e $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq 0$, surge uma dinâmica de interação mútua entre \mathbf{E} e \mathbf{B} , onde variações temporais de \mathbf{E} dão origem a \mathbf{B} e vice-versa. O desacoplamento dessas equações se dá por meio da aplicação do rotacional, que é um operador diferencial, sobre as expressões 1.3 e 1.4 resultando após manipulações algébricas em

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (1.5)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}, \quad (1.6)$$

onde

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (1.7)$$

Nota-se que obtemos como resultado 1.5 e 1.6, equações desacopladas de segunda ordem em três dimensões análogas a equação da onda na mecânica ondulatória, o que nos permite sustentar a afirmação de que campos elétricos e magnéticos comportam-se com ondas (22). Além disso, essas equações possuem uma família de soluções, sendo a mais simples e que trataremos aqui, a solução em ondas planas, onde um feixe luz monocromático se propaga na direção z dado por

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp^{i(kz - \omega t)}, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \exp^{i(kz - \omega t)}, \quad (1.9)$$

onde \mathbf{k} é o vetor de onda que aponta na direção de propagação da onda e possui módulo igual a $\frac{2\pi}{\lambda}$, λ é o comprimento de onda e ω é a frequência angular. Os termos \mathbf{E}_0 e \mathbf{B}_0 são vetores reais. A partir da expressão da onda plana, podemos obter identidades importantes que aplicadas as equações de Maxwell, 1.3 e 1.4, relacionam E e B resultando em (23)

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mathbf{B}, \quad (1.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = i\mathbf{K} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.12)$$

de onde conclui-se, pela definição de produto escalar entre vetores que \mathbf{E} , \mathbf{B} e \mathbf{k} são ortogonais entre si, o que fisicamente consiste em ondas transversais oscilantes no tempo e no espaço como mostrado na Figura 1 (24).

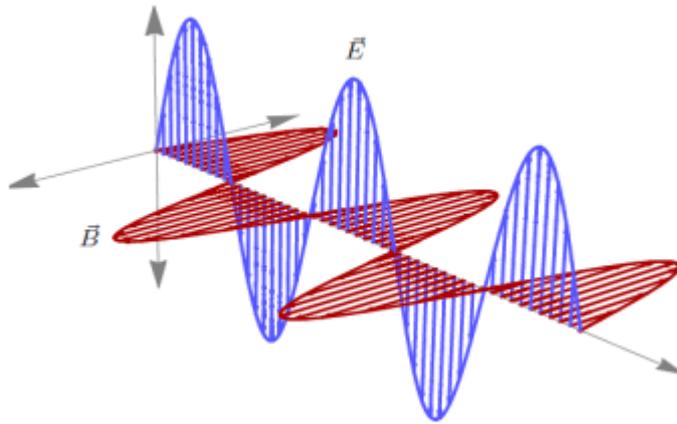


Figura 1 – Os campos elétricos, E e B são ondas senoidais que oscilam em direções perpendiculares, x e y , respectivamente. E e B são perpendiculares ao vetor \mathbf{k} , que é paralelo à direção de propagação da onda – eixo z . Fonte(24)

De maneira geral, ondas eletromagnéticas podem ser polarizadas devido a seu caráter transversal. Além da polarização, temos o modo transversal e caminho que completam o conjunto de graus de liberdade (GL) associados à luz, e que também podem ser manipulados. Neste trabalho, utilizaremos cada um deles para realizar a simulação de estados quânticos, mais exatamente a geração dos estados tipo Bell desbalanceados. Nas seções seguintes serão abordados de maneira mais detalhada cada um dos graus de liberdades mencionados acima, além de suas aplicações na codificação de q-bits.

1.1 Polarização de um feixe laser

Nesta seção será abordado um estudo detalhado sobre o grau de liberdade de polarização com base nas referências (25), (26), (27). Sabendo da relação existente entre \mathbf{E}

e \mathbf{B} expressa nas equações de Maxwell, a discussão nesta ocasião será direcionada ao campo elétrico, em razão de sua maior importância na interação com o matéria e também pelo fato da polarização ser definida em relação ao comportamento do vetor \mathbf{E} , cujo módulo, direção e sentido podem variar com o tempo.

Por questão de simplicidade, considere uma onda plana monocromática se propagando na direção do eixo \hat{z} , dada pela expressão:

$$\mathbf{E} = (E_{0x}\hat{x} + e^{i\delta}E_{0y}\hat{y})e^{i(kz-\omega t)}, \quad (1.13)$$

onde E_{0x} e E_{0y} são vetores reais que representam a amplitude constante do campo elétrico no plano transversal \hat{x} e \hat{y} , e δ é a diferença de fase entre as componentes dada por

$$\delta = (\delta_y - \delta_x). \quad (1.14)$$

A partir da equação 1.13, podemos identificar os estados de polarização de uma onda eletromagnética, que são definidos como linear, circular e elíptica. O caso mais simples de polarização ocorre quando o vetor campo elétrico oscila sempre em uma mesma direção em um movimento harmônico simples e $\delta = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), nesse caso dizemos que a onda é linearmente polarizada.

Quando o vetor campo elétrico de um feixe de luz polarizada possui componentes iguais nas direções \hat{x} e \hat{y} , temos um feixe com polarização diagonal (anti-diagonal) com o eixo de polarização a 45° (135°) de inclinação em relação a direção horizontal. Um caso especial de polarização horizontal, é quando temos uma das componentes de \mathbf{E} nula, nesse caso se $E_{0x}(E_{0y})$ é inexistente, temos o chamado estado de polarização Vertical(Horizontal).

Por outro lado se as condições forem $E_x=E_y= E$ e $\delta = n\pi + \frac{\pi}{2}$ com $n = (0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$, temos a chamada polarização circular, onde a equação 1.13 obtém a forma

$$\mathbf{E} = E_0(\hat{x} \pm i\hat{y})e^{i(kz-\omega t)} \quad (1.15)$$

onde o sentido de polarização será definido pelo sinal na expressão de fase relativa $\delta = n\pi \pm \frac{\pi}{2}$, no qual para $+$ ($-$) teremos a chamada polarização circular a direita (esquerda).

Por último, no caso da polarização elíptica, as condições que definem suas características são $E_{0x} \neq E_{0y}$ e fase relativa de $\delta = n\pi + \frac{\pi}{2}$ onde n novamente assume os respectivos valores de ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$). A equação 1.13 será dada então por:

$$\mathbf{E} = (E_{0x}\hat{x} \pm iE_{0y}\hat{y})e^{i(kz-\omega t)} \quad (1.16)$$

Onde novamente o sentido de polarização será definido pelo sinal na expressão de fase relativa $\delta = n\pi \pm \frac{\pi}{2}$, no qual para $+$ ($-$) teremos a chamada polarização elíptica a direita(esquerda).

Os estados de polarização diagonal, anti-diagonal, circular a esquerda e a direita constituem ferramentas importantes, pois são utilizados, por exemplo, como base de medida no processo de caracterização de estados, que é um processo análogo ao da tomografia quântica (28).

Estados de polarização da luz podem ser facilmente reproduzidos controlados em laboratório, e surgem como consequência importante da interação da luz com a matéria utilizando-se da propriedade de cristais birrefringentes, presentes em alguns materiais. Um número razoável de elementos ópticos, como as placas de onda, são utilizadas na preparação e controle de estados de polarização devido a sua birrefringência, que é capaz de induzir uma diferença de fase entre as componentes de um campo de luz incidente criando assim, a polarização desejada. A figura 2 mostra um modelo de placa de onda.

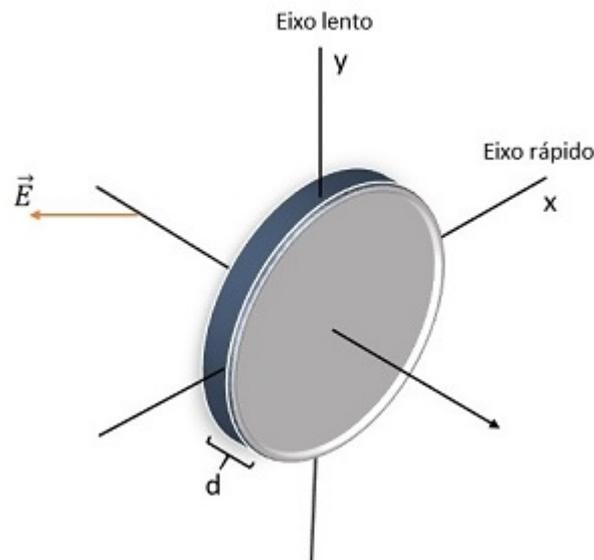


Figura 2 – Representação pictórica de uma placa de onda com espessura d , onde o eixo $x(y)$ corresponde ao eixo rápido(lento). Fonte Autor

Essa propriedade de birrefringência nas placas de onda, está associada a anisotropia do material que a constitui. Dito de maneira simples, esses materiais possuem propriedades físicas diferentes quando postos em diferentes direções. No caso do placas de onda, o índice de refração é maior(menor) na direção do eixo lento(rápido), isso implica em um redução na velocidade de oscilação da componente do campo elétrico na direção do eixo lento, se comparada com a velocidade de oscilação da onda no eixo rápido, o que resulta na defasagem entre as componenetes do campo. A diferença de fase entre as componentes será dada por;

$$N\lambda = d(n_l - n_r) \quad (1.17)$$

onde $n_l(n_r)$ é o índice de refração ao longo do eixo lento(rápido) enquanto λ é o comprimento de onda da luz (a análise está limitada a um feixe monocromático).

No caso especial em que tomamos $N = \frac{1}{2}$, obtemos a chamada placa de meia onda(HWP- do inglês *half wave plates*) que induz uma diferença de caminho de $\frac{\lambda}{2}$, o que corresponde uma diferença de fase relativa de π . Um outro caso especial é o de $N = \frac{1}{4}$, o que implica em elemento óptico chamado de placa de um quarto de onda (QWP- do inglês *quarter wave plates*), onde a diferença de caminho será dada por $\frac{\lambda}{4}$, o que corresponde a uma indução de fase relativa entre as componentes do campo de $\frac{\pi}{2}$.

A representação da atuação desses elementos ópticos sobre um feixe de laser pode ser realizada utilizando o formalismo matricial de Jones, no qual podemos representar diferentes estados de polarização por meio do chamado vetor de Jones(ou vetor de polarização) (29). Por meio da notação de Jones, o campo polarizado pode ser escrito como

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x} \\ e^{i\delta} E_{0y} \end{bmatrix} e^{i(kz-wt)}, \quad (1.18)$$

onde por meio da equação , podemos escrever estados de polarização em notação matricial como

$$\mathbf{E}_H = E_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{i(kz-wt)}, \quad (1.19)$$

$$\mathbf{E}_V = E_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i(kz-wt)}, \quad (1.20)$$

$$\mathbf{E}_{LIN\pm} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix} e^{i(kz-wt)}, \quad (1.21)$$

$$\mathbf{E}_{CIR\pm} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix} e^{i(kz-wt)}, \quad (1.22)$$

$$\mathbf{E}_{ELIP\pm} = \begin{bmatrix} E_{ox} \\ \pm i E_{oy} \end{bmatrix} e^{i(kz-wt)}, \quad (1.23)$$

onde E_H (E_V) é a polarização horizontal (vertical), $E_{LIN\pm}$ é a polarização linear diagonal (+) e antidiagonal(-), $E_{CIR\pm}$ circular à direita (+) e à esquerda (-) e $E_{ELIP\pm}$ é a luz com polarização elíptica à direita (+) e à esquerda(-).

Além de facilitar os cálculos, essa nova notação torna possível representar também elementos ópticos como matrizes, que atuam sobre os vetores que descrevem estados de

polarização transformando-os. Neste sentido, as matrizes que caracterizam as placas de meia onda e quarto de onda serão dadas, repectivamente por

$$[HWP] = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix}, \quad (1.24)$$

$$[QWP] = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) + i \sin^2(\theta) & \cos(\theta) \sin(\theta)(1 - i) \\ \cos(\theta) \sin(\theta)(1 - i) & i \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \end{bmatrix}, \quad (1.25)$$

onde θ é o angulo entre o eixo rápido e o eixo x .

Para exemplicar os conceitos apresentados nesta seção, vamos considerar o exemplo apresentado na referência (17), que mostra um feixe polarizado linearmente a 45° (1.21) incidindo sobre uma HWP com o eixo rápido orientado a $\theta = 0^\circ$ em relação ao eixo x . Em seguida, o feixe trasmitido incide sobre uma QWP também posicionada com eixo rápido a $\theta = 0^\circ$ em relação a x . A Figura 3 ilustra esquematicamente o exemplo descrito acima .

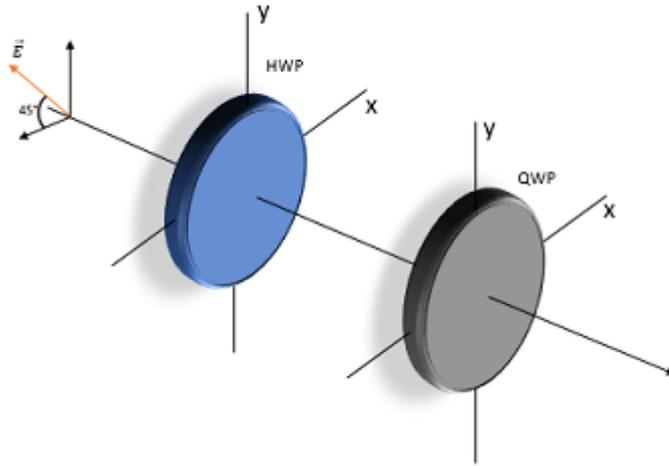


Figura 3 – \mathbf{E} é o vetor campo elétrico, HWP é a placa de meia onda, e QWP é a placa de quarto de onda. Fonte: Autor

E com base no formalismo de Jones, a atuação de 1.24 e 1.25 sobre os vetores de polarização será dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{E}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix} = \frac{E}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

É importante notar que a ordem de atuação das matrizes no vetor de Jones afeta o resultado final sobre o feixe polarizado. No exemplo apresentado acima, temos inicialmente a HWP , segunda matriz da esquerda para a direita, atuando sobre o vetor que descreve o estado de polarização linear a 45° . O campo resultante dessa operação incide sobre a QWP , que é representada pela matriz posicionada mais a esquerda, pois é o último

elemento óptico que atua sobre esse feixe de entrada. O resultado final dessas operações, é um feixe circularmente polarizado como descrito pelo vetor 1.22. Importante mencionar que, o conceito de polarização é uma das bases desse trabalho, sendo um dos graus de liberdade da luz utilizado se obter o resultado proposto.

1.2 Modos transversos de um feixe laser

Com base na Ref. (30), nesta seção será apresentada a equação de Helmholtz, que explica de maneira mais abrangente a propagação de feixes de luz, além da chamada aproximação paraxial aplicada ao feixe de laser gaussiano. Posteriormente, iremos tratar sobre algumas das soluções em diferentes coordenadas da equação de Helmholtz, mais especificamente em coordenadas cartesianas e cilíndricas que são descritas em função dos polínômios de Hermite e Laguerre respectivamente.

Como vimos anteriormente, a partir das equações de Maxwell (1.1-1.4) obtemos a equação de onda 1.5, cuja algumas de suas soluções descrevem a dinâmica de ondas no tempo e no espaço. A solução mais simples para essa equação é a função que descreve o campo elétrico \mathbf{E} em uma onda plana, conforme descrito pela equação 1.8. Podemos também considerar uma dependência da amplitude com respeito a posição, de maneira que pode-se escrever suas dependências espaciais e temporais separadamente, resultando na expressão

$$E(\vec{r}, t) = E_0(\vec{r})e^{ikz}e^{-i\omega t}, \quad (1.27)$$

onde $E_0(\vec{r})$ é a amplitude complexa da onda e específica sua estrutura transversa, e o termo e^{ikz} é a dependência espacial rápida do feixe, com período espacial de um comprimento de onda na direção z . Aplicando a expressão 1.27 na expressão 1.5 e realizando algumas manipulações algébricas, obtemos a chamada equação de Helmholtz dada por

$$[\nabla^2 + k^2]E(\vec{r}) = 0, \quad (1.28)$$

onde $E(\vec{r}) = E_0(\vec{r})e^{ikz}$. Após escrever o laplaciano em coordenadas cartesianas e calcular as derivadas da expressão 1.28, obtemos a equação

$$\frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial E_0(\mathbf{r})}{\partial x} = 0. \quad (1.29)$$

Se a taxa de variação na direção de z é lenta se comparada com as variações nas direções transversais x e y , e a aproximação paraxial dada pela expressão

$$\left| \frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial y^2} \right|, 2ik \left| \frac{\partial E_0(\mathbf{r})}{\partial x} \right|, \quad (1.30)$$

é válida, podemos aproximar a equação 1.29 conforme a expressão

$$\frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial E_0(\mathbf{r})}{\partial x} = 0, \quad (1.31)$$

Conhecida como aproximação paraxial da equação de Helmholtz.

Os termos $\frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial y^2}$ são as componentes transversais do Laplaciano transversal (∇_t^2), o que nos permite escrever a equação 1.31 como:

$$\nabla_t^2 E(\mathbf{r}) - 2ik \frac{\partial E_0(\mathbf{r})}{\partial x} = 0 \quad (1.32)$$

Por meio da equação 1.32 podemos obter soluções que dependem do sistema de coordenada utilizado. Para o caso mais geral, em coordenadas cartesianas, temos a solução dada por

$$E_{m,n}(x, y, z) = \frac{C_{m,n}}{\omega(z)} H_m \left[\frac{\sqrt{2x}}{\omega(z)} \right] H_n \left[\frac{\sqrt{2y}}{\omega(z)} \right] \times \left[-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)} \right] \times \exp \left[-\frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)} \right] \exp[-i(n + m + 1)\psi(z)], \quad (1.33)$$

onde o termo $\omega(z)$ é a largura do feixe em uma posição arbitrária z , relacionado a cintura do feixe ω_0 que é definida em $z = 0$, pela equação

$$\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2}, \quad (1.34)$$

o raio de curvatura $R(z)$ do feixe é dado por

$$R(z) = z + \left(\frac{z_R^2}{z} \right), \quad (1.35)$$

$\psi(z)$ é a fase de Gouy, dada por

$$\psi(z) = \arctan \left(\frac{z_R^2}{z} \right). \quad (1.36)$$

Deve-se notar que tanto o raio de curvatura 1.35 quanto a fase de Gouy 1.36 são funções de z e z_R , sendo este o comprimento de Rayleigh definido como

$$z_R = \frac{\pi \omega^2}{\lambda}. \quad (1.37)$$

Os termos H_m e H_n são conhecidos como polinômios de Hermite, com a ordem dos modos definido pelos parâmetros m e n . Esses polinômios de Hermite formam uma base completa, sendo possível escrever qualquer solução da equação 1.32 por meio de combinação linear dos mesmos. Particularmente, o modo fundamental HG_{00} é uma das soluções e pode ser escrito como:

$$E(x, y, z) = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}} \omega(z)} \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)} \right] \exp \left[-i \frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)} + i\psi(z) \right]. \quad (1.38)$$

O modo fundamental também é conhecido como modo Gaussiano pois, num plano transversal, sua intensidade varia conforme uma curva gaussiana ao longo da direção radial.

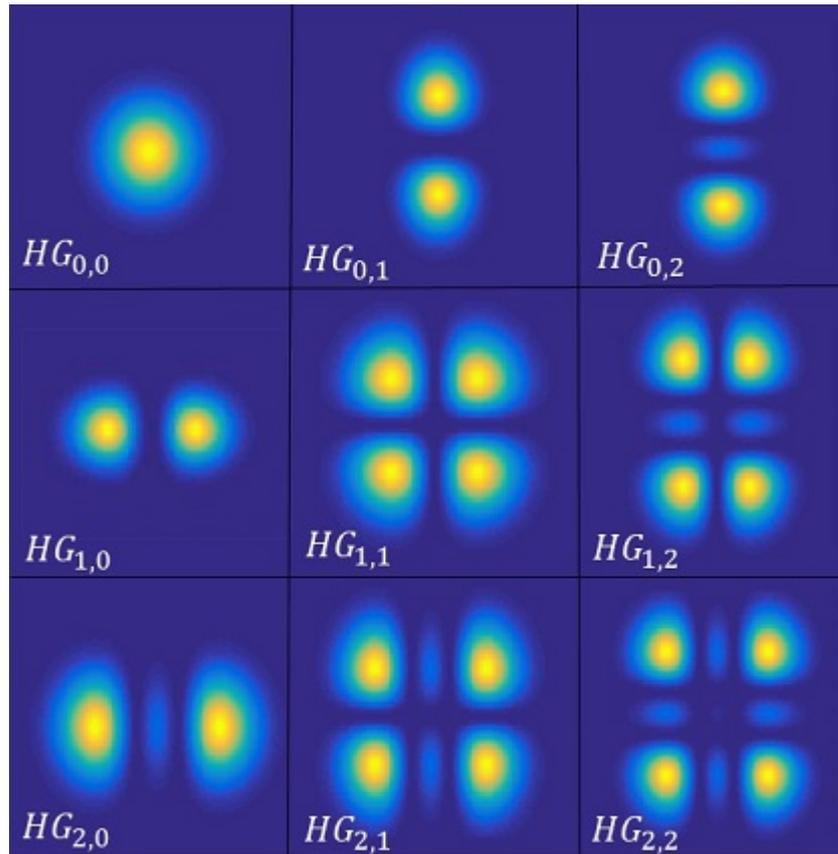


Figura 4 – Perfil de intensidade dos modos Hermite-Gauss, $H_{m,n}$. Fonte Autor

As soluções da equação 1.33 junto com o modo fundamental, formam os chamados modos Hermite-Gauss, cujo o perfil de intensidade varia conforme a ordem dos modos aumenta. A Figura 4 mostra alguns exemplos desses modos para diferentes valores de m e n .

Da família de soluções do modo Hermite-Gauss, os modos de primeira ordem $HG_{0,1}$ e $HG_{1,0}$ se destacam devido sua utilidade na codificação de q-bits. Como pode ser observado, para $n = 1$ perfil de intensidade desse modo é dividido horizontalmente em duas regiões, para $n = 2$ esse mesmo perfil de intensidade é dividido horizontalmente em três regiões. Para diferentes valores de m a divisão do perfil de intensidade ocorre de maneira análoga, porém, para a direção vertical.

Pode-se então obter, a partir da distribuição de intensidade, um sistema de dois níveis a partir do subespaço de $\{HG_{0,1}, HG_{1,0}\}$, o que torna esse grau de liberdade uma ferramenta útil na codificação de q-bits.

Além da direção vertical e horizontal, os modos Hermite podem ser rodados a um ângulo θ arbitrário, utilizando os modos de primeira de ordem. A expressão que define esta rotação é dada por:

$$HG_{0,1}^\theta = \cos(\theta)HG_{1,0} + \sin(\theta)HG_{0,1}. \quad (1.39)$$

Para o caso especial onde $\theta = 45^\circ$ e $\theta = 135^\circ$ os modos Hermite são definidos,

respectivamente, por

$$HG_{0,1}^{45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{1,0} + HG_{0,1}), \quad (1.40)$$

$$HG_{0,1}^{135^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{1,0} - HG_{0,1}). \quad (1.41)$$

Por analogia, pode-se observar que os modos Hermite diagonal e anti-diagonal a 45° (135°) são escritos em função dos modos de primeira ordem, assim como os estados de polarização diagonal e anti-diagonal são escritos em função dos estados de polarização vertical e horizontal.

Essas analogias podem ser estendidas para outras relações entre estados de polarização e modos transversos. Por exemplo, no eletromagnetismo o estado de polarização circular é descrito em termos dos vetores de polarização horizontal e vertical, com uma diferença de fase de $\delta = \frac{\pi}{2}$ entre as componentes do campo. Para o caso dos modos Hermite, o análogo ao estado de polarização circular é um outro modo transversal, que é escrito em termos dos modos Hermite de primeira ordem, e também possui uma diferença de fase de $\delta = \frac{\pi}{2}$. A expressão que descreve o modo que é uma combinação linear dos modos Hermite de primeira ordem é dada por

$$LG_0^{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{1,0} \pm iHG_{0,1}). \quad (1.42)$$

Os modos indicados pela equação 1.42, são conhecidos como modos Laguerre-Gauss, e correspondem a soluções da equação paraxial de Helmholtz em coordenadas cilíndricas, dada pela expressão:

$$\frac{1}{r} \left[r \frac{\partial E}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \phi^2} + 2ik \frac{\partial E}{\partial z} = 0 \quad (1.43)$$

Resolvendo a equação 1.43 obtemos a solução geral para os modos Laguerre-Gauss, que são dados em função dos polinômios de Laguerre L_{lp} , e expressos por

$$E_{lp} = E_{lp} \sqrt{\frac{2p!}{\pi \omega^2(z)(p+|l|)!}} \left[\frac{\sqrt{2r}}{\omega(z)} \right]^{|l|} \exp \left[\frac{-r^2}{\omega^2(z)} \right] \times L_{lp} \left(\frac{2r^2}{\omega^2(z)} \right) \exp \left(i \left(kz - ((2p+|l|+1)\psi(z)) + \frac{kr^2}{2R(z)} + l\phi \right) \right), \quad (1.44)$$

onde $\phi = \arctg(\frac{x}{y})$, $\psi(z)$ a fase de Gouy, $\omega(z)$ a largura do feixe e $R(z)$ o raio de curvatura do feixe. A Figura 5 apresenta os perfis de intensidade do modo LG com $p = 0$ sendo o feixe gaussiano o modo fundamental. Devido à não analiticidade de ϕ na origem, os modos com carga topológica $l \neq 0$ possuem intensidade nula em seu centro.

Os modos Laguerre-Gauss de primeira ordem, L_0^1 e L_0^{-1} possuem momento angular orbital (MAO) não nulo (31), onde o vetor de onda \vec{k} espirala em torno do eixo de propagação da frente de onda como mostrado na Figura 6.

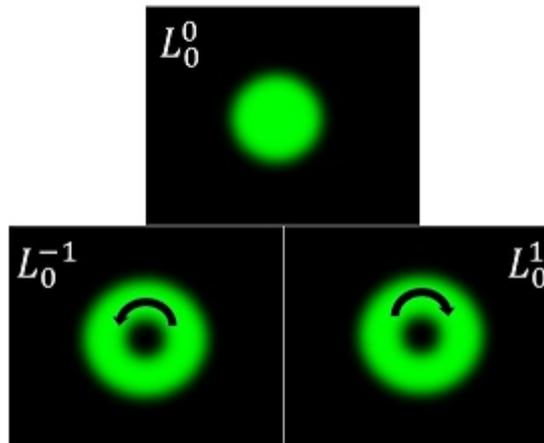


Figura 5 – Perfil de intensidade dos modos Laguerre-Gauss. Fonte Autor

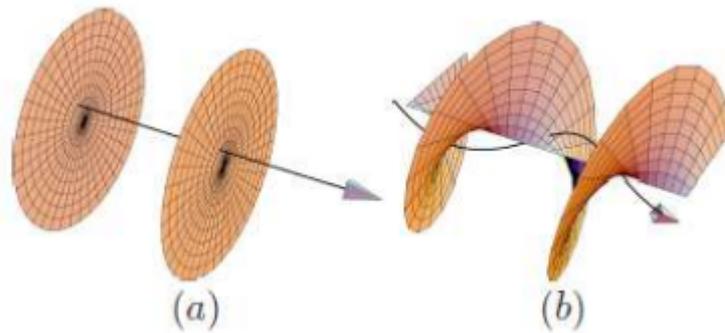


Figura 6 – (a) Feixe com frente de onda plana e vetor de onda na direção de propagação do feixe. (b) Feixe Laguerre-Gauss com frente de onda helicoidal, o vetor de onda espirala em relação a direção de propagação. Fonte (32)

Em resumo, os modos LG e HG de primeira ordem, são fundamentais para a realização deste trabalho, pois além de serem de fácil reprodução e manipulação em laboratório, se constituem como mencionado anteriormente, em um sistema de dois níveis que possibilita a reprodução e análise de estados quânticos.

1.3 Esfera de Poincaré para polarização e modos transversos

Estados de polarização de um onda plana monocromática podem ser escritos em termos dos chamados parâmetros de Stokes que são dados por (33)

$$p_1 = \frac{I_{0^\circ} - I_{90^\circ}}{I_{0^\circ} + I_{90^\circ}} \quad (1.45)$$

$$p_2 = \frac{I_{45^\circ} - I_{135^\circ}}{I_{45^\circ} + I_{135^\circ}} \quad (1.46)$$

$$p_3 = \frac{I_{right} - I_{left}}{I_{right} + I_{left}} \quad (1.47)$$

Onde I_{0° , I_{45° , I_{90° e I_{135° são as intensidades de um feixe registrada após sua passar por polarizadores lineares dispostos em diferentes orientações e I_{Left} e I_{Right} são as intensidades das componentes de um feixe circularmente polarizado. Para um feixe de luz completamente polarizado, o quadrado dos parâmetros de Stokes somam em uma unidade, ou seja:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \quad (1.48)$$

Consequentemente os parâmetros de Stokes são coordenadas de um espaço em que a luz completamente polarizada pode ser representada por um ponto sobre uma esfera de raio unitário. Essa representação, descrita pela Fig 7, é conhecida como esfera de Poincaré (33).

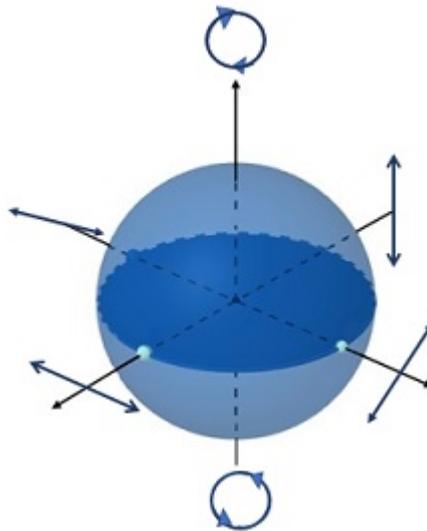


Figura 7 – Estados de polarização representados na esfera de Poincaré. Fonte Autor

Podemos notar que os polos da esfera representam o estado de polarização circular, enquanto que no equador temos os estados de polarização linear e entre o equador e os polos da esfera temos os estados elípticamente polarizados. Qualquer um dos estados de polarização representados na esfera, podem ser descritos por uma superposição de estados circularmente polarizados. Na expressão 1.49 temos um exemplo onde a superposição dos estados de polarização circular a direita e a esquerda, resultam em estado de polarização linear na direção \hat{x} .

$$E_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

Um ponto importante é que existe uma analogia entre a esfera de Poincaré e estados polarizados com os modos Hermite-Gauss e Laguerre-Gauss de primeira ordem. É possível verificar essa analogia pelas expressão:

$$L_0^{\pm 1} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) HG_{1,0} + e^{i\theta} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) HG_{0,1}, \quad (1.50)$$

onde podemos notar que, variando os valores de θ , estaremos definindo uma esfera cujo os pontos em sua superfície correspondem aos modos $L_0^{\pm 1}$, como mostrado na Fig 8

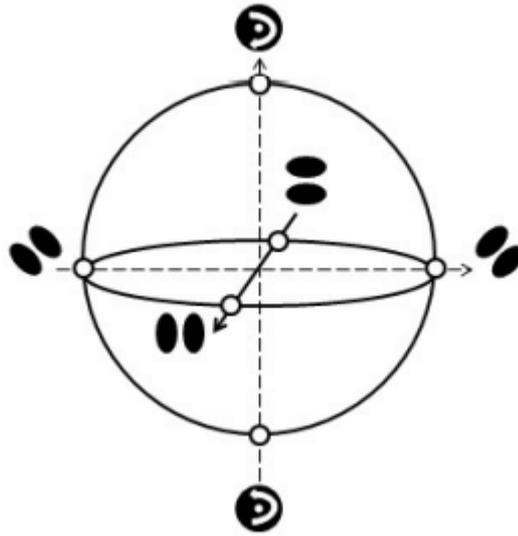


Figura 8 – Representação dos Modos transversos de primeira ordem na esfera de Poincaré. Fonte (34)

Por analogia a esfera de Poincaré, podemos notar que o modo Laguerre-Gauss na representação da figura 8 é análogo ao estado circularmente polarizado, enquanto que os modos Hermite-Gauss no equador da esfera são análogos ao estado de polarização linear. O estado de polarização entre os polos e o equador são os modos elípticos, que surgem quando as amplitudes dos modos $HG_{1,0}$ e $HG_{0,1}$ são desbalanceadas. Após discutir conceitos fundamentais a respeito dos graus de liberdade da luz e sua descrição matemática, podemos avançar para discutir a codificação de q-bits em graus de liberdade da luz.

1.4 Codificação de q-bits em graus de liberdade de um feixe laser

Com base na referências (1), verifica-se que o bit-quântico(*q-bit*) constitui-se de um ferramenta primordial no desenvolvimento da teoria de Informação e computação quântica. Entretanto, o que é exatamente um *q-bit*? Utilizemos da analogia entre computação clássica e quântica para compreendermos o conceito de q-bit.

Os chamados dispositivos "clássicos" realizam suas tarefa de processamento de informações utilizando como base o chamado *bit*. Sabe-se que o bit é a base da computação clássica e corresponde a menor quantia de informação que pode ser transmitida entre dispositivos clássicos, podendo assumir os valores de "0" ou "1". Estes valores correspondem a estados distinguíveis, como por exemplo, "ligado" ou "desligado", permitindo sua implementação em qualquer sistema clássico que precise necessariamente de estados bem definidos. Como exemplo, podemos pensar em uma lâmpada e associar ao estado ligado o bit "1" enquanto que o estado desligado pode ser associado ao bit "0".

O bit quântico, ou q-bit, pode ser entendido como um estado quântico de dimensão dois, comumente chamado de sistemas de *dois níveis*, e por analogia com o bit, corresponde a menor quantidade de informação, só que dentro da computação quântica. Além disso, é representado por um vetor de estado normalizado que matematicamente pode ser descrito por:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \quad (1.51)$$

onde α e β são números complexos e respeitam a condição $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Os coeficientes $|\alpha|^2$ ($|\beta|^2$) surgem da interpretação probabilística da mecânica quântica e representam as amplitudes de probabilidades de se obter o resultado $|0\rangle$ ($|1\rangle$), que é(são) o(s) estados do q-bit representados no que chamamos de base computacional ($|0\rangle$ e $|1\rangle$). Um q-bit pode ser, em princípio, codificado em qualquer sistema quântico de dois níveis, por exemplo, um estado singleto de uma partícula de spin $\frac{1}{2}$. Apesar de haver semelhanças entre bits e q-bits, a equação 1.51 expõe um conceito da teoria quântica chamada **superposição de estados**, uma vez que esta corresponde a uma combinação linear dos estados de base $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Mais especificamente, os estados de um bit clássico são sempre mutuamente excludentes ("0" ou "1") enquanto q-bits em superposição possuem uma probabilidade de uma medida na base computacional resultar nos estados $|0\rangle$ ou $|1\rangle$.

Como mencionado anteriormente, um q-bit pode ser representado por um vetores de estado normalizado, o que nos possibilita representar geometricamente esse estados numa esfera, chamada de **Esfera de Bloch** e ilustrada por meio da Figura 9. Nesta representação, os vetores da base computacional estão nos polos e todos os outros estados de superposição são representados em diferentes pontos sobre a superfície da esfera. Sendo assim, podemos reescrever o estado de um único q-bit, dado inicialmente pela equação 1.51, numa descrição puramente geométrica. Obtemos então um estado geral dado por

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle, \quad (1.52)$$

onde θ e ϕ são números reais. Importante destacar que, qualquer escolha de valores para estes números nos permite definir um único ponto sobre a esfera tridimensional.

Uma vez introduzido o conceito de q-bit, podemos pensar em aplicá-lo a sistemas físicos reais. Na literatura científica, existem diversos trabalhos (36, 37) que abordam a

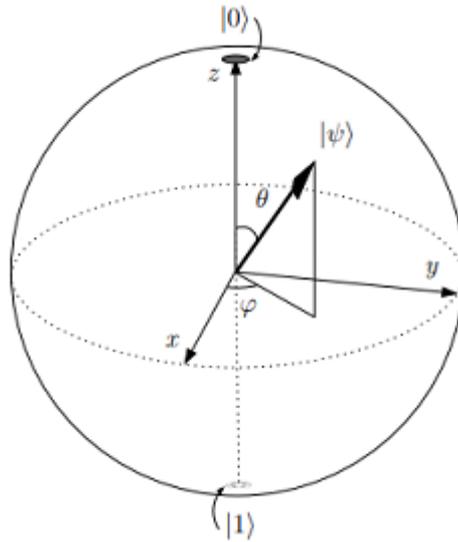


Figura 9 – Representação de um q-bit na Esfera de Bloch. Fonte (35)

utilização de graus de liberdade da luz, os quais foram apresentados do capítulo 1, para investigar propriedades de sistemas quânticos. Isto pode ser feito, uma vez que a atuação de dispositivos ópticos sobre um feixe laser pode ser completamente descrita pelo formalismo de Jones (38), que é análogo ao formalismo que descreve a evolução temporal de sistemas quânticos (kets). Em resumo, essa semelhança entre formalismos nos permite afirmar que: é possível utilizar feixes clássicos, como ferramenta capaz de emular sistemas quânticos em circuitos ópticos lineares.

Pode-se notar essa semelhança entre o formalismo que descreve estados de polarização e estados quânticos nas equações mostradas abaixo, onde o vetor 1.53 representa um estado de polarização diagonal, que é dado pela superposição de polarizações lineares, enquanto que o vetor 1.54 representa um estado quântico em superposição, ou seja

$$\mathbf{E}_{\pm 45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix}, \quad (1.53)$$

$$|\psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix}. \quad (1.54)$$

Assim como a polarização, o modo transversal também pode ser utilizado na codificação de q-bits, uma vez que sua evolução é descrita por um formalismo semelhante ao utilizado para caracterizar a dinâmica de estados quânticos. Além disso, podemos estender ainda mais as relações de equivalência entre a óptica linear e a mecânica quântica, uma vez que, assim como as transformações realizadas sobre q-bits são representadas como rotações na esfera de Bloch, as transformações na polarização do feixe laser e modos

transversos, via atuação de dispositivos ópticos, podem ser representadas geometricamente por rotações na esfera de Poincaré (Fig 7).

Na base computacional, $|0\rangle, |1\rangle$, a Figura 10 ilustra as codificação dos q -bits nos graus de liberdade de polarização e no modo transverso da luz.

$$\begin{array}{ccc} |0\rangle_{Pol} = |H\rangle = \longleftrightarrow & , & |0\rangle_{MT} = |h\rangle = \text{Imagem de } |h\rangle \\ & & \text{Imagem de } |h\rangle \\ & & \text{Imagem de } |h\rangle \\ |1\rangle_{Pol} = |V\rangle = \updownarrow & , & |1\rangle_{MT} = |v\rangle = \text{Imagem de } |v\rangle \\ & & \text{Imagem de } |v\rangle \end{array}$$

Figura 10 – Codificação de q -bits nos graus de polarização de modos transversos, onde $|0\rangle_{Pol}, |1\rangle_{Pol} = |H\rangle, |V\rangle$ é a codificação na polarização(Pol) e $|0\rangle_{MT}, |1\rangle_{MT} = |h\rangle, |v\rangle$ é a codificação nos modos transversos(MT).Fonte: Autor

Neste sentido, a mesma analogia feita entre estados quânticos e a codificação nas bases de polarização ($|H\rangle, |V\rangle$), podem ser estendidas para os modos transversos, utilizando o modo hermite (HG_{01}, HG_{10}) como base para a codificação. A figura 11 ilustra o modo laguerre, dado pela eq 1.42, descrito como uma superposição de modos hermite com fase relativa de $\phi = 90^\circ$ ou $\phi = 270^\circ$. No formalismo de Dirac(kets), podemos obter um estado análogo ao representado pela figura no espaço de kets dado por:

$$|\phi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

$$E_{lin} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

Desta forma, por meio dessas analogias torna-se possível a investigação de propriedades intrínsecas a sistemas quânticos como, por exemplo, as implicações matemáticas da possibilidade de haver estados em superposição.

Ainda em relação as analogias entre a óptica linear e a mecânica quântica(MQ), a coerência óptica simula a coerência quântica enquanto que as intensidades normalizadas de um feixe clássico fazem o papel das probabilidades (medida, no caso genuinamente quântico, no regime de foto-contagem). Além disso, com base em um dos postulados da MQ, pode-se afirmar que a evolução de sistemas quânticos é dada pela atuação de operadores unitários sobre kets de estado, fato este que no contexto da óptica linear, é representado pela atuação de elementos ópticos(HWP,QWP), sobre feixes laser. Em resumo, dispositivos ópticos ditam a evolução de feixes clássicos desempenhando um papel análogo ao realizado por operadores unitários em estados quânticos.

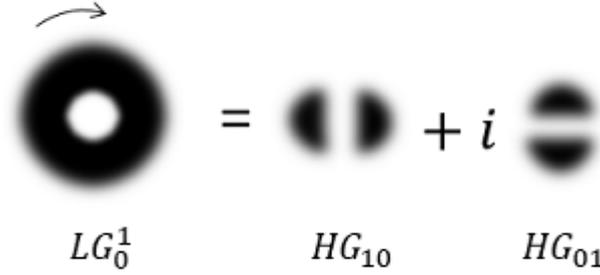


Figura 11 – Modo Laguerre LG_0^1 escrito como uma superposição de modos Hermite $HG_{1,0}$ e $HG_{0,1}$

Considerando um feixe laser polarizado com um dado perfil transversal, podemos representar, a partir destes dois graus de liberdade, um sistema de dois q-bits. Nesse caso, quando o campo eletromagnético puder ser descrito em termos do produto entre a estrutura transversal e o vetor de polarização, de forma que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})\hat{\mathbf{e}}, \quad (1.57)$$

temos um dito modo separável que é análogo ao estado produto no contexto da mecânica quântica. Com base na figura 10, podemos definir as bases ópticas de codificação utilizando os versores de polarização $\{\hat{\mathbf{e}}_H, \hat{\mathbf{e}}_V\}$ e os modos hermite de primeira ordem $\{HG_{10}, HG_{01}\}$, que serão dadas por

$$\hat{\mathbf{e}}_H \longrightarrow |H\rangle \longrightarrow |0\rangle, \quad (1.58)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_V \longrightarrow |V\rangle \longrightarrow |1\rangle, \quad (1.59)$$

$$HG_{10} \longrightarrow |h\rangle \longrightarrow |0\rangle, \quad (1.60)$$

$$HG_{01} \longrightarrow |v\rangle \longrightarrow |1\rangle. \quad (1.61)$$

Desta forma, podemos aplicar as equações (1.58 – 1.61) para gerar um conjunto de kets de estados que servirão como base para o espaço de estados de sistemas bipartidos. A codificação de q-bits em sistemas de dois níveis, escritos nas bases ópticas serão dados por:

$$\hat{\mathbf{e}}_H HG_{10} \longrightarrow |H\rangle \otimes |h\rangle = |Hh\rangle \longrightarrow |00\rangle, \quad (1.62)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_H HG_{01} \longrightarrow |H\rangle \otimes |v\rangle = |Hv\rangle \longrightarrow |01\rangle, \quad (1.63)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_V HG_{10} \longrightarrow |V\rangle \otimes |h\rangle = |Vh\rangle \longrightarrow |10\rangle, \quad (1.64)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_V HG_{01} \longrightarrow |V\rangle \otimes |v\rangle = |Vv\rangle \longrightarrow |11\rangle, \quad (1.65)$$

onde os kets de base se mostram análogos aos ditos estados produto que descrevem sistemas quânticos independentes.

Note que, é possível gerar combinações lineares das equações(1.63 - 1.65) de modo a obter estados que possuam tanto momento angular de Spin, associado a polarização circular e elíptica, quando momento angular orbital, associado a estrutura transversa do feixe laser, gerando assim o chamado modo spin-órbita.

É importante ressaltar que dispositivos ópticos(HWP,DP,QWP,...) atuam localmente nos q-bits codificados em diferentes graus de liberdade da luz, ou seja, q-bits codificados no modo transversa não são afetados por transformações realizadas sobre o q-bit codificado na polarização e vice-versa.

A possibilidade de simular sistemas bipartidos, em conjunto com estudos sobre os graus de liberdade de feixe laser, possibilitam a investigação de propriedades importantes descritas teóricamente no contexto da mecânica quântica como, por exemplo, o emaranhamento. Tendo em vista que esse trabalho se baseia na utilização dessa propriedade, o próximo passo será definir detalhadamente o emaranhamento quântico e sua relação estados emaranhados.

1.5 Preparação de modos transversos

A preparação de feixes laser com diferentes graus de liberdade é um passo primordial para aplicação na informação quântica, uma vez que é necessário codificar e manipular esses graus de liberdade.

Um feixe laser é, em geral, polarizado de maneira que só precisamos de elementos óticos de polarização como placas de onda e PBS para geração de diferentes estados de polarização. Já a operação de lasers com modos transversos de ordem mais alta não é trivial e precisamos fazer o operações que levem o modo transversa gaussiano a outros modos transversos de ordem mais alta. Nesta seção, vamos descrever algumas formas de preparação, incluindo aquela que usaremos no experimento realizado aqui.

1.5.1 Método Holográfico

Existem diversas maneiras de produzir modulações no perfil trasversos de feixe laser, e uma das maneiras mais simples é utilizando mascarás holográficas(39). Esta técnica consiste em obter uma frente de onda helicoidal, característica dos modos LG_p^l , por meio da reconstrução holográfica utilizando as chamadas Placas zonais espirais(PZE), que são variantes das Placas Zonais de Fresnel (40). A obtenção de uma placa PZE se da por meio da impressão do padrão de interferência entre um onda plana e o modo Laguerre-Gauss de carga topológica l . O padrão de interferência necessário para a criação de uma PZE, pode ser obtido por meio dos mais diversos *Softwares* de computador, de modo que, uma vez obtido o padrão desejado, o proximo passo consiste em imprimí-lo sobre uma folha super grão fino de alta resolução (41) e fotografá-lo. Ao revelar as fotografias obtidas, teremos

uma máscara holográfica, que em resumo, nada mais é o padrão de interferência do modo desejado impresso em um papel especial e revelado com efeito negativo. Para termos de comparação, a figura 18 ilustra placa zonal de Fresnel e as duas máscaras holográficas do modo LG_p^l com $l = 1$ e $l = 2$ respectivamente.

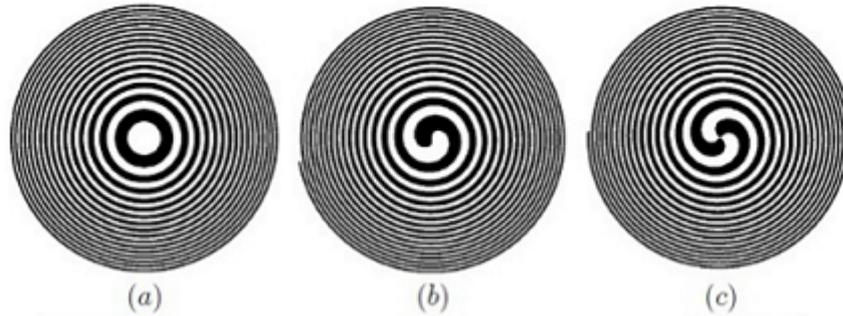


Figura 12 – (a) Placa zonal de Fresnel. Em (b) representamos uma PZE com helicidade $l = 1$. Em (c) representamos uma PZE com helicidade $l = 2$. Fonte (41)

O arranjo experimental que descreve a implementação dessas máscaras em circuitos ópticos é apresentado maneira simplificada na figura 13, onde podemos notar que um feixe com perfil gaussiano inside sobre uma máscara holográfica, que colima o perfil transverso LG_p^l , uma vez a máscara de fase é análoga a uma placa de Fresnel. Em razão disso, é necessário utilizar uma lente para que o modo gerado seja recolimado novamente.

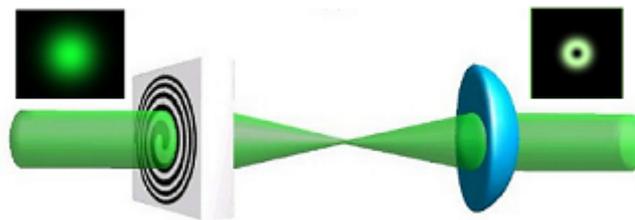


Figura 13 – Implementação experimental PZE, Adaptado de (41)

1.5.2 Conversores Astigmáticos

Conversores tipos π são dispositivos ópticos formados por um par de lentes cilíndricas idênticas com distância focal f . Assim como a HWP e QWP atuam sobre os estados de polarização da luz, um conversor astigmático atua sobre os modos transversos de um feixe laser, gerando uma diferença de fase entre as componentes do modo, que vai variar dependendo do conversor utilizado. A figura 14 ilustra um conversor de modo, onde o par de lentes está separado a uma distância d , onde nota-se que a orientação θ do conversor é definida pela inclinação das lentes em relação a horizontal (direção x).

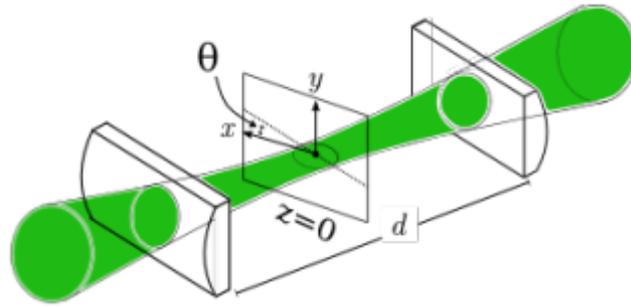


Figura 14 – Conversor astigmático. Fonte (42)

Como mencionado no início da seção, os conversores de modo atuam sobre os modos transversos assim como as placas de onda atuam sobre estados de polarização da luz. Essa analogia não reside só em termos experimentais, mas também na algebra que descreve esses dispositivos. Em notação matricial (43), um conversor de modo é dado por

$$C(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) + e^{i\phi} \sin^2(\theta) & \cos(\theta) \sin(\theta)(e^{i\phi} - 1) \\ \cos(\theta) \sin(\theta)(e^{i\phi} - 1) & \sin^2(\theta) + e^{i\phi} \cos^2(\theta) \end{bmatrix}, \quad (1.66)$$

onde θ é o ângulo do conversor em relação a horizontal e ϕ é a fase Gouy impressa sobre as componentes do modo pelo conversor.

Existem dois tipos mais comuns de conversores de modo, o tipo π e o tipo $\frac{\pi}{2}$. Obtemos o conversor tipo π posicionando o par de lentes a uma distância de $d = 2f$, o que no contexto experimental resulta em uma diferença de fase de π entre as componentes do modo que incidente. Matricialmente, após algumas simplificações algébricas, um conversor desse tipo pode ser representado por

$$C(\theta, \pi) = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix}, \quad (1.67)$$

Note que a matriz acima é idêntica à matriz de uma placa de meia onda dada pela equação 1.24.

Podemos pensar em aplicação prática desse dispositivo se considerarmos um modo Laguerre LG_p^1 com carga topológica $l = 1$ incidindo sobre o conversor. A diferença de fase(π) gerada pelo dispositivo, altera a carga topológica do modo incidente, resultado num modo laguerre de de saída dado por LG_p^{-1} . É importante mencionar que, caso o modo incidente seja da família $HG_{m,n}$, o conversor tipo π , atuará de modo a refletir o modo em relação a sua linha nodal (41).

Para o caso de um conversor tipo $\frac{\pi}{2}$, esse dispositivo é obtido quando posicionamos o par de lentes a uma distância de $d = \sqrt{2}f$, e induz uma diferença de fase de $\frac{\pi}{2}$ sobre as componentes do modo incidente. Assim como no caso anterior pode ser representado

algébricamente pela matrix

$$C(\theta, \pi/2) = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) + i \sin^2(\theta) & \cos(\theta) \sin(\theta)(1 - i) \\ \cos(\theta) \sin(\theta)(1 - i) & i \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \end{bmatrix}, \quad (1.68)$$

Novamente, analisando a forma matricial obtida acima, notamos que sua forma é idêntica à da matriz de uma quarto de onda (QWP) dada pela equação 1.25.

Em um cenário experimental, esse dispositivo gera uma diferença de fase de $\frac{\pi}{2}$ entre as componentes dos modos $HG_{1,0}$ e $HG_{0,1}$, o que resulta na transformação desses modos em um modo LG_p^l .

Importante mencionar que, atualmente existem dispositivos mais práticos que desempenham as mesmas funções dos conversores astigmáticos, são os chamados Prisma de Dove, e algébricamente são descritos por meio de matrizes análogas as matrizes que representam os conversores em 1.67 e 1.68.

1.5.3 Método Holográfico com um Modulador Espacial da Luz (Spatial Light Modulation - SLM)

Com base na referência (44), nesta seção iremos apresentar de maneira resumida uma técnica sofisticada de modulação de feixes de luz. Para uma descrição mais detalhada, vide o Apêndice [citar apendice](#)

Com os avanços tecnológicos dos últimos tempos, a técnica de modulação espacial de feixes luminosos passaram a ser realizadas de forma prática e elegante, utilizando o dispositivo chamado Spatial Light Modulation(SLM). Esta dissertação foi desenvolvido com base nesta nova tecnologia, que além de nos possibilitar gerar os modos $HG_{m,n}$, fundamentais para o desdobramento deste trabalho, nos possibilita gerar também os modos LG_p^l .

A 15 ilustra este dispositivo, que é justamente o equipamento que possuímos no Laboratório de Ótica do Instituto de Ciências Exatas (ICEEx) da Universidade Federal Fluminense, sediado na cidade de Volta Redonda. O SLM consiste em um dispositivo com uma tela de cristal de líquido 15(a) conectado a uma central de acionamento 15(b).

A tela de cristal do dispositivo, nos permite introduzir em cada um de seus pixels, de maneira independente, uma fase. Isto é realizado aplicando-se ao cristal líquido uma dada voltagem de maneira que suas moléculas possam ser giradas, alterando os índices de refração de cada uma das moléculas, o que na prática representa um aumento no caminho ótico visto pelo nosso feixe laser (44). A modulação de fase induzida pelo SLM é gerada por uma máscara de fase quando reproduzida na tela do dispositivo. Essas máscaras são geradas com auxílio de *Softwares* de computador, e correspondem a uma imagem com 255



Figura 15 – (a) Dispositivo SLM com destaque a sua tela de cristal líquido. (b) central de acionamento do SLM. Fonte: Autor

tonalidades diferentes de cinza, onde cada uma dessas tonalidades induz diferenças de fase distintas no feixe de luz incidente.

A figura 16 representa esquematicamente a codificação do modo $HG_{0,1}$ no perfil transversal de um feixe gaussiano incidente, efetuada pelo SLM com o auxílio de uma máscara de fase.

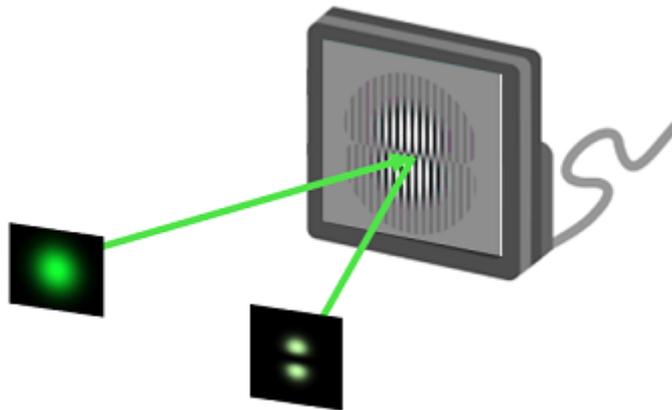


Figura 16 – Representação pictória da codificação, via SLM, do modo $HG_{0,1}$ sobre o perfil transversal de um feixe Gaussiano. Fonte: Autor

A utilização do (SLM) como método holográfico é extremamente útil e versátil pois ele substitui a confecção de filmes para a produção das holografias. Desta forma, as máscaras que definem os perfis holográficos podem ser realizadas pelo cristal líquido que compõem o dispositivo. Neste sentido, para gerar modos com diferentes perfis transversos, o processo é análogo ao representado na figura 16, sendo necessário que a máscara de fase do modo desejado esteja sendo reproduzida na tela do dispositivo. Vale ressaltar novamente que o SLM é um dispositivo extremamente versátil pois permite não só a geração de modos com ordens mais altas, como também alterações rápidas nesses modos quando deseja-se alterar de um dado perfil transversal para outro.

2 Fundamentos de Mecânica Quântica

2.1 Emaranhamento e estados de Bell

Com base nas referências (1),(45),(46), nesta seção temos por objetivo apresentar um dos principais recursos para a computação e informação quântica, bem como para o desenvolvimento desse trabalho, o emaranhamento quântico e os estados que apresentam essa propriedade, os chamados: estados de Bell.

Como discutimos em seções anteriores, um unico q-bit tem a forma dado pela equação 1.51, e pode representar qualquer estado de dois níveis escritos em relação aos vetores de base $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Nota-se que para o caso de um único q-bit, o espaço vetorial gerado é de dimensão $d = 2$. Ao aumentarmos para dois os números de q-bits(bipartidos), o espaço vetorial gerado será de dimensão $d = 4$, o que nos permite afirmar a existência de quatro vetores de base cujo a combinação linear(CL) destes nos permite obter qualquer outro estado desse sistema. Neste sentido, o estado de dois q-bits mais gerais que surgem como resultado dessa CL será dado por:

$$|\psi\rangle = \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle \quad (2.1)$$

onde $\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{10}, \alpha_{11}$ são coeficientes complexos, denominadas também de amplitudes. Importante notar que na equação acima, um estado em superposição pode ser obtido escolhendo corretamente os valores das amplitudes. Além disso, assim como para o caso de um único q-bit, temos que o estado obtido após uma medida ($z = 00, 01, 10, 11$) ocorrerá com uma probabilidade $|\alpha_z|^2$, que novamente, de acordo com a teoria de probabilidades respeita a condição de normalização $\sum_{z \in \{0,1\}^2} |\alpha_z|^2 = 1$, onde o termo $\{0,1\}^2$ significará uma string de comprimento igual a dois com cada letra sendo "0" ou "1".

Um exemplo de estado de dois q-bits de fundamental importância para computação e informação quântica são os chamados estados de Bell (1). Estes estados especiais são assim chamados devido ao fato de violarem a desigualdade de Bell (47), sendo algebricamente descritos pelas equações (2.2-2.5)

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.2)$$

$$|\beta_{01}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.3)$$

$$|\beta_{10}\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.4)$$

$$|\beta_{11}\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.5)$$

que em sua forma mais geral, podem ser dados pela lei de formação

$$|\beta_{x,y}\rangle = \frac{|0,y\rangle + (-1)^x |1,\bar{y}\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.6)$$

onde $x = \{0, 1\}$ e $y = \{0, 1\}$, e \bar{y} é a negação da variável y .

Esses estados são importantes, pois representam o principal "ingrediente" utilizado nos estudos de protocolos de informação e computação quântica, tais como teleporte e codificação superdensa pois são estados quânticos emaranhados. Estados do tipo Bell apresentam algumas propriedades interessantes por serem correlacionados, ou seja, sistemas de partículas inicialmente separadas perdem sua individualidade ao se emaranharem, não podendo mais ter suas dinâmicas tratadas separadamente, criando assim correlações mais forte que qualquer outro tipo de correlação clássica.

Por definição, um estado puro dito emaranhado, é aquele que não pode ser descrito por uma representação fatorada. Em outras palavras, o estado global do sistema $|\psi\rangle$ não pode ser descrito por um produto tensorial de dois ou mais estados quânticos de seus respectivos subsistemas, ou seja:

$$|\psi\rangle \neq |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B, \quad (2.7)$$

onde os índices A e B indicam que os vetores de estados $|\psi\rangle_{A,B}$ representam os subsistemas que geram o estado $|\psi\rangle$. Note que os estados apresentando nas equações (2.2-2.5) não podem ser escritos como um produto tensorial de dois estados quânticos, o que nos permite afirmar que os estados de Bell são estados emaranhados.

Definido o emaranhamento, o leitor pode se questionar: é possível definir o grau de emaranhamento entre os componentes de um sistema bipartido? De acordo com a referência (48), uma das maneiras de inferir o grau de emaranhamento é através da Concorrência(C), definida como

$$C = 2|\alpha_{01}\alpha_{10} - \alpha_{00}\alpha_{11}|, \quad (2.8)$$

Na expressão 2.8, o valor de " C " varia entre 0(para estados não emaranhados) e 1(para estados máximamente emaranhados).

A Concorrência definida pela equação 2.8 é aplicada diretamente à equação 2.1 e pode ser utilizada como critério de análise para dizer quão separável é o estado em questão. Importante destacar que, estados quânticos que possuam valores de C que variam entre 0 e 1, correspondem ao que chamamos de estados não maximamente emaranhados. Como exemplo prático, considere inicialmente o seguinte estado de Bell.

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad (2.9)$$

Podemos notar pela equação 2.9, que $\alpha_{00}=\alpha_{11}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\alpha_{01}=\alpha_{10}=0$ de modo que substituindo esses valores na equação 2.8 concluímos que

$$C = 2\left|-\frac{1}{2}\right| = 1, \quad (2.10)$$

Portanto como mencionado anteriormente, $|\beta_{00}\rangle$ é emaranhado pois $C = 1$. Por outro lado, fazendo o mesmo procedimento para o estado separável

$$|\Psi\rangle = |00\rangle, \quad (2.11)$$

teremos que $\alpha_{00}=1$ e $\alpha_{01}=\alpha_{10}=\alpha_{11}=0$, substituindo novamente em 2.8, temos que

$$C = 2|0| = 0, \quad (2.12)$$

Então como mencionado anteriormente, $|\Psi\rangle = |00\rangle$ é separável, dado que $C = 0$.

2.2 Estados tipo Bell parcialmente emaranhados

Os estados bipartidos descritos pela Equação 2.6 são os estados de Bell, maximamente emaranhados, resultando $C = 1$ como foi mostrado.

Contudo, podemos preparar estados tipo Bell que não são balanceados, ou seja, podemos definir duas classes de estados que são Não Maximamente Emaranhados(NME), a saber

$$|\psi_{NME}^{\pm}\rangle = \alpha |00\rangle \pm \beta |11\rangle, \quad (2.13)$$

tal que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, e

$$|\phi_{NME}^{\pm}\rangle = \delta |01\rangle \pm \gamma |10\rangle, \quad (2.14)$$

onde $|\delta|^2 + |\gamma|^2 = 1$, e α, β, δ e γ nas equações 2.13 e 2.14 são suas respectivas amplitudes de probabilidade.

A Concorrência para estes estados pode ser obtida a partir da Equação 2.8, resultando

$$C^{\psi} = 2|\alpha\beta|, \quad C^{\phi} = 2|\delta\gamma|. \quad (2.15)$$

Como podemos ver, tanto os estados $|\psi_{NME}^{\pm}\rangle$ e $|\phi_{NME}^{\pm}\rangle$, a Concorrência é obtida a partir do produto das amplitudes de probabilidade. Obtemos os estados de Bell (maximamente emaranhados) fazendo $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (idem para δ e γ). Podemos escrever esta equação, dada a condição de normalização, apenas em função de α , resultando

$$C^{\psi} = 2|\alpha\sqrt{(1 - |\alpha|^2)}|. \quad (2.16)$$

A Figura 17 mostra variação da Concorrência dada pela equação 2.16 em função α , em intervalo de $0 \leq \alpha \leq 1$. Como podemos ver, conforme tomamos valores de α cada vez maiores, o gráfico de concorrência tende inicialmente a um comportamento quase linear, obtendo seu valor máximo quando $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, que corresponde a um estado maximamente não-separável. É importante notar que, para valores de $\alpha \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, a concorrência decai

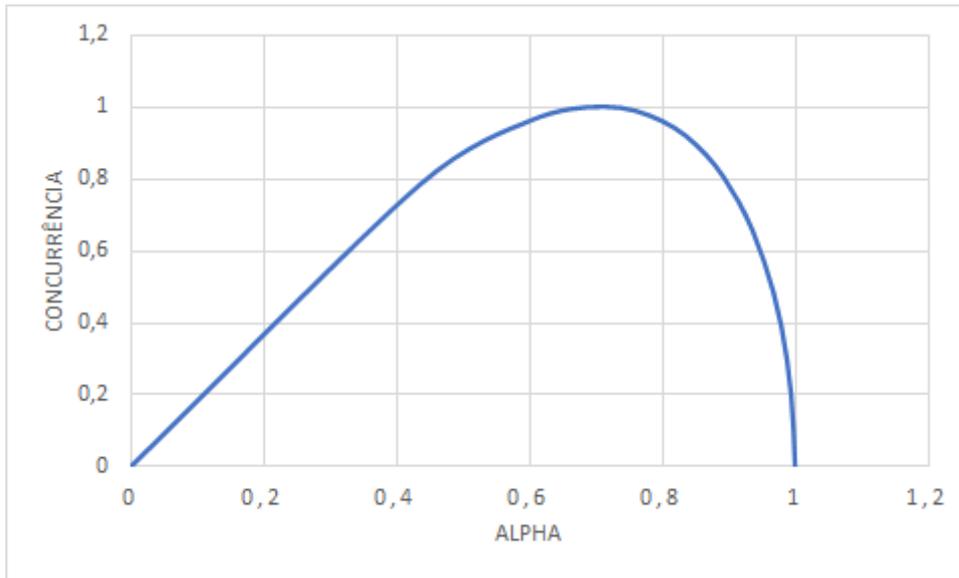


Figura 17 – Concurrencia em função de α , Fonte:Autor

rapidamente até atingir seu valor mínimo em $\alpha = 0$, onde obtemos como resultado, um estado maximamente separável.

Essa é uma ferramenta importante para quantificar o emaranhamento parcial de estados quânticos que usaremos para quantificar a separabilidade parcial de modos spin-órbita.

Uma outra implicação de um estado parcialmente emaranhado é a violação da Desigualdade de Bell, abaixo da violação máxima ($2\sqrt{2}$), que discutiremos na próxima seção.

2.3 Desigualdade de Bell

Com o desenvolvimento da teoria quântica no início do século XX, muitas discussões entre físicos sucederam os resultados apresentados pela nova teoria. Um desses resultados foi a descoberta do emaranhamento, cujo as propriedades foram questionadas, resultando na publicação de um famoso paper escrito por Einstein, Podolski e Rosen (EPR), onde questionavam a completude da Mecânica quântica (49). Essa estranha propriedade, chamada por Einstein de "spooky action at a distance" (47), conduziu a debates acerca da incompatibilidade da teoria quântica com pressupostos adotados por EPR, no qual todas as teorias físicas deveriam obedecer ao que chamaram de "localidade", e além disso, possuir os "elementos de realidade". As respostas para essas questões levantadas em debates acerca da completeza da mecânica quântica ficaram por muito tempo amarradas a discussões filosóficas sem rigor matemático ou evidências experimentais. Em 1964 surge a desigualdade de Bell como uma ferramenta para investigar esses novos estados físicos

(estados emaranhados) e estabelecer suas possibilidades no domínio da Informação Quântica.

Para dar prosseguimento a essa discussão, vamos obter primeiramente a famosa desigualdade de Bell(1). Suponha que dois fótons sejam lançados em direções contrárias e que seus estados de polarização estejam emaranhados e sejam representados pela equação

$$|\psi\rangle = \frac{|HH\rangle + |VV\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (2.17)$$

Em cada uma das direções que os fótons foram enviados, existe um detector de polarização capaz de medir os autovalores de $+1$ e -1 associados aos estados de polarização H e V . Nós denotaremos também os valores de a e b como sendo os ângulos em que cada um dos detectores podem estar orientados. Analisando o exemplo proposto até o momento, não é difícil perceber que a MQ é a capaz prever as probabilidades individuais $P_{\pm}(a)$ e $P_{\pm}(b)$ e as probabilidades conjuntas $P_{\pm\pm}(a, b)$, dadas respectivamente por (9)

$$P_{\pm}(a) = P_{\pm}(b) = \frac{1}{2}, \quad (2.18)$$

$$P_{\pm\pm}(a, b) = \frac{1}{2} \cos^2(b - a), \quad (2.19)$$

Com os dados bivariados da equação 2.19, podemos obter o coeficiente de correlação (50), usando essas probabilidades

$$M(a, b) = P_{++}(a, b) + P_{--}(a, b) - P_{+-}(a, b) - P_{-+}(a, b), \quad (2.20)$$

Substituindo as equações 2.18 e 2.19 na equação acima e resolvendo, obtemos o resultado

$$M(a, b) = \cos[2(b - a)]. \quad (2.21)$$

Esta equação evidencia que, embora os resultados das probabilidades individuais em cada um dos dispositivos de medição sejam aleatórios, as medições em conjunto nos detectores podem ser correlacionadas, uma vez que o coeficiente de correlação assume seu valor máximo quando a orientação de $a=b$.

Resultados dessa natureza eram questionados pelo trio EPR, dado que eles acreditavam que a natureza probabilística do MQ era resultado da falta de informação na teoria, e que esta não era compatível com os critérios pré estabelecidos que impunham que teorias físicas deveriam necessariamente dispor de realidade física e localidade simultaneamente.

Para sustentar seus argumentos a respeito da complexidade da teoria quântica, o trio EPR fornece de a hipótese de que talvez a natureza não obedeça a leis fundamentalmente probabilísticas e que tal interpretação seria exclusivamente devido a ignorância do experimentador a respeito do parâmetro definido e nomeado por EPR de "variáveis ocultas". Para eles, obter os valores de tais variáveis consistiria em recuperar o determinismo ausente nos postulados da teoria quântica.

A desigualdade de Bell surge com um proposta bem definida, testar elementos das ambas as teorias (teoria de variáveis ocultas e da mecânica quântica) de modo a obter resultados que apresentem desvios nas previsões dessas teorias. Neste trabalho a desigualdade de Bell será apresentada com base na formulação proposta por Clauser, Horne, Shimony and Holt (desigualdade CHSH) (51). Vamos considerar dois observáveis \hat{A} e \hat{B} que quando medidos podem assumir os valores ± 1 . Além disso, esses valores estarão anexados a variável oculta λ , de modo que o resultado ± 1 seja representado por autovalores A e B que dependam da variável oculta e da orientação (a, b) do detector. Logo,

$$A(a, \lambda) = \pm 1, \quad (2.22)$$

$$B(b, \lambda) = \pm 1 \quad (2.23)$$

Considerando que depois de muitas repetições de medidas de A e B , a variável oculta λ varia estatisticamente de acordo com uma distribuição $\rho(\lambda)$, onde $\rho(\lambda) = \int \rho(\lambda) d\lambda = 1$. A função de correlação será dada então por

$$M(a, b) = \int \rho(\lambda) A(a, \lambda) B(b, \lambda) d\lambda, \quad (2.24)$$

Agora considere a quantidade s associada as direções rotuladas pelas variáveis a, b, a' e b' dada por

$$s(\lambda, a, a', b, b') = A(\lambda, a)[B(\lambda, b) - B(\lambda, b')] + A(\lambda, a')[B(\lambda, b) + B(\lambda, b')], \quad (2.25)$$

Como definimos anteriormente, as medidas de $A(a, \lambda)$ e $B(b, \lambda)$ só podem assumir os valores de ± 1 , de modo que, mesmo com as seis combinações possíveis entre os valores de medidas da equação 2.23 e 2.23, a equação 2.25 só assumirá valores de ± 2 conforme mostrado abaixo

$$s(\lambda, a, a', b, b') = \pm 2. \quad (2.26)$$

Tomando a média (\bar{S}) sobre todos os valores de λ nós obtemos

$$\bar{S}(\lambda, a, a', b, b') = \int \rho(\lambda) s(\lambda, a, a', b, b') d\lambda, \quad (2.27)$$

$$\bar{S}(\lambda, a, a', b, b') = M(a, b) - M(a, b') + M(a', b) + M(a', b'), \quad (2.28)$$

Porém, como o valor de $s(\lambda, a, a', b, b')$ é limitado por ± 2 como mostrado em 2.26, então o valor de sua média também o é, de modo que podemos escrever como uma desigualdade na forma

$$-2 \leq \bar{S}(\lambda, a, a', b, b') \leq 2. \quad (2.29)$$

Pelo resultado acima, é importante mencionar que mesmo sem citar a mecânica quântica e utilizando somente as hipóteses de realismo e localidade, concluímos que, além

de existir uma variável(ou uma conjunto de variáveis) λ que pode determinar o resultado de todas as medições, essa variável possui um valor limitado entre ± 2 . Entretanto, mesmo com base nas premissas impostas pelo trio EPR, as predições da mecânica quântica preveem a violação da desigualdade *CHSH* por estados emaranhados, quando o conjunto de parâmetros a, a', b, b' são preparados em orientações específicas, ou seja

$$b - a = a' - b = b' - a' = \theta, \quad (2.30)$$

e

$$\theta = \pm \frac{\pi}{8} \longrightarrow S_{m\acute{a}x} = 2\sqrt{2}, \quad (2.31)$$

$$\theta = \pm \frac{3\pi}{8} \longrightarrow S_{m\acute{a}x} = -2\sqrt{2}. \quad (2.32)$$

onde $S_{m\acute{a}x}$ é o valor máximo de violação da desigualdade.

Os resultados apresentados acima, direcionam os debates iniciais acerca da completeza da teoria quântica à seguinte afirmação: A mecânica quântica não é, ao mesmo tempo, uma teoria realista e local, o que nos possibilita interpretar a teoria de duas formas

- Assumimos o realismo e a não localidade: As propriedade de entes físicos já possuem os respectivos valores independentemente da medida. No entanto, a medida que um analisador executa pode influenciar no resultado da medida do outro analisador (ou vice-versa).
- Assumimos o não realismo e a localidade: As propriedade de entes físicos não são conhecidas imediatamente antes de medi-las e a medida que um analisador executa não influenciará no resultado da medida do outro analisador

A violação da desigualdade de Bell foi experimentalmente verificada em 1982, no grupo do Prof. Alan Aspect, em Orsay, na França (52), e os resultados obtidos foram de acordo com as predições da teoria quântica.

É importante mencionar que, por mais fascinante que seja a idéia de não-localidade da teoria, isso não implica na possibilidade de uma comunicação mais rápida que a luz, uma vez que, não é possível medir a modificação no estado de um corpo A após a mediação do estado de um corpo B espacialmente separados. Logo, para um olhar positivista, não existe ação à distância (47).

Na seção seguinte, será apresentado os modos Spin-órbita que são os análogos clássicos dos estados de Bell, e além de demonstrarmos a violação da desigualdade de Bell por esses estados no contexto experimental, abordaremos também em linhas gerais, a quantização desses modos.

3 Modos spin-órbita não separáveis da Luz

Em seções anteriores, vimos que as analogias entre sistemas quânticos e clássicos possibilitam a reprodução de estados clássicos que possuem propriedades análogas às de estados verdadeiramente quânticos (46), por meio de circuitos ópticos lineares. Isso se deve ao fato de, uma vez que dois ou mais graus de liberdade são acoplados em um sistema físico, vários observáveis deste sistema deixam de poder ser representados por expressões matemáticas separáveis no que se refere aos diferentes graus de liberdade. Como já demonstrado (53), essas expressões podem exibir as mesmas estruturas matemáticas exibidas por estados emaranhados bipartidos na mecânica quântica. Neste sentido, abordaremos nesta seção os chamados modos Spin-Órbita, que apresentam uma estrutura matemática análoga aos estados de Bell, e descrevê-los quanto a sua separabilidade, ou seja, casos em que podem ser escritos como produto do versor de polarização com modo transversal, mais conhecidos como modos separáveis, e também casos em que a escrita como produto entre os graus de liberdade da luz não é permitida, os chamados modos não separáveis, análogos clássicos dos denominados estados de Bell.

3.1 Modos spin-órbita

Como apresentamos brevemente em seções anteriores, os chamados modos separáveis ou modos spin-órbita, são definidos a partir dos graus de liberdade de polarização (spin) e modos transversos (órbita) da luz, de modo que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}, t)\hat{e}_p \quad (3.1)$$

onde $\psi(\mathbf{r}, t)$ é a estrutura transversal do feixe e \hat{e}_p o versor de polarização.

A fim de detalhar e estender os conceitos associados aos modos spin-órbita, é importante retornarmos às relações apresentadas no capítulo 1.4, onde definimos as bases de codificação $\{H, V\}$ para a polarização e $\{h, v\}$ para o modo transversal. Baseado nesses dois graus de liberdade, podemos escrever o estado mais geral de um modo spin-órbita $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ para o campo eletromagnético. Assim

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = c_1 HG_{10}(\mathbf{r})\hat{e}_H + c_2 HG_{10}(\mathbf{r})\hat{e}_V + c_3 HG_{01}(\mathbf{r})\hat{e}_H + c_4 HG_{01}(\mathbf{r})\hat{e}_V \quad (3.2)$$

A partir da equação 3.2, vemos que estruturas mais complexas podem ser obtidas, uma vez que o caráter vetorial dos graus de liberdade do campo eletromagnético possibilita a construção dos chamados “modos não-separáveis” do campo eletromagnético, que podem ser definidos como

$$\mathbf{E}_{\Phi^+}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[HG_{10}(\mathbf{r})\hat{e}_H + HG_{01}(\mathbf{r})\hat{e}_V] \quad (3.3)$$

$$\mathbf{E}_{\Phi^-}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[HG_{10}(\mathbf{r})\hat{e}_H - HG_{01}(\mathbf{r})\hat{e}_V] \quad (3.4)$$

$$\mathbf{E}_{\Psi^+}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[HG_{01}(\mathbf{r})\hat{e}_H + HG_{10}(\mathbf{r})\hat{e}_V] \quad (3.5)$$

$$\mathbf{E}_{\Psi^-}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[HG_{01}(\mathbf{r})\hat{e}_H - HG_{10}(\mathbf{r})\hat{e}_V] \quad (3.6)$$

Notem que, estados como os da equações (3.3 – 3.6) não podem ser escritos como produto entre o modo transversal e o versor de polarização, ou seja, não podem ser fatorados, em razão disso são conhecidos como modos não separáveis. Com base nas codificações apresentadas neste trabalho na Seção 1.4, podemos notar que os modos não separáveis escritos na base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ são análogos aos estados de Bell apresentados nas equações (2.2 – 2.5).

Como mencionado anteriormente, os estados de Bell são maximamente emaranhados, cujo o grau de emaranhamento é medido pela "Concorrência" (2.8). Escrevendo a equação mais geral para os modos spin-órbita (3.2) na base computacional, podemos notar a semelhança com a equação (2.1), de modo que, assim como nos estados de Bell, podemos aplicar a definição da concorrência que neste caso será dada por

$$C = 2|c_1c_4 - c_2c_3|, \quad (3.7)$$

cujo valor varia de 0 até 1. A interpretação, contudo, neste cenário é um pouco diferente. Para $C=0$, temos os modos separáveis, que podem ser escritos como produto da estrutura transversal e da polarização que são análogos a estados quânticos produto. Para $C=1$, temos os modos maximamente não-separáveis dados pelas equações 3.3 a 3.6, que não podem ser escritos como um produto de modo transversal e polarização e, portanto, são análogos aos estados de Bell.

Desta forma até mesmo o emaranhamento, que é um fenômeno intrínseco a sistemas quânticos, pode ser simulado por meio de uma analogia entre a óptica linear e modos não separáveis, uma vez que são análogos aos estados de Bell.

O perfil transversal (distribuição de intensidade e a polarização) dos modos spin-órbita não separáveis pode ser visto na Figura 18. Note que estes modos são ortogonais entre si, sendo uma característica fundamental para sua utilização na codificação de q-bits.

Na fig 18, podemos notar que os modos não separáveis possuem um vórtex de polarização. Além disso, Ψ_+ e Φ_+ possuem polarização radial e azimutal respectivamente, enquanto que os modos Ψ_- e Φ_+ possuem combinações de polarização radial e azimutal.

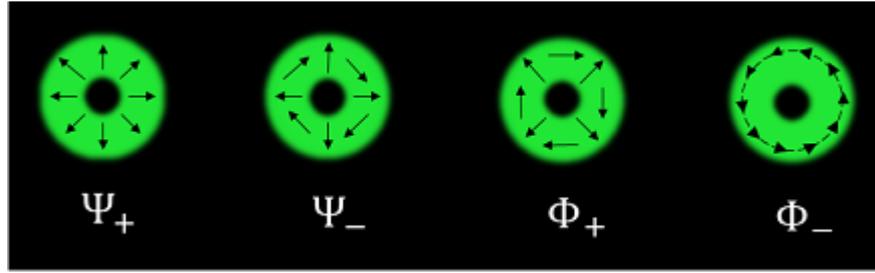


Figura 18 – Perfil transversal dos modos não separáveis. Fonte:Autor

Com base em toda a discussão teórica apresentada nesta seção, a pergunta que surge naturalmente é: como gerar modos separáveis e maximamente não separáveis no contexto na óptica linear? E uma vez produzidos, eles violam, por exemplo, desigualdades como a Desigualdade de Bell? A resposta é sim! Na seção seguinte responderemos como.

3.2 Violação de desigualdades tipo Bell por modos spin-órbita

Com base na referência (9), nesta seção será apresentado um esquema de circuito óptico capaz de gerar modos Spin-órbita não separáveis. Utilizando uma máscara holográfica e alguns dispositivos ópticos, é possível gerar emaranhamento do tipo *intrasistema* (46), que corresponde ao emaranhamento típico de modos Spin-órbita. Além disso, será discutido também a quantização dos modos Spin-órbita.

Utilizando técnicas de interferometria, estados maximamente não separáveis são preparados pelo circuito óptico apresentado na Figura 19. O feixe, inicialmente com perfil transversal gaussiano (HG_{00}) e polarização horizontal, incide sobre uma máscara de fase, convertendo o modo gaussiano num modo Hermite de primeira ordem HG_{10} . A $HWP@\theta$ posicionada antes do interferômetro tipo Mach-Zehnder (MZ) modificado, formado por um PBS na entrada e um BS na saída, gira a polarização do feixe. Assim, a $HWP@\theta$ possibilita alterar a intensidade transmitida e refletida pelo PBS na entrada do MZ. Ajustando o ângulo θ da HWP para $22,5^\circ$ têm-se a situação em que a intensidade transmitida e refletida no PBS localizado na entrada do Mach-Zehnder são iguais. Em um dos braços do interferômetro temos um prisma de Dove a 45° que atua somente no modo transversal, transformando o modo HG_{10} no HG_{01} . O PZT, uma espécie de cerâmica piezoelétrica que se deforma como consequência da aplicação de uma diferença de potencial elétrico (DDP) introduzida por uma fonte externa, permite ajustar a diferença de caminho óptico percorrido pelos feixes de cada braço. Assim, ajustando-se a DDP no PZT para que se tenha uma diferença de caminho nula tem-se a superposição coerente dos feixes de cada um dos braços e o resultado líquido é o modo não separável dado pelas equações 3.3 e 3.6, como mostrado na figura 19.

Estes estados foram usados para verificação de uma desigualdade tipo Bell para

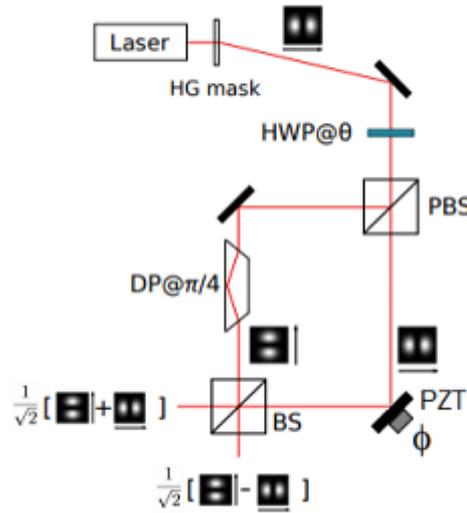


Figura 19 – Circuito para preparação de modos spin órbita. A máscara holográfica produz os modos hermite a partir do feixe laser inicialmente com modo Gaussiano e polarização vertical. O feixe é dividido entre os braços do interferômetro Mach-Zender sendo feitas operações no modo, na atuação do prisma de Dove, e polarização, com a atuação da HWP. O resultado é a produção dos modos não separáveis na saída. Fonte: (53) .

feixes intensos (53). Mostrou-se que estes feixes violam tal desigualdade construída a partir da medida em bases de polarização e modo transversos diretamente relacionadas com as bases de Bell. Então, a não separabilidade dos modos spin-órbita é análoga ao emaranhamento de graus de liberdade interno de um fóton único. Vamos discutir essa analogia na seção seguinte.

3.3 Analogia clássico-quântica dos modos não separáveis

Com base na referência (53), vamos agora dissertar sobre as diferenças entre estados maximamente não separáveis e estados de Bell. Como já mencionado anteriormente, é permitido utilizar em um contexto experimental analogias entre estados puramente quânticos e feixes clássicos para estudar (45), por exemplo, as peculiaridades de estados quânticos emaranhados, que num contexto clássico são descritos por

$$\Phi^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}[HG_{10}(\mathbf{r})\hat{e}_H \pm HG_{01}(\mathbf{r})\hat{e}_V], \quad (3.8)$$

$$\psi^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}[HG_{01}(\mathbf{r})\hat{e}_H \pm HG_{10}(\mathbf{r})\hat{e}_V]. \quad (3.9)$$

Os estados representados acima são os análogos clássicos aos estados de Bell escritos na base de modo transversal $\{HG_{m,n}\}$ e polarização $\{H, V\}$, cujo o grau de

emaranhamento é medido pela concorrência, e que nesse caso assume o valor de $C = 1$, já que são estados emaranhados.

Entretanto surge naturalmente a questão: como é possível utilizar experimentalmente modos clássicos de um feixe laser para estudar regimes quânticos?. A resposta para essa questão está na quantização dos campos eletromagnéticos, que nos possibilita descrever a dinâmica desse campo no contexto da MQ. Antes de começar, é importante mencionar que, no espaço de Hilbert o vetor $|\psi\rangle_N$ descreve um estado de N partículas. No entanto, como no contexto da quantização de campos precisamos descrever os estados de n_i partículas, se faz necessário utilizarmos a chamada "segunda quantização", pois essa descrição da MQ permite manter o controle sobre estados de muitas partículas, os chamados estados de Fock, dado por

$$|n_1, n_2, n_3 \dots n_i, \dots\rangle \in F, \quad (3.10)$$

onde F é o espaço de Fock.

Em um cenário puramente quântico, para descrevermos um feixe clássico é fundamental tomarmos como ferramenta o operador que caracteriza o campo eletromagnético, que escrito na base $\{\psi_i(\vec{r})e_j\}$ é dado por

$$\mathbf{A}^+(\vec{r}, t) = e^{i(kz - \omega t)} \sum_i a_{ij} \psi_i(\vec{r}) e_j \quad (3.11)$$

onde a_{ij} é o operador aniquilação do fóton no modo $\psi_i(\vec{r})e_j$. Ainda no contexto de definir como quantizar os campos, precisamos determinar os novos operadores aniquilação, que podem ser escritos em diferentes bases para decompor o operador campo. No caso deste trabalho, iremos definir os operadores aniquilação com base nas equações 3.8 e 3.9, de modo que sejam dados por

$$a_{\phi^\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{Hh} \pm a_{Vv}), \quad (3.12)$$

$$a_{\psi^\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{Hv} \pm a_{Vh}), \quad (3.13)$$

Que representam o conjunto de operadores de aniquilação do campo \vec{A} . Escrevendo o operador campo em função dos operadores aniquilação, teremos que o campo quantizado será dado por

$$\mathbf{A}^+(\vec{r}, t) = e^{i(kz - \omega t)} \sum_i a_{\phi^\pm} \Phi^\pm + a_{\psi^\pm} \psi^\pm. \quad (3.14)$$

Como uma aplicação direta do operador campo, podemos estudar as transformações entre estados que possuem diferentes números de fótons. Precisamos para isso, definir os estados de Fock que podem ser criados a partir do vácuo $|0\rangle$ de um dado estado com a atuação do operador criação do respectivo estado. Neste sentido, o estado de Fock do modo ϕ^+ , pode ser obtido fazendo

$$|N\rangle_{\mathbf{E}_\phi^+} = \frac{a_{\phi^+}^\dagger{}^N}{\sqrt{N!}} |0\rangle_{\phi^+}, \quad (3.15)$$

Um vetor de estado parecido poderia ser escrito para ϕ^\pm e ψ^\pm dado que o estado $|N\rangle$ é um estado multimodo. Se considerarmos $N = 1$, representando um único fóton de entrada num experimento capaz de gerar o modo ϕ^+ , pela equação 3.15 teríamos o seguinte estado de Fock

$$|1\rangle_{\phi^+} = a_{\phi^+}^\dagger |0\rangle_{\phi^+}, \quad (3.16)$$

que escrito em função do hermitiano de 3.13, temos que

$$|1\rangle_{\phi^+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{Hh} \pm a_{Vv}) |0\rangle_{\phi^+}. \quad (3.17)$$

Como esses operadores de aniquilação estão diretamente associados aos modos spin-órbita não separáveis: ao construir o operador hermitiano 3.13 e atuar no estado de vácuo, obtêm-se o estado coerente que, para um número macroscópico de fótons, descreve com boa aproximação o campo associado aos modos spin-órbita não separáveis. É importante notar que, utilizando graus de liberdade de um feixe clássicos, podemos levá-los ao regime quântico diminuindo a emissão de fótons pela fonte. Na exemplo acima, escolhemos o número de fótons $N = 1$, no entanto apesar de não conseguimos reproduzir em laboratório o regime de fótons únicos, podemos reduzir a intensidade contagem de centenas de fótons, o que pode ser descrito como um estado coerente.

4 Preparação controlada de diferentes classes de modos spin-órbita não separáveis

4.1 Preparação de modos spin-órbita com pesos variáveis

Neste trabalho, o estado de dois q-bits foram codificado nos graus de liberdade da luz, a saber, nos modos transversos e na polarização de. O primeiro q-bit foi codificado na polarização, onde $|H\rangle$ e $|V\rangle$ representam os estados de polarização horizontal e vertical na base computacional $|0\rangle_P$ e $|1\rangle_P$, respectivamente. O segundo q-bit foi codificado nos modos Hermite-Gauss de primeira ordem, onde $|HG_{10}\rangle = |h\rangle$ e $|HG_{01}\rangle = |v\rangle$ que, neste caso, representam os estados da base $|0\rangle_T$ e $|1\rangle_T$. Os índices P e T indicam as bases da polarização e modo transverso respectivamente. A Tabela 4.1 apresenta a relação entre os graus de liberdade da luz e as bases, utilizadas para se implementar o processo de codificação.

Bases Ópticas	Base computacional
$\hat{e}_H H_{1,0} = Hh\rangle$	$ 00\rangle$
$\hat{e}_H H_{0,1} = Hv\rangle$	$ 01\rangle$
$\hat{e}_V H_{1,0} = Vh\rangle$	$ 10\rangle$
$\hat{e}_V H_{0,1} = Vv\rangle$	$ 11\rangle$

Tabela 1 – Analogia entre a codificação de q -bits nas bases ópticas e base computacional

A configuração experimental mostrada na Figura 20 possibilita a construção dos modos sSpin-órbita análogos aos chamados estados de Bell desbalanceados, ou parcialmente emarnhados, discutidos na Seção 2.2 dados por

$$|\Psi^\pm(\theta)\rangle = \cos(2\theta) |Hh\rangle \pm \sin(2\theta) |Vv\rangle, \quad (4.1)$$

$$|\Phi^\pm(\theta)\rangle = \cos(2\theta) |Hv\rangle \pm \sin(2\theta) |Vh\rangle, \quad (4.2)$$

que são estados matematicamente descritos por uma combinação linear de modos com paridade definida, conhecidos como modos pares ($|Hh\rangle$ e $|Vv\rangle$) e modos ímpares ($|Hv\rangle$ e $|Vh\rangle$). Importante notar que os pesos de cada um desses estados possuem uma dependência angular que pode variar entre $\theta = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Os estados mostrados acima podem ser preparados conforme o circuito ótico mostrado na Figura 20. Isto se dá com base no fato de que cada um dos elementos óticos atuam localmente nos graus de liberdade da luz, ou seja, a HWP atua somente sobre q -bit

de polarização e o SLM e DP atuam somente sobre o q -bit codificado no perfil transversal do feixe.

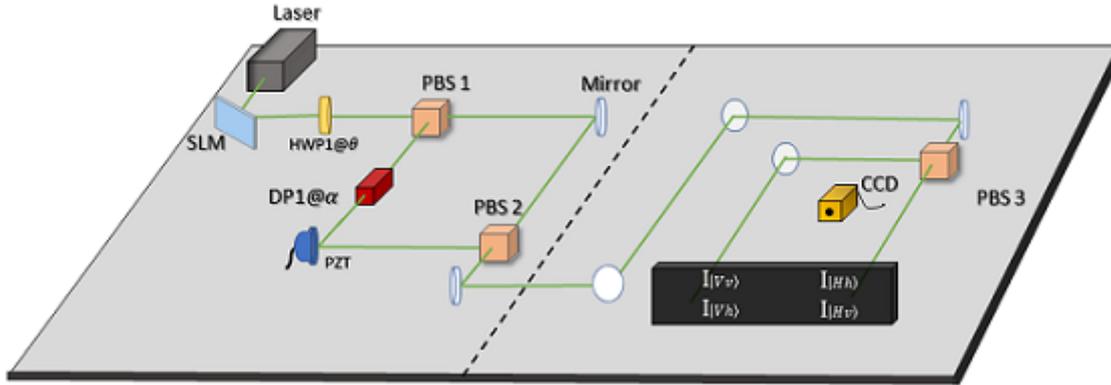


Figura 20 – Circuito experimental para a geração dos estados com pesos variados. Fonte: Autor

A preparação do estado indicado na equação 4.1 começa com um feixe laser gaussiano ($HG_{0,0}$), polarizado horizontalmente refletindo sobre um SLM, onde o modo hermite $HG_{1,0}$ é preparado de acordo com a Seção 1.5 como perfil transversal do feixe. Ao incidir sobre a $HWP@\theta$, posicionada antes do interferômetro tipo Mach-Zehnder (MZ) modificado (54), o q -bit de polarização pode ser alterado de maneira controlada variando o ângulo θ da HWP. No desenvolvimento deste trabalho, os estados desejados serão obtidos posicionando o dispositivo nos ângulos apresentados na tabela abaixo:

θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5
0	11, 25°	22, 5°	33, 75°	45°

Tabela 2 – Ângulos $HWP@\theta$

Como exemplo, estado $|\Psi^+\rangle$ será gerado com a $HWP@\theta$ orientada inicialmente a $\theta = 22, 5^\circ$ em relação a horizontal de modo que, ao ser incidir sob a HWP com polarização $|H\rangle$ o feixe será transmitido com polarização diagonal ($|D\rangle$), resultando em um $|\Psi^+\rangle$ dado por:

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |Hh\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |Vh\rangle \quad (4.3)$$

O estado gerado incide sobre o PBS_1 posicionado na entrada do interferômetro, onde é parcialmente transmitido e refletido devido o estado de polarização $|D\rangle$, visto que a luz polarizada horizontalmente(verticalmente) é transmitida (refletida) pelo PBS_1 . Em um dos braços do MZ possui um $DP@\alpha$, que para a geração do estado $|\Psi^+\rangle$ é orientado

em $\alpha = 45^\circ$, de modo que o estado refletido pelo PBS_1 , $|Hv\rangle$, é alterado para $|Vv\rangle$ ao ser transmitido pelo DP, resultando num estado de saída pelo PBS_2 dado por:

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |Hh\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |Vv\rangle \quad (4.4)$$

No estágio de medição, lado direito da linha tracejada na fig.20, o estado $|\Psi^+\rangle$ é direcionado por espelhos ao PBS_3 , onde novamente cada um dos estados de polarização escritos na base $|H\rangle$ e $|V\rangle$ saem em diferentes portas do PBS_3 . Com isso observamos dois padrões de intensidade no anteparo, que correspondem a intensidades associadas a $I_{|Hh\rangle}$ e $I_{|Vv\rangle}$. Destaco que, na figura 20, os estados pares e ímpares representados no anteparo não são obtidos simultaneamente, sendo cada um deles obtidos de acordo com uma dada configuração experimental.

Utilizando uma câmera CCD (do inglês, *Charged-Coupled Device*) posicionada frete ao anteparo, realizamos medições quantitativas dos perfis de intensidade associadas a cada um dos estados que pedem ser gerados pelo circuito. Importante mencionar que fizemos o uso de algumas configurações adicionais na CCD, por meio do *Software IC Capture* que controla o dispositivo. Por exemplo, utilizamos um ganho (*gain*) reduzido dado que tal configuração permite uma menor saturação na captura de imagens, o que reflete experimentalmente em imagens com menos ruídos. Além disso controlamos a intensidade do feixe laser para trabalhar longe do regime de saturação da câmera, de modo que ruídos luminosos não sensibilizavam o CCD.

Para o exemplo acima, as medidas de intensidades resultarão no mesmo valor dado que os pesos de cada um dos estados contituentes de $|\Psi^+\rangle$ são iguais.

O processo de preparação do estado $|\Phi^\pm\rangle$, como já mencionado, é análogo ao de preparação do estado $|\Phi^\pm\rangle$. Um feixe inicial com perfil gaussiano ($HG_{0,0}$) polarizado horizontalmente incide sobre o SLM, que neste caso codifica o q -bit no modo hermite $HG_{0,1}$ denominado $|v\rangle$. Ao ser transmitido novamente pela $HWP@\theta$ posicionada em qualquer ângulo entre $\theta = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$, obteremos como resultado o estado:

$$|\Phi^+\rangle = \cos(2\theta) |Hv\rangle + \sin(2\theta) |Vv\rangle \quad (4.5)$$

No PBS_1 , novamente os q -bits codificados em estados de polarização ortogonais, $|H\rangle$ e $|V\rangle$ saem pelo dispositivo em diferentes portas, de modo que o estado $|Vv\rangle$ refletido pelo PBS_1 , incidi sobre o DP orientado a um ângulo de $\alpha = 45^\circ$, onde é alterado para o estado $|Vh\rangle$. Após ser transmitido pelo DP e direcionado por um PZT (*Cerâmica Piezo elétrica*) ao PBS_2 , o estado a ser medido será dado por:

$$|\Phi^+\rangle = \cos(2\theta) |Hv\rangle + \sin(2\theta) |Vh\rangle \quad (4.6)$$

O processo de medição do estado representado na equação 4.6, é similar ao processo de medida já mencionado para o caso de $|\Psi^+\rangle$, onde a única diferença considerável está relacionada aos perfis de intensidades a serem medidos, que neste caso é dado por $I_{|Hv\rangle}$ e $I_{|Vh\rangle}$, ficando

$$|\psi^+\rangle = \cos(2\theta) |Hh\rangle + \sin(2\theta) |Vv\rangle \quad (4.7)$$

Definidos os modos spin-órbita com separabilidade variável, dados pelas equações 4.6 (ímpares) e 4.7, podemos escrever a Concorrência deste modo como

$$C = 2|\cos(2\theta)\sin(2\theta)|, \quad (4.8)$$

Onde para $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 45^\circ$ a concorrência assume seu valor mínimo, $C = 0$, e para $\theta = 22,5$ assume valor seu valor máximo $C = 1$.

4.2 Proposta de experimento para verificação da violação parcial da desigualdade de Bell por modos spin-órbita desbalanceados

A configuração experimental que possibilita verificar a violação da desigualdade de Bell por estados desbalanceados é mostrada na figura 21. Esta é composta de dois estágio: o de preparação dos estados e o de medição das intensidades. Uma vez que o processo de preparação desses estados já foi exemplificado na seção anterior, limitarei as exemplificações nesta seção ao processo de medição das intensidades.

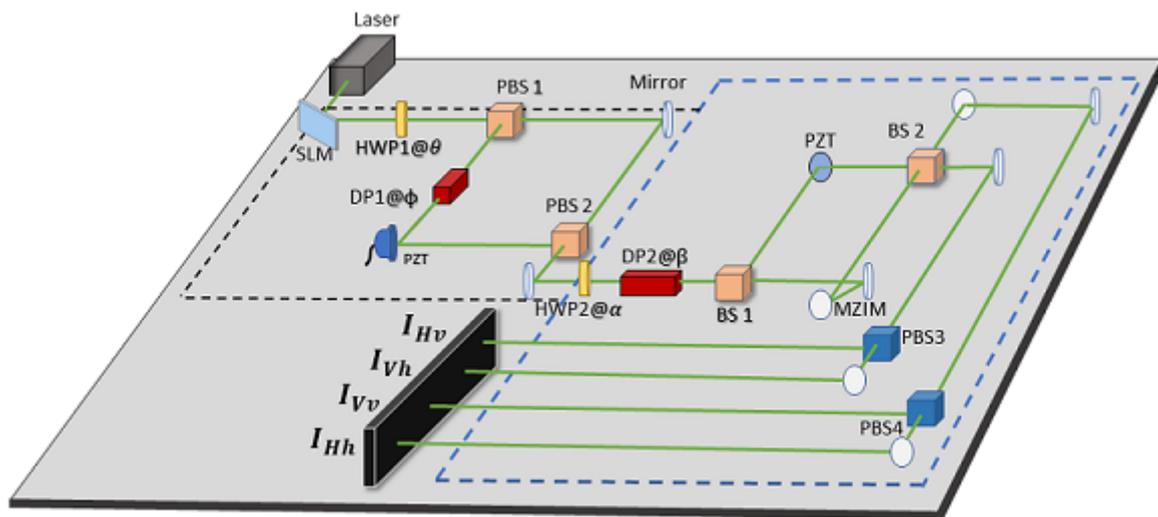


Figura 21 – Circuito experimental para a criação dos modos spin-órbita separáveis e não separáveis, onde a linha tracejada em preto é a região de preparação dos modos, e a linha tracejada em azul é a região de medição dos modos. Fonte: Autor

Como já mencionado anteriormente, após a preparação, os estados de saída em uma das portas do PBS_2 serão dados pelas equações:

$$|\Psi^\pm(\theta)\rangle = \cos(2\theta) |Hh\rangle \pm \sin(2\theta) |Vv\rangle \quad (4.9)$$

$$|\Phi^\pm(\theta)\rangle = \cos(2\theta) |Hv\rangle + \sin(2\theta) |Vh\rangle \quad (4.10)$$

Na etapa de medição dos estados mostrados acima, utilizamos uma placa de meia de onda ($HWP_2@\theta_2$) e um prisma de Dove ($DP_2@\alpha_2$), que nos possibilita definir as bases ($\hat{e}_{\alpha\pm}, \psi_{\beta\pm}$) nas quais as medidas tipo Bell serão realizadas, definidas como

$$\hat{e}_{\alpha+} = \cos(2\alpha)\hat{e}_V + \sin(2\alpha)\hat{e}_H \quad (4.11)$$

$$\hat{e}_{\alpha-} = \sin(2\alpha)\hat{e}_V - \cos(2\alpha)\hat{e}_H \quad (4.12)$$

$$\psi_{\beta+}(\vec{r}) = \cos(2\beta)\psi_V(\vec{r}) + \sin(2\beta)\psi_H(\vec{r}) \quad (4.13)$$

$$\psi_{\beta-}(\vec{r}) = \sin(2\beta)\psi_V(\vec{r}) - \cos(2\beta)\psi_H(\vec{r}). \quad (4.14)$$

Os modos spin-órbita desbalanceados descritos nas bases rodadas, após preparação inicial de $|\Psi^+(\theta)\rangle$ a passagem destes pela $HWP_2@\alpha$ e pelo $DP_2@\beta$ ¹ serão dados por:

$$|\psi(\theta)\rangle = \cos(2\theta)(\mu_\alpha\mu_\beta |Hh\rangle + \mu_\alpha\lambda_\beta |Hv\rangle + \lambda_\alpha\mu_\beta |Vh\rangle + \lambda_\alpha\lambda_\beta |Vv\rangle) + \sin(2\theta)(\lambda_\alpha\lambda_\beta |Hh\rangle - \lambda_\alpha\mu_\beta |Hv\rangle - \mu_\alpha\lambda_\beta |Vh\rangle + \mu_\alpha\mu_\beta |Vv\rangle) \quad (4.15)$$

Onde $\mu_\alpha = \cos(2\alpha)$, $\mu_\beta = \cos(2\beta)$, $\lambda_\alpha = \sin(2\alpha)$ e $\lambda_\beta = \sin(2\beta)$.

As medidas projetivas nas bases rodadas são implementadas no interferômetro Mach-Zehnder com um espelho adicional (MZIM) associados um PBS em cada saída do interferômetro (54). A $HWP_2@\alpha$ e $DP_2@\beta$ vão escolher a base de medida ajustando-se α e β . O MZIM realiza a seleção de paridade dos modos spin-órbita ajustando a diferença de fase entre o braços do dispositivo, que aqui é implementada pelo PZT. Dessa forma, os modos pares ($|Hh\rangle, |Vv\rangle$) e os modos ímpares ($|Hv\rangle, |Vh\rangle$) deixam o MZIM em saídas diferentes.

Após o estágio de seleção de paridade dos modos no MZIM, teremos dois divisores de feixes polarizados (PBS_3 e PBS_4) que serão responsáveis por projetar as quatro componentes de saída num anteparo, onde os quatro perfis de intensidade serão registrados simultaneamente por uma câmera CCD (*ChargeCoupledDevice*). Para a proposta deste trabalho, a diferença de fase foi projetada para que os modos pares sejam direcionados ao PBS_4 , e os modos ímpares sejam direcionados ao PBS_3 .

¹ para facilitar na distinção dos ângulos de preparação θ e circuito de medida fizemos esta mudança de nomenclatura dos ângulos da HWP_2 , $\theta_2 = \alpha$, e do DP_2 , $\alpha_2 = \beta$.

O estado $|\psi(\theta)\rangle$ escrito nas bases rodadas, mostrado na equação 4.15, sob certas condições relacionadas a orientação da $HWP\theta_{1,2}$ e ao $DP\alpha_2$ apresenta a característica de não violação, violação parcial e violação máxima da desigualdade de Bell. Vejamos alguns exemplos.

Na equação 4.15, se $\theta = \alpha = \beta = 0^\circ$, obtemos o estado separável $|Hh\rangle$ como estado de saída do $MZIM$, o que no circuito apresentado na figura 21 é representado por um único padrão de intensidade no anteparo na transmissão do PBS_4 . Ao fazermos $\theta = 0$, produzimos o modo separável $|Hh\rangle$ e fazer $\alpha = \beta = 0^\circ$ implica medir na base $HV - hv$, ou, usando termos da área de informação quântica, na base computacional. Dessa forma, $\mu_\alpha = \mu_\beta = 1$ e $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = 0$.

Caso $\theta = 22,5^\circ$ $\alpha = \beta = 0^\circ$, o resultado de saída pela porta "par" do $MZIM$ será o modo spin-órbita máximamente não separável dado pela equação 3.3, representado por dois padrões de igual intensidade no anteparo na direção de transmissão e reflexão do PBS_4 . Continuamos a medir na base computacional. Esse estado, após todas as medidas nas bases de Bell e cálculo de S, conforme Seção 2.3, deve apresentar violação máxima.

Como último exemplo, vejamos como fica o modo maximamente não-separável ($\theta = 22,5$) e escolhendo duas bases de violação máxima da desigualdade de Bell, $\alpha = 22,5^\circ$ e $\beta = 0^\circ$, o resultado de saída pelas portas do $MZIM$ será o estado dado por

$$|\psi(22,5^\circ)\rangle = \frac{1}{2}(|Hh\rangle + |Vh\rangle + |Hv\rangle + |Vv\rangle), \quad (4.16)$$

o que representa quatro padrões de igual intensidade no anteparo em todas as portas do PBS_3 e PBS_4 .

Os exemplos que mostramos acima são os modos esperados para a não violação (estado produto) e violação máxima. Mostramos que os modos produzidos coincidem com o esperado para as respectivas bases de Bell. Para preparação de modos parcialmente não-separáveis $0^\circ < \theta < 45^\circ$ (exceto $22,5^\circ$) deveremos ter uma violação parcial da Desigualdade de Bell. Deixamos, então, como proposta, a realização do experimento indicado no circuito da figura 21 para verificação da violação parcial da Desigualdade de Bell pela classe de estados parcialmente não separáveis preparadas pelo circuito ótico proposto nesta dissertação.

No próximo capítulo vamos mostrar os resultados experimentais da preparação dos modos parcialmente não separáveis e sua caracterização por meio da concorrência.

5 Discussão dos resultados experimentais

Utilizando como base todo o desenvolvimento teórico apresentado no Capítulo 4, neste Capítulo serão apresentados os resultados experimentais de preparação de modos spin-órbita.

No cenário experimental, a obtenção dos valores de intensidades dos modos separáveis e não separáveis $I_{|Hh\rangle}$ e $I_{|Vv\rangle}$ se deram com auxílio de uma câmera *CCD* e do Software e *image-j*. Com a obtenção desses valores de intensidade, além da possibilidade de ratificar a analogia entre estados quânticos emaranhados e não emaranhados com modos spin-órbita, pudemos desenvolver também análises envolvendo estados parcialmente emaranhados, uma vez que para seus análogos clássicos, os modos desbalanceados, os valores de intensidade associados oscilam entre os valores de $I_{|Hh\rangle}$ e $I_{|Vv\rangle}$ obtidos em laboratório.

5.1 Modos spin-órbita pares de separabilidade variável

A obtenção dos resultados associados a essa classe de modos Spin-órbita se deu por meio do experimento descrito na figura 20, que foi calibrado para a realização deste trabalho. Além disso, o experimento foi pensado para operar com uma polarização de entrada horizontal, de modo que o dados pudessem ser coletados na ordem aqui apresentada.

Como mostrado em seções anteriores, os estados desbalanceados pares que foram preparados experimentalmente são dados pela expressão

$$|\psi^+(\theta)\rangle = \cos(2\theta)|Hh\rangle + \sin(2\theta)|Vv\rangle, \quad (5.1)$$

onde θ corresponde aos valores angulares nos quais eixo rápido da *HWP*@ θ é posicionado em relação a horizontal. De acordo com o desenvolvimento teórico deste trabalho, o modo spin-órbita separável é aquele que pode ser escrito como um produto entre o modo transversal e o versor de polarização. De acordo com a expressão 5.1, um modo separável é obtido quando as funções **sin** e **cos** assumem seus valores extremos, o que ocorrem em $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 45^\circ$. No cenário experimental, o valor de θ que prepara o estado separável $|Hh\rangle$ foi alcançado calibrando o ângulo do eixo rápido da *HWP*@ θ a um ângulo $\theta = 0^\circ$, em relação a horizontal, de modo que esse estado fosse transmitido pelo *PBS* e direcionado ao anteparo, sem sofrer modificações por outros elementos ópticos do circuito. Nesta configuração, a figura 22 ($\theta = 0^\circ$) apresenta o modo spin-órbita obtido experimentalmente, onde nota-se um único padrão de intensidade $I_{|Hh\rangle}$ a esquerda. Os gráficos em barra apresentados na coluna à direita descrevem as medidas de intensidades normalizadas relacionadas a cada dos modos gerados, que para o caso desse modo de entrada obtivemos

o valor 1, que corresponde ao valor máximo de medida e está associado a certo grau de emaranhamento como será mostrado logo abaixo.

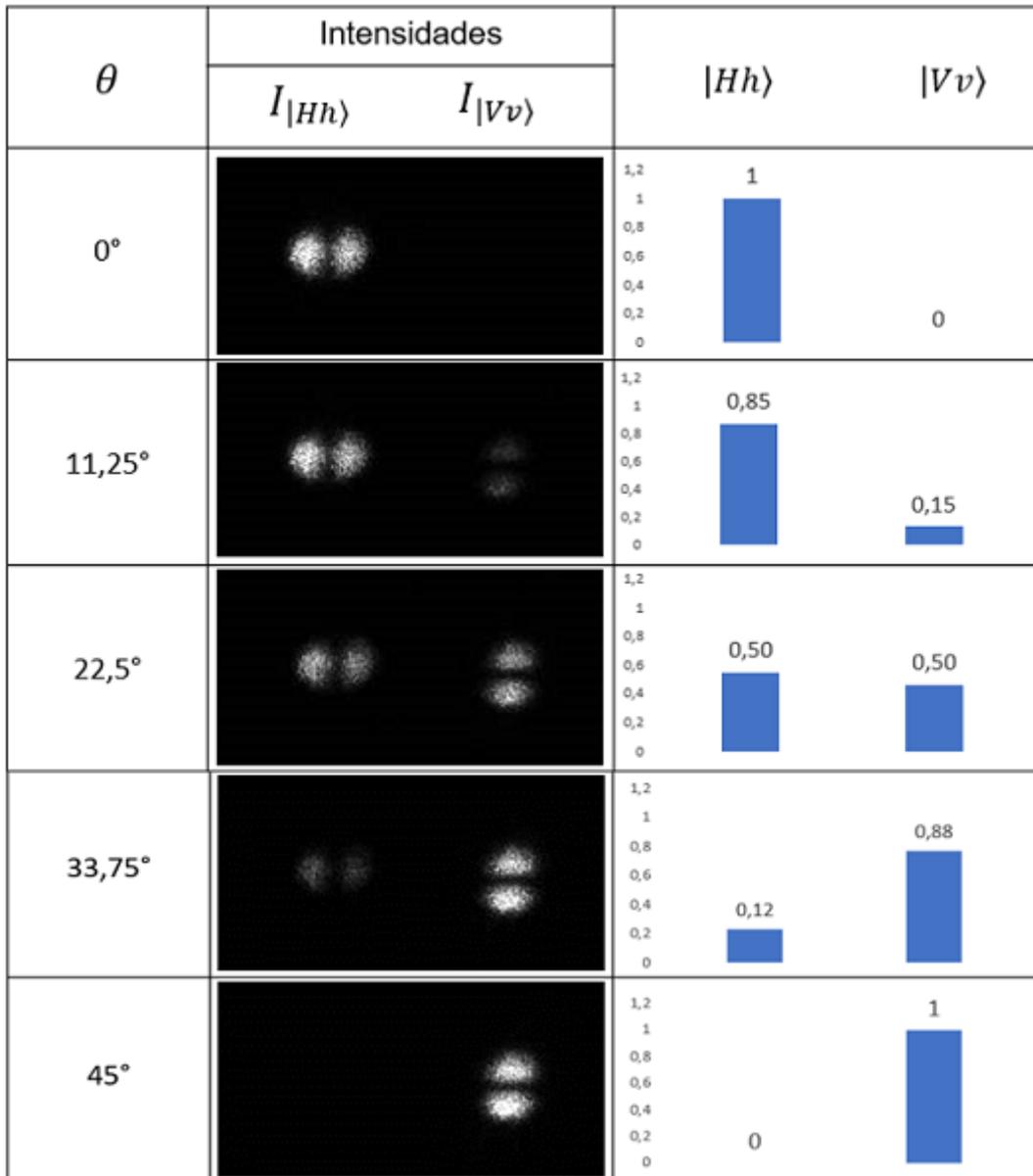


Figura 22 – Valores de θ , padrões de intensidade e medidas de padrões de intensidade.
Fonte Autor

Ajustando a $HWP\theta$ na entrada para o valor de $\theta = 11,25^\circ$ e substituindo esse valor na expressão 5.1, nota-se que o estado gerado possui componentes $|Hh\rangle$ e $|Vv\rangle$. Experimentalmente, esse fato gera no anteparo dois padrões de intensidade, $I_{|Hh\rangle}$ e $I_{|Vv\rangle}$ respectivamente, e que possuem intensidades distintas como mostrado na figura 22. Os resultados esperados, relativo as intensidade nomalizadas, eram em torno $I_{|Hh\rangle} = 85\%$ e $I_{|Vv\rangle} = 15\%$. Como pode ser visto no gráfico de barras, os valores de intensidades relativas medidos estão em excelente acordo com os valores teóricos. Importante mencionar que, para o caso dos modos pares, ângulos diferentes de 0° e 45° irão resultar em estados com

componentes $|Hh\rangle$ e $|Vv\rangle$, que na prática correspondem a dois padrões de intensidades no anteparo, podendo ter, em geral, intensidades diferentes que variem de acordo com o ângulo θ , como mostrado na equação 5.1. Com a $HWP@\theta$ posicionada em $\theta = 22,5^\circ$ observamos no anteparo dois padrões de intensidades, que teoricamente deveriam compartilhar as intensidades normalizadas $I_{|Hh\rangle} = I_{|Vv\rangle} = 50\%$, no que conorda muito bem com os resultados experientais. Com a $HWP\theta$ posicionada em ângulos de $\theta = 33,75^\circ$ e $\theta = 45^\circ$, é possível observar simetria com os resultados obtidos quando a $HWP\theta$ estava orientada nos ângulos $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 11,25^\circ$. A diferença entre esses casos está nos padrões de intensidade observados, sendo o o mais intenso o modo $|Vv\rangle$. As intensidades relativas ficaram muito próximas do esperado.

Como mencionado anteriormente no desenvolvimento teórico deste trabalho, as intensidades medidas são análogas as densidade de probabilidade associadas a estados quânticos, permitindo utiliza-lás como grandezas capazes de mensurar o grau de emaranhamento entre os análogos clássicos de estados quânticos através de concorrência. Neste sentido, com base em valores teóricos obtidos variando θ entre valores de 0° e 45° na equação 4.8, e em medidas de intensidade normalizadas $I_{|Hh\rangle}$ e $I_{|Vv\rangle}$ experimentais, calculamos a concorrência como

$$C = 2|\sqrt{I_H}\sqrt{I_V}|, \quad (5.2)$$

e geramos o gráfico de Concorrência em função do parâmetro θ apresentado na figura 23, onde a curva descreve os valores teóricos e os pontos representam valores experimentais.

Por meio de análise constatamos que a concorrência entre os estados da equação 5.1, assume o valor $C = 0$ nas extremidades do gráfico, tanto para valores teóricos quanto para valores experimentais, estando associada a orientação da $HWP\theta$ nos ângulos de $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 45^\circ$ respectivamente.

Esse resultado, indica a separabilidade,análogo ao não emaranhameto, entre os graus de liberdade do estado $|\psi^+(0^\circ/45^\circ)\rangle$, o que em palavras correspondende a dizer que $|\psi^+\rangle$ é separável e resulta em $|Hh\rangle$ quando $\theta = 0^\circ$, ou $|Vv\rangle$ quando $\theta = 45^\circ$. o valor de concorrência experimental obtido com a $HWP\theta$ orientada a um ângulo de $\theta = 22,5^\circ$ está em excelente acordo com o valor teórico, aprximadamente 1, o que evidência uma não separabilidade máxima (equivalentne a um emaranhamento máximo) entre graus de liberdade de um modo Spin-órbita não separável de acordo com resultados de trabalhos anteriores e, portanto, espera-se deste modo uma violação máxima da desigualdade $CHSH$. Para os valores de $\theta = 11,25^\circ$ e $\theta = 33,75^\circ$ indicados na figura 22, temos uma concorrência em bom acordo com a teoria, dentro da margem de erro. Para os valores de $theta$ intermediários o acordo com a curva teórica é excelente. Para valores de θ não nulos perto dos extremos, o resultado é um pouco mais discrepante da curva teórica. Acredita-se que os erros no ajuste de ângulos pelo estágio de rotação ($\pm 1^\circ$) e conhecido pior funcionamento do PBS para a polarização V façam com que esta faixa de ângulos

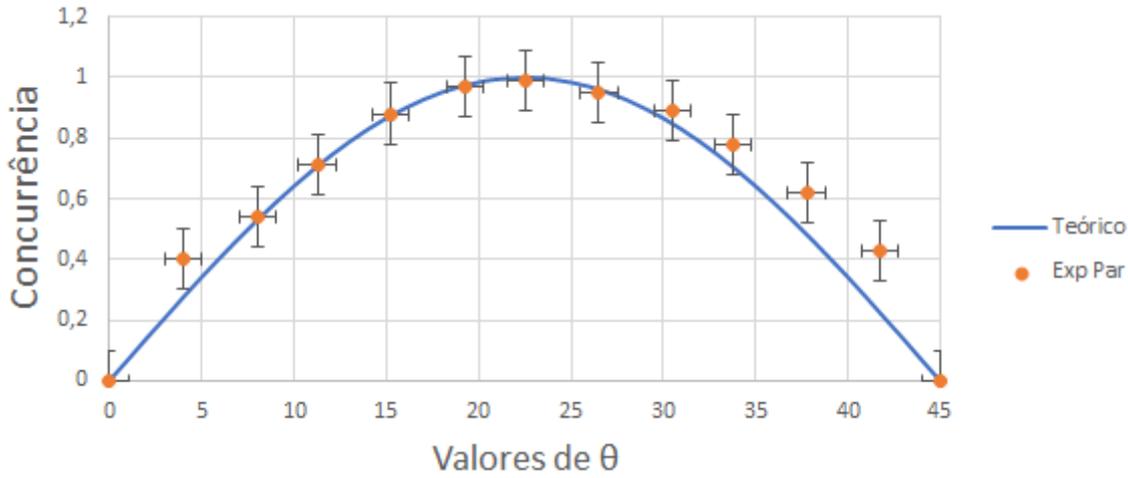


Figura 23 – Concorrência para valores teóricos (curva cheia) e experimentais (pontos) em função de θ para os modos pares Fonte: Autor.

tenhamos um resultado inferior. Além disso, o Prisma de Dove que roda o modo transversal pode alterar mais fortemente a polarização para ângulos perto dos extremos.

5.2 Modos spin-órbita ímpares com separabilidade variável

De modo análogo ao apresentado na seção anterior, nesta seção os estados desbalanceados a serem reproduzidos experimentalmente são dados pela expressão

$$|\phi^+(\theta)\rangle = \cos(2\theta) |Hv\rangle + \sin(2\theta) |Vh\rangle, \quad (5.3)$$

que correspondem aos estados de paridade ímpar.

Utilizando valores de θ entre $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 45^\circ$ para definir os pesos associados aos estados $|Hv\rangle$ e $|Vh\rangle$ na equação 5.3, podemos verificar que, assim como no caso anterior, os modos separáveis e maximamente não separáveis são obtidos quando o valor de θ assume seus valores extremos. Neste sentido, orientando a $HWP\theta$ a um ângulo de $\theta = 0^\circ$, podemos verificar na equação 5.3 que o estado $|\psi\rangle$ gerado é o estado separável $|Hv\rangle$ de peso 1. Este fato se traduz experimentalmente como um padrão de intensidade $I_{|Hv\rangle}$ observado no anteparo, como mostrado na figura 24. Com uma boa visibilidade, o resultado de medida da intensidade concordou com resultado teórico esperado, o estado é 100% separável como poder ser verificado no gráfico ao lado direito de $I_{|Hv\rangle}$. Para a orientação $\theta = 11,25^\circ$, obtemos um estado desbalanceado apresentado na segunda linha da figura 24, cujo os valores teóricos previstos para as intensidades normalizadas de $I_{|Hv\rangle}$ e $I_{|Vh\rangle}$ eram 85% e 15% respectivamente. Como podemos notar, experimentalmente isso reflete na presença parcial de um segundo padrão de intensidade no anteparo. As medidas de intensidade sob a condição de $\theta = 11,25^\circ$, estão em concordância com os valores teóricos esperados se considerarmos uma margem de erro de $\pm 0,1$. Com a $HWP\theta$ posicionada a

$\theta = 22,5^\circ$, podemos verificar tanto teóricamente quanto experimentalmente, que trata-se de modo maximamente emaranhado. O valor de intensidade teórico esperado era de $I_{|Hv\rangle} = I_{|Vh\rangle} = 50\%$, e como podemos notar esse resultado está de acordo com os resultados obtido por meio de medidas experimentais como mostrado no gráfico de intensidades $|Hv\rangle, |Vh\rangle$. Assim como na seção anterior, as análises relacionadas aos modos gerados pela HWP_θ posicionada em $\theta = 33,75^\circ$ e $\theta = 45^\circ$ são análogas as realizadas para o caso de $\theta = 11,25^\circ$ e $\theta = 0^\circ$, respectivamente, e como podemos observar, existe uma simetria entre esses valores teóricos. Nas imagens capturadas, observa-se uma perda de intensidade nos padrões de $I_{|Hv\rangle}$ e $I_{|Vh\rangle}$, o que se traduz na obtenção de diferentes valores de medidas de intensidade, como descrito pelos gráficos ao lado. Acredita-se que isso possa ter ocorrido por maior ação do prisma de Dove, já que agora é o modo v que será girado.

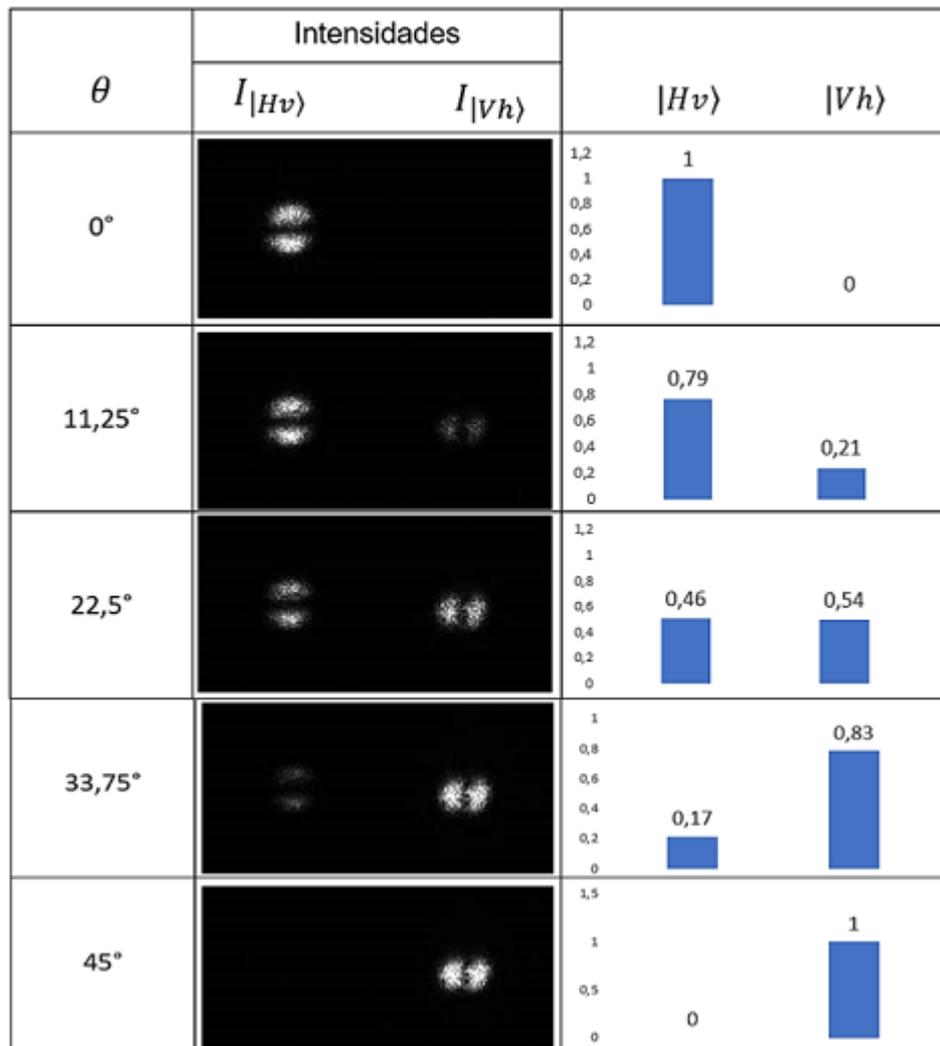


Figura 24 – Perfis de intensidade dos modos ímpares, e gráficos de barra das Intensidades normalizadas

Assim como no caso anterior, as medidas de intensidade dos modos ímpares também foram utilizadas para analisar e quantificar o grau de emaranhamento entre os modos

spin-órbita. Neste sentido, geramos um gráfico que relaciona valores de concorrência experimentais com os valores de concorrência teórico. Os pontos em destaque na figura 25, representa os valores de concorrência com base nas medidas experimentais, ao passo que o gráfico em linha descreve os valores teóricos, em função de θ , calculados com base na equação 5.3. Por meio de análise gráfica, podemos verificar que para o caso da $HWP\theta$ orientada em $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 45^\circ$ os resultados da concorrência experimental coincide com os resultados teóricos, de modo que para ambos os casos, não existe emaranhamento (não separabilidade) e o modo $|\phi^+(0^\circ/45^\circ)\rangle$ é um modo separável. Seguindo com a análise, verificamos que experimentalmente os valores de concorrência, quando a $HWP\theta$ está orientada em $\theta = 11,25^\circ$ e $\theta = 33,75^\circ$, são um pouco mais discrepantes com os valores teóricos. Assim como anteriormente, associamos essa divergência entre valores teóricos e experimentais, a presença do prisma de dove (aparentemente acentuado para esse caso), dado que além do modo transversal afeta parcialmente o estados de polarização incidente. Entretanto, esses resultados ainda evidenciam um emaranhamento parcial entre os modos spin-órbita. E por fim, para a $HWP\theta$ posicionada a um ângulo de $\theta = 22,5^\circ$ obtivemos um resultado que concorda com os resultados teóricos, dado que para o caso de modos maximamente emaranhados a concorrência assume seu valor máximo, como podemos verificar no gráfico da figura 25. Vale ressaltar que ângulos perto do extremo a divergência dos pontos experimentais e teóricos é maior, o que indica a mesma fonte de erro observada para os modos pares. Acredita-se que seja necessário investigar melhor a ação do prisma de Dove para na polarização para esta gama de ângulos da HWP e encontrar formas de mitigar estes problemas.

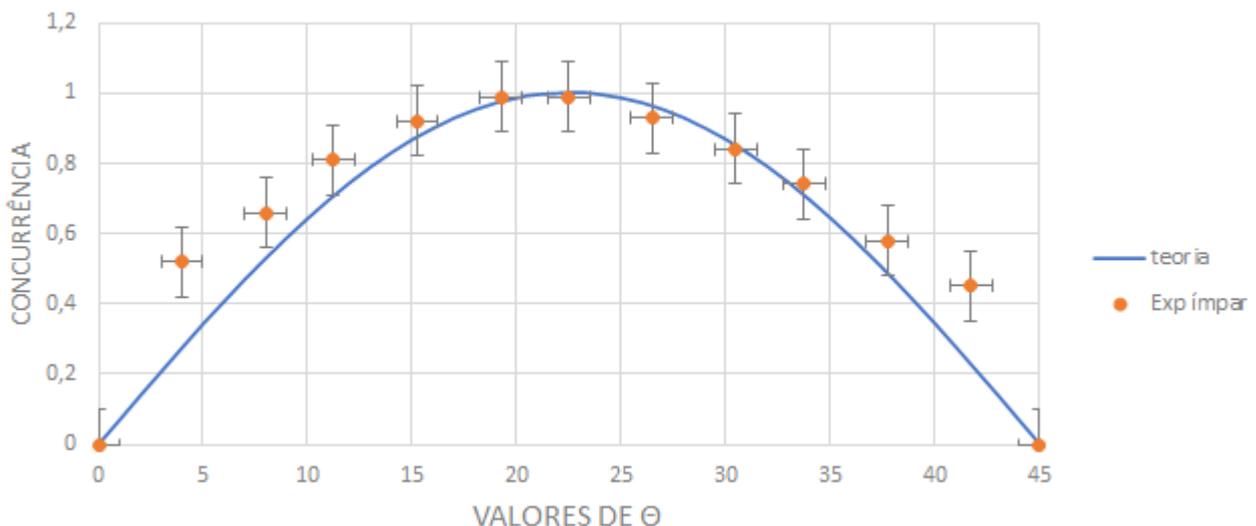


Figura 25 – Concorrência para valores teóricos e experimentais em em função de θ para os modos ímpares

Vale lembrar que os resultados apresentados nesta seção foram obtidos por meio de configurações experimentais que buscavam reduzir a presença de ruídos na obtenção das

imagens, ou seja, a câmera foi configurada em um baixo valor de ganho que combinado a um feixe laser com intensidade reduzida, nos permitiu obter imagens com ruídos muito baixo. Este fato justifica o excelente contraste existente entre os resultados experimentais obtidos para o caso dos modos separáveis aqui apresentados.

6 Conclusões e Perspectivas

Neste capítulo concluímos esta dissertação, discutindo os resultados obtidos com este trabalho, bem como as perspectivas para a continuação dessa linha de pesquisa.

Apresentamos, inicialmente, toda a base teórica necessária para a compreensão dos resultados aqui apresentados. No capítulo 1, discutimos como os trabalhos Maxwell nos possibilitaram a desenvolver novas maneiras de se trabalhar com feixes de luz de modo que, a busca por novas soluções da equação de onda para o campo eletromagnético em diferentes sistemas de coordenadas, forneceram ferramentas que viabilizam a descrição de diferentes modos da luz. A polarização de feixes luminosos também foi discutida, onde apresentamos a notação de Jones, que é uma maneira mais simples de se representar estados de polarização da luz além de simplificar a execução de cálculos. Junto a isso, abordamos o conceito de modos transversos e sua descrição algébrica, descrevendo dois exemplos de soluções da equação de onda Unificando polarização e modos transversos, demonstramos que a esfera de Poincaré é capaz de condensar em uma única representação geométrica todos os estados de polarização da luz, bem como os modos transversos LG_p^l e $HG_{m,n}$ de primeira ordem, dado que por uma analogia somos capazes de criar uma esfera de Poincaré com a mesma finalidade, mas para os modos transversos. Além disso, a aplicação dos tópicos apresentados acima resultou na codificação de $q - bits$, tendo como ferramenta base, a polarização e os modos transversos de primeira ordem. Isso se deu utilizando dispositivos ópticos capazes de transformar feixes de luz, como é o caso do SLM, que utiliza métodos holográficos para alterar o perfil transversal de feixes incidentes. Também destacamos que, apesar de versátil, o SLM não é a única maneira de modelar a luz, e apresentamos outras técnicas holográficas igualmente eficientes.

No segundo capítulo, com a proposta de fornecer bases da teoria quântica, apresentamos conceitos básicos associados a teoria de computação e informação quântica. A princípio descrevemos teoricamente o conceito de emaranhamento e apresentamos como esse conceito está intimamente interligado aos famosos estados de Bell, que posteriormente foram descritos matematicamente. A concorrência, que é um dos quantificadores de emaranhamento, recebeu uma ênfase maior no desenvolvimento da seção, uma vez que desempenha um papel fundamental para a compreensão dos resultados desse trabalho. Além disso, descrevermos algebricamente estados de Bell desbalanceados, mostrando como a densidade de probabilidade dessa classe de estados se relaciona com a concorrência por meio de gráficos. A desigualdade de Bell que surge como uma ferramenta para investigar o emaranhamento e elucidar a real característica da teoria quântica, é descrita com base no exemplo de partículas emaranhadas, ao mesmo tempo em que uma descrição matemática do pensamento de Bell, aplicado a situação em questão, demonstra um dos resultados

mais importantes da teoria quântica, estados emaranhados não seguem a cartilha de uma física simultaneamente realista e local.

Dando seguimento ao desenvolvimento teórico dessa dissertação, no capítulo 3, descrevemos os modos Spin-órbita máxime não separáveis, mostrando como sua analogia com estados de Bell está presente também em sua descrição matemática. Em decorrência disso, a grandeza que mensura o grau de emaranhamento entre estados de Bell no caso genuinamente quântico, também possuem análogos clássicos para os modos Spin-órbita, permitindo assim estudar o emaranhamento associado aos graus de liberdade dessa classe de estados. Ainda no contexto de analogias entre teoria quântica e física clássica, assim como os estados EPR violam a desigualdade de Bell, mostramos e descrevemos por meio de um circuito óptico como preparar estados máxime não separáveis. Finalizamos essa seção apresentando a quantização do campo eletromagnético, demonstrando de maneira precisa que a analogia entre feixe laser e estados quânticos emaranhados está além um descrição puramente teórica.

A proposta de preparação experimental dos modos spin-órbita desbalanceados foi descrita no capítulo 4, onde apresentamos o circuito óptico para geração de modos spin-órbita parcialmente separáveis. Descrevendo inicialmente a álgebra que orienta nossos estudos, mostramos como a codificação de q -bits no base computacional pode ser aplicada também as bases ópticas, e incorporado a isso, os estados $|\Psi^\pm\rangle$ $|\Phi^\pm\rangle$, que são os estados a serem implementados experimentalmente. O circuito responsável pela variação dos pesos em cada um estados gerados é apresentado esquematicamente, onde descrevemos detalhadamente as transformações exercidas por cada um dos elementos ópticos sobre o feixe de laser. Além disso, durante o desenvolvimento teórico mostramos que os modos spin-órbita são análogos clássicos aos estados de Bell. Neste sentido, o circuito que implementa as medidas para verificação da violação da desigualdade de Bell por modos spin-órbita desbalanceados foi igualmente esquematizado, onde detalhamos as transformações do modo spin-órbita pelo circuito, até o resultado final que surge como quatro padrões de intensidade I_{Hh} , I_{Vh} , I_{Hv} e I_{Vv} , que podem ser configurados em diferentes bases a fim de verificar a violação.

Com os resultados experimentais obtidos via circuitos ópticos, no capítulo 5 compilamos esses dados em gráficos e tabelas de modo a permitir análises que relacionem os dados experimentais com dados teóricos. As imagens obtidas representam os modos $|Hh\rangle, |Vv\rangle, |Hv\rangle$ e $|Vh\rangle$. O padrão de intensidade de cada um desses modos foi utilizado para desenvolvermos os cálculos relacionados as intensidades normalizadas, plotando esses dados em gráficos de barras. Com esses dados, geramos também gráficos de concorrência em função de θ e avaliamos o grau de emaranhamento dos entre os graus de liberdade dos modos desbalanceados. Concluímos que os modos spin-órbita apresenta concorrência análoga a de estados quânticos com emaranhamento variável, no caso a classe de estados

de Bell desbalanceadas.

Estados parcialmente emaranhados têm uma aplicação direta na preparação dos chamados estados maximamente discordantes (EMD) (55). São estados mistos que, embora não apresentem emaranhamento máximo eles apresentam outra correlação quântica: a discórdia. A preparação destes estados maximamente discordantes passa pela preparação de um estado misto usando estados tipo Bell que não são maximamente emaranhados. A discórdia foi estudada no cenário de modos spin-órbita quando foi proposta a preparação de modos spin-órbita análogos a estados tipo X (56) onde modos maximamente não separáveis são superpostos a modos tipo produto preparados em lasers independentes. Isso evidenciou que a analogia clássico-quântica também se aplica a estados mistos. Com a proposta desta dissertação, abre-se a perspectiva de estudos com a preparação de modos spin-órbita maximamente discordantes.

Referências

- 1 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. *Quantum computation and quantum information*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 2002.
- 2 MANDEL, L.; WOLF, E. *Optical coherence and quantum optics*. [S.l.]: Cambridge university press, 1995.
- 3 GIOVANNETTI, V.; LLOYD, S.; MACCONE, L. Quantum metrology. *Physical review letters*, APS, v. 96, n. 1, p. 010401, 2006.
- 4 MAIMAN, T. H. et al. Stimulated optical radiation in ruby. 1960.
- 5 ZHENG, B.; PLEASS, C. M.; IH, C. S. Feature information extraction from dynamic biospeckle. *Applied optics*, Optical Society of America, v. 33, n. 2, p. 231–237, 1994.
- 6 PASSOS, M. H. M. et al. Speckle patterns produced by an optical vortex and its application to surface roughness measurements. *Appl. Opt.*, OSA, v. 56, n. 2, p. 330–335, Jan 2017. Disponível em: <<http://opg.optica.org/ao/abstract.cfm?URI=ao-56-2-330>>.
- 7 HONG, C.; MANDEL, L. Theory of parametric frequency down conversion of light. *Physical Review A*, APS, v. 31, n. 4, p. 2409, 1985.
- 8 ABOURADDY, A. F. et al. Implementing one-photon three-qubit quantum gates using spatial light modulators. *Physical Review A*, APS, v. 86, n. 5, p. 050303, 2012.
- 9 BORGES, C. V. d. S. et al. *Bell inequalities with orbital angular momentum of light*. Tese (Doutorado) — Citeseer, 2012.
- 10 PASSOS, M. H. M. Modos spin-órbita como recurso em processos de informação quântica. *UFF*, 2020.
- 11 BALTHAZAR, W. F. et al. Tripartite nonseparability in classical optics. *Opt. Lett.*, OSA, v. 41, n. 24, p. 5797–5800, Dec 2016. Disponível em: <<http://opg.optica.org/ol/abstract.cfm?URI=ol-41-24-5797>>.
- 12 SOUZA, C. E. R. et al. Quantum key distribution without a shared reference frame. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 77, p. 032345, Mar 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.77.032345>>.
- 13 CERF, N. J.; ADAMI, C.; KWIAT, P. G. Optical simulation of quantum logic. *Physical Review A*, APS, v. 57, n. 3, p. R1477, 1998.
- 14 BALTHAZAR, W. F. et al. Using polarization to control the phase of spatial modes for application in quantum information. *Braz J Phys*, Springer, v. 44, p. 658, Dez 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s13538-014-0250-6>>.
- 15 CARVALHO, R.; BALTHAZAR, W. F.; HUGUENIN, J. A. O. Universal quantum gates for path photonic qubit. *Quantum Inf Process*, Springer, v. 21, p. 68, Jan 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11128-022-03415-x>>.

- 16 DENG, L.-P.; WANG, H.; WANG, K. Quantum cnot gates with orbital angular momentum and polarization of single-photon quantum logic. *JOSA B*, Optical Society of America, v. 24, n. 9, p. 2517–2520, 2007.
- 17 BALTHAZAR, W.; HUGUENIN, J. Conditional operation using three degrees of freedom of a laser beam for application in quantum information. *JOSA B*, Optical Society of America, v. 33, n. 8, p. 1649–1654, 2016.
- 18 BALTHAZAR, W. F. et al. Experimental realization of the quantum duel game using linear optical circuits. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, IOP Publishing, v. 48, n. 16, p. 165505, jul 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0953-4075/48/16/165505>.
- 19 CAMARGO, A. et al. Simulação do protocolo bb84 de criptografia quântica utilizando um feixe laser intenso. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 39, 2016.
- 20 GISIN, N.; RIBORDY, G. T. W. and zbinden, h." quantum cryptography. *Reviews of Modern Physics*, v. 74, 2002.
- 21 MARQUEZINO, F.; HELAYEL-NETO, J. Estudo introdutório do protocolo quântico bb84 para troca segura de chaves. *Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Monography CBPF-MO-001/03*, 2003.
- 22 ZANGWILL, A. *Modern electrodynamics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013.
- 23
- 24 BALTHAZAR, W. F. Não-separabilidade de graus de liberdade de um feixe laser e aplicações em informação quântica. Volta Redonda.
- 25 FOWLES, G. *ntroduction to modern optics*. [S.l.]: John Wiley Sons, 1968. v. 2.
- 26 [S.l.: s.n.].
- 27 SERGE.J.HUARD. Polarized light, basic concepts. França.
- 28 ALTEPETER, J. B.; JEFFREY, E. R.; KWIAT, P. G. Photonic state tomography. *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, Elsevier, v. 52, p. 105–159, 2005.
- 29 Polarized light, basic concepts of. *digital Encyclopedia of Applied Physics*.
- 30 SIMON, D. S. *A Guided Tour of Light Beams*. [S.l.]: Morgan & Claypool Publishers, 2016.
- 31 ALLEN, L. et al. Orbital angular momentum of light and the transformation of laguerre-gaussian laser modes. *Physical review A*, APS, v. 45, n. 11, p. 8185, 1992.
- 32 BALTHAZAR, W. *Não-separabilidade de graus de liberdade de um feixe laser e aplicações em informação quântica*. [S.l.]: Tese (Doutorado) — Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Fluminense, Rio De Janeiro, Brasil, 2016., 2016.
- 33 PADGETT, M. J.; COURTIAL, J. Poincaré-sphere equivalent for light beams containing orbital angular momentum. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 24, n. 7, p. 430–432, 1999.

- 34 PASSOS, M. H. M. Padrões de speckles produzidos por vórtices óticos e sua aplicação na medida de rugosidade. 2016.
- 35 COSTA, V.; CARVALHO, L. Representação de um bit quântico na esfera de bloch-visualização em maple. *Cadernos do IME-Série Matemática*, n. 17, 2005.
- 36 PASSOS, M. et al. Classical analog of quantum contextuality in spin-orbit laser modes. *Physical Review A*, APS, v. 98, n. 6, p. 062116, 2018.
- 37 BORGES, C. et al. Bell-like inequality for spin-orbit separability of a classical laser beam. *arXiv preprint arXiv:0911.2440*, 2009.
- 38 COLLETT, E. *Field Guide to Polarization*. Society of Photo Optical, 2005. (Field Guides). ISBN 9780819458681. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=5lJwcCsLbLsC>>.
- 39 HECKENBERG, N. et al. Generation of optical phase singularities by computer-generated holograms. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 17, n. 3, p. 221–223, 1992.
- 40 MULLER, M.; SILVA, J. C. C. d.; FABRIS, J. L. Um experimento simples usado na produção de placas de zonas de fresnel. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 27, p. 603–608, 2005.
- 41 HUGUENIN, J. A. O. et al. Correlações espaciais e temporais na amplificação e oscilação paramétrica. Programa de Pós-graduação em Física, 2006.
- 42 BALTHAZAR, W. F. Não-separabilidade de graus de liberdade de um feixe laser e aplicações em informação quântica. Volta Redonda, 2016.
- 43 ALLEN, L.; COURTIAL, J.; PADGETT, M. Matrix formulation for the propagation of light beams with orbital and spin angular momenta. *Physical Review E*, APS, v. 60, n. 6, p. 7497, 1999.
- 44 PRESS, S. (Ed.). *Como moldar a luz com moduladores de luz espaciais*. [S.l.: s.n.].
- 45 PEREIRA, L.; KHOURY, A.; DECHOUM, K. Quantum and classical separability of spin-orbit laser modes. *Physical Review A*, APS, v. 90, n. 5, p. 053842, 2014.
- 46 AIELLO, A. et al. Quantum- like nonseparable structures in optical beams. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 17, n. 4, p. 043024, 2015.
- 47 QUINTINO, M.; ARAÚJO, M. Desigualdades de bell: Uma introdução à não-localidade quântica. *Teorema*, v. 2, n. 01, p. 10, 2020.
- 48 WOOTTERS, W. K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Physical Review Letters*, APS, v. 80, n. 10, p. 2245, 1998.
- 49 EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical review*, APS, v. 47, n. 10, p. 777, 1935.
- 50 MARTINS, M. E. G. Coeficiente de correlação amostral. *Revista de Ciência Elementar*, v. 2, n. 2, p. 69, 2014.

- 51 CLAUSER, J. F. et al. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Physical review letters*, APS, v. 23, n. 15, p. 880, 1969.
- 52 ASPECT, A.; GRANGIER, P.; ROGER, G. Experimental realization of einstein-podolsky-rosen-bohm gedankenexperiment: a new violation of bell's inequalities. *Physical review letters*, APS, v. 49, n. 2, p. 91, 1982.
- 53 BORGES, C. et al. Bell-like inequality for the spin-orbit separability of a laser beam. *Physical Review A*, APS, v. 82, n. 3, p. 033833, 2010.
- 54 SASADA, H.; OKAMOTO, M. Transverse-mode beam splitter of a light beam and its application to quantum cryptography. *Physical Review A*, APS, v. 68, n. 1, p. 012323, 2003.
- 55 GALVE, F.; GIORGI, G. L.; ZAMBRINI, R. Maximally discordant mixed states of two qubits. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 83, p. 012102, Jan 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.83.012102>>.
- 56 BALTHAZAR, W. F. et al. Spin-orbit x states. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 103, p. 022411, Feb 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.103.022411>>.
- 57 SALEH, B. E.; TEICH, M. C. *Fundamentals of photonics*. [S.l.]: John Wiley & sons, 2019.

APÊNDICE A – Geração de modos transversos com o SLM

A.1 O que é o SLM?

O SLM é um dispositivo pixelado formado por centenas de milhares de células preenchidas com cristal líquido (LC) que respondem a estímulos elétricos. Cada pixel do dispositivo é composto de eletrodos transparentes, que estão colados a um filme de alinhamento transparentes que rotacionam as moléculas de LC em ângulos predefinidos, quando submetidos a uma voltagem (V). Como resultado, obtemos um material birrefringente para algumas orientações particulares de polarização de um campo de luz incidente. Na Fig.26, temos o modelo de um SLMS e sua central de acionamento.



Figura 26 – Spatial light modulator-SLM Disponível em:
<https://www.gratispng.com/png-mdx5vu/>

O equipamento funciona como uma segunda tela ligada a um computador, onde em seu display de dimensão 600x800 pixels, são reproduzidos máscaras de fase, que irão induzir diferenças de fase em um feixe de laser incidente e assim criar o modo de luz desejado. Em dispositivos eletrônicos modernos, é possível alcançar uma diferença de fase entre componentes do campo de até 2π .

É relevante mencionar que, assim como qualquer outro dispositivo de pesquisa o SLM não é 100% eficiente devido ao fenômeno de *pixelização*, mostrado na Fig.27, onde a luz incidente é difratada em várias direções. Isso ocorre em razão da estrutura de grade de amplitude 2-D formada pela matriz de pixels, enquanto o espaçamento entre os pixels reduz o fator de preenchimento do dispositivo. Uma vez que a luz difratada é deslocada para ordens superiores e a luz não difratada é mantida na ordem zero, iremos obter como resultado a formação dos modo desejado no eixo de ordem zero. Conseqüentemente, sempre haverá uma parte da componente não difratada, que varia entre 5% a 20% e não interage com a tela do SLM, portanto não adquire a diferença de fase. Essa componente deve ser

separada utilizando uma *blazed grating*, que será descrita com detalhes na seção seguinte, devido a possibilidade de haver interferência entre elas.

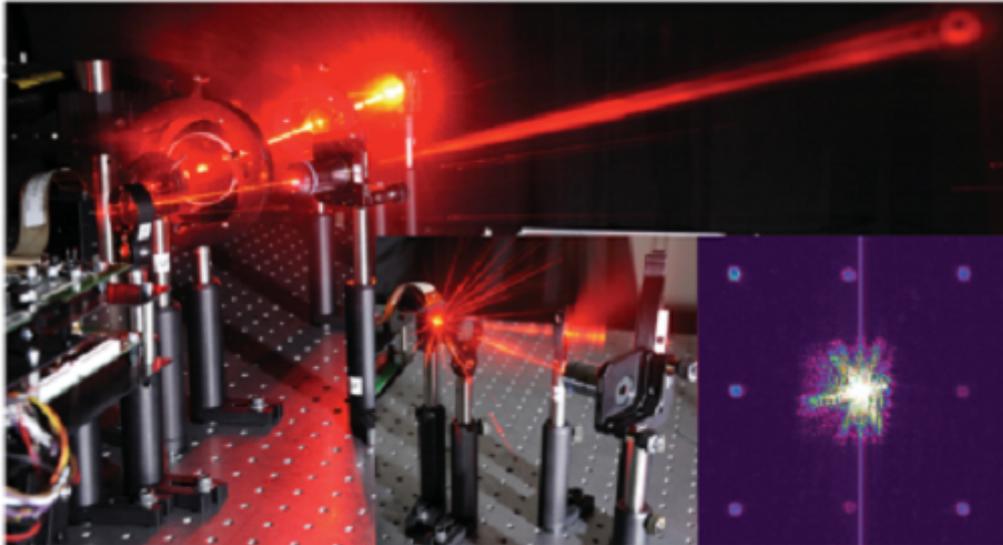


Figura 27 – Luz difratada do SLM. As inserções mostram as ordens de difração devido à pixelização da tela: (esquerda) uma longa exposição da tela e (direita) uma imagem CCD do feixe refletido

A.2 Máscaras de fase

“A holografia envolve a gravação e reconstrução de ondas ópticas. Um holograma é uma transparência contendo um registro codificado da onda plana.”(57)

Máscara de fase é uma ferramenta aplicada em holografia digital, onde imagens pixeladas com diferentes tons de cinza são geradas computacionalmente, e quando emuladas no display do SLM são capazes de modular características de feixes de luz coerente e produzir modos de luz estruturada.

A viabilidade de reproduzir máscaras de fase para modular propriedades de feixes luminosos tal como fase, amplitude e distribuição de intensidade, baseia-se em utilizar a tecnologia implementada no SLM, que nos permite controlar de maneira independente as moléculas de LC em cada um dos pixels via campos elétricos. Isso ocorre pois essas moléculas formam dipolos elétricos devido sua forma de bastão e em razão disso são capazes de responder a esses estímulos.

É importante destacar que, máscaras de fase por definição permitem realizar apenas modulações de fase nas componentes de um feixes de entrada. Além disso, o SLM não é capaz de criar luz, então somente um decréscimo na amplitude de um feixe pode ser realizado.

Como descrito na Fig.28, os pixels do SLM são constituídos de moléculas de LC dispostas entre dois filmes de alinhamento colados a eletrodos transparentes, e coberto por um substrato de vidro. Na parte inferior, uma matriz ativa diretamente conectada a eletrodos pixelados é apoiada sobre o substrato de silício. Essa estrutura, e uma voltagem (V) aplicada a cada um dos eletrodos, torna possível realizar ajustes nas rotações $\theta(V)$ das moléculas em cada pixel. Com isso, θ em função da voltagem aplicada aos eletrodos, é dada pela expressão:

$$\left(\frac{1}{n_e^2(\theta)}\right) = \left(\frac{\cos \theta}{n_e}\right)^2 + \left(\frac{\sin \theta}{n_o}\right)^2 \quad (\text{A.1})$$

Onde n_e e n_o são os índices de refração extraordinário e ordinário respectivamente.

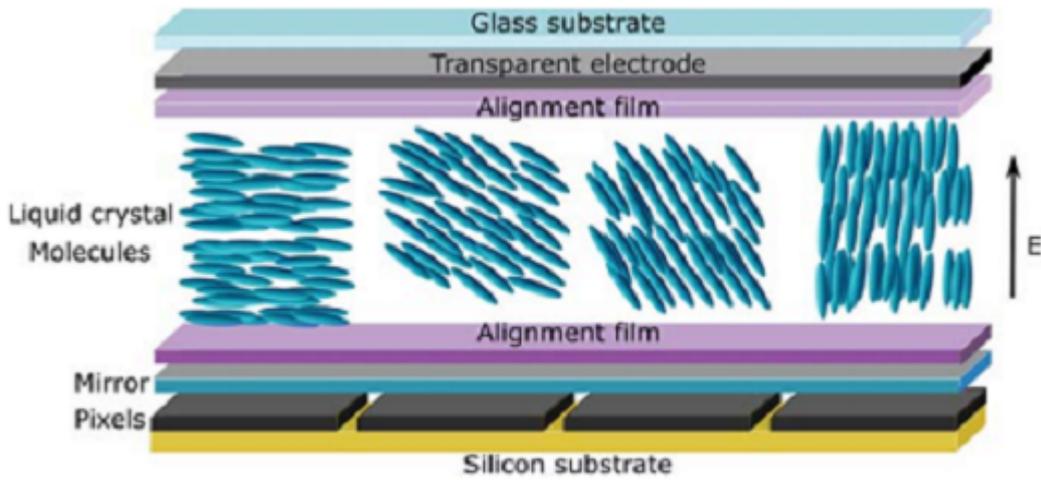


Figura 28 – Representação esquemática de um LCoS SLM. Fonte (44)

Máscaras de fase reproduzidas no display do SLM, atuam como um retardador de fase digital, induzindo uma diferença de fase $\Delta\Phi$ nas componentes do feixe incidente, que pode ser representada utilizando o formalismo matricial de Jones. O retardo de fase é dado por:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} e^{i\phi_e} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_o} \end{bmatrix} = e^{i\phi_o} \begin{bmatrix} e^{i(\phi_o - \phi_e)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Onde $\phi_e = kdn_e$ e $\phi_o = kdn_o$ são os deslocamento de fase do campo elétrico na direção de n_e e n_o respectivamente, d é a espessura do LC, k é o vetor de onda com módulo $\frac{2\pi}{\lambda}$, e λ o comprimento de onda. Portanto, a diferença de fase em função da voltagem será dada pela expressão:

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d \quad (\text{A.3})$$

Portanto, respostas elétricas correspondem a variações angulares na direção das moléculas LCs, o que altera seu índice de refração, que é máximo ao longo do eixo que atravessa o centro da molécula chamado eixo lento. Desta maneira podem ser utilizadas para reflexão ou transmissão de campos de luz incidente.

Para o SLM, o controle de voltagem é realizado utilizando imagens em tons de cinza (codificadas em 8 bits, com total de 256 cores). Desse modo cada escala de cinza, está diretamente associada a uma elemento discreto de fase com 0 (preto) a 2π (branco), e uma relação linear entre os valores intermediários. Logo, $\frac{2\pi}{256}$ elementos de fase podem ser incrementados em uma onda incidente sobre o dispositivo.

Como já mencionado, o SLM não é um dispositivo com eficiência total devido ao efeito de pixelização. Com isso, junto a máscara de modo transverso é adicionado uma segunda máscara, blazed grating, que é utilizada para remover componentes de luz não difratada. A Fig.29 apresenta uma máscara de fase associada ao modo conhecido como feixe Vórtex, que são emuladas no display SLM. Pode-se observar que a blazed grating 7(b)-7(d) adicionada a uma máscara de modo transverso 7(a), separa o feixe de luz modulado da componente de luz indesejada 7(e)-7(h).

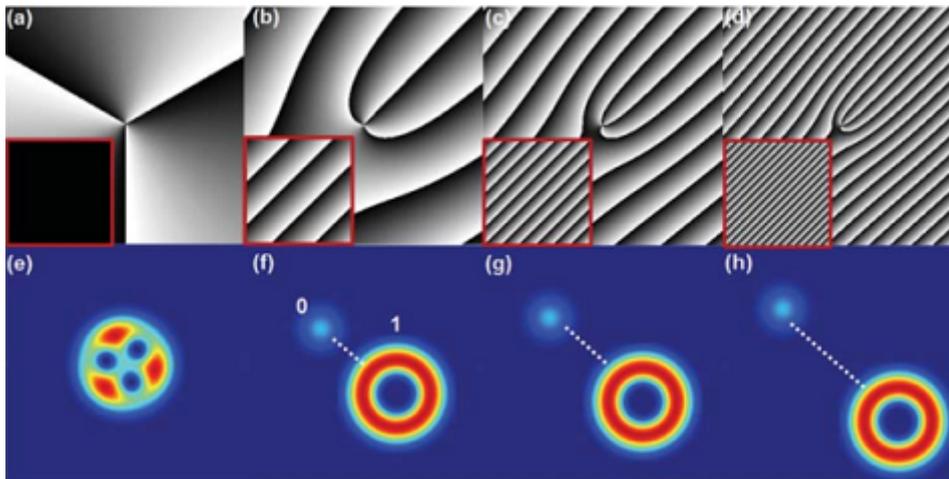


Figura 29 – Um feixe de vórtice de ordem 3 é criado sem adicionar uma grade, por meio do qual o vórtice se divide em três vórtices de carga unitária devido ao modo gaussiano sobreposto. Quando a grade é adicionada (inserções), a luz moldada (feixe vórtice) se move para fora do eixo, para longe do feixe gaussiano não-difratado. (44)

A.3 Máscaras dos modos transversos

Com base na referência (44), apresentamos nessa seção modos de luz estruturada mais usuais em experimentos para simulação de estados quânticos, cada um deles com sua máscara de fase e seus perfis de intensidade respectivamente.

A.3.1 Feixe Vortex

Uma das modulações mais simples que podemos impor a um feixe gaussiano é uma fase azimutal que varia transversalmente. Este tipo de fase gera um chamado feixe de vórtice, mostrado na Fig 30. Os modos gerados possuem diferentes valores de carga

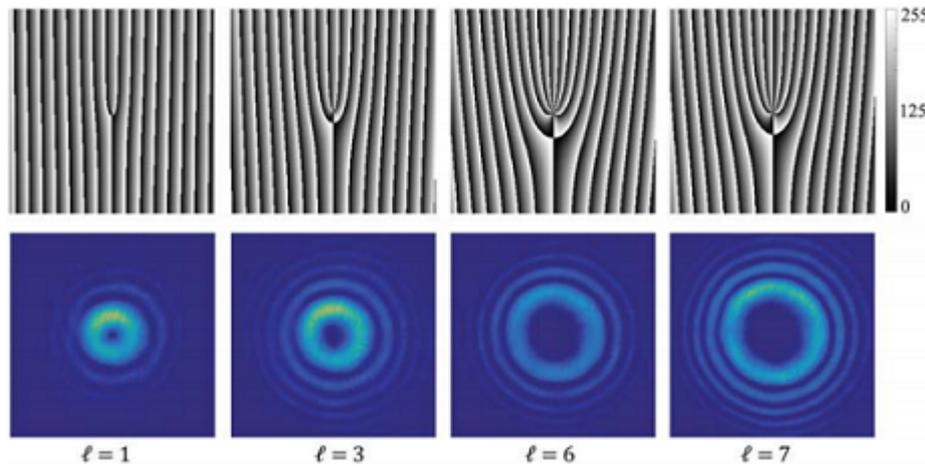


Figura 30 – Hologramas codificados no SLM (linha superior) para gerar feixes de vórtice, cujo perfil de intensidade medido correspondente é mostrado na linha inferior

topológica, com $l=1,3,6$ e 7

A.3.2 Feixe Hermite-Gauss

Os modos Hermite-Gaussiano $HG_{m,n}$ é um conjunto de soluções para a equação de onda paraxial em coordenadas cartesianas.

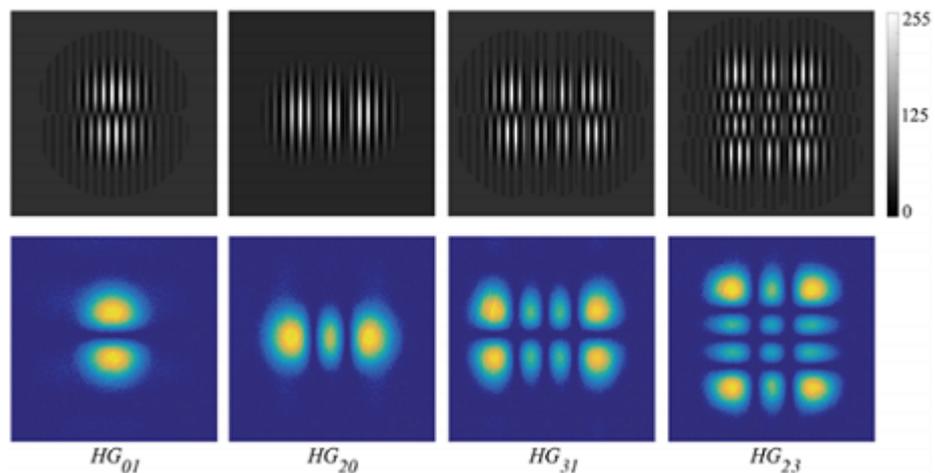


Figura 31 – (superior) Hologramas codificados no SLM para gerar modos Hermite-Gaussianos usando modulação de amplitude complexa (inferior) com o perfil de intensidade medido correspondente.

Hologramas gerados do modo $HG_{m,n}$ para os modos de ordem $HG_{0,1}$, $HG_{2,0}$, $HG_{3,1}$ e $HG_{2,3}$.

A.3.3 Feixe Laguerre-Gauss

Os modos Laguerre-Gaussianos LG_p^l surgem naturalmente como outra solução para a equação paraxial de Helmholtz em coordenadas cilíndricas.

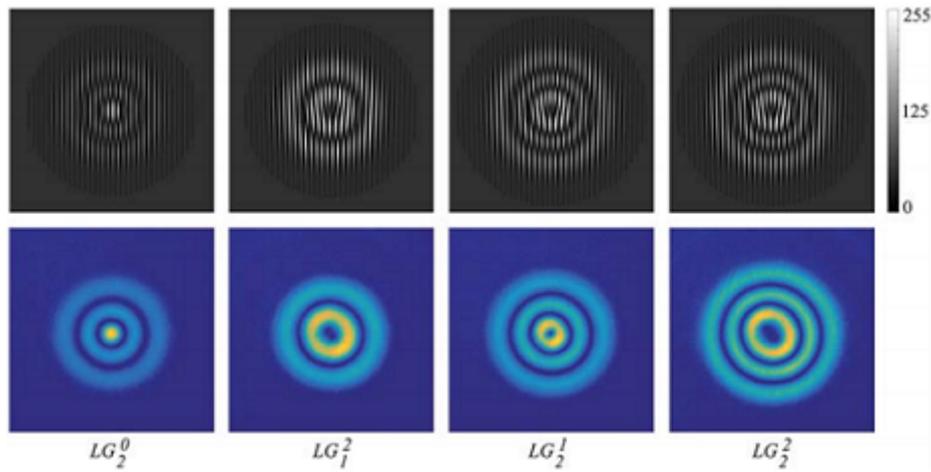


Figura 32 – Hologramas codificados nos perfis de intensidade experimental (superior) SLM e (inferior) dos modos Laguerre-Gaussiano

Hologramas gerados do modo LG_p^l para os modos de ordem LG_2^0 , LG_1^2 , LG_2^1 e LG_2^2 .

A.4 Como usar o SLM

A princípio lidar com o dispositivo não é uma tarefa difícil, mas é importante mencionar que devido sua sensibilidade todo cuidado para manusear e configurar é fundamental. Como qualquer outro equipamento eletrônico, é preciso acionar o SLM para que possamos utiliza-lo. Esse procedimento é efetuado na central de controle do equipamento, Fig.4, pressionando a tecla *power*. No entanto isso deve ser executado somente após o computador, que será utilizado para a reprodução das máscaras, já estiver ligado. Após realizado o processo mencionado acima, o SLM estará funcionando e pronto para ser utilizado.

As máscaras que serão reproduzidas no display do dispositivo, são geradas no Matlab e precisam ser transferidas ao programa de computador chamado *LCOS – Control*, que é capaz de executa-las no SLM. Para isso, é necessário realizar o seguinte procedimento: na opção arquivo, na parte superior à esquerda da tela de reprodução do programa LCOS-Control, clique na opção *load image*, onde buscamos no computador o ficheiro que

armazena a máscara que será reproduzida. Feito isso selecionamos o arquivo e clicamos em *ok*. Desta forma a máscara de fase escolhida deverá ser mostrada na tela do programa, e poderá ser executada no display do SLM a qualquer momento clicando na opção *play* situada na parte superior do programa.

Com o dispositivo acionado e reproduzindo a máscara de fase desejada, é fundamental verificar a qualidade de reprodução do modo analisando o holograma criado no anteparo. Pode ocorrer que mesmo após efetuado corretamente o procedimento mencionado acima, os modos reproduzidos possuam uma qualidade baixa ou não sejam executados. Este problema pode ser resolvido na central de controle do SLM clicando na tecla *reset*, localizada na frente do equipamento.

A.5 Passo a passo para a produção de modos

Primeiramente antes de detalhar como produzir modos de luz com o SLM, é preciso destacar que o processo descrito nesta seção é realizado de maneira similar para qualquer outro modo de luz que se pretende obter, tendo como diferença significativa, a função de transferência associada de forma individual a cada um desses modos. E além disso, neste passo a passo consideramos que o leitor subentenda que os equipamentos que serão utilizados em conjunto com o SLM, laser, espelhos, PBS..., já estejam todos posicionados e prontos para viabilizar a produção dos modos.

Considere o feixe vórtex apresentado na Fig.29 como um exemplo prático que elucidada mais facilmente o processo de produção dos modos de luz. Em geral, produzir esses modos requer uma função de transmissão com modulação de fase e amplitude. Isso ocorre porque a maioria dos campos de luz desejados têm termos de amplitude e fase, exigindo, assim, uma modulação de amplitude complexa para converter a amplitude e a fase de um feixe na de outro. No caso do feixe vórtex sua função de transferência será dada por:

$$t = e^{i3\theta} \quad (\text{A.4})$$

Onde $l = 3$ é a carga topológica e θ é a fase azimutal. Já a função de transferência da máscara blazed grating é expressa por:

$$t(x, y) = e^{i2\pi(G_x\hat{x}+G_y\hat{y})} \quad (\text{A.5})$$

Onde $G_x = \frac{1}{L_x}$ e $G_y = \frac{1}{L_y}$ são as frequências das grades com período L_x e L_y respectivamente. Portanto, de acordo com as expressões 7.4 e 7.5, temos que a função de transferência do modo apresentado na Fig.7 será dada por:

$$t(x, y) = e^{(i2\pi(G_x\hat{x}+G_y\hat{y})+3\theta)} \quad (\text{A.6})$$

O argumento da função 7.6 será incrementado a um código escrito no MatLab, onde o holograma final em tons de cinza que será executado no SLM será descrito pela expressão:

$$\Phi_{SLM} = \arg [t] = \text{mod} [(2\pi G_x \hat{x} + 2\pi G_y \hat{y}) + 3\theta, 2\pi] \quad (\text{A.7})$$

O código que recebe a expressão 7.7, indicado na linha 9, é dado por:

```

1 .clear all; close all; %iniciar o Holograma
2 .H=600; V=800; %Numero de Pixels na Horizontal e Vertical
3 .x = -H/2:1:(H/2-1); y = -V/2:1:(V/2-1); %Sao valores dados as
   matrizes X e Y
4 .[X,Y]= meshgrid (x,y); %Funcao do MatLab
5 .phi = angle(X+1i*Y); %Angulo azimutal
6 .l=1; %Carga Topologica
7 .nx=100 ; ny=25; %Numero de ranhuras na Horizontal e Vertical
8 .gx= nx/H; gy= ny/V;
9 .Hol= mod(2*pi*(X*gx+gy*Y)+ l*phi,2*pi); %Holograma
10 .SLM= Hol/max(Hol(:))*255; % Normaliza a escala de cinza do SLM
11 .fig = figure(1);
12 .set(fig,'Position',[200 0 500 500], .'MenuBar','none','ToolBar
   ','none','resize','off');
13 .set(gca,'position',[0 0 1 1],'Visible','off')
14 .imagesc(SLM)
15 .colormap gray
16 .axis off;

```

Listing A.1 – Código fonte da máscara de fase do feixe vórtex com $l=3$. (44)

onde os dados apresentados em verde, são comentários que descrevem a função de cada uma das linhas na produção da máscara.

Executando o código acima no MatLab, obtemos a máscara de fase apresentada na Fig.30. É importante mencionar que, alguns formatos gráficos induzem artefatos digitais que afetam a qualidade dos hologramas gerados no anteparo. Portanto é recomendado armazenar os arquivos gerados com o Matlab no formato *.bmp*. Com as máscaras de fase armazenadas no computador ligado ao SLM, e tomando o procedimento especificado na seção anterior, o holograma será gerado no anteparo.