

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

INSTITUTO DE FÍSICA

MESTRADO EM FÍSICA

Thiago de Souza Ferreira

Feixes Eletromagnéticos Paraxiais com Propriedades  
de Invariância por Propagação

Niterói – RJ

2022

THIAGO DE SOUZA FERREIRA

Feixes Eletromagnéticos Paraxiais com Propriedades de Invariância por Propagação

Dissertação apresentada ao programa de pós-graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Física.

Universidade Federal Fluminense

Orientador: Prof. Dr. Daniel Schneider Tasca

Niterói – RJ

2022

Ficha catalográfica automática - SDC/BIF  
Gerada com informações fornecidas pelo autor

F383f Ferreira, Thiago de Souza  
Feixes eletromagnéticos paraxiais com propriedades de invariância por propagação / Thiago de Souza Ferreira ; Daniel Schneider Tasca, orientador. Niterói, 2022.  
101 p. : il.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2022.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22409/PPGF.2022.m.15444462761>

1. Óptica paraxial. 2. Óptica. 3. Produção intelectual. I. Tasca, Daniel Schneider, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Física. III. Título.

CDD -

*Dedico esta dissertação ao meu avô Manoel Jorge (in memoriam), que sempre me incentivou a aprender.*

# Agradecimentos

À minha família, principalmente à minha mãe, por todo o apoio e incentivo ao longo de minha formação acadêmica.

Ao professor Daniel Tasca, meu orientador, pela paciência e atenção ao longo desses dois anos de mestrado.

Aos professores que tive ao longo da graduação e do mestrado, pelos ensinamentos e pelas críticas construtivas.

Ao Gustavo, pelo apoio emocional, pelas as discussões sobre física e por tornar esse período de pandemia menos solitário.

Por fim, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão da bolsa de estudos.

# Resumo

Neste trabalho, o foco de nosso interesse foram feixes eletromagnéticos que apresentem algum tipo de invariância por propagação, como os não-difrativos e os que formam autoimagens. Apresentamos a equação de onda paraxial e sua solução através de uma transformada de Fourier. Além disso, discutimos a propagação dos modos Gaussianos, que são estruturalmente estáveis (invariantes à propagação a menos de um fator de escala). Apresentamos os feixes de Bessel, que são completamente não-difrativos, mas não podem ser criados experimentalmente. Por isso, discutimos formas conhecidas de se truncá-los para obter feixes aproximadamente não-difrativos. Mostramos, também, como gerar um campo com autoimagens com superposições dos feixes citados.

Também estudamos dois outros tipos de feixes aproximadamente não-difrativos: o primeiro, um feixe cujo espectro angular é constante em uma pequena largura em torno de um raio central e nulo fora dela e o segundo, uma superposição de modos de Laguerre-Gauss com determinados coeficientes.

Finalmente, propomos um método para avaliar quantitativamente o quão não-difrativo é um campo ou o quão semelhantes à distribuição de intensidade do campo na origem são suas autoimagens. Utilizamos esse método para observar a propagação dos feixes apresentados e ver como seus parâmetros afetam sua difração. Além disso, comparamos alguns campos de tipos distintos com distribuições de intensidade iniciais semelhantes.

Palavras-chave: feixes paraxiais; feixes invariantes por propagação; feixes não-difrativos; feixes com autoimagens; modos Gaussianos; feixes de Bessel.

# Abstract

In this work, we focused our interest on electromagnetic beams that present some form of propagation invariance, such as non-diffractive and self-image beams. We introduce the paraxial wave equation and its solution through a Fourier transform. Furthermore, we discuss the propagation of Gaussian modes, which are structurally stable (propagation invariant apart from a scale factor). We present the Bessel beams, which are entirely non-diffractive but cannot be generated experimentally. Therefore, we discuss already known ways to truncate them to obtain approximately non-diffractive beams. We also show how to create a self-imaging field using superpositions of the previously mentioned beams.

We also studied two other types of approximately non-diffractive beams: the first, a beam whose angular spectrum is constant in a small width around a central radius and null outside it, and the second, a superposition of Laguerre-Gauss modes with specific coefficients.

Finally, we propose a method to quantitatively assess how non-diffractive a field is or how similar its self-images are to the field intensity distribution at the origin. We use this method to observe the propagation of the presented beams and see how their parameters affect their diffraction. In addition, we compared some fields of different types with similar initial intensity distributions.

Keywords: paraxial beams; propagation-invariant beams, non-diffracting beams; self-imaging beams; Gaussian modes; Bessel beams.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>3</b>
<b>Resumo</b>	<b>4</b>
<b>Abstract</b>	<b>5</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>9</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>15</b>
<b>2 A Equação de Onda Paraxial</b>	<b>18</b>
2.1 A Equação Paraxial . . . . .	18
2.2 Propagação por uma Transformada de Fourier . . . . .	21
2.2.1 Difração de Fraunhofer . . . . .	23
2.2.2 Transformadas de Fourier Através de uma Lente . . . . .	24
<b>3 Modos Gaussianos</b>	<b>27</b>
3.1 Modos Gaussianos . . . . .	27
3.1.1 Modo Gaussiano Fundamental . . . . .	28
3.1.2 Modos de Hermite-Gauss . . . . .	29
3.1.3 Modos de Laguerre-Gauss . . . . .	31
3.2 Propagação de Modos Gaussianos . . . . .	32
3.2.1 Autoimagens com Superposições de Modos Gaussianos . . . . .	36
3.2.2 Transformada de Fourier de Modos Gaussianos . . . . .	40
<b>4 Feixes Não-Difrativos ou com Autoimagens</b>	<b>42</b>
4.1 Feixes de Bessel . . . . .	42
4.2 Autoimagens com Feixes de Bessel . . . . .	46



	7
4.3	Feixes de Bessel e de Laguerre-Gauss Com Condições Iniciais Semelhantes . . . . . 49
4.4	Feixes de Bessel-Gauss . . . . . 51
4.5	Feixes Semelhantes a Feixes de Bessel . . . . . 53
4.6	Descrevendo Feixes Semelhantes aos de Bessel em Termos dos Modos de Laguerre-Gauss . . . . . 57
<b>5</b>	<b>Proposta de Método Quantitativo para Análise de Invariância por Propagação 65</b>
5.1	O Produto Interno Como Medida de Semelhança Entre Campos . . . . . 66
5.2	Modos Gaussianos . . . . . 67
5.2.1	Variando a Cintura . . . . . 68
5.2.2	Variando a Ordem . . . . . 69
5.2.3	Considerando a Mudança de Escala no Cálculo do Produto Interno 72
5.3	Feixes de Bessel Truncados . . . . . 74
5.3.1	Variando o Raio do Espectro Angular . . . . . 74
5.3.2	Variando o Raio Máximo . . . . . 77
5.3.3	Superposição de Feixes de Bessel Truncados . . . . . 78
5.4	Feixes de Bessel-Gauss . . . . . 80
5.4.1	Variando a Cintura da Gaussiana . . . . . 80
5.5	Feixes Semelhantes aos de Bessel . . . . . 80
5.5.1	Superposição de Feixes Semelhantes aos de Bessel . . . . . 83
5.6	Superposições Aproximadamente Não-Difrativas de Modos de Laguerre-Gauss . . . . . 84
5.6.1	Variando o Índice Radial Máximo . . . . . 84
5.6.2	Variando a Largura do Espectro Angular do Campo Original . . . . . 85
5.7	Campos de Tipos Diferentes . . . . . 86
5.7.1	Modo de Laguerre-Gauss e Feixe de Bessel Truncado . . . . . 86
5.7.2	Feixe Semelhante ao de Bessel e Superposição de Modos de Laguerre-Gauss . . . . . 88
5.7.3	Feixe de Bessel Truncado e Feixe Semelhante ao de Bessel . . . . . 91
<b>6</b>	<b>Conclusão 95</b>
<b>A</b>	<b>Identities da Transformada de Fourier 97</b>

**Referências**

# Lista de Figuras

2.1	Esquema para obtenção experimental da transformada de Fourier do campo.	25
3.1	Distribuição de intensidade para $z$ fixo (a) e largura ao longo do eixo $z$ (b) $G_{00}$ . A figura (b) foi retirada de [36].	28
3.2	Distribuição de intensidade dos modos de Hermite-Gauss de ordens 1 a 3.	30
3.3	Distribuição de intensidade dos modos de Laguerre-Gauss de ordens 1 a 3.	31
3.4	Distribuição de fase dos modos de Laguerre-Gauss com $l \neq 0$ de ordens 1 a 3.	32
3.5	Distribuição de intensidade de $HG_{11}$ para $z = 0, 0.5z_R, z_R, 1.5z_R, 2z_R$ e $2.5z_R$ .	33
3.6	Distribuição de intensidade de $LG_{12}$ para $z = 0, 0.5z_R, z_R, 1.5z_R, 2z_R$ e $2.5z_R$ .	33
3.7	Distribuição de intensidade de $\frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{11} + HG_{02})$ para $z = 0, 0.5z_R, z_R,$ $1.5z_R, 2z_R$ e $2.5z_R$ .	34
3.8	Distribuição de intensidade de $\frac{1}{\sqrt{2}}(LG_{-21} + LG_{21})$ para $z = 0, 0.5z_R, z_R,$ $1.5z_R, 2z_R$ e $2.5z_R$ .	34
3.9	Distribuição de intensidade de $\frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{33} + HG_{20})$ para $z = 0, 0.5z_R, z_R,$ $1.5z_R, 2z_R$ e $2.5z_R$ .	35
3.10	Distribuição de intensidade de $\frac{1}{\sqrt{2}}(LG_{13} + LG_{10})$ para $z = 0, 0.5z_R, z_R,$ $1.5z_R, 2z_R$ e $2.5z_R$ .	35
3.11	Distribuição de intensidade de $\frac{1}{\sqrt{2}}(LG_{21} + LG_{11})$ para $z = 0, 0.5z_R, z_R,$ $1.5z_R, 2z_R$ e $2.5z_R$ .	36
3.12	Intensidade de $\frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{00} + HG_{44})$ para $z = 0, 0.5z_R, z_R, 1.5z_R, 2z_R$ e $2.5z_R$ .	37
3.13	Distribuição de intensidade de $\frac{1}{\sqrt{2}}(LG_{01} + LG_{06})$ para $z = 0, 0.5z_{G1}, z_{G1},$ $z_R, 0.5z_{G2}$ e $z_{G2}$ .	38
3.14	Distribuição de intensidade de $\frac{1}{\sqrt{2}}(LG_{07} + LG_{21})$ para $z = 0, 0.5z_{G1}, z_{G1},$ $z_R, 0.5z_{G2}$ e $z_{G2}$ .	39

- 3.15 Intensidade de  $\frac{1}{\sqrt{3}}(HG_{00} + HG_{66} + HG_{12,12})$  para  $z = 0, 0.5z_{G1}, z_{G1}, 0.5z_{G2}, z_R$  e  $z_{G2}$ . . . . . 40
- 4.1 Distribuição de intensidade de  $B_0$  (esquerda) e  $B_2$  (direita), onde  $R_{k_1} = 10\text{mm}^{-1}$  e  $R_{k_2} = 20\text{mm}^{-1}$ . . . . . 44
- 4.2 Distribuição de intensidade de  $Bt_1$  com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$  truncado em  $R_{\text{max}} = 1\text{mm}$  para  $z = 0, 50, 100, 200, 350$  e  $500$  mm. . . . . 46
- 4.3 Distribuição de intensidade de uma superposição de feixes de Bessel de ordem  $s = 0$ , com  $R_{k_1} = 10\text{mm}^{-1}$  e  $R_{k_1} = 30\text{mm}^{-1}$ , para  $z = z_B, 0, 5z_B, 0.7z_B, z_B, 1, 5z_B$  e  $2z_B$ . . . . . 48
- 4.4 Distribuição de intensidade de  $B_0 + B_2$ , onde  $R_{k_1} = 10\text{mm}^{-1}$  e  $R_{k_1} = 30\text{mm}^{-1}$  para  $z = z_B, 0, 5z_B, 0.7z_B, z_B, 1, 5z_B$  e  $2z_B$ . . . . . 48
- 4.5 Distribuição de intensidade de  $Bt_1$ , onde  $R_k \approx 38,73\text{mm}^{-1}$  e  $R_{\text{max}} \approx 0.78\text{mm}$  (fileira de superior) e de  $LG_{17}$  com  $w_0 = 0.2\text{mm}$  e  $z_R = 199,47\text{mm}$  (fileira inferior) para  $z = 0, 0.5z_R$  e  $z_R$ . . . . . 50
- 4.6 Fileira superior: distribuição de intensidade de  $\frac{1}{\sqrt{2}}[Bt_0 + Bt_4]$ , onde  $R_{k_1} \approx 36,055\text{mm}^{-1}$ ,  $R_{\text{max}_1} \approx 0,721\text{mm}$ ,  $R_{k_2} \approx 60,827\text{mm}^{-1}$  e  $R_{\text{max}_2} \approx 1,216\text{mm}$ , para as distâncias  $z = 0, 0.5z_B$  e  $z_B$ . Fileira inferior: distribuição de intensidade de  $\frac{1}{\sqrt{2}}[LG_{06} + LG_{4,16}]$  com  $w_0 = 0.2\text{mm}$  e  $z_R = 199,47\text{mm}$  para as distâncias  $z = 0, 0.5z_G$  e  $z_G$ . . . . . 51
- 4.7 Distribuição de intensidade de  $BG_0$  com  $w_{BG} = 1\text{mm}$  e  $R_k = 80\text{mm}^{-1}$  para  $z = 10, 50, 100, 150$  e  $200$  mm. . . . . 52
- 4.8 Distribuição de intensidade de  $V_0$  com  $w_{BG} = 1\text{mm}$  e  $R_k = 80\text{mm}^{-1}$ . . . . . 53
- 4.9 Distribuição de intensidade de  $V_0$  (à esquerda) e  $\beta_0$  (à direita), com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$  e  $\Delta_k = 0,5\text{mm}^{-1}$ . . . . . 54
- 4.10 Distribuição de intensidade de  $V_0$  (à esquerda) e  $\beta_0$  (à direita), com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$  e  $\Delta_k = 2\text{mm}^{-1}$ . . . . . 55
- 4.11 Distribuição de intensidade de  $\beta_0$ , com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$  e  $\Delta_k = 0.5\text{mm}^{-1}$  para  $z = 0, 0, 2z_{ND}, 0, 5z_{ND}, 0, 7z_{ND}, z_{ND}$  e  $1, 2z_{ND}$ . . . . . 56
- 4.12 Distribuição de intensidade de  $\beta_0 + \beta_1$ , com  $R_{k_1} = 10\text{mm}^{-1}$ ,  $R_{k_2} = 30\text{mm}^{-1}$  e  $\Delta_k = 3\text{mm}^{-1}$  para  $z = 0, 0, 5z_B, z_B, 1, 5z_B, 2z_B$  e  $2, 5z_B$ . . . . . 57
- 4.13 Gráficos de  $|A_p|^2 \times p$  (à esquerda),  $|V_0(k_\rho)|^2 \times k_\rho$  (no centro) e  $|\Phi_0(k_\rho)|^2 \times k_\rho$  (à direita), com  $z = 0, R_k = 10\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 0,5\text{mm}^{-1}$  e  $w_0 = 0.2\text{mm}$ . . . . . 60

- 4.14 Distribuição de intensidade de  $\Psi_s(\rho, \phi; z)$  com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 0,5\text{mm}^{-1}$   
e  $w_0 = 0,2\text{mm}$ , para  $z = 0, 0,2z_R, 0,5z_R, z_R, 1,5z_R$  e  $2z_R$ . . . . . 60
- 4.15 Gráficos de  $|A_p|^2 \times p$  (à esquerda),  $|V_0(k_\rho)|^2 \times k_\rho$  (no centro) e  $|\Phi_0(k_\rho)|^2 \times k_\rho$   
(à direita), com  $z = 0$ ,  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 2\text{mm}^{-1}$  e  $w_0 = 0,2\text{mm}$ . . . . . 61
- 4.16 Distribuição de intensidade de  $\Psi_0(\rho, \phi; z)$  com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 2\text{mm}^{-1}$   
e  $w_0 = 0,2\text{mm}$ , para  $z = 0, 0,2z_R, 0,5z_R, z_R, 1,5z_R$  e  $2z_R$ . . . . . 61
- 4.17 Gráficos de  $|A_{1p} + A_{2p}|^2 \times p$  (à esquerda),  $|V_0(k_\rho)|^2 \times k_\rho$  (no centro) e  
 $|\Phi_0(k_\rho)|^2 \times k_\rho$  (à direita), com  $z = 0$ ,  $R_{k_1} = 7\text{mm}^{-1}$ ,  $R_{k_2} = 20\text{mm}^{-1}$   
 $\Delta_k = 0,5\text{mm}^{-1}$  e  $w_0 = 0,2\text{mm}$ . . . . . 63
- 4.18 Distribuição de intensidade de  $\Psi_0(\rho, \phi; z)$ , com  $R_{k_1} = 7\text{mm}^{-1}$ ,  $R_{k_2} =$   
 $20\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 0,5\text{mm}^{-1}$  e  $w_0 = 0,2\text{mm}$ , para  $z = 0, 0,5z_B, z_B, 1,5z_B$   
e  $2z_B$ . . . . . 64
- 5.1 Gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para  $G_{00}$  com  $w_0 = 0,05\text{mm}$  ( $z_R \approx 12,47\text{mm}$ ),  
 $0,1\text{mm}$  ( $z_R \approx 49,87\text{mm}$ ),  $0,15\text{mm}$  ( $z_R \approx 112,20\text{mm}$ ) e  $0,2\text{mm}$  ( $z_R \approx$   
 $199,47\text{mm}$ ). Os pontos ( $z_R \mathcal{P}(z_R)$ ) estão marcados por um asterisco vermelho. 68
- 5.2 Gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times \frac{z}{z_R}$  para  $G_{00}$  com  $w_0 = 0,05\text{mm}$  ( $z_R \approx 12,47\text{mm}$ ),  
 $0,1\text{mm}$  ( $z_R \approx 49,87\text{mm}$ ),  $0,15\text{mm}$  ( $z_R \approx 112,20\text{mm}$ ) e  $0,2\text{mm}$  ( $z_R \approx$   
 $199,47\text{mm}$ ). . . . . 69
- 5.3 Gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para:  $HG_{00}, HG_{10}, HG_{01}, HG_{11}, HG_{20}, HG_{02},$   
 $HG_{21}, HG_{12}, HG_{30}, HG_{03}, HG_{22}, HG_{31}, HG_{13}, HG_{40}$  e  $HG_{04}$ , com  $w_0 =$   
 $0,15\text{mm}$  e  $z_R \approx 112,20\text{mm}$ . A distância de Rayleigh está marcada por uma  
linha vertical. . . . . 70
- 5.4 Gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para:  $LG_{00}, LG_{\pm 10}, LG_{\pm 20}, LG_{01}, LG_{\pm 30}, LG_{\pm 11},$   
 $LG_{\pm 40}, LG_{\pm 21}$  e  $LG_{02}$ , com  $w_0 = 0,15\text{mm}$  e  $z_R \approx 112,20\text{mm}$ . A distância  
de Rayleigh está marcada por uma linha vertical. . . . . 70
- 5.5 Gráfico de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para:  $\frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{00} + HG_{08})$ , com  $w_0 = 0,2\text{mm}$  e  $z_R \approx$   
 $199,47\text{mm}$ . A distância de Rayleigh está marcada por uma linha vertical. . 71
- 5.6 Distribuição de intensidade de  $\frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{00} + HG_{08})$ , com  $w_0 = 0,2\text{mm}$  para  
 $z = 0, 100, 175, 199,47, 250$  e  $350$  mm. . . . . 71
- 5.7 Gráfico de  $|\mathcal{P}_g(z)|^2 \times z$  para:  $\frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{11} + HG_{02})$ , com  $w_0 = 0,2\text{mm}$  e  
 $z_R \approx 199,47\text{mm}$ . . . . . 73

5.8	Gráfico de $ \mathcal{P}_g(z) ^2 \times z$ para: $\frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{00} + HG_{44})$ , com $w_0 = 0,2\text{mm}$ e $z_R \approx 199,47\text{mm}$ . . . . .	74
5.9	Gráficos de $ \mathcal{P}(z) ^2 \times z$ para feixes de Bessel com $s = 0$ , truncados em um raio $R_{\max} = 0,5\text{mm}$ e com $R_k = 5, 10, 15, 20, 25$ e $30 \text{ mm}^{-1}$ . . . . .	75
5.10	Distribuições de intensidade em $z = 0$ de $Bt_0(\rho, \phi; 0)$ truncados em $R_{\max} = 0,5\text{mm}$ para $R_k = 5, 10, 15, 20, 25$ e $30 \text{ mm}^{-1}$ . . . . .	76
5.11	Distribuições de intensidade em $z = 100\text{mm}$ de $Bt_0(\rho, \phi; 0)$ truncados em $R_{\max} = 0,5\text{mm}$ para $R_k = 5, 10, 15, 20, 25$ e $30 \text{ mm}^{-1}$ . . . . .	76
5.12	Gráficos de $ \mathcal{P}(z) ^2 \times z$ para feixes de Bessel com $s = 5$ , truncados em um raio $R_{\max} = 0,5\text{mm}$ e com $R_k = 5, 10, 15, 20, 25$ e $30 \text{ mm}^{-1}$ . . . . .	77
5.13	Gráficos de $ \mathcal{P}(z) ^2 \times z$ para feixes de Bessel com $R_k = 10\text{mm}^{-1}$ , $s = 5$ e $R_{\max} = 0,5, 1,0$ e $1,5 \text{ mm}$ . . . . .	78
5.14	Gráficos de $ \mathcal{P}(z) ^2 \times z$ para uma superposição de feixes de Bessel de ordem $s = 0$ , truncados em $R_{\max} = 1,0\text{mm}$ , com $R_{k_1} = 5\text{mm}^{-1}$ e $R_{k_2} = 25\text{mm}^{-1}$ . . . . .	79
5.15	Distribuição de intensidade de uma superposição de feixes de Bessel de ordem $s = 0$ , truncados em $R_{\max} = 1,0\text{mm}$ , com $R_{k_1} = 5\text{mm}^{-1}$ e $R_{k_2} = 25\text{mm}^{-1}$ , para $z = 0, 0,5z_B, z_B, 1,5z_B, 2z_B$ w $2,5z_B$ . . . . .	79
5.16	Gráficos de $ \mathcal{P}(z) ^2 \times z$ para feixes de Bessel-Gauss com $s = 0$ , $R_k = 10\text{mm}^{-1}$ e $w_{BG} = 0,05, 0,1, 0,2, 0,4, 0,8$ e $1,6 \text{ mm}$ . . . . .	80
5.17	Gráficos de $ \mathcal{P}(z) ^2 \times z$ para $\beta_0$ com $R_k = 20\text{mm}^{-1}$ , $\Delta_k = 5\text{mm}^{-1}$ . O ponto $(z_{ND},  \mathcal{P}(z_{ND}) ^2)$ está marcado por um asterisco vermelho. . . . .	82
5.18	Gráfico de $ \beta_0 ^2 \times x$ para $y = 0$ , com $R_k = 20\text{mm}^{-1}$ , $\Delta_k = 5\text{mm}^{-1}$ para $z = 0, 0,5z_{ND}, z_{ND}, 2z_{ND}, 2,860z_{ND}$ e $4z_{ND}$ . . . . .	82
5.19	Gráficos de $ \mathcal{P}(z) ^2 \times z$ para uma superposição de campos semelhantes ao de Bessel com $R_{k_1} = 10\text{mm}^{-1}, R_{k_2} = 25\text{mm}^{-1}$ e $\Delta_k = 2\text{mm}^{-1}$ . . . . .	83
5.20	Distribuições de intensidade de uma superposição de campos semelhantes ao de Bessel para $y = 0$ , com $s = 0$ , $R_{k_1} = 10\text{mm}^{-1}, R_{k_2} = 25\text{mm}^{-1}$ e $\Delta_k = 2\text{mm}^{-1}$ para $z = 0, 0,5z_B, z_B, 1,5z_B, 2z_B$ e $2,5z_B$ . . . . .	84
5.21	Gráficos de $ \mathcal{P}(z) ^2 \times z$ para $\Psi_0$ com $R_k = 20\text{mm}^{-1}$ , $\Delta_k = 0,5\text{mm}^{-1}$ e $p_{\max} = 2, 5, 10, 15, 20$ e $25$ . A distância de Rayleigh $z_R$ está marcada por uma reta vertical. . . . .	85

- 5.22 Gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para  $\Psi_0$  com  $p_{\max} = 20$ ,  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$  e  $\Delta_k = 0, 2, 0, 5, 1, 2, 3$  e  $4$ . A distância de Rayleigh  $z_R$  está marcada por uma reta vertical. . . . . 86
- 5.23 Gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para  $LG_{17}$  com  $w_0 = 0, 2\text{mm}$  e para um feixe de Bessel com  $s = 1$  e  $R_k = 38, 73\text{mm}^{-1}$  truncado em  $R_{\max} = 0, 78\text{mm}$ . . . . . 87
- 5.24 Gráfico de  $|LG_{17}|^2 \times x$  para  $y = 0$ , com  $w_0 = 0, 2\text{mm}$  e  $\Delta_k = 0, 5\text{mm}^{-1}$  e  $z_R = 199, 47\text{mm}$ , para  $z = 0, 0, 1z_R, 0, 25z_R, 0, 5z_R, z_R$  e  $1, 5z_R$ . . . . . 87
- 5.25 Gráfico de  $|Bt_1|^2 \times x$  para  $y = 0$ , com  $s = 1$ ,  $R_k = 38, 73\text{mm}^{-1}$  e  $R_{\max} = 0, 78\text{mm}$ , para  $z = 0, 0, 1z_R, 0, 25z_R, 0, 5z_R, z_R$  e  $1, 5z_R$ . . . . . 88
- 5.26 Gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para  $\beta_0$  e  $\Psi_0$  com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 0, 5\text{mm}^{-1}$  e  $p_{\max} = 20$ . . . . . 89
- 5.27 Gráfico de  $|\Psi_0|^2 \times x$  para  $y = 0$ , com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 0, 5\text{mm}^{-1}$ ,  $p_{\max} = 20$ ,  $w_0 = 0, 2\text{mm}$  e  $z_R = 199, 47\text{mm}$ , para  $z = 0, 0, 5z_R, z_R, 1, 5z_R, 2z_R$  e  $2, 5z_R$ . . . . . 89
- 5.28 Gráfico de  $|\beta_0|^2 \times x$  para  $y = 0$ , com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 0, 5\text{mm}^{-1}$ , para  $z = 0, 0, 5z_R, z_R, 1, 5z_R, 2z_R$  e  $2, 5z_R$ . . . . . 90
- 5.29 Gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para  $\beta_0$  e  $\Psi_0$  com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 5\text{mm}^{-1}$  e  $p_{\max} = 20$ . . . . . 90
- 5.30 Gráfico de  $|\Psi_0|^2 \times x$  para  $y = 0$ , com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 5\text{mm}^{-1}$ ,  $p_{\max} = 20$ ,  $w_0 = 0, 2\text{mm}$  e  $z_R = 199, 47\text{mm}$ , para  $z = 0, 0, 5z_R, z_R, 1, 5z_R, 2z_R$  e  $2, 5z_R$ . . . . . 91
- 5.31 Gráfico de  $|\beta_0|^2 \times x$  para  $y = 0$ , com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 5\text{mm}^{-1}$ , para  $z = 0, 0, 5z_R, z_R, 1, 5z_R, 2z_R$  e  $2, 5z_R$ . . . . . 91
- 5.32 Gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para  $\beta_0$  e  $Bt_0$  com  $R_k = 20\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 5\text{mm}^{-1}$  e  $R_{\max} = 0, 685\text{mm}$ . . . . . 92
- 5.33 Gráfico de  $|\beta_0|^2 \times x$  para  $y = 0$ , com  $R_k = 20\text{mm}^{-1}$  e  $\Delta_k = 5\text{mm}^{-1}$ , para  $z = 0, 0, 2z_{ND}, 0, 5z_{ND}, z_{ND}, 1, 5z_{ND}$  e  $2z_{ND}$ . . . . . 92
- 5.34 Gráfico de  $|Bt_0|^2 \times x$  para  $y = 0$ , com  $R_k = 20\text{mm}^{-1}$  e  $R_{\max} = 0, 685\text{mm}^{-1}$ , para  $z = 0, 0, 2z_{ND}, 0, 5z_{ND}, z_{ND}, 1, 5z_{ND}$  e  $2z_{ND}$ . . . . . 93
- 5.35 Gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para  $\beta_2$  e  $Bt_2$  com  $R_k = 20\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 5\text{mm}^{-1}$  e  $R_{\max} = 0, 685\text{mm}$ . . . . . 93

- 5.36 Gráfico de  $|\beta_2|^2 \times x$  para  $y = 0$ , com  $R_k = 20\text{mm}^{-1}$  e  $\Delta_k = 5\text{mm}^{-1}$ , para  
 $z = 0, 0, 2z_{ND}, 0, 5z_{ND}, z_{ND}, 1, 5z_{ND}$  e  $2z_{ND}$ . . . . . 94
- 5.37 Gráfico de  $|Bt_2|^2 \times x$  para  $y = 0$ , com  $R_k = 20\text{mm}^{-1}$  e  $R_{\max} = 1,05\text{mm}^{-1}$ ,  
para  $z = 0, 0, 2z_{ND}, 0, 5z_{ND}, z_{ND}, 1, 5z_{ND}$  e  $2z_{ND}$ . . . . . 94



# Capítulo 1

## Introdução

Nesta dissertação, estudaremos a propagação de feixes eletromagnéticos no regime paraxial. Neste regime, os feixes têm uma direção preferencial de propagação, com a qual seus vetores de onda formam ângulos pequenos. Os focos desse estudo serão feixes que apresentem alguma forma de invariância por propagação, como é o caso dos não-difrativos e dos que formam autoimagens. Além de informações relevantes sobre os assuntos, apresentaremos exemplos numéricos e alguns resultados obtidos durante meu mestrado.

Um campo é considerado não-difrativo quando ele possui a mesma distribuição de intensidade para qualquer distância de propagação [4]. Dentre os campos que apresentam essa característica, a onda plana é o mais conhecido, mas nosso interesse maior está nos chamados feixes de Bessel que, diferentemente das ondas planas, têm uma estrutura transversal à direção de propagação. Como seria necessária uma energia infinita para gerar um feixe de Bessel ideal, foram criadas formas de obter feixes aproximadamente não-difrativos semelhantes ao de Bessel [7, 15, 19, 34]. A primeira realização experimental de um feixe aproximadamente não-difrativo foi executada por Durnin, em 1986 [7]. Desde então, campos com essa propriedade são alvos de interesse por suas possíveis aplicações em áreas como a micromanipulação óptica [1, 10, 24] e a comunicação digital [18]. Neste trabalho, além de expor algumas formas já conhecidas de criar feixes aproximadamente não-difrativos, proporemos outras duas.

Considera-se que um campo possui autoimagens quando ele apresenta uma repetição do padrão de intensidade transversal original para certas distâncias de propagação. A primeira observação de um campo com autoimagens foi realizada por H.F. Talbot, em 1836 [33], que percebeu que um feixe difratado por uma estrutura periódica repetia a

imagem dessa estrutura em algumas distâncias ao longo de sua propagação. Nesta dissertação, mostraremos outras formas de se obter campos com autoimagens, a primeira usando uma superposição de modos Gaussianos [5] e a segunda, uma superposição de campos aproximadamente não-difrativos [4]. Campos com essa característica têm aplicações em áreas como processamento de imagens, síntese de elementos ópticos e metrologia óptica [29].

No segundo capítulo desta dissertação, discutiremos a aproximação paraxial, que será usada ao longo desse trabalho. Apresentaremos a equação de onda paraxial e mostraremos como descrever a propagação de um campo através de transformadas de Fourier. Além disso, falaremos brevemente da difração de Fraunhofer e de como realizar transformadas de Fourier usando uma lente.

No terceiro capítulo, apresentaremos os chamados modos Gaussianos: os Hermite-Gauss, que são as soluções da equação de onda paraxial em coordenadas cartesianas, e os de Laguerre-Gauss, que solucionam essa equação em coordenadas cilíndricas. Discutiremos a propagação desses modos e mostraremos como usar superposição de modos Gaussianos de ordens diferentes para gerar um campo que forme autoimagens ao longo de sua propagação. Finalmente, usaremos a Difração de Fraunhofer para calcular suas transformadas de Fourier.

No quarto capítulo, apresentaremos os feixes de Bessel e mostraremos como usar uma superposição destes para gerar um feixe com autoimagens. Mostraremos alguns dos feixes aproximadamente não-difrativos mais conhecidos, os feixes de Bessel truncados e de Bessel-Gauss, e apresentaremos mais duas formas de obter campos com essa característica. A primeira é um campo cuja transformada de Fourier seja constante em uma pequena largura em torno de um raio central e nula fora dela, enquanto a segunda é uma combinação linear de modos de Laguerre-Gauss com determinados coeficientes. Além disso, comentaremos sobre feixes de Bessel e de Laguerre-Gauss com distribuições de amplitude semelhantes.

No quinto capítulo, mostraremos exemplos de como os parâmetros dos campos apresentados nesta dissertação afetam sua difração. Também compararemos a propagação de campos de tipos diferentes com condições iniciais semelhantes. Para isso, proporemos usar o produto interno entre as distribuições de amplitude de um campo na origem e em outras distâncias de propagação como uma forma quantitativa de avaliar o quão não-

difrativo é o campo ou o quão exatas são suas autoimagens.

Finalmente, apresentaremos as principais conclusões deste trabalho no sexto capítulo.

# Capítulo 2

## A Equação de Onda Paraxial

### 2.1 A Equação Paraxial

As equações de Maxwell descrevem o comportamento dos campos elétrico e magnético. Na ausência de cargas e correntes elétricas, para campos que se propagam no vácuo, são elas:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \quad (2.4)$$

onde  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$  e  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  são, respectivamente, a permissividade elétrica e permeabilidade magnética do vácuo. A partir dessas equações, podemos encontrar, tanto para o campo elétrico quanto para o magnético, a mesma equação de onda:

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.5)$$

onde  $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$  e  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$  é a velocidade da luz no vácuo. Assim, temos a mesma equação para todas as componentes dos campos elétrico e magnético. Para uma discussão mais aprofundada sobre ondas eletromagnéticas, o leitor pode consultar a referência [17]. Seja  $u(\mathbf{r}, t)$  um campo escalar que represente qualquer componente dos campos elétrico

ou magnético. Vale para ele a equação de onda escalar:

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(\mathbf{r}, t) = 0 . \quad (2.6)$$

Esses resultados não são válidos em qualquer situação, limitando-se às em que valem a aproximação escalar. Em situações além da propagação da luz no espaço livre, a equação de onda pode não ser a mesma para todas as componentes dos campos elétrico e magnético, podendo haver acoplamento entre elas. Esses efeitos podem ser relevantes em situações como a difração da luz por uma abertura em um material, mas eles ocorrem apenas a uma distância pequena (poucos comprimentos de onda) das bordas da abertura, introduzindo pouco erro desde que a área da abertura seja suficientemente grande. Nessa dissertação, consideraremos sempre que a aproximação escalar é válida.

Vamos considerar que o campo  $u(\mathbf{r}, t)$  é monocromático, com frequência angular  $\omega$ , de forma que possa ser descrito pela equação:

$$u(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}) \cos(\Phi(\mathbf{r}) - \omega t) , \quad (2.7)$$

onde  $A(\mathbf{r})$  é a amplitude do campo e  $\Phi(\mathbf{r})$ , sua fase. Trabalharemos, porém, com a forma complexa do campo, dada por:

$$w(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} , \quad (2.8)$$

onde  $U(\mathbf{r})$  é a chamada **amplitude complexa**. O campo  $w(\mathbf{r}, t)$  também obedece à equação de onda e tem como parte real  $u(\mathbf{r}, t)$ , ou seja:

$$u(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{w(\mathbf{r}, t)\} = \frac{1}{2} [w(\mathbf{r}, t) + w(\mathbf{r}, t)^*] , \quad (2.9)$$

onde o asterisco (\*) representa a operação de conjugação complexa. Uma quantidade que será relevante ao longo dessa dissertação é a **intensidade** do campo, ou seja, sua potência por unidade de área. No caso de um campo descrito por (2.8), ela é dada por:

$$I(\mathbf{r}) = |U(\mathbf{r})|^2 , \quad (2.10)$$

enquanto a potência é:

$$P = \int_A I(\mathbf{r}) d\mathbf{A} , \quad (2.11)$$

onde a área em questão é perpendicular à direção de propagação da onda.

Substituindo o campo dado por (2.8) na equação de onda escalar (2.6), obtemos a chamada **Equação de Helmholtz**:

$$(\nabla^2 + \kappa^2) U(\mathbf{r}) = 0 , \quad (2.12)$$

onde  $\kappa$  é o módulo do vetor de onda, ou número de onda, dado por  $\kappa = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ , com  $\lambda$  sendo o comprimento de onda. Finalmente, façamos uma última aproximação: a chamada **aproximação paraxial**. Consideremos que o campo  $U(\mathbf{r})$  possa ser descrito como uma onda plana se propagando na direção  $z$  envelopada por uma função que varia lentamente com  $z$ , ou seja:

$$U(\mathbf{r}) = W(\mathbf{r}) e^{i\kappa z} , \quad (2.13)$$

onde  $W(\mathbf{r})$  é um campo paraxial, isto é, ele varia pouco ao longo de uma distância de propagação de um comprimento de onda. Matematicamente, isso significa que, dado um ponto qualquer  $(x_0, y_0, z_0)$  do espaço, vale:

$$|W(x_0, y_0, z_0 + \lambda) - W(x_0, y_0, z_0)| \ll |W(x_0, y_0, z_0)| . \quad (2.14)$$

Um campo paraxial tem frentes de onda, ou seja, superfícies de mesma fase, não planas, mas que se curvam pouco. Em outras palavras, seus vetores de onda, que são perpendiculares a elas, formam ângulos pequenos com a direção de propagação  $z$ . Podemos descrever o campo após se propagar por uma distância  $\lambda$  na direção  $z$  através de sua Série de Taylor. Dado um certo ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  do espaço, escrevemos:

$$W(x_0, y_0, z_0 + \lambda) \approx W(x_0, y_0, z_0) + \lambda \left. \frac{\partial W(x_0, y_0, z)}{\partial z} \right|_{z=z_0} + \frac{\lambda^2}{2} \left. \frac{\partial^2 W(x_0, y_0, z)}{\partial z^2} \right|_{z=z_0} . \quad (2.15)$$

A variação lenta do campo  $W(\mathbf{r})$  significa que os termos da expansão acima devem sempre ser muito pequenos se comparados ao primeiro. Além disso, vamos considerar que o

terceiro termo é muito menor, em módulo, que o segundo. Equivalentemente:

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} W(\mathbf{r}) \right| \ll |kW(\mathbf{r})| \quad (2.16)$$

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial z^2} W(\mathbf{r}) \right| \ll \left| 2\kappa \frac{\partial}{\partial z} W(\mathbf{r}) \right| . \quad (2.17)$$

Negligenciando os termos à esquerda em relação aos à direita na equação de Helmholtz (2.12), obtemos a **equação de onda paraxial** para o campo  $W(\mathbf{r})$ :

$$\left( \nabla_{\perp}^2 + 2i\kappa \frac{\partial}{\partial z} \right) W(\mathbf{r}) = 0 , \quad (2.18)$$

onde  $\nabla_{\perp}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  é o operador Laplaciano em coordenadas transversais.

## 2.2 Propagação por uma Transformada de Fourier

Nessa seção, mostraremos como encontrar o campo paraxial  $W(x, y; z)$  a partir de seu valor em  $W(x, y; 0)$ . Para isso, falaremos de transformadas de Fourier, que terão um papel de destaque nessa dissertação. Consideraremos sempre a propagação no sentido positivo do eixo  $z$ .

Sejam  $\mathbf{r}_{\perp} = x\hat{x} + y\hat{y}$  a coordenada espacial transversal e  $\mathbf{k}_{\perp} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y}$  a componente transversal do vetor de onda, podemos definir a transformada de Fourier transversal do campo  $W(\mathbf{r}_{\perp}; z)$  como:

$$\mathcal{F}\{W(\mathbf{r}_{\perp}; z)\} = V(\mathbf{k}_{\perp}; z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d^2\mathbf{r}_{\perp} W(\mathbf{r}_{\perp}; z) e^{-i\mathbf{r}_{\perp} \cdot \mathbf{k}_{\perp}} . \quad (2.19)$$

Já a transformada de Fourier inversa de  $V(\mathbf{k}_{\perp}; z)$ , que é a decomposição do campo original em exponenciais complexas, é dada por:

$$\mathcal{F}^{-1}\{V(\mathbf{k}_{\perp}; z)\} = W(\mathbf{r}_{\perp}; z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d^2\mathbf{k}_{\perp} V(\mathbf{k}_{\perp}; z) e^{i\mathbf{r}_{\perp} \cdot \mathbf{k}_{\perp}} . \quad (2.20)$$

Para as principais identidades da transformada de Fourier, o leitor pode consultar o apêndice A.

A equação (2.20) descreve o campo  $W(\mathbf{r}_{\perp}; z)$  como uma superposição de ondas

planas cujos vetores de onda fazem um ângulo  $\arccos\left(\frac{k_x}{\kappa}\right)$  com o eixo  $x$  e  $\arccos\left(\frac{k_y}{\kappa}\right)$  com o  $y$ , com amplitudes  $V(\mathbf{k}_\perp; z)d^2\mathbf{k}_\perp$ . Por isso, a transformada de Fourier transversal de um campo também é conhecida como seu **espectro angular**. Para encontrar o ângulo entre os vetores de onda e a direção  $z$ , podemos usar a relação entre suas componentes:

$$k_z = \sqrt{\kappa^2 - (k_x^2 + k_y^2)} \quad (2.21)$$

No caso do campo paraxial, os vetores de onda formam ângulos pequenos com o eixo  $z$  e, portanto,  $\kappa^2 \gg k_x^2 + k_y^2$ . Usando a Expansão Binomial para o lado direito da equação (2.21), obtemos:

$$k_z \approx \kappa \left( 1 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2\kappa^2} \right), \quad (2.22)$$

ou seja, o vetor de onda forma um ângulo  $\arccos\left(1 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2\kappa^2}\right)$  com o eixo  $z$ .

Podemos substituir (2.20) na equação de onda paraxial (2.18) para obter uma equação para  $V(\mathbf{k}_\perp; z)$ . Após alguns cálculos, temos:

$$\frac{\partial}{\partial z} V(\mathbf{k}_\perp; z) = -i \frac{|\mathbf{k}_\perp|^2}{2\kappa} V(\mathbf{k}_\perp; z), \quad (2.23)$$

que tem como solução:

$$V(\mathbf{k}_\perp; z) = V(\mathbf{k}_\perp; 0) e^{-i \frac{|\mathbf{k}_\perp|^2}{2\kappa} z}. \quad (2.24)$$

Ou seja, o espectro angular do campo evolui apenas por uma fase quadrática em  $|\mathbf{k}_\perp|$ . Da equação (2.22), vemos que essa fase é, simplesmente,  $k_z z$ , com o termo  $\kappa z$  já tendo sido levado em conta na definição do campo  $U(\mathbf{r})$  (2.13). Para uma discussão mais completa sobre o espectro angular de um campo e sua propagação, o leitor pode consultar a referência [11].

Para encontrarmos  $W(\mathbf{r}_\perp; z)$ , basta utilizarmos a equação (2.20) e o Teorema da Convolução para a transformada de Fourier (A.7). Assim, temos:

$$W(\mathbf{r}_\perp; z) = \frac{1}{2\pi} W(\mathbf{r}_\perp; 0) \otimes \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-i \frac{|\mathbf{k}_\perp|^2}{2\kappa} z} \right\}, \quad (2.25)$$

Visto que a segunda transformada de Fourier acima tem como resultado:

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-i \frac{|\mathbf{k}_\perp|^2}{2\kappa} z} \right\} = -\frac{i\kappa}{z} e^{i \frac{\kappa}{2z} |\mathbf{r}_\perp|^2}, \quad (2.26)$$



finalmente,

$$W(\mathbf{r}_\perp; z) = -\frac{i\kappa}{2\pi z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d^2\mathbf{q}_\perp W(\mathbf{q}_\perp; 0) e^{i\frac{\kappa}{2z}|\mathbf{r}_\perp - \mathbf{q}_\perp|^2}, \quad (2.27)$$

onde  $\mathbf{q}_\perp = u\hat{x} + v\hat{y}$

A equação (2.27) equivale à Integral de Difração de Fresnel se considerarmos que  $\mathbf{q}_\perp$  são as coordenadas transversais do campo  $W$  em  $z = 0$ . De acordo com o princípio de Huygens, o campo em uma certa distância de propagação  $z$  pode ser interpretado como a superposição de ondas esféricas centradas em cada ponto desse mesmo campo em  $z = 0$ , com o peso dessa soma sendo a amplitude do campo nestes pontos. Na região da difração de Fresnel, também conhecida como região de campo próximo, as ondas esféricas da superposição são aproximadas por ondas parabólicas, de forma que o campo possa ser descrito pela integral acima [12]. A equação (2.27) também pode ser escrita como:

$$W(\mathbf{r}_\perp; z) = -\frac{i\kappa}{2\pi z} e^{i\frac{\kappa}{2z}|\mathbf{r}_\perp|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d^2\mathbf{q}_\perp W(\mathbf{q}_\perp; 0) e^{i\frac{\kappa}{2z}[|\mathbf{q}_\perp|^2 - 2(xu + yv)]}. \quad (2.28)$$

Muitas vezes, calcular diretamente a transformada de Fourier inversa de (2.24) é mais simples do que calcular a convolução (2.28). Em geral, esse é o processo realizado para obter numericamente a distribuição de amplitude complexa de um campo propagado: calcula-se a transformada de Fourier do campo em  $z = 0$ , acrescenta-se a fase necessária  $\left(-\frac{|\mathbf{k}_\perp|^2}{2\kappa}z\right)$  e calcula-se a transformada Inversa. Foi esse o procedimento utilizado para calcular a propagação de campos paraxiais no trabalho realizado durante o mestrado e apresentado nesta dissertação.

## 2.2.1 Difração de Fraunhofer

Se o campo  $W$  é limitado no plano  $z = 0$  e é observado em uma distância para a qual valha a desigualdade:

$$z \gg \kappa \text{Max}(|\mathbf{q}_\perp|^2), \quad (2.29)$$

onde  $\text{Max}(|\mathbf{q}_\perp|^2)$  é o maior valor de  $|\mathbf{q}_\perp|^2$  para o qual a intensidade do campo é significativamente maior que 0, a equação (2.28) pode ser aproximada por:

$$W(\mathbf{r}_\perp; z) \approx -\frac{i\kappa}{z} e^{i\frac{\kappa}{2z}|\mathbf{r}_\perp|^2} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d^2\mathbf{q}_\perp W(\mathbf{q}_\perp; 0) e^{-i\frac{\kappa}{z}(xu + yv)} \right]. \quad (2.30)$$

A parte entre colchetes da equação anterior é simplesmente a transformada de Fourier de  $W(\mathbf{q}_\perp; 0)$  avaliada em  $\mathbf{k}_\perp = \frac{\kappa \mathbf{r}_\perp}{z}$ . Quando a equação (2.30) é válida, dizemos que o campo está na região de difração de Fraunhofer, também chamada de região de campo distante.

## 2.2.2 Transformadas de Fourier Através de uma Lente

É possível obter o espectro angular de um campo experimentalmente através de uma lente convergente [13]. Consideremos uma lente convergente fina, ou seja, que possamos desconsiderar a translação de um raio de luz dentro dela, de forma que ela gere apenas uma diferença de fase na frente de onda que a atravessa. Considerando, também, que a lente esteja imersa no ar, sua distância focal é dada por:

$$f = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (2.31)$$

onde  $n$  é o índice de refração do material da lente e  $R_1$  e  $R_2$  são os raios das curvaturas de suas faces. Um feixe  $W_i(\mathbf{r}_\perp; z)$  incidente na lente, ao atravessá-la, terá a seguinte distribuição de amplitude:

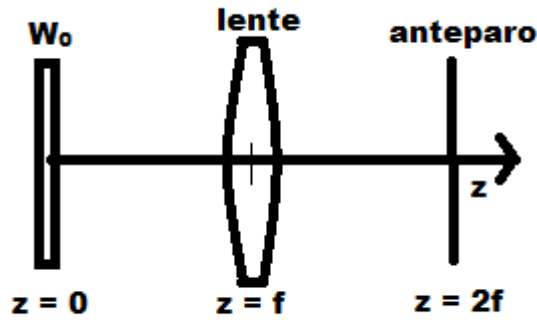
$$W_l(\mathbf{r}_\perp) = W_i(\mathbf{r}_\perp) e^{-i \frac{\kappa}{2f} (x^2 + y^2)}. \quad (2.32)$$

Suponhamos que seja colocado um anteparo a uma distância  $z = f$  da lente. Utilizando a equação (2.28) para calcular a propagação do campo  $W_l(\mathbf{r}_\perp)$  e usando a equação (2.32) para escrever esse resultado em termos do campo incidente original, obtemos:

$$W_l(\mathbf{r}_\perp; f) = -\frac{i\kappa}{f} e^{i \frac{\kappa}{2f} |\mathbf{r}_\perp|^2} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d^2 \mathbf{q}_\perp W_i(\mathbf{q}_\perp) e^{-i \frac{\kappa}{f} (xu + yv)} \right]. \quad (2.33)$$

Ou seja, com uma lente, é possível obter o padrão de difração de Fraunhofer para um campo a uma distância de propagação  $z = f$ . A parte da equação entre colchetes é simplesmente  $\mathcal{F}\{W_i(\mathbf{q}_\perp)\}$  avaliado em  $\mathbf{k}_\perp = \frac{\kappa \mathbf{r}_\perp}{f}$ .

Consideremos, agora, que um campo  $W_0(\mathbf{q}_\perp; 0)$  originalmente se propague até uma lente na posição  $z = f$ . Nesse caso, o anteparo se encontra na posição  $z = 2f$ , como indicado na imagem abaixo. Assumiremos que o campo ao longo do plano transversal logo antes da lente está completamente dentro da abertura da lente.



**Figura 2.1:** Esquema para obtenção experimental da transformada de Fourier do campo.

Sejam  $V_0(\mathbf{k}_\perp; 0) = \mathcal{F}\{W_0(\mathbf{q}_\perp; 0)\}$  a transformada de Fourier do campo original e  $V_i(\mathbf{k}_\perp; f) = \mathcal{F}\{W_i(\mathbf{q}_\perp; f)\}$ , a transformada de Fourier do campo incidente na lente. Da equação (2.24), temos a relação:

$$V_i(\mathbf{k}_\perp; f) = V_0(\mathbf{k}_\perp; 0)e^{-i\frac{|\mathbf{k}_\perp|^2}{2\kappa}z}. \quad (2.34)$$

Por outro lado, da equação (2.33), temos a distribuição de amplitude do campo no anteparo:

$$W_l(\mathbf{r}_\perp; 2f) = -\frac{i\kappa}{f}e^{i\frac{\kappa}{2f}|\mathbf{r}_\perp|^2}V_i\left(\frac{\kappa\mathbf{r}_\perp}{f}; f\right). \quad (2.35)$$

Finalmente, substituindo (2.34) na equação anterior, encontramos:

$$W_l(\mathbf{r}_\perp; 2f) = -\frac{i\kappa}{f}V_0\left(\frac{\kappa\mathbf{r}_\perp}{f}; 0\right). \quad (2.36)$$

A menos de uma constante multiplicativa e de um fator de escala, obtivemos a transformada de Fourier do campo original.

É possível realizar experimentalmente a propagação artificial de um campo seguindo o mesmo procedimento descrito anteriormente para o cálculo numérico da propagação [32]. Para isso, deve-se primeiro utilizar uma lente para obter o espectro angular do campo. Em seguida, acrescenta-se a ele a fase da equação (2.24) com a distância de propagação desejada por meio de um Modulador Espacial de Luz (SLM)<sup>1</sup>. Finalmente, realiza-se a transformada de Fourier inversa do campo com a fase alterada para obter o campo desejado. Para isso, basta fazer o campo passar por mais uma lente convergente

<sup>1</sup>Um Modulador Espacial da Luz, do inglês *Spatial Light Modulator* (SLM) é um dispositivo capaz de modular a distribuição de amplitude ou de fase de um feixe.

a uma distância  $f$ , já que, como indicado pela equação (A.10), aplicar a transformada de Fourier ao espectro angular de um campo resulta no campo original no espaço das posições a menos de uma inversão nos eixos  $x$  e  $y$ .

# Capítulo 3

## Modos Gaussianos

### 3.1 Modos Gaussianos

Além do método mostrado no capítulo anterior, podemos resolver a equação paraxial a partir das suas soluções separáveis em coordenadas cartesianas ou cilíndricas. Essas soluções são os chamados Modos Gaussianos: os modos de Hermite-Gauss [ $HG_{mn}(\mathbf{r})$ ] para coordenadas cartesianas ( $r = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ ) e os de Laguerre-Gauss [ $LG_{lp}(\mathbf{r})$ ] para coordenadas cilíndricas ( $r = \rho\hat{\rho} + \phi\hat{\phi} + z\hat{z}$ , onde  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  é a coordenada radial e  $\phi = \arctan \frac{y}{x}$ , o ângulo azimutal). Um campo paraxial qualquer pode ser descrito como uma combinação linear de uma dessas duas famílias de funções com determinados comprimento de onda e cintura, visto que formam uma base completa. Os modos Gaussianos são amplamente estudados por suas aplicações, como a geração de pinças ópticas [2, 21, 22] e seu uso em comunicação quântica e clássica [20, 28]. Esse capítulo tem como objetivo apresentar brevemente essas famílias de campos, discutindo suas características mais relevantes para essa dissertação. Para uma abordagem mais completa, o leitor pode consultar a referência [31].

Considerando um feixe de comprimento de onda  $\lambda$  e cintura (largura em  $z = 0$ )  $w_0$ , definimos as seguintes quantidades:

- $N$  - ordem do modo

$$N = m + n \text{ para os modos de Hermite-Gauss e} \quad (3.1)$$

$$N = 2p + |l| \text{ para os modos de Laguerre-Gauss;} \quad (3.2)$$

- $z_R$  - distância de Rayleigh

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}; \quad (3.3)$$

- $\Psi_N(z)$  - fase de Gouy

$$\psi_N(z) = (N + 1) \arctan \frac{z}{z_R}; \quad (3.4)$$

- $R_0(z)$  - raio da frente de onda

$$R_0(z) = z \left( 1 + \frac{z_R^2}{z^2} \right); \quad (3.5)$$

- $w(z)$  - largura do feixe

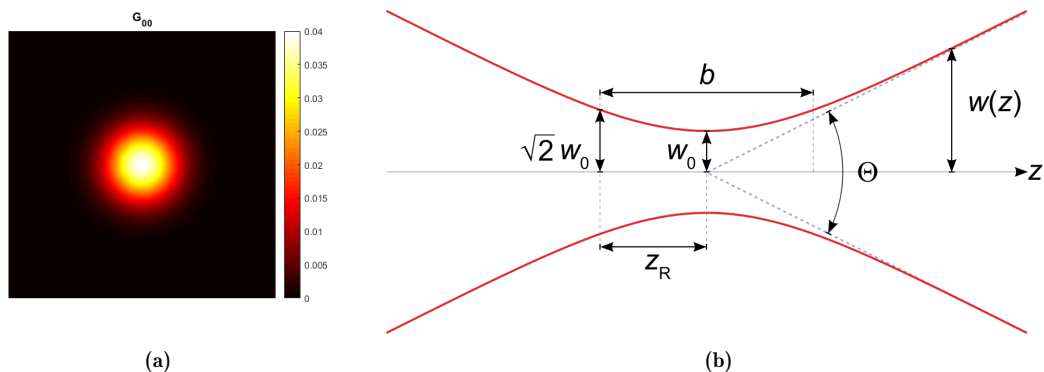
$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}. \quad (3.6)$$

### 3.1.1 Modo Gaussiano Fundamental

Para ambos os modos Gaussianos, o modo fundamental ( $m = n = 0$ ) ou ( $p = l = 0$ ) é o mesmo, descrito por:

$$G_{00}(x, y; z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w(z)} e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} e^{+i\kappa \frac{x^2+y^2}{2R_0(z)}} e^{-i\psi_N(z)}. \quad (3.7)$$

As imagens abaixo mostram a distribuição de intensidade de um modo Gaussiano no plano  $xy$  em  $z = 0$  e sua estrutura ao longo do eixo  $z$ .



**Figura 3.1:** Distribuição de intensidade para  $z$  fixo (a) e largura ao longo do eixo  $z$  (b)  $G_{00}$ . A figura (b) foi retirada de [36].

O modo Gaussiano fundamental, assim como todos os outros campos dos quais

falaremos nesse capítulo, estão normalizados, ou seja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |G_{00}(x, y; z)|^2 dx dy = 1. \quad (3.8)$$

A largura do feixe  $w(z)$  (3.6) é a distância da origem em cada plano transversal  $z$  para a qual a intensidade do campo é  $\frac{1}{e^2}$  da sua intensidade no pico. Já a distância de Rayleigh  $z_R$  (3.3) é a distância de propagação para a qual  $w(z) = \sqrt{2}w_0$ . A maior parte da potência do feixe (cerca de 86%) está concentrada em um círculo de raio  $w(z)$  em torno do eixo  $z$ .

Se um feixe é descrito por  $U(\mathbf{r}) = G_{00}(x, y; z)e^{-i\kappa z}$ , suas frentes de onda são as superfícies  $\kappa \left( z - \frac{x^2+y^2}{2R_0(z)} \right) - \Psi_N(z) = C$ , onde  $C$  é um valor constante. Como o campo é paraxial,  $R_0(z)$  e  $\Psi_N(z)$  devem variar pouco ao longo de uma frente de onda e podem ser considerados aproximadamente constantes para esse cálculo. Assim, as superfícies de mesma fase são dadas por:

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2R_0} - \frac{\Psi_N + C}{\kappa}, \quad (3.9)$$

que é a equação de um parabolóide elíptico de raio  $R_0$ , o que justifica  $R_0(z)$  (3.5) ser o raio da frente de onda. Finalmente, a fase de Gouy  $\Psi_N(z)$  (3.4) equivale à diferença de fase no eixo  $z$  entre o campo e uma onda plana. De  $z = -\infty$  até  $\infty$ , essa diferença é de  $\pi$ . Esse fenômeno é chamado de Efeito Guoy ou Mudança de Fase de Gouy e está associado ao confinamento espacial do feixe no plano transversal [9].

### 3.1.2 Modos de Hermite-Gauss

Os modos de Hermite-Gauss (HG) são dados por:

$$HG_{mn}(x, y; z) = \frac{A_{mn}}{w(z)} H_m \left( \frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_n \left( \frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} e^{+i\kappa \frac{x^2+y^2}{2R_0(z)}} e^{-i\psi_N(z)}, \quad (3.10)$$

onde  $A_{mn}$  é uma constante de normalização dada por:

$$A_{mn} = \sqrt{\frac{2/\pi}{2^m 2^n m! n!}}, \quad (3.11)$$

e  $H_j(x)$  é o Polinômio de Hermite de grau  $j$ .

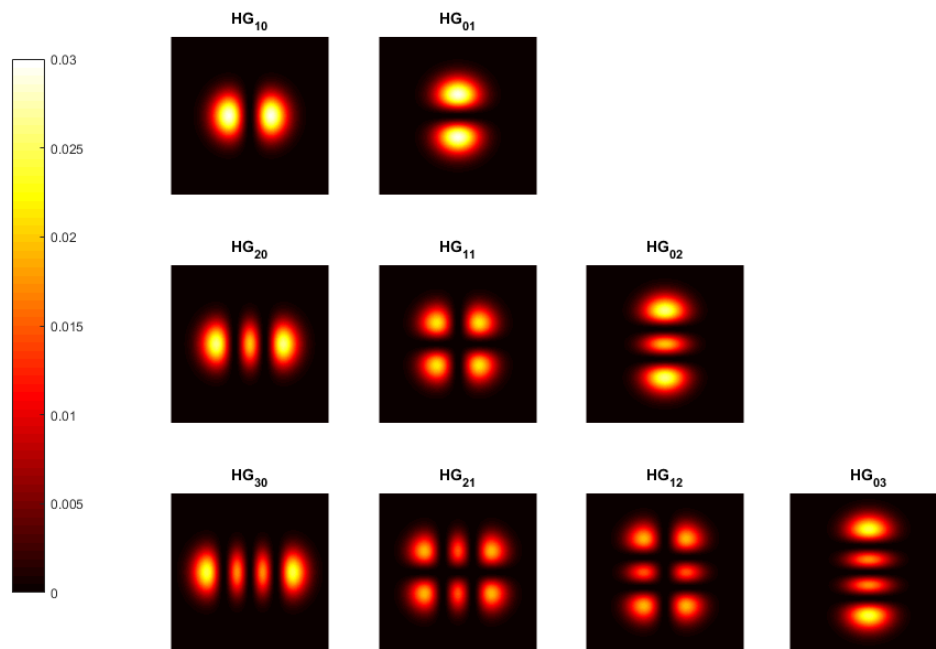
Os modos de Hermite-Gauss são ortonormais entre si, ou seja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} HG_{mn}^*(x, y; z) HG_{m'n'}(x, y; z) dx dy = \delta_{mm'} \delta_{nn'} , \quad (3.12)$$

onde  $\delta_{ab}$  é a Delta de Kronecker, definida por:

$$\delta_{ab} = \begin{cases} 1, & \text{se } a = b \\ 0, & \text{se } a \neq b . \end{cases} \quad (3.13)$$

Abaixo mostramos gráficos da distribuição intensidade de alguns desses modos para um plano transversal à propagação.



**Figura 3.2:** Distribuição de intensidade dos modos de Hermite-Gauss de ordens 1 a 3.

Assim como o modo Gaussiano Fundamental, as frentes de onda dos modos de HG são paraboloides. A presença dos polinômios de Hermite faz com que a extensão desses modos nos planos transversais à propagação dos modos de ordens maiores 0 seja maior do que a do modo fundamental.



### 3.1.3 Modos de Laguerre-Gauss

Em coordenadas cilíndricas, os modos de Laguerre-Gauss (LG) são dados por:

$$LG_{lp}(\rho, \phi; z) = \frac{B_{lp}}{w(z)} \left( \frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left( \frac{2\rho^2}{w^2(z)} \right) e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}} e^{i\left(-l\phi + \frac{\kappa\rho^2}{2R_0(z)}\right)} e^{-i\psi_N(z)}, \quad (3.14)$$

onde  $B_{lp}$  é uma constante de normalização:

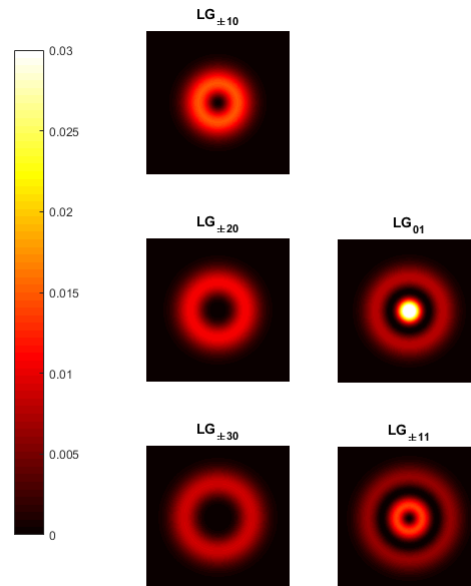
$$B_{lp} = \sqrt{\frac{2p!}{\pi(p+|l|)!}}, \quad (3.15)$$

e  $L_i^j(x)$  é o Polinômio Associado de Laguerre de grau  $i$  e índice  $j$ .

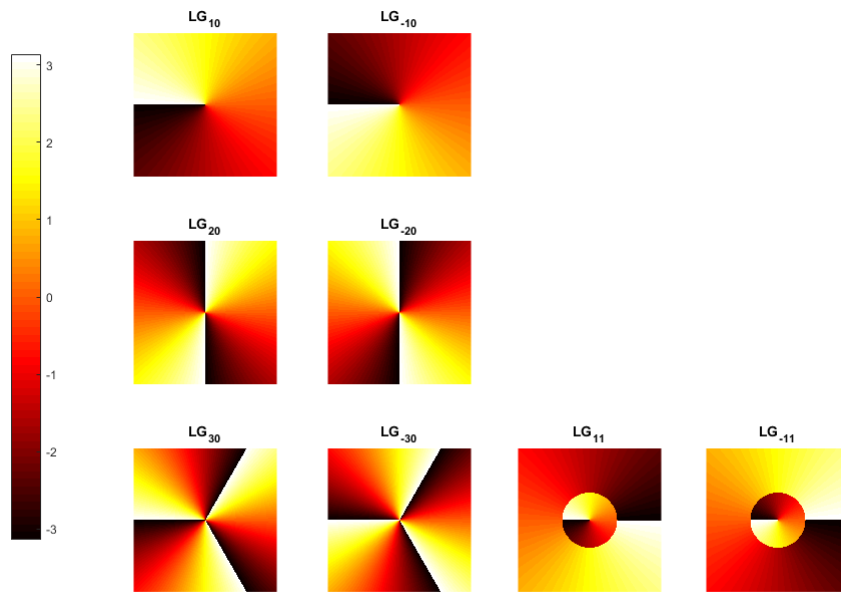
Assim como os modos de HG, os modos de Laguerre-Gauss são ortonormais:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty LG_{lp}^*(\rho, \phi; z) LG_{l'p'}(\rho, \phi; z) \rho d\rho d\phi = \delta_{ll'} \delta_{pp'}. \quad (3.16)$$

Abaixo mostramos gráficos da distribuição de intensidade e de fase de alguns desses modos em um plano transversal à propagação:



**Figura 3.3:** Distribuição de intensidade dos modos de Laguerre-Gauss de ordens 1 a 3.



**Figura 3.4:** Distribuição de fase dos modos de Laguerre-Gauss com  $l \neq 0$  de ordens 1 a 3.

Assim como acontece com os modos de HG, a presença dos polinômios de Laguerre faz com que a extensão dos modos de LG nos de ordem maior que 0 nos planos transversais à propagação seja maior do que a do modo fundamental. Assim como os modos Gaussianos apresentados anteriormente, os modos de LG com  $l = 0$  têm como frentes de onda paraboloides elípticos. Já para  $l \neq 0$ , o termo  $e^{-il\phi}$  dá uma forma helicoidal às frentes de onda.

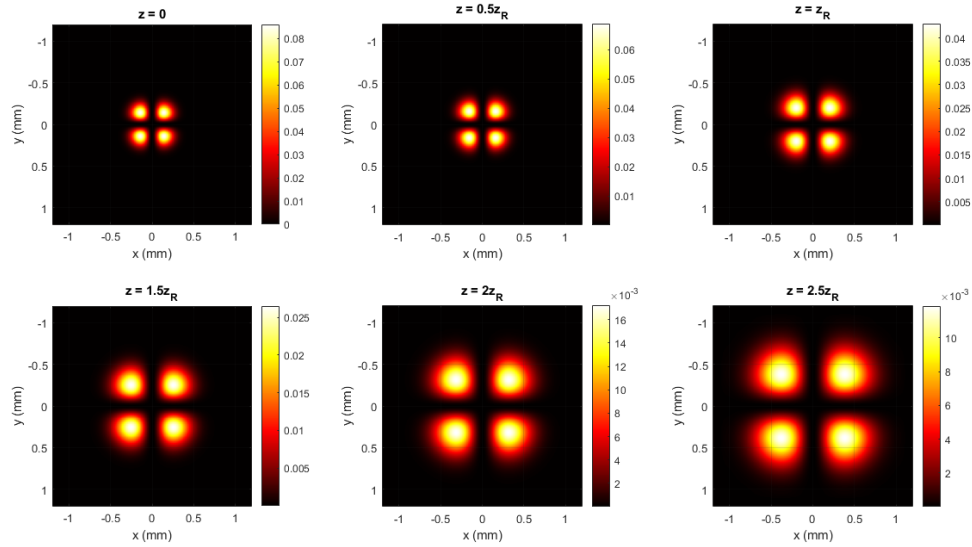
Uma causa de interesse particular nos modos de Laguerre-Gauss é o fato de eles terem momento angular orbital (MAO). Sabe-se que feixes com fases como  $e^{-il\phi}$  têm MAO equivalente a  $l\hbar$  por fóton, o que dá a esses feixes aplicações em áreas como microscopia, manipulação e comunicação ópticas. [28].

## 3.2 Propagação de Modos Gaussianos

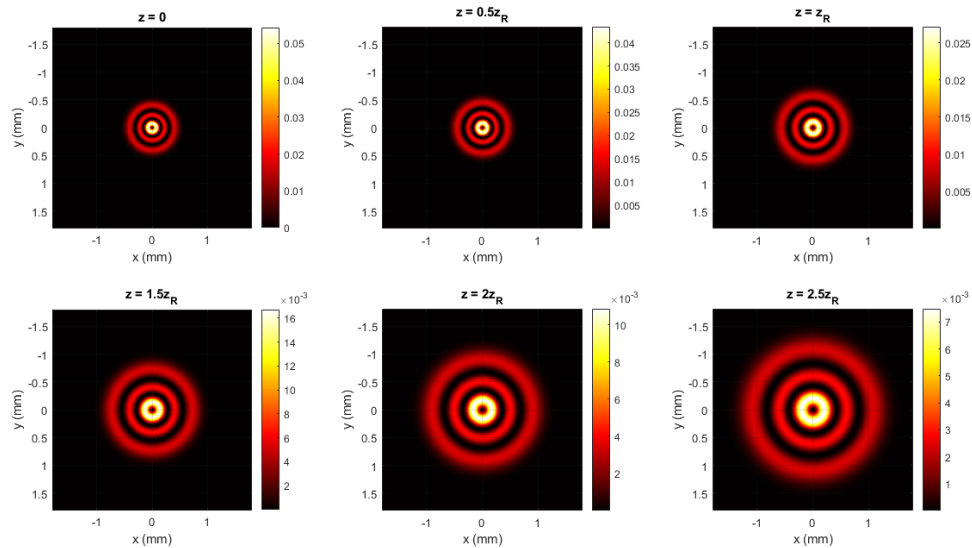
Das definições dos Modos Gaussianos (equações (3.10) e (3.14)), é perceptível que, ao longo de sua propagação, suas distribuições de intensidade só se alteram por um fator de escala. Quando um feixe, como é o caso destes, é invariante à propagação a menos de uma mudança de escala, ele é considerado **estruturalmente estável** [3].

As imagens a seguir mostram a propagação dos modos  $HG_{11}(\mathbf{r}; z)$  e  $LG_{12}(\mathbf{r}; z)$  para certos valores de  $z$ . Todas as imagens desta seção são de feixes com distância de

Rayleigh  $z_R = 199.4662\text{mm}$ .



**Figura 3.5:** Distribuição de intensidade de  $HG_{11}$  para  $z = 0, 0.5z_R, z_R, 1.5z_R, 2z_R$  e  $2.5z_R$ .

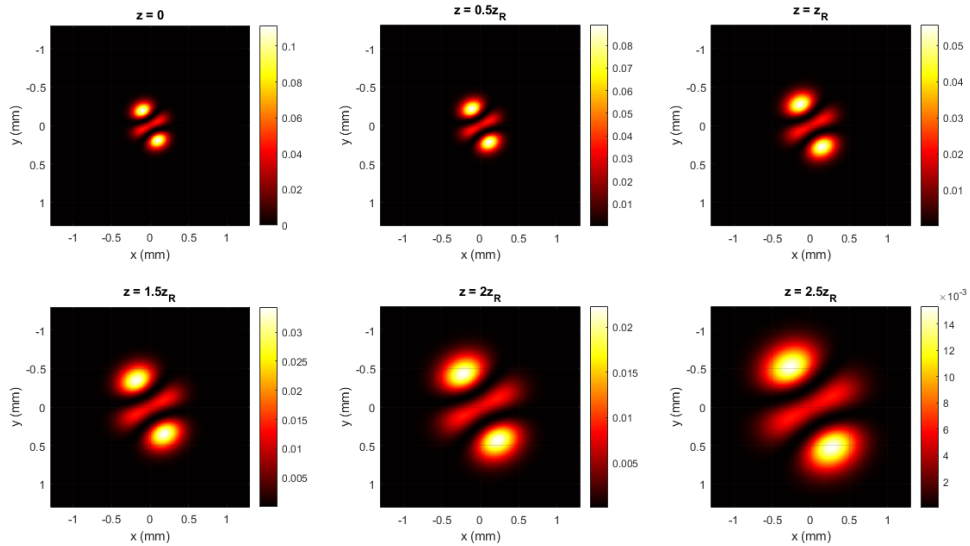


**Figura 3.6:** Distribuição de intensidade de  $LG_{12}$  para  $z = 0, 0.5z_R, z_R, 1.5z_R, 2z_R$  e  $2.5z_R$ .

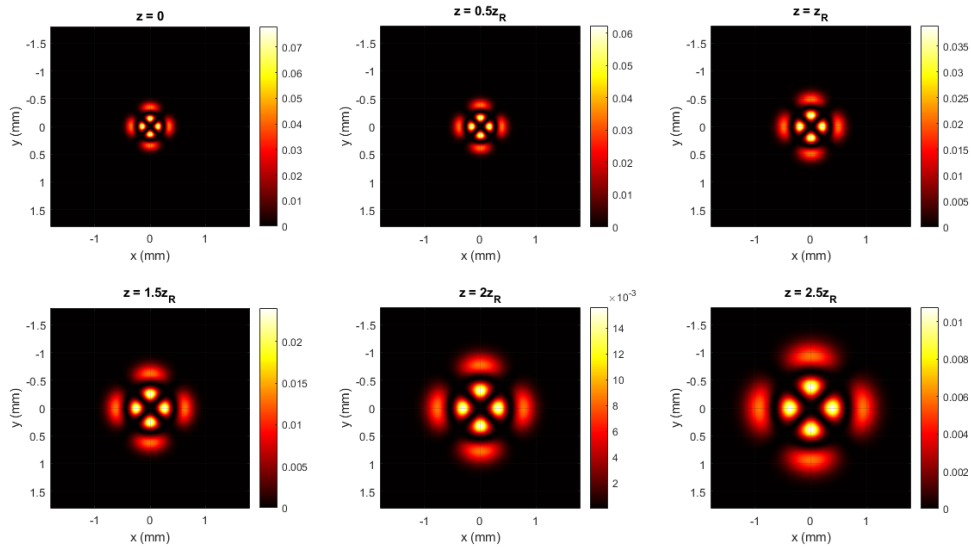
Já uma combinação linear de modos de HG ou LG pode ou não ser estruturalmente estável, dependendo apenas das ordens dos feixes envolvidos. Toda a discussão a seguir também é válida para uma superposição de modos de HG e modos de LG, visto que um dado modo de HG pode ser descrito como uma combinação linear de modos de LG de mesma ordem, e vice-versa [26].

A possível mudança do padrão de intensidade de um feixe paraxial se deve às fases de Gouy de suas componentes de HG ou LG. Se a fase de Gouy de todos os modos da

superposição for a mesma, então ela é simplesmente uma fase global, sem influência no padrão de intensidade do feixe. Isso significa que uma combinação linear de feixes Gaussianos de mesma ordem é estruturalmente estável. As imagens abaixo mostram a propagação dos campos  $\frac{1}{\sqrt{2}}[HG_{11}(x, y; z) + HG_{02}(x, y; z)]$  e  $\frac{1}{\sqrt{2}}[LG_{-21}(x, y; z) + LG_{21}(x, y; z)]$ .



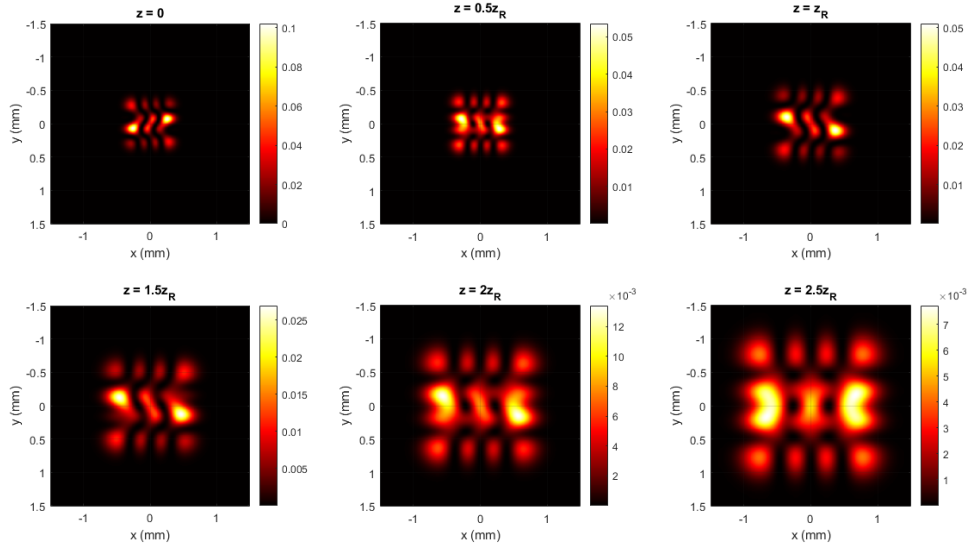
**Figura 3.7:** Distribuição de intensidade de  $\frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{11} + HG_{02})$  para  $z = 0, 0.5z_R, z_R, 1.5z_R, 2z_R$  e  $2.5z_R$ .



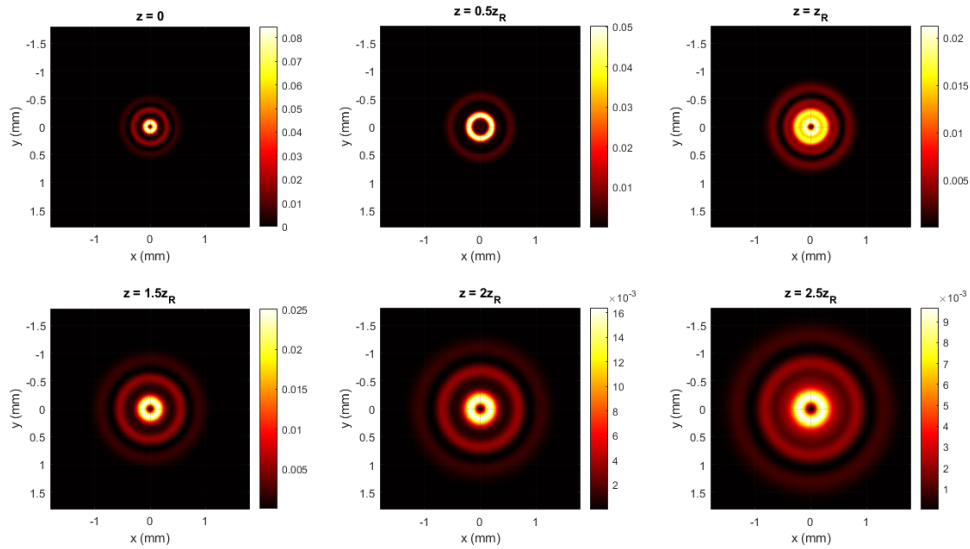
**Figura 3.8:** Distribuição de intensidade de  $\frac{1}{\sqrt{2}}(LG_{-21} + LG_{21})$  para  $z = 0, 0.5z_R, z_R, 1.5z_R, 2z_R$  e  $2.5z_R$ .

No caso em que a ordens dos modos envolvidos na superposição forem diferentes, então a evolução das fases de Gouy causará uma diferença de fase relativa entre os modos que varia com a distância de propagação, alterando o padrão de intensidade do campo.

As imagens abaixo mostram a propagação dos campos  $\frac{1}{\sqrt{2}}[HG_{33}(x, y; z) + HG_{20}(x, y; z)]$  e  $\frac{1}{\sqrt{2}}[LG_{13}(x, y; z) + LG_{10}(x, y; z)]$ .

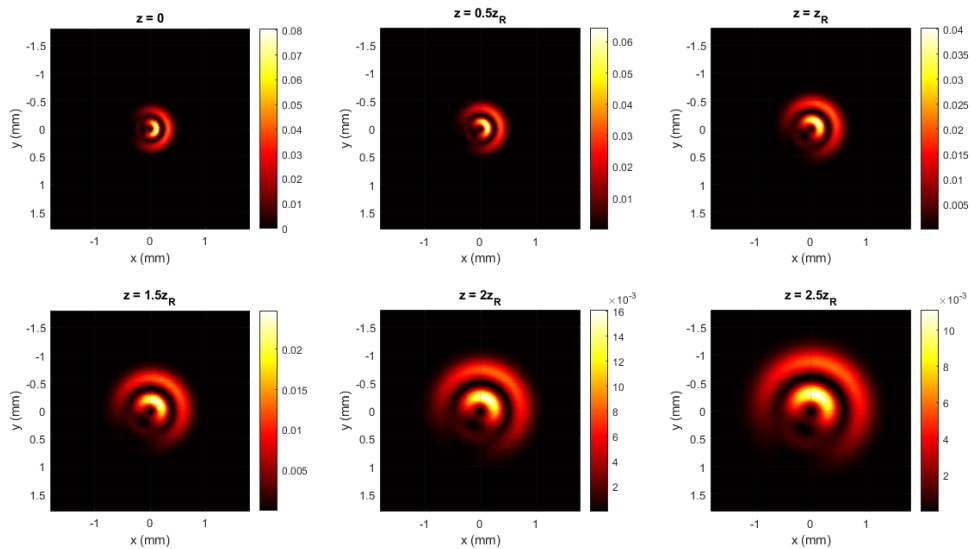


**Figura 3.9:** Distribuição de intensidade de  $\frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{33} + HG_{20})$  para  $z = 0, 0.5z_R, z_R, 1.5z_R, 2z_R$  e  $2.5z_R$ .



**Figura 3.10:** Distribuição de intensidade de  $\frac{1}{\sqrt{2}}(LG_{13} + LG_{10})$  para  $z = 0, 0.5z_R, z_R, 1.5z_R, 2z_R$  e  $2.5z_R$ .

Uma superposição de modos de Laguerre-Gauss com diferentes valores de  $l$  não tem simetria azimutal em sua distribuição de intensidade. Se os feixes da superposição forem de ordens diferentes, então sua distribuição de intensidade manterá um padrão que gira em torno do eixo  $z$  [3]. As imagens a seguir mostram a propagação do campo  $\frac{1}{\sqrt{2}}[LG_{21}(x, y; z) + LG_{11}(x, y; z)]$ .



**Figura 3.11:** Distribuição de intensidade de  $\frac{1}{\sqrt{2}}(LG_{21} + LG_{11})$  para  $z = 0, 0.5z_R, z_R, 1.5z_R, 2z_R$  e  $2.5z_R$ .

### 3.2.1 Autoimagens com Superposições de Modos Gaussianos

Em 1836, H.F. Talbot observou que, quando uma onda plana incide em uma estrutura periódica, a distribuição de intensidade do feixe propagado repete a imagem da estrutura para certas distâncias, gerando o que hoje chamamos de Imagens de Talbot ou **autoimagens** [33] [12]. Uma discussão sobre aplicações de feixes com autoimagens pode ser encontrada na referência [29].

Uma outra forma de se obter feixes com autoimagens é por meio de uma combinação linear de modos Gaussianos de ordens diferentes. Se existir uma distância de propagação para a qual a diferença das fases de Gouy dos feixes de HG ou LG de uma superposição é múltipla de  $2\pi$ , então a fase de Gouy será simplesmente uma fase global a essa distância e o feixe terá a mesma distribuição de intensidade que em  $z = 0$  a menos de um fator de escala [5]. Utilizaremos, também, o termo *revival* para nos referir a esse fenômeno. Para uma combinação linear de dois modos de Hermite-Gauss ou Laguerre-Gauss de ordens diferentes, buscamos uma solução em  $z$  para a equação:

$$\psi_{N_2}(z) - \psi_{N_1}(z) = 2n\pi, \quad (3.17)$$

onde  $N_2$  é a maior ordem entre os modos,  $N_1$  a menor e  $n$  um número natural. Seja

$\Delta N = N_2 - N_1$ , a equação para  $z$  é, simplesmente,

$$\arctan \frac{z_G}{z_R} = \frac{2\pi n}{\Delta N}. \quad (3.18)$$

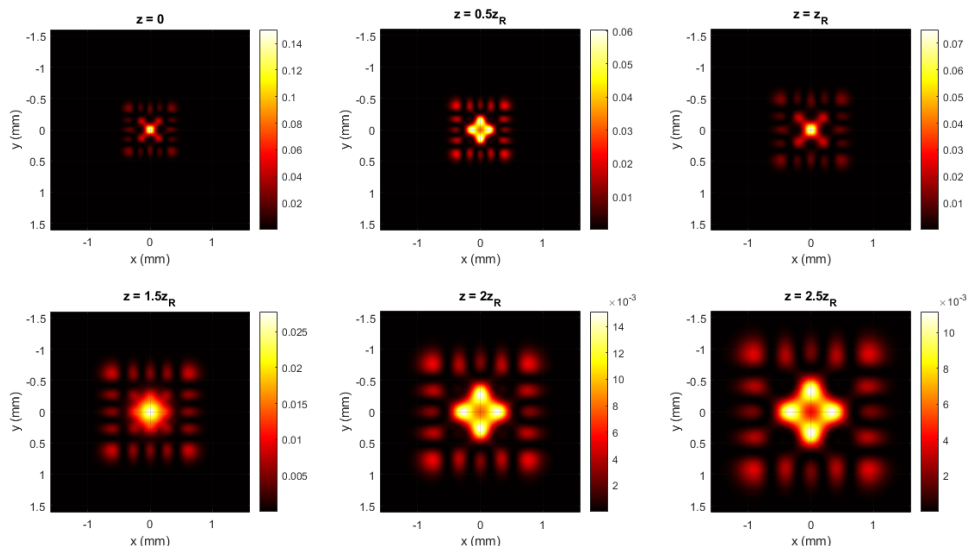
Como  $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$ , não é sempre possível encontrar uma distância de propagação para a qual o feixe repita o padrão inicial. Mais especificamente, para que a equação (3.18) tenha ao menos uma solução não trivial, devemos ter  $\Delta N \geq 4$ . O caso em que  $\frac{\Delta N}{n} = 4$  equivale à aparição de um *revival* para uma distância de propagação infinita. Isolando  $z_G$  na equação acima, temos:

$$z_G = z_R \tan \frac{2\pi n}{\Delta N}, \quad (3.19)$$

válida apenas para  $\frac{\Delta N}{n} \geq 4$ . Um campo descrito pela superposição  $\frac{1}{\sqrt{2}}[HG_{00}(x, y; z) + HG_{44}(x, y; z)]$  tem  $\Delta N = 8$ . Sua primeira autoimagem deve aparecer à distância:

$$z_G = z_R \tan \frac{\pi}{4} = z_R, \quad (3.20)$$

enquanto a segunda deve aparecer quando  $z \rightarrow \infty$ . As imagens abaixo mostram a propagação desse campo.



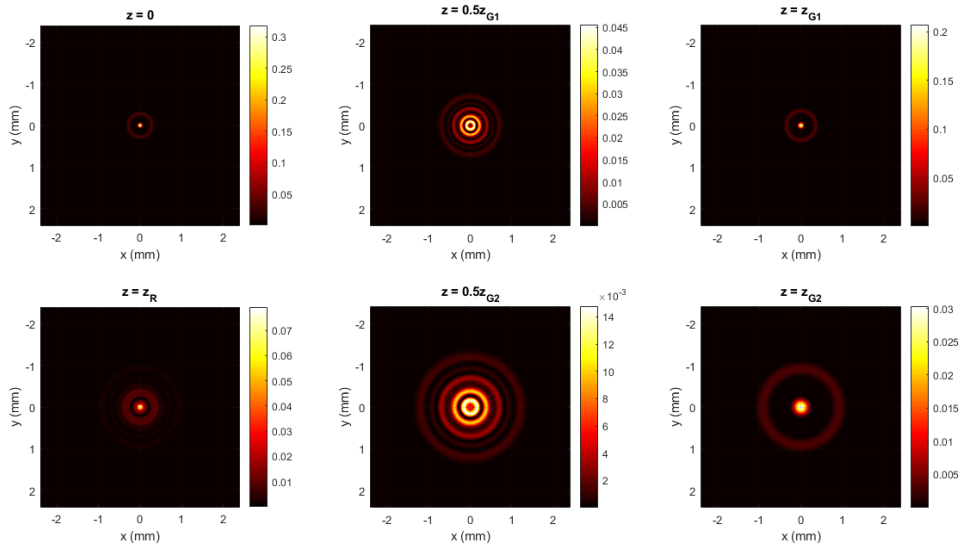
**Figura 3.12:** Intensidade de  $\frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{00} + HG_{44})$  para  $z = 0, 0.5z_R, z_R, 1.5z_R, 2z_R$  e  $2.5z_R$ .

Já o campo  $\frac{1}{\sqrt{2}}[LG_{01}(\rho, \phi; z) + LG_{06}(\rho, \phi; z)]$  tem  $\Delta N = 10$ . Seus dois *revivals*

devem ocorrer às distâncias:

$$z_{Gj} = z_R \tan \frac{2\pi j}{10}, \quad (3.21)$$

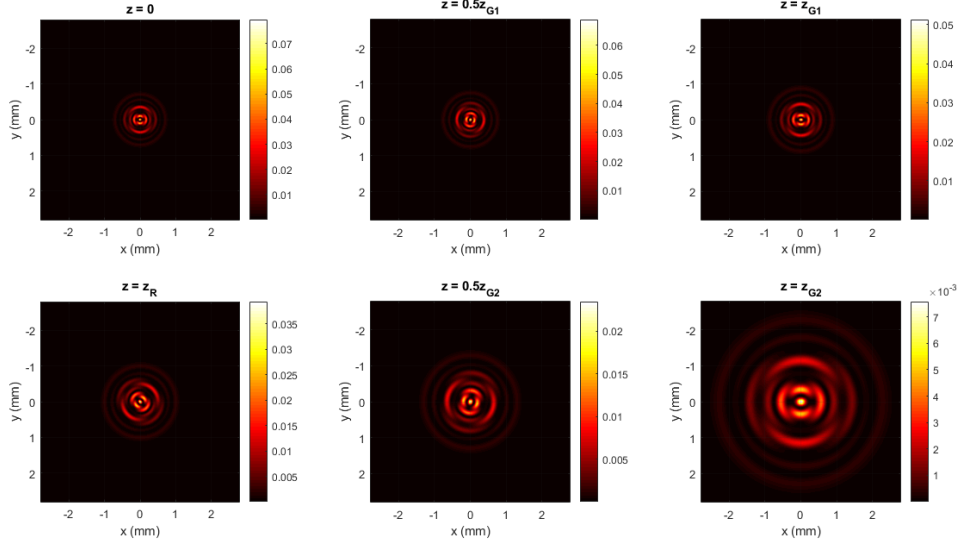
onde  $j = 1, 2$ . As imagens abaixo mostra a distribuição de intensidade desse feixe em certas distâncias de propagação:



**Figura 3.13:** Distribuição de intensidade de  $\frac{1}{\sqrt{2}}(LG_{01} + LG_{06})$  para  $z = 0, 0.5z_{G1}, z_{G1}, z_R, 0.5z_{G2}$  e  $z_{G2}$ .

Como mencionado anteriormente, a intensidade de uma superposição de feixes de Laguerre-Gauss com índices  $l$  diferentes mantém um padrão giratório em torno do eixo  $z$ . Nesse caso, em um *revival*, a distribuição de intensidade simplesmente volta à posição original. A imagem abaixo mostra a propagação do campo  $\frac{1}{\sqrt{2}}[LG_{07}(\rho, \phi; z) + LG_{21}(\rho, \phi; z)]$ , que, assim como o do exemplo anterior, tem  $\Delta N = 10$ .





**Figura 3.14:** Distribuição de intensidade de  $\frac{1}{\sqrt{2}}(LG_{07} + LG_{21})$  para  $z = 0, 0.5z_{G1}, z_{G1}, z_R, 0.5z_{G2}$  e  $z_{G2}$ .

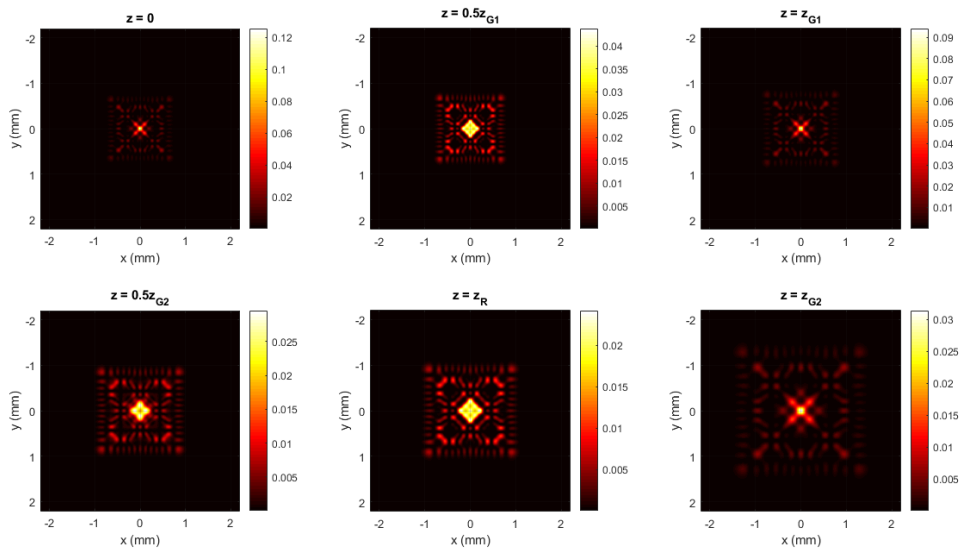
Para uma superposição envolvendo mais de dois Modos Gaussianos de ordens diferentes, então devemos encontrar uma distância de propagação que solucione a equação (3.18) para todos os pares de modos de ordens consecutivas com coeficientes não-nulos. Ou seja, teremos solucionar um sistema formado por equações do tipo:

$$\arctan \frac{z_G}{z_R} = \frac{2\pi n_j}{\Delta N_j}, \quad (3.22)$$

onde  $n_j$  é um número natural e  $\Delta N_j = N_{j+1} - N_j$ , para cada par de ordens consecutivas ( $N_2 - N_1, N_3 - N_2, \dots, N_{i+1} - N_i, \dots$ ) que estejam presentes na superposição. Evidentemente, esse sistema não terá uma solução não trivial se, para qualquer par,  $\Delta N_j < 4$ . O primeiro *revival* acontecerá para uma distância de propagação que satisfaça:

$$\arctan \frac{z_G}{z_R} = \frac{2\pi}{M}, \quad (3.23)$$

onde é o máximo divisor comum entre as diferenças de ordem consecutivas ( $M = mdc(N_2 - N_1, \dots, N_{i+1} - N_i, \dots)$ ). Nesse caso, só haverá uma autoimagem se  $M \geq 4$ . Para encontrar os *revivals* seguintes, basta substituir  $M$  na equação anterior pelos outros divisores comuns das diferenças de ordens consecutivas, desde que eles não sejam menores que 4. A imagem abaixo ilustra o exemplo do campo  $\frac{1}{\sqrt{3}}[HG_{00}(x, y; z) + HG_{66}(x, y; z) + HG_{12,12}(x, y; z)]$ , para o qual  $M = 12$ . Seu primeiro *revival* ocorre em  $\arctan \frac{z_{G1}}{z_R} = \frac{\pi}{6}$ , o segundo em  $\arctan \frac{z_{G2}}{z_R} = \frac{\pi}{3}$  e o último ocorre a uma distância de propagação infinita.



**Figura 3.15:** Intensidade de  $\frac{1}{\sqrt{3}}(HG_{00} + HG_{66} + HG_{12,12})$  para  $z = 0, 0.5z_{G1}, z_{G1}, 0.5z_{G2}, z_R$  e  $z_{G2}$ .

### 3.2.2 Transformada de Fourier de Modos Gaussianos

Como indicado na subseção 2.2.1, podemos encontrar a distribuição de amplitude de um campo para uma grande distância de propagação a partir de sua transformada de Fourier em  $z = 0$ . Como sabemos a distribuição de amplitude dos Modos Gaussianos para qualquer distância de propagação, podemos usá-la para, a partir da equação (2.30), encontrar suas transformadas de Fourier. Um modo de Hermite-Gauss em  $z = 0$  é dado por:

$$HG(u, v; 0) = \frac{A_{mn}}{w_0} H_m \left( \frac{\sqrt{2}u}{w_0} \right) H_n \left( \frac{\sqrt{2}v}{w_0} \right) e^{-\frac{u^2+v^2}{w_0^2}}. \quad (3.24)$$

Para uma distância de propagação muito grande ( $z \gg z_R$ ), podemos fazer as aproximações:

$$\begin{aligned} \Psi_n(z) &\approx \frac{\pi}{2}(N+1), \\ R_0(z) &\approx z \text{ e} \\ w &\approx \frac{z}{z_R} w_0 = \frac{2z}{\kappa w_0}. \end{aligned}$$

Assim, o modo de Hermite-Gauss será:

$$HG_{mn}(x, y; z \gg z_R) \approx -\frac{i\kappa}{z} e^{i\kappa \frac{x^2+y^2}{2z}} \left[ \frac{A_{mn} w_0}{2} H_m \left( \sqrt{2} \frac{w_0}{z} \frac{\kappa x}{z} \right) H_n \left( \sqrt{2} \frac{w_0}{z} \frac{\kappa y}{z} \right) e^{-\frac{w_0^2}{4} \frac{(x^2+y^2)\kappa^2}{z^2}} e^{-i\frac{N\pi}{2}} \right]. \quad (3.25)$$

Comparando a equação anterior com (2.30), vemos que os termo entre colchetes equivale à transformada de Fourier de  $HG_{mn}(z=0)$  para  $k_x = \frac{\kappa x}{z}$  e  $k_y = \frac{\kappa y}{z}$ . Finalmente, comparando também a equação (3.25) com (3.24), temos:

$$\mathcal{F}\{HG_{mn}(z=0)\} = e^{-i\frac{N\pi}{2}} HG_{mn}(k_x, k_y; 0), \quad (3.26)$$

onde a cintura do modo de Hermite-Gauss à direita da igualdade é  $w_{0k} = \frac{2}{w_0}$ .

O cálculo para a transformada de Fourier de um modo de Laguerre-Gauss é análogo. Seja  $k_\rho = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  e  $k_\phi = \arctan \frac{k_y}{k_x}$ , temos:

$$\mathcal{F}\{LG_{lp}(z=0)\} = e^{-i\frac{N\pi}{2}} LG_{lp}(k_\rho, k_\phi; 0), \quad (3.27)$$

com, mais uma vez,  $w_{0k} = \frac{2}{w_0}$ .

Assim, a menos de uma fase constante, a distribuição de amplitude da transformada de Fourier de um Modo Gaussiano tem o mesmo padrão que o campo original. Por causa dessa fase constante, mas que depende da ordem, isso não necessariamente é verdade para uma combinação linear de Modos Gaussianos. Para uma combinação de modos da mesma ordem, essa fase será global e não fará diferença. Já se as ordens forem diferentes, ela só será uma fase global se a diferença de ordem for um múltiplo de 4. Neste caso, sabemos que há um *revival* do padrão de intensidade original na região de difração de Fraunhofer, corroborando com o fato mencionado na seção anterior de que, se  $\frac{\Delta N}{n} = 4$ , onde  $n$  é um número natural, então há uma autoimagem para  $z \rightarrow \infty$ .

# Capítulo 4

## Feixes Não-Difrativos ou com Autoimagens

### 4.1 Feixes de Bessel

Como discutido na seção 2.2, pode-se considerar que a difração de um campo é causada pela interferência entre suas componentes de onda plana. Se todas as componentes de onda plana de um campo têm o mesmo  $k_z$ , então todas evoluirão com a mesma fase ao longo da propagação e, portanto, a distribuição de intensidade do campo deve ser sempre a mesma para qualquer distância de propagação. Um feixe com essa característica é chamado de **não-difrativo** [4]. Suas possíveis aplicações envolvem áreas como micromanipulação óptica [1, 10, 24] e comunicação digital [18].

Consideremos a relação entre as componentes do vetor de onda:

$$k_\rho^2 = \kappa^2 - k_z^2 . \quad (4.1)$$

Dessa equação, podemos ver que, se um campo tem  $k_z$  constante, então  $k_\rho^2$  também deve ser constante. Assim, para que um campo seja não-difrativo, a equação acima deve se resumir à equação de um círculo.

$$k_\rho = R_k , \quad (4.2)$$

onde  $R_k$  é um número positivo. Uma forma de se fazer isso é com um campo cuja parte

radial do espectro angular seja dada por uma Delta de Dirac em torno de  $R_k$ :

$$V(k_\rho, k_\phi; 0) = \delta(k_\rho - R_k)\Theta(k_\phi) , \quad (4.3)$$

onde  $\Theta(k_\phi)$  é uma função qualquer da coordenada angular do vetor de onda ( $k_\phi$ ). Da equação (2.24), temos:

$$V(k_\rho, k_\phi; z) = \delta(k_\rho - R_k)\Theta(k_\phi)e^{-i\frac{R_k^2}{2\kappa}z} . \quad (4.4)$$

Ou seja, a transformada de Fourier do campo só se altera por uma fase constante em  $k_\rho$  e  $k_\phi$  ao longo de sua propagação. É simples ver que o mesmo ocorre com  $W(\rho, \phi; z)$  :

$$W(\rho, \phi; z) = \mathcal{F}^{-1}\left\{V(k_\rho, k_\phi; 0)e^{-i\frac{R_k^2}{2\kappa}z}\right\} = W(\rho, \phi; 0)e^{-i\frac{R_k^2}{2\kappa}z} . \quad (4.5)$$

Para encontrar a distribuição de amplitude desse campo não-difrativo, basta calcular a transformada de Fourier inversa de  $V(k_\rho, k_\phi; 0)$ . Começaremos calculando-a para o caso em que  $\Theta(k_\phi) = e^{-isk_\phi}$ , onde  $s$  é um número inteiro. Nesse caso:

$$V_s(k_\rho, k_\phi; 0) = \delta(k_\rho - R_k)e^{-isk_\phi} . \quad (4.6)$$

Em coordenadas polares, temos:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{V_s(k_\rho, k_\phi; 0)\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk_\rho k_\rho \delta(k_\rho - R_k) \left[ \int_0^{2\pi} dk_\phi e^{i\rho k_\rho \cos(k_\phi - \phi)} e^{-isk_\phi} \right] . \quad (4.7)$$

Fazendo uma substituição para a variável  $\theta = k_\phi - \phi + \frac{\pi}{2}$ , a integral entre colchetes se torna :

$$\int_0^{2\pi} dk_\phi e^{i\rho k_\rho \cos(k_\phi - \phi)} e^{-isk_\phi} = (-i)^s e^{-is\phi} \int_{-\phi - \frac{\pi}{2}}^{-\phi + \frac{3\pi}{2}} d\theta e^{i\rho k_\rho \sin\theta} e^{-is\theta} . \quad (4.8)$$

Para calcular a integral anterior, usamos a relação:

$$e^{ia \sin x} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} J_t(a) e^{itx} , \quad (4.9)$$

onde  $J_t(x)$  é a função de Bessel do primeiro tipo de ordem  $t$ . Assim, podemos escrever:

$$\int_0^{2\pi} dk_\phi e^{i\rho k_\rho \cos(k_\phi - \phi)} e^{-isk_\phi} = (-i)^s e^{-is\phi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} J_t(\rho k_\rho) \left[ \int_{-\phi - \frac{\pi}{2}}^{-\phi + \frac{3\pi}{2}} d\theta e^{-i(s-t)\theta} \right]. \quad (4.10)$$

Finalmente, como a integral entre colchetes tem como resultado  $2\pi\delta_{s,t}$ , temos:

$$\mathcal{F}^{-1}\{V_s(k_\rho, k_\phi; 0)\} = (-i)^s e^{-is\phi} \int_0^\infty dk_\rho k_\rho J_s(\rho k_\rho) \delta(k_\rho - R_k) = (-i)^s R_k J_s(R_k \rho) e^{-is\phi}. \quad (4.11)$$

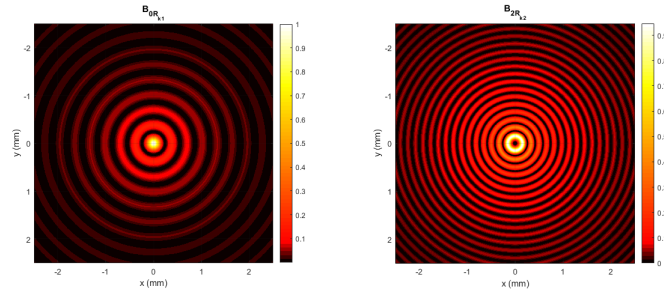
O resultado desse cálculo é a distribuição de amplitude de um feixe conhecido como **Feixe de Bessel** [7]. Em  $z = 0$ , definimos essa distribuição de amplitude para um feixe de Bessel de ordem  $s$  como:

$$B_s(\rho, \phi; 0) = R_k J_s(R_k \rho) e^{-is\phi}. \quad (4.12)$$

Sua transformada de Fourier, como mostrado, é:

$$\mathcal{F}\{B_s(\rho, \phi; 0)\} = i^s \delta(k_\rho - R_k) e^{-isk_\phi}. \quad (4.13)$$

As imagens abaixo mostram as distribuições de intensidade de  $B_0(\rho, \phi; 0)$  com  $R_{k_1} = 10\text{mm}^{-1}$  (à esquerda) e  $B_2(\rho, \phi; 0)$  com  $R_{k_2} = 20\text{mm}^{-1}$  (à direita):



**Figura 4.1:** Distribuição de intensidade de  $B_0$  (esquerda) e  $B_2$  (direita), onde  $R_{k_1} = 10\text{mm}^{-1}$  e  $R_{k_2} = 20\text{mm}^{-1}$ .

Para encontrar a transformada Inversa do caso geral da equação (4.3), basta descrevermos a função  $\Theta(k_\phi)$  em termos de sua Série de Fourier. Se seu período é  $2\pi$ , vale:

$$\Theta(k_\phi) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_s e^{-isk_\phi}, \quad (4.14)$$

onde  $c_s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Theta(k_\phi) e^{isk_\phi}$ . Assim, podemos escrever:

$$V(k_\rho, k_\phi; 0) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_s V_s(k_\rho, k_\phi; 0). \quad (4.15)$$

Finalmente, usando (4.11), podemos encontrar o campo:

$$\mathcal{F}^{-1}\{V(k_\rho, k_\phi; 0)\} = R_k \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_s (-i)^s J_s(R_k \rho) e^{-is\phi} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_s (-i)^s B_s(\rho, \phi; 0). \quad (4.16)$$

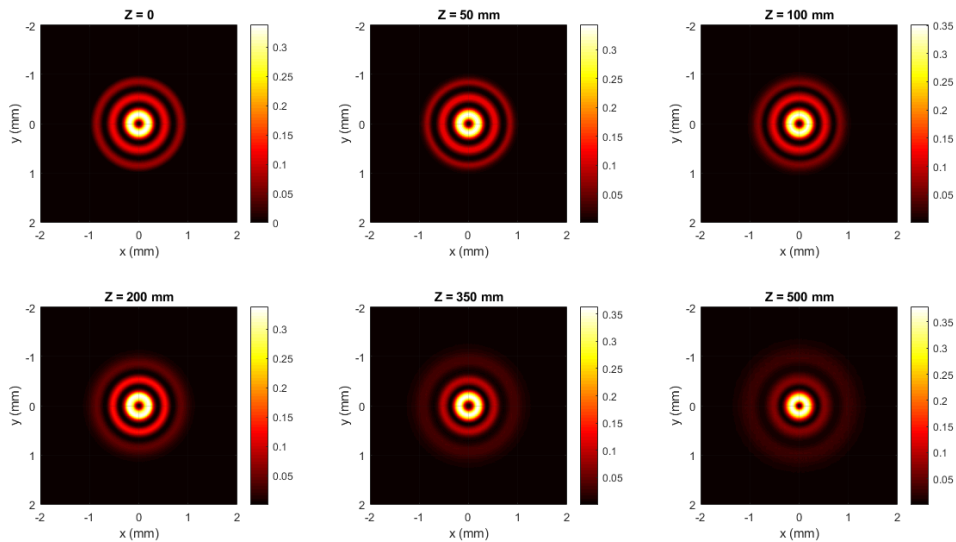
É importante notar que um Feixe de Bessel não é solução da equação paraxial (2.18), mas sim da equação de Helmholtz (2.12) [6]. Além disso, a função de Bessel não é de quadrado-integrável, o que significa que um campo com essa distribuição de amplitude não é normalizável. Mais que isso, sabe-se que a energia contida entre dois zeros consecutivos quaisquer é aproximadamente a mesma que no máximo central [6, 23]. Assim, seria necessária energia infinita para criar um Feixe de Bessel. Para contornar esse problema, pode-se truncar a distribuição de amplitude do campo em um raio máximo, obtendo-se assim um feixe aproximadamente não-difrativo, isto é, ele só pode ser considerado não-difrativo até uma certa distância de propagação. A equação abaixo descreve a distribuição de amplitude desse feixe.

$$Bt_s(\rho, \phi; 0) = \begin{cases} B_s(\rho, \phi; 0), & \text{se } \rho \leq R_{\max} \\ 0, & \text{se } \rho > 1. \end{cases} \quad (4.17)$$

A primeira criação experimental de um feixe de Bessel truncado ocorreu em 1986 [7]. O experimento consistiu em iluminar uma fenda circular fina posicionada no plano focal de uma lente. A fenda limita espacialmente o campo que passa por ela, fazendo com que ele tenha a forma de um anel fino. Esse campo, então, passa pela lente que, como mostrado na subseção 2.2.2, realiza sua transformada de Fourier inversa. O Feixe de Bessel resultante é limitado pela própria abertura da lente. Vale notar que, devido à largura finita da fenda, o feixe resultante não seria um Feixe de Bessel ideal mesmo sem a limitação imposta pela lente. Mais tarde, outros métodos foram encontrados para a geração experimental de feixes como esse [19, 34].

As imagens abaixo mostram a distribuição de intensidade de um campo descrito por  $Bt_1(\rho, \phi; z)$  com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$  truncado em um raio  $R_{\max} = 1\text{mm}$  para algumas

distâncias de propagação:



**Figura 4.2:** Distribuição de intensidade de  $Bt_1$  com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$  truncado em  $R_{\text{max}} = 1\text{mm}$  para  $z = 0, 50, 100, 200, 350$  e  $500$  mm.

Uma quantidade de interesse, para fins de comparação, é o que chamaremos de período da propagação: a distância para a qual a diferença de fase do feixe em relação a sua fase em  $z = 0$  é de  $2\pi$ , ou seja:

$$\frac{R_k^2}{2\kappa} z_T = 2\pi \rightarrow z_T = \frac{4\pi\kappa}{R_k^2}. \quad (4.18)$$

## 4.2 Autoimagens com Feixes de Bessel

Uma superposição de Feixes de Bessel com diferentes valores de  $R_k$  não é não-difrativa mas, para certas distâncias de propagação, sua distribuição de intensidade é a mesma que em  $z = 0$ , isto é, ela tem autoimagens. As autoimagens formadas por Feixes de Bessel são semelhantes às formadas pelos feixes Gaussianos, com a diferença de que neste caso não há uma mudança de escala.

Um feixe com autoimagens pode ser obtido por meio de uma superposição de Feixes de Bessel com diferentes valores de  $R_k$ . Ao longo da propagação, suas componentes de onda plana entram e saem de fase periodicamente. Quando a diferença de fase entre todas as componentes for múltipla de  $2\pi$ , então uma autoimagem é formada. Consideremos a combinação linear de dois feixes de Bessel, um com  $R_k = R_{k_1}$  e o outro,  $R_k = R_{k_2}$ :



$$W(\rho; 0) = B_{s_1}(\rho, \phi; 0) + B_{s_2}(\rho, \phi; 0) . \quad (4.19)$$

Da equação (4.5), vemos que sua distribuição de amplitude ao longo de sua propagação será:

$$W(\rho; z) = B_{s_1}(\rho, \phi; 0)e^{-i\frac{R_{k_1}^2}{2\kappa}z} + B_{s_2}(\rho, \phi; 0)e^{-i\frac{R_{k_2}^2}{2\kappa}z} . \quad (4.20)$$

Para  $R_{k_2} > R_{k_1}$ , as distâncias de aparições de autoimagens são as soluções da equação:

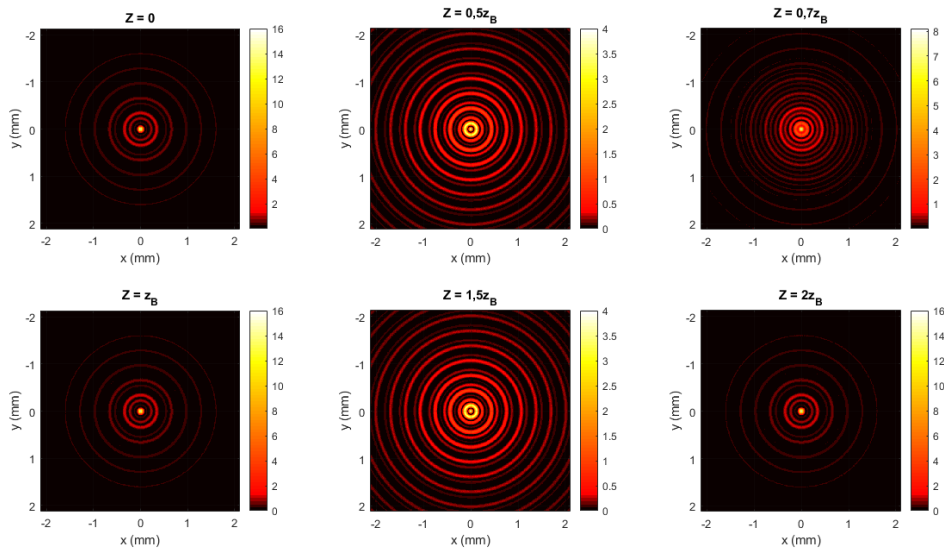
$$\frac{R_{k_2}^2 z}{2\kappa} - \frac{R_{k_1}^2 z}{2\kappa} = 2q\pi , \quad (4.21)$$

onde  $q$  é um número inteiro. A primeira distância de autoimagem ( $q = 1$ ) é dada por:

$$z_B = \frac{4\kappa\pi}{R_{k_2}^2 - R_{k_1}^2} . \quad (4.22)$$

Evidentemente, as outras autoimagens aparecerão em múltiplos inteiros dessa distância. Vale notar que a distância de propagação para a qual uma autoimagem é formada depende apenas dos raios  $R_{k_1}$  e  $R_{k_2}$  e, portanto, independente das ordens dos feixes de Bessel envolvidos. Para uma superposição de mais de dois feixes de Bessel, basta encontrar uma distância de propagação  $z$  que resolva a equação (4.21) simultaneamente para todos os pares de feixes de Bessel da superposição.

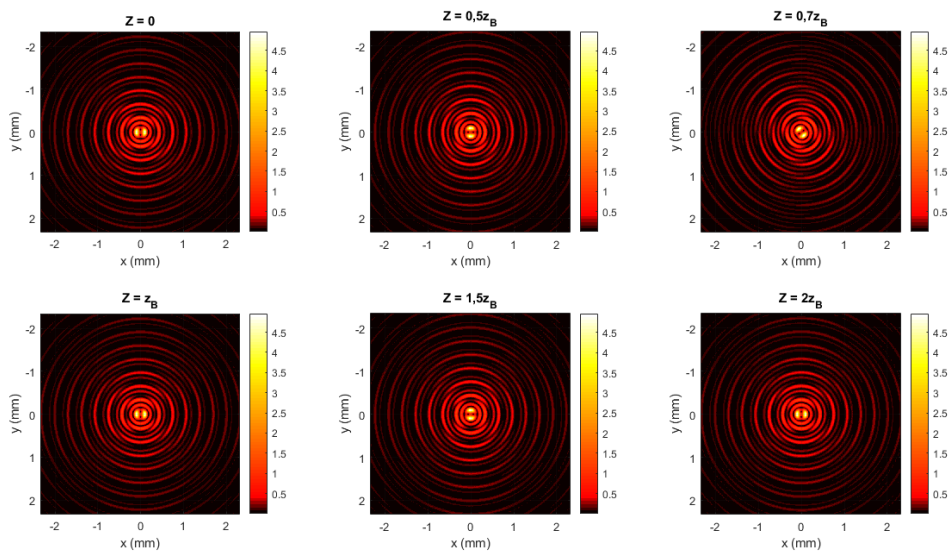
As imagens abaixo mostram a distribuição de intensidade da superposição de dois feixes de Bessel de ordem  $s = 0$ , um com  $R_{k_1} = 10\text{mm}^{-1}$  e outro, com  $R_{k_2} = 30\text{mm}^{-1}$ , para certas distância de propagação. Esse campo tem uma distância de autoimagem, eq. (4.22),  $z_B \approx 156,66\text{mm}$ .



**Figura 4.3:** Distribuição de intensidade de uma superposição de feixes de Bessel de ordem  $s = 0$ , com  $R_{k_1} = 10\text{mm}^{-1}$  e  $R_{k_2} = 30\text{mm}^{-1}$ , para  $z = z_B, 0,5z_B, 0,7z_B, z_B, 1,5z_B$  e  $2z_B$ .

Assim como no caso dos feixes de Laguerre-Gauss, uma superposição de feixes de Bessel com diferentes índices  $s$  não tem simetria azimutal. Se eles também têm valores de  $R_k$  distintos, então sua distribuição de intensidade gira em torno do eixo  $z$  ao longo de sua propagação, voltando à posição original em  $z = qz_B$ , onde  $q$  é um número inteiro.

As imagens abaixo mostram a propagação da superposição  $B_0(\rho, \phi; z) + B_2(\rho, \phi; z)$ , onde  $R_{k_1} = 10\text{mm}^{-1}$  e  $R_{k_2} = 30\text{mm}^{-1}$ , que deve ter autoimagens às distâncias múltiplas de  $z_B \approx 156,66\text{mm}$ .



**Figura 4.4:** Distribuição de intensidade de  $B_0 + B_2$ , onde  $R_{k_1} = 10\text{mm}^{-1}$  e  $R_{k_2} = 30\text{mm}^{-1}$  para  $z = z_B, 0,5z_B, 0,7z_B, z_B, 1,5z_B$  e  $2z_B$ .

A superposição de feixes aproximadamente não-difrativos também pode apresentar autoimagens, com a diferença de que, nesse caso, elas serão apenas semelhantes à distribuição de intensidade do campo na origem. Para que isso aconteça, a distância de aparecimento dessas autoimagens deve estar na região do espaço em que o feixe pode ser considerado aproximadamente não-difrativo.

### 4.3 Feixes de Bessel e de Laguerre-Gauss Com Condições Iniciais Semelhantes

Como feixes de Bessel reais não são perfeitamente não-difrativos, podemos compará-los com outros feixes que também podem ser considerados aproximadamente não-difrativos até uma certa distância de propagação. Uma comparação entre feixes de Bessel truncados e feixes de Laguerre-Gauss de ordem alta com distribuições iniciais semelhantes mostrou que ambos podem ser considerados aproximadamente não-difrativos em uma mesma região de propagação [25].

Sabe-se que os anéis de um modo de Laguerre-Gauss de ordem  $N$  alta estão confinados em um raio  $R_{\max} = w_0\sqrt{N+1}$  [30]. Os feixes de Bessel que serão utilizados para a comparação são limitados a esse mesmo raio. Além disso, para que as distribuições de amplitudes de  $LG_{lp}(\rho, \phi; 0)$  (3.14) e  $Bt_s(\rho, \phi; 0)$  (4.17) sejam semelhantes, devemos ter, para  $p$  grande:

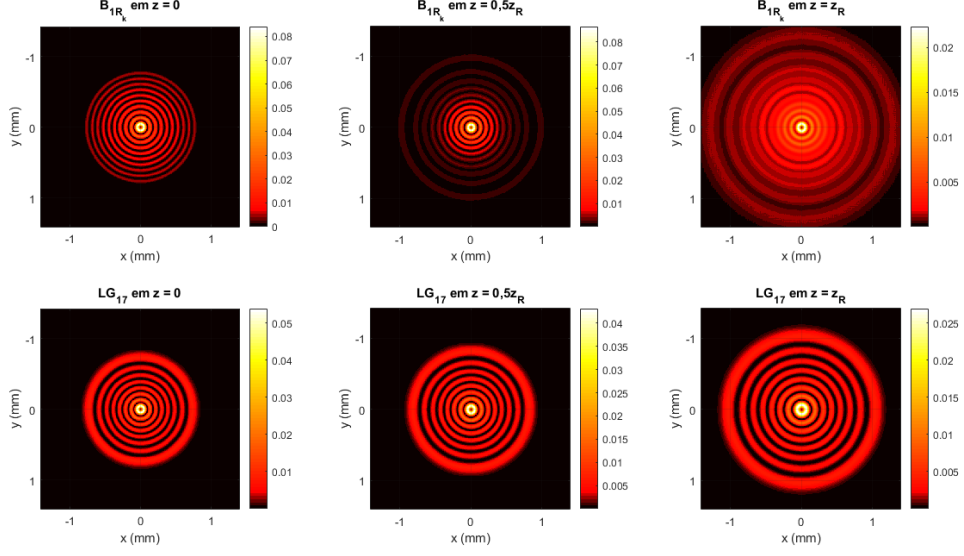
$$l = s , \quad (4.23)$$

$$R_k = \frac{2\sqrt{N+1}}{w_0} . \quad (4.24)$$

Os feixes, porém, não se assemelharão em toda a sua extensão. Por exemplo, considerando um modo de LG de índice radial  $p > 5$ , eles só serão semelhantes dentro de um disco de raio  $2w_0$ , que envolve aproximadamente  $\frac{p}{2}$  anéis.

Considerando o modo  $LG_{17}(\rho, \phi; 0)$  com  $w_0 = 0.2\text{mm}$ , este deve ser semelhante a  $Bt_1(\rho, \phi; 0)$ , onde  $R_k \approx 38,73\text{mm}^{-1}$  e  $R_{\max} \approx 0.78\text{mm}$ . As imagens abaixo mostram a distribuição de intensidade desse modo de Laguerre-Gauss (fileira inferior) e do feixe de Bessel correspondente (fileira superior) para certas distâncias de propagação. Para esses *plots*, usamos  $z_R = 199,47\text{mm}$  e normalizamos a distribuição de amplitude do feixe de

Bessel truncado.



**Figura 4.5:** Distribuição de intensidade de  $Bt_1$ , onde  $R_k \approx 38,73\text{mm}^{-1}$  e  $R_{\text{max}} \approx 0,78\text{mm}$  (fileira de superior) e de  $LG_{17}$  com  $w_0 = 0,2\text{mm}$  e  $z_R = 199,47\text{mm}$  (fileira inferior) para  $z = 0, 0,5z_R$  e  $z_R$ .

Uma questão que não foi discutida pelos autores do artigo é se uma superposição de feixes de Bessel semelhantes a feixes de Laguerre-Gauss têm autoimagens à mesma distância. Para encontrar a resposta, consideramos dois feixes de Laguerre-Gauss, de ordens  $N_1$  e  $N_2$ , e dois feixes de Bessel semelhantes a cada um dos modos de Laguerre-Gauss com transformadas de Fourier de raios  $R_{k_1}$  e  $R_{k_2}$ , respectivamente.

Da equação (3.18), sabemos que os *revivals* dos modos de Laguerre-Gauss aparecerão em distâncias de propagação dadas por:

$$z_G = \frac{\kappa w_0^2}{2} \tan\left(\frac{2n\pi}{N_2 - N_1}\right), \quad (4.25)$$

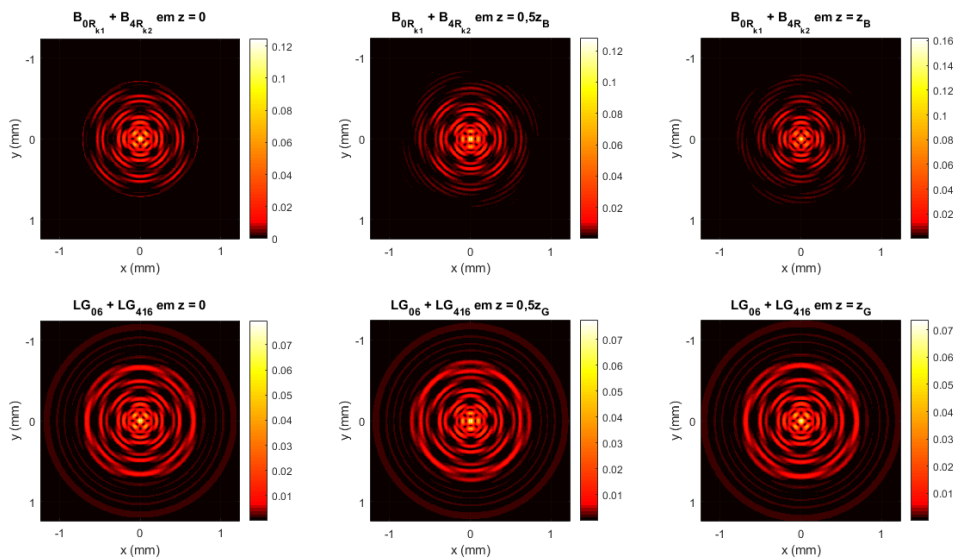
onde  $n$  é um número inteiro. Já para os feixes de Bessel, usando a equação (4.22) e a relação (4.23), temos:

$$z_B = \frac{n\pi\kappa w_0^2}{N_2 - N_1}. \quad (4.26)$$

Comparando ambas as equações acima, vemos que  $z_G \approx z_B$  somente se  $N_2 - N_1 \gg 2n\pi$ , já que, nesse caso, podemos usar a aproximação  $\tan\left(\frac{2n\pi}{N_2 - N_1}\right) \approx \frac{2n\pi}{N_2 - N_1}$ .

Por exemplo, a combinação linear  $\frac{1}{\sqrt{2}} [LG_{06}(\rho, \phi; 0) + LG_{4,16}(\rho, \phi; 0)]$  com  $w_0 = 0,2\text{mm}$  deve ser semelhante a  $\frac{1}{\sqrt{2}} [Bt_0(\rho, \phi; 0) + Bt_4(\rho, \phi; 0)]$ , com espectros angulares de raios  $R_{k_1} \approx 36,055\text{mm}^{-1}$  e  $R_{k_2} \approx 60,827\text{mm}^{-1}$ , respectivamente. As distribuições de

amplitude dos feixes de Bessel  $B_0$  e  $B_4$  devem estar limitadas aos raios  $R_{\max_1} \approx 0,721\text{mm}$  e  $R_{\max_2} \approx 1,216\text{mm}$ . Espera-se que a superposição de LG tenha uma autoimagem em  $z_G \approx 53,44\text{mm}$ , enquanto a de feixes de Bessel deve ter uma autoimagem em  $z_B \approx 52,22\text{mm}$ . As imagens abaixo mostram a distribuição de intensidade da superposição de feixes de Bessel (fileira superior) e de Laguerre-Gauss (fileira inferior) para certas distâncias e propagação. Mais uma vez, usamos  $z_R = 199,47\text{mm}$  e normalizamos as distribuições de amplitude dos feixes de Bessel truncados.



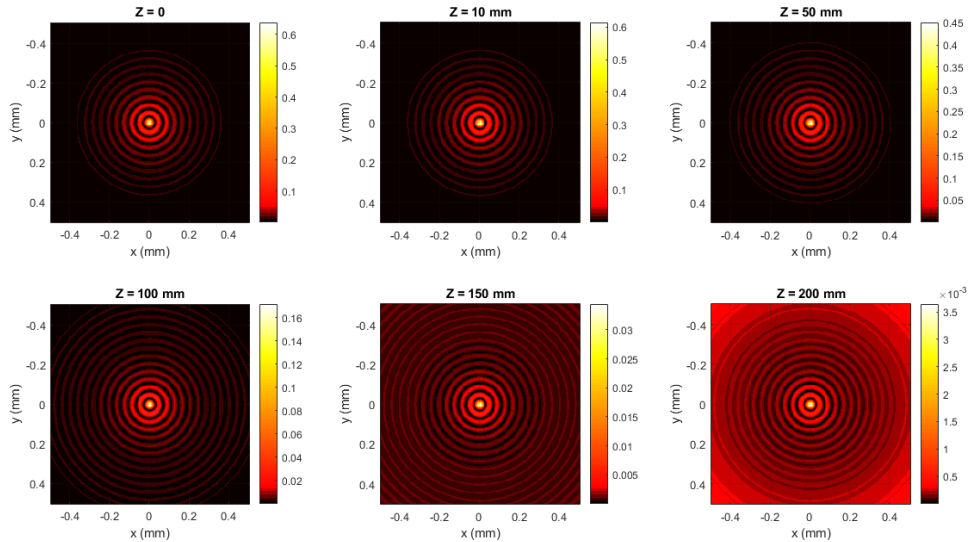
**Figura 4.6:** Fileira superior: distribuição de intensidade de  $\frac{1}{\sqrt{2}} [Bt_0 + Bt_4]$ , onde  $R_{k_1} \approx 36,055\text{mm}^{-1}$ ,  $R_{\max_1} \approx 0,721\text{mm}$ ,  $R_{k_2} \approx 60,827\text{mm}^{-1}$  e  $R_{\max_2} \approx 1,216\text{mm}$ , para as distâncias  $z = 0, 0.5z_B$  e  $z_B$ . Fileira inferior: distribuição de intensidade de  $\frac{1}{\sqrt{2}} [LG_{06} + LG_{4,16}]$  com  $w_0 = 0.2\text{mm}$  e  $z_R = 199,47\text{mm}$  para as distâncias  $z = 0, 0.5z_G$  e  $z_G$ .

## 4.4 Feixes de Bessel-Gauss

A truncagem de um feixe de Bessel descrita pela equação (4.17) não é a única forma de se obter um feixe aproximadamente não-difrativo realista. Uma outra forma conhecida é a modulação da distribuição de amplitude um feixe de Bessel por um perfil Gaussiano. Feixes como esses solucionam a equação paraxial e são conhecidos como **feixes de Bessel-Gauss** [15]. Sua distribuição de amplitude para  $z = 0$  é dada por

$$BG_s(\rho, \phi; 0) = C_{BG} J_s(R_k \rho) e^{-\frac{\rho^2}{w_{BG}^2}} e^{-is\phi}, \quad (4.27)$$

onde  $C_{BG}$  é uma constante de normalização,  $w_{BG}$  é a cintura do perfil Gaussiano,  $s$  é a ordem do feixe de Bessel e  $R_k$ , o raio do seu espectro angular. As imagens abaixo mostram a distribuição de intensidade de um feixes de Bessel-Gauss com  $w_{BG} = 1\text{mm}$ ,  $R_k = 80\text{mm}^{-1}$  e  $s = 0$  para certas distâncias de propagação.



**Figura 4.7:** Distribuição de intensidade de  $BG_0$  com  $w_{BG} = 1\text{mm}$  e  $R_k = 80\text{mm}^{-1}$  para  $z = 10, 50, 100, 150$  e  $200$  mm.

Calcular a transformada de Fourier desse campo pode nos ajudar a entender porque ele é aproximadamente não-difrativo. Para isso, basta seguirmos um processo análogo ao descrito no cálculo realizado entre as equações (4.7) e (4.11), o que nos dá:

$$\mathcal{F}\left\{BG_{s,R_k}(\rho, \phi; 0)\right\} = i^s C_{BG} e^{-isk_\phi} \int_0^\infty d\rho \rho e^{-\frac{\rho^2}{w_{BG}^2}} J_s(R_k \rho) J_s(k_\rho \rho). \quad (4.28)$$

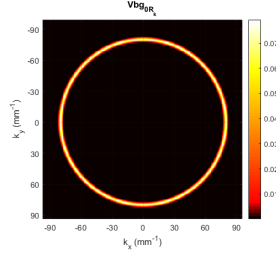
O resultado da integral acima pode ser encontrado na referência [16]. Finalmente, o espectro angular de um campo de Bessel-Gauss é dado por:

$$V_s(k_\rho, k_\phi; 0) = \frac{i^s w_{BG}^2 C_{BG}}{2} e^{-isk_\phi} e^{-\frac{w_{BG}^2 (k_\rho^2 + R_k^2)}{4}} I_s\left(\frac{w_{BG}^2 R_k k_\rho}{2}\right), \quad (4.29)$$

onde  $I_s(x)$  é a Função de Bessel modificada do primeiro tipo de ordem  $s$ , definida como:

$$I_s(x) = i^{-s} J_s(ix). \quad (4.30)$$

Assim, vemos que o espectro angular desse campo é uma Função de Bessel Modificada modulada por uma Gaussiana de cintura  $\frac{2}{w_{BG}}$ . A função  $V_s(k_\rho, k_\phi; 0)$  é um anel de raio próximo a  $R_k$  com uma largura que tende a 0 conforme a coordenada  $k_\rho$  se distancia do centro desse raio [35]. Evidentemente, quanto maior a cintura da Gaussiana  $w_{BG}$ , maior a distância de propagação na qual o feixe pode ser considerado não-difrativo. A imagem abaixo mostra a distribuição de intensidade de  $V_0(k_\rho, k_\phi; 0)$  com  $w_{BG} = 1\text{mm}$ ,  $R_k = 80\text{mm}^{-1}$ .



**Figura 4.8:** Distribuição de intensidade de  $V_0$  com  $w_{BG} = 1\text{mm}$  e  $R_k = 80\text{mm}^{-1}$ .

## 4.5 Feixes Semelhantes a Feixes de Bessel

Durante meu mestrado, estudamos uma outra forma possível de se obter um feixe aproximadamente não-difrativo semelhante a um feixe de Bessel. Consideremos um campo cujo espectro angular seja constante em uma pequena largura  $\Delta_k$  em torno do raio central  $R_k$  e valha 0 fora dela [4]. O espectro angular desse campo pode ser descrito como:

$$V_s(k_\rho, k_\phi; 0) = i^s \frac{\text{rect}(-\Delta_k/2, \Delta_k/2, k_\rho - R_k)}{\sqrt{2\pi R_k \Delta_k}} e^{-isk_\phi}, \quad (4.31)$$

onde  $\sqrt{2\pi R_k \Delta_k}$  é uma constante de normalização e, para  $a < b$ ,

$$\text{rect}(a, b, x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x > b \text{ ou } x < a \\ \frac{1}{2}, & \text{se } x = b \text{ ou } x = a \\ 1, & \text{se } a < x < b. \end{cases} \quad (4.32)$$

O cálculo da transformada de Fourier inversa de  $V_s(k_\rho, k_\phi; 0)$  é análogo ao realizado para um feixe de Bessel ideal e o resultado da integral angular será o mesmo. Assim, temos:

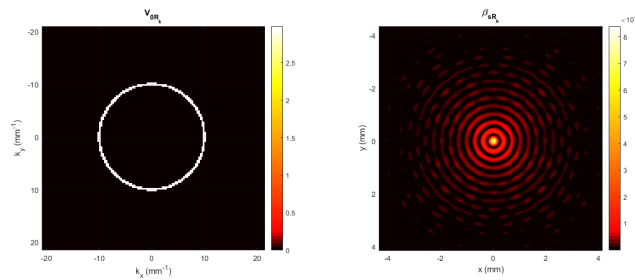
$$\mathcal{F}^{-1}\left\{V_s(k_\rho, k_\phi; 0)\right\} = \frac{e^{-is\phi}}{\sqrt{2\pi R_k \Delta_k}} \int_0^\infty dk_\rho k_\rho \text{rect}(-\Delta_k/2, \Delta_k/2, k_\rho - R_k) J_s(\rho k_\rho). \quad (4.33)$$

A função  $\text{rect}(-\Delta_k/2, \Delta_k/2, k_\rho - R_k)$  apenas alterará o limite de integração inferior de 0 para  $-\Delta_k/2 + R_k$  e o superior para  $\Delta_k/2 + R_k$ . Assim, a distribuição de amplitude desse campo em  $z = 0$  é:

$$\beta_s(\rho, \phi; 0) = \frac{e^{-is\phi}}{\sqrt{2\pi R_k \Delta_k}} \int_{-\Delta_k/2+R_k}^{\Delta_k/2+R_k} dk_\rho k_\rho J_s(\rho k_\rho) . \quad (4.34)$$

Evidentemente, esse feixe será mais semelhante a um feixe de Bessel quanto menor for a largura  $\Delta_k$ . Do Teorema de Rayleigh (A.5), vemos que, se a norma de  $V_s(k_\rho, k_\phi; 0)$  é 1, então essa também será a norma de  $\beta_s(\rho, \phi; 0)$ . Assim, a energia necessária para gerar um feixe com essa distribuição de amplitude é finita.

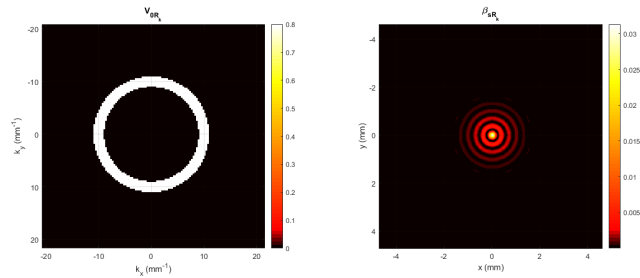
As imagens abaixo mostram a intensidade da transformada de Fourier (à esquerda) e a distribuição de intensidade (à direita) de um campo descrito por  $\beta_0(\rho, \phi; 0)$  com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$  e  $\Delta_k = 0,5\text{mm}^{-1}$ :



**Figura 4.9:** Distribuição de intensidade de  $V_0$  (à esquerda) e  $\beta_0$  (à direita), com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$  e  $\Delta_k = 0,5\text{mm}^{-1}$ .

Já as imagens a seguir mostram a distribuição de intensidade do espectro angular (à esquerda) e de um campo (à direita) descrito por  $\beta_s(\rho, \phi; 0)$  com  $s = 0$ ,  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$  e  $\Delta_k = 2\text{mm}^{-1}$ :





**Figura 4.10:** Distribuição de intensidade de  $V_0$  (à esquerda) e  $\beta_0$  (à direita), com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$  e  $\Delta_k = 2\text{mm}^{-1}$ .

Um feixe desse tipo pode ser gerado em laboratório seguindo um procedimento semelhante ao descrito na seção 4.1 para a criação de um Feixe de Bessel, com a diferença de que a fenda iluminada deve ter uma largura  $\Delta_k$  não desprezível. Nesse caso, o feixe não precisará ser limitado espacialmente pela abertura da lente, desde que a limitação imposta pela largura da fenda já seja suficiente para que o raio máximo em que o campo  $\beta_s(\rho, \phi; 0)$  é consideravelmente diferente de 0 seja menor que o raio da abertura da lente. A equação (4.31) será uma boa descrição do espectro angular desse campo, contanto que a distribuição de amplitude do feixe utilizado para iluminar a fenda varie pouco em torno do raio da fenda e que os efeitos de borda possam ser desprezados, o que já foi estabelecido pela aproximação escalar.

Consideraremos que o feixe é aproximadamente não-difrativo até uma distância para a qual a diferença de fase entre o círculo interno e o externo do anel, que chamaremos de  $\Delta\theta$  seja igual a  $\pi$ , o que equivale à interferência destrutiva entre essas duas frentes de onda planas. Ou seja, a distância a partir da qual o feixe deixa de ser não difrativo é a solução da equação:

$$\Delta\theta = \frac{(R_k + \frac{\Delta_k}{2})^2}{2\kappa} z - \frac{(R_k - \frac{\Delta_k}{2})^2}{2\kappa} z = \pi, \quad (4.35)$$

A **distância de não-difração** é dada por:

$$z_{ND} = \frac{\kappa\pi}{R_k\Delta_k}. \quad (4.36)$$

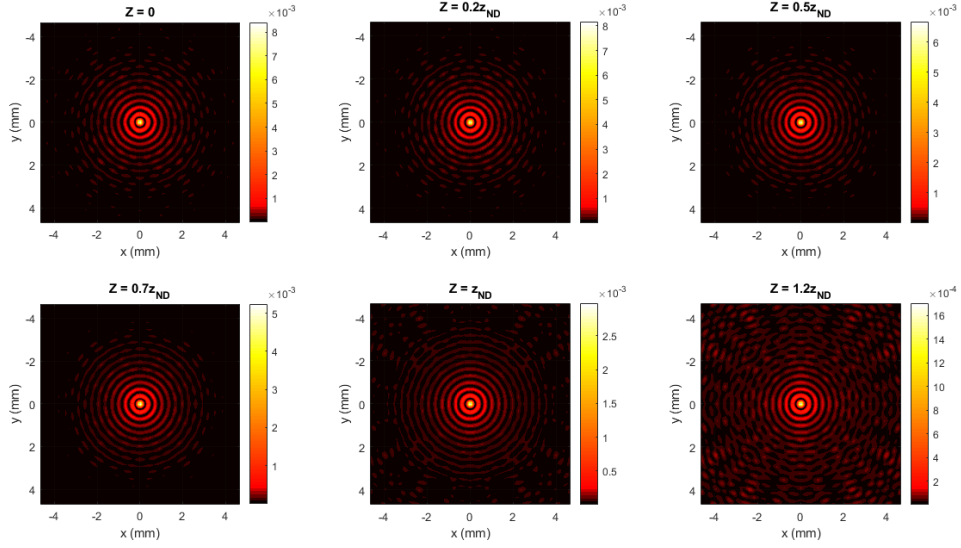
Como poderíamos esperar, aumentar a largura  $\Delta_k$  implica em uma diminuição de  $z_{ND}$ . Além de conhecermos a distância de não-difração, é interessante saber quantos períodos

$z_T$  há nela:

$$\frac{z_{ND}}{z_T} = \frac{R_k}{4\Delta_k}. \quad (4.37)$$

A equação anterior nos mostra que aumentar o raio  $R_k$ , apesar de diminuir a distância até a qual consideramos o feixe aproximadamente não-difrativo, aumenta a quantidade de períodos  $z_T$  que há nela.

As imagens abaixo mostram a distribuição de intensidade de um campo descrito por  $\beta_0(\rho, \phi; z)$  com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$  e  $\Delta_k = 0.5\text{mm}^{-1}$  para certas distâncias de propagação. Para esse campo,  $z_{ND} \approx 6266\text{mm}$ .



**Figura 4.11:** Distribuição de intensidade de  $\beta_0$ , com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$  e  $\Delta_k = 0.5\text{mm}^{-1}$  para  $z = 0, 0, 2z_{ND}, 0, 5z_{ND}, 0, 7z_{ND}, z_{ND}$  e  $1, 2z_{ND}$ .

Também pode ser interessante saber como a diferença de fase  $\Delta\theta$  se altera quando fazemos pequenas variações na largura do anel. Para isso, aproximamos  $\Delta\theta(\Delta_k)$  por um polinômio de Taylor até primeira ordem.

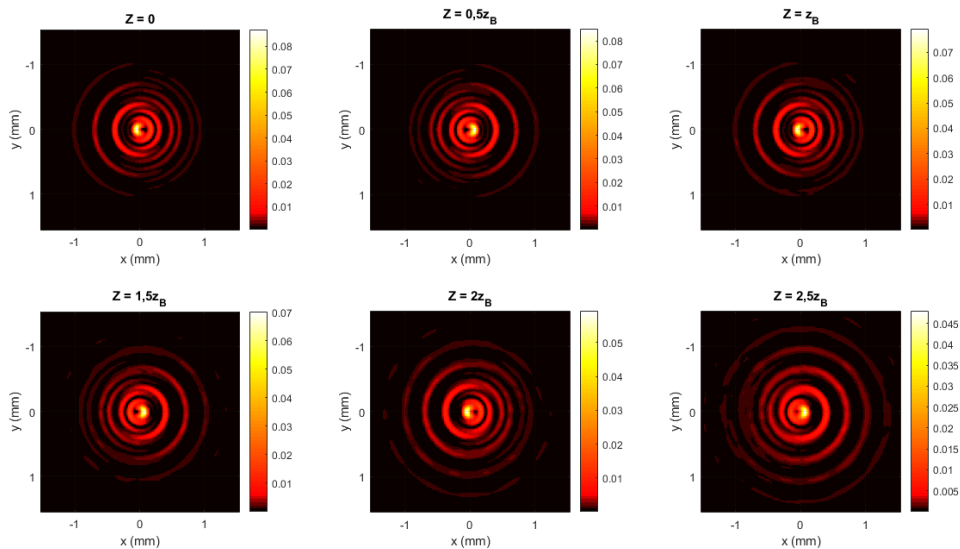
$$\Delta\theta(\Delta_k + \delta_k) = \frac{R_k z}{\kappa} \Delta_k + \frac{R_k z}{\kappa} \delta_k = \frac{R_k z}{\kappa} (\Delta_k + \delta_k). \quad (4.38)$$

O incremento à diferença de fase gerado pela variação na largura  $\delta_k$  é equivalente à diferença de fase para um anel de largura  $\delta_k$ .

Caso tenhamos uma combinação linear desses feixes aproximadamente não-difrativos, ela só terá autoimagens se a distância  $z_B$  em que elas deveriam se formar for menor que as distâncias de não-difração  $z_{ND}$  de todas as componentes da combinação linear. As

imagens abaixo mostram a distribuição de intensidade da superposição

$\frac{1}{\sqrt{2}} [\beta_0(\rho, \phi; z) + \beta_1(\rho, \phi; z)]$ , onde os raios dos espectros angulares dos campos da superposição são, respectivamente,  $R_{k_1} = 10\text{mm}^{-1}$  e  $R_{k_2} = 30\text{mm}^{-1}$  e  $\Delta_k = 3\text{mm}^{-1}$ . Nesse caso, a componente com a menor distância de não-difração tem  $z_{ND} \approx 348,134\text{mm}$ , enquanto a distância de formação de autoimagens, calculada pela equação (4.22), é  $z_B \approx 156,660\text{mm}$ .



**Figura 4.12:** Distribuição de intensidade de  $\beta_0 + \beta_1$ , com  $R_{k_1} = 10\text{mm}^{-1}$ ,  $R_{k_2} = 30\text{mm}^{-1}$  e  $\Delta_k = 3\text{mm}^{-1}$  para  $z = 0, 0,5z_B, z_B, 1,5z_B, 2z_B$  e  $2,5z_B$ .

## 4.6 Descrevendo Feixes Semelhantes aos de Bessel em Termos dos Modos de Laguerre-Gauss

Como mencionado na seção 3.1, um campo paraxial qualquer pode ser descrito como uma superposição dos modos de Laguerre ou de Hermite-Gauss. Isso nos dá uma nova possibilidade para a obtenção de um campo aproximadamente não-difrativo: uma combinação linear de modos Gaussianos com coeficientes calculados pelo processo que será descrito a seguir. No caso, escolhemos usar os modos de Laguerre-Gauss por eles serem, assim como os de Bessel, separáveis em coordenadas polares.

A distribuição de amplitude de um feixe semelhante a um feixe de Bessel definido pela equação (4.34) pode ser expandida em termos de suas componentes de Laguerre-Gauss:

$$\beta_s(\rho, \phi; 0) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} A_{lp} LG_{lp}(\rho, \phi; 0) , \quad (4.39)$$

onde os coeficientes  $A_{lp}$  são dados pelo produto interno entre  $\beta_s(\rho, \phi; 0)$  e os modos de Laguerre-Gauss de índices  $l$  e  $p$ :

$$A_{lp} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \rho d\rho \beta_s(\rho, \phi; 0) LG_{lp}^*(\rho, \phi; 0) , \quad (4.40)$$

onde o asterisco (\*) representa a operação de conjugação complexa. Como as transformadas de Fourier dos feixes semelhantes aos de Bessel têm formas mais simples do que esses campos no espaço de posição, faremos os cálculos no espaço dos vetores de onda. Para os espectros angulares, como a transformada de Fourier de um modo de Laguerre-Gauss é dada por (3.27), temos:

$$V_s(k_\rho, k_\phi; 0) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} A_{lp} e^{-i\frac{N\pi}{2}} LG_{lp}(k_\rho, k_\phi; 0) , \quad (4.41)$$

onde, mais uma vez,  $N = 2p + |l|$  é a ordem do modo LG e sua largura é  $w_{0k} = \frac{2}{w_0}$ , onde  $w_0$  é a cintura do modo no espaço das posições. Como  $LG_{lp}^*(k_\rho, k_\phi; 0) = LG_{lp}(k_\rho, 0; 0) e^{ilk_\phi}$  e o espectro angular do campo que queremos descrever na base dos modos de Laguerre-Gauss é dado por (4.31), os coeficientes são:

$$A_{lp} = \frac{i^s e^{-i\frac{N\pi}{2}}}{\sqrt{2\pi R_k \Delta_k}} \int_0^{2\pi} dk_\phi e^{-i(s-l)k_\phi} \int_0^{\infty} dk_\rho k_\rho \text{rect}(-\Delta_k/2, \Delta_k/2, k_\rho - R_k) LG_{lp}^*(k_\rho, k_\phi; 0) . \quad (4.42)$$

O resultado da integral da parte angular é simplesmente  $2\pi\delta_{s,l}$ . Assim, o único termo do somatório em  $l$  que terá contribuição não nula será o que tem  $l = s$ .

$$\beta_s(\rho, \phi; 0) = \sum_{p=0}^{\infty} A_{sp} LG_{sp}(\rho, \phi; 0) , \quad (4.43)$$

onde

$$A_{sp} = i^s \sqrt{\frac{2\pi}{R_k \Delta_k}} e^{-i\frac{N\pi}{2}} \int_{-\Delta_k/2+R_k}^{\Delta_k/2+R_k} dk_\rho k_\rho LG_{sp}(k_\rho, 0; 0) . \quad (4.44)$$

Como os campos  $\beta_s(\rho, \phi; 0)$  estão normalizados, podemos usar (4.43) para encontrar a seguinte relação para os coeficientes da soma:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty |\beta_s(\rho, \phi; 0)|^2 \rho \, d\rho d\phi = \sum_{p=0}^{\infty} |A_{sp}|^2 = 1. \quad (4.45)$$

Os modos de Laguerre-Gauss de índices  $p$  mais altos são mais difíceis de se obter, mesmo numericamente, visto que oscilam muito rápido e precisam de uma resolução muito alta para que todos os seus anéis sejam distinguíveis. Evidentemente, não é possível realizar o somatório da equação (4.43) com todos os seus infinitos termos. É necessário truncá-lo em um índice  $p$  que chamaremos de  $p_{\max}$  e o campo resultante terá uma distribuição de amplitude que será apenas uma versão aproximada de  $\beta_s(\rho, \phi; 0)$ , que chamaremos de  $\Psi_s(\rho, \phi; 0)$ :

$$\Psi_s(\rho, \phi; 0) = \sum_{p=0}^{p_{\max}} A_{sp} LG_{sp}(\rho, \phi; 0). \quad (4.46)$$

A transformada de Fourier desse campo é dada por:

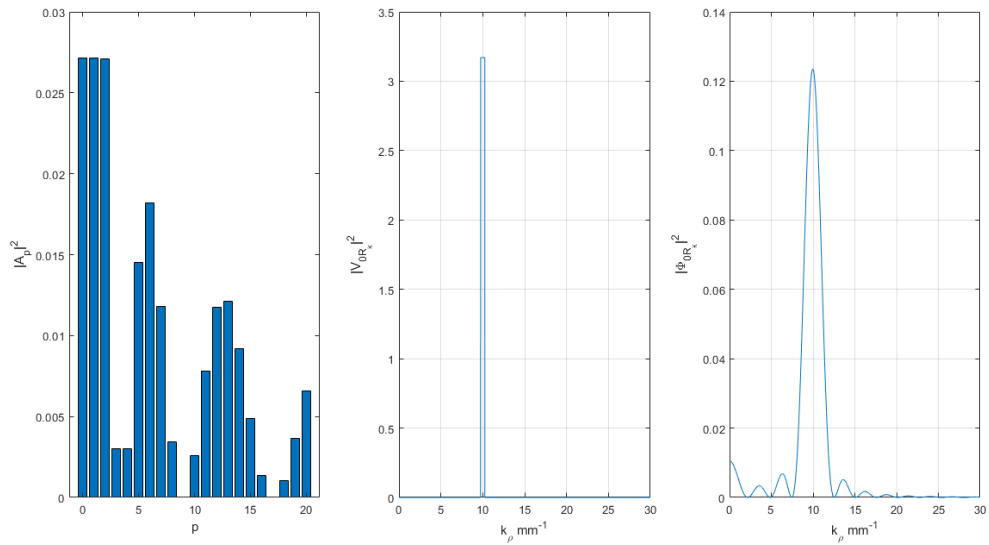
$$\mathcal{F}\{\Psi_s(\rho, \phi; 0)\} = \Phi_s(k_\rho, k_\phi; 0) = \sum_{p=0}^{p_{\max}} A_{sp} e^{-i\frac{N\pi}{2}} LG_{sp}(k_\rho, k_\phi; 0). \quad (4.47)$$

Uma boa medida do quão semelhantes são  $\Psi_s(\rho, \phi; 0)$  e  $\beta_s(\rho, \phi; 0)$  é o somatório:

$$S = \sum_{p=0}^{p_{\max}} |A_{sp}|^2. \quad (4.48)$$

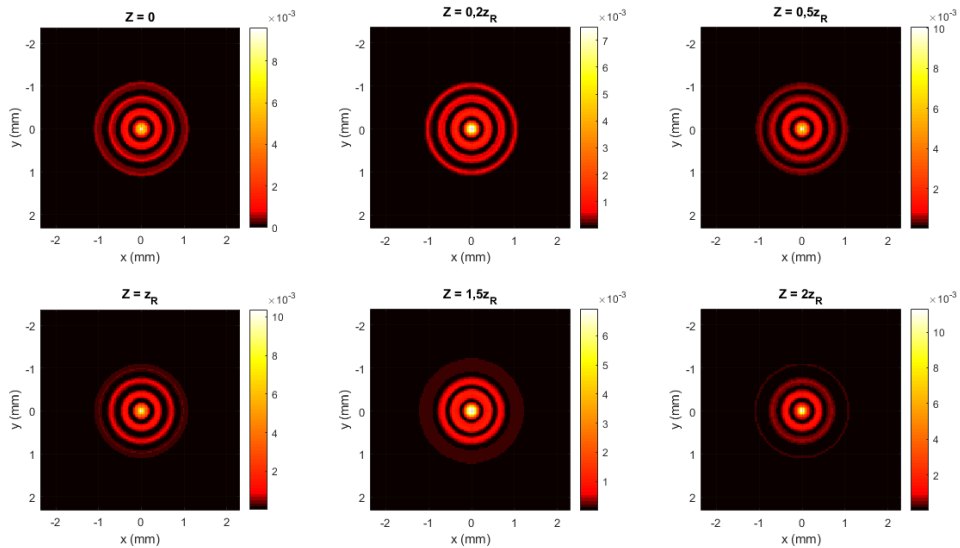
Quanto mais próximo  $S$  for de 1, mais semelhantes são a superposição obtida e o campo original.

Como primeiro exemplo, usamos um campo original  $\beta_0(\rho, \phi; 0)$  com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$  e  $\Delta_k = 0,5\text{mm}^{-1}$ , ou seja, um campo com a distribuição de intensidade e transformada de Fourier mostradas na figura 4.9. Usamos modos de LG com  $w_0 = 0,2\text{mm}$ , de forma que  $w_{0k} = R_k$ , e distância de Rayleigh  $z_R = 199,47\text{mm}$ . Como argumentado anteriormente, somente os modos com índice azimutal  $l = 0$  terão contribuição não nula. Com  $p_{\max} = 20$ , obtivemos  $S = 0,1963$ . As imagens abaixo mostram os gráficos de  $|A_p|^2 \times p$  (à esquerda),  $|V_0(k_\rho)|^2 \times k_\rho$  (no centro) e  $|\Phi_0(k_\rho)|^2 \times k_\rho$  (à direita), todos com  $z = 0$ .



**Figura 4.13:** Gráficos de  $|A_p|^2 \times p$  (à esquerda),  $|V_0(k_\rho)|^2 \times k_\rho$  (no centro) e  $|\Phi_0(k_\rho)|^2 \times k_\rho$  (à direita), com  $z = 0$ ,  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 0,5\text{mm}^{-1}$  e  $w_0 = 0,2\text{mm}$ .

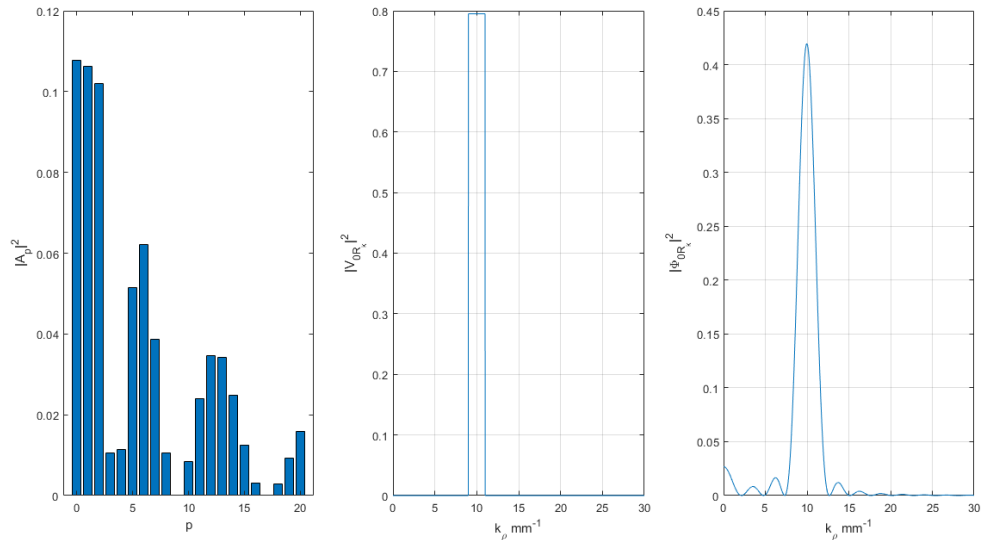
Já as imagens a seguir mostram a distribuição de intensidade de  $\Psi_s(\rho, \phi; z)$  para certas distâncias de propagação. Mesmo com um valor relativamente baixo de  $S$ , já é possível observar um comportamento aproximadamente não-difrativo até uma distância da ordem de  $z_R$ .



**Figura 4.14:** Distribuição de intensidade de  $\Psi_s(\rho, \phi; z)$  com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 0,5\text{mm}^{-1}$  e  $w_0 = 0,2\text{mm}$ , para  $z = 0, 0,2z_R, 0,5z_R, z_R, 1,5z_R$  e  $2z_R$ .

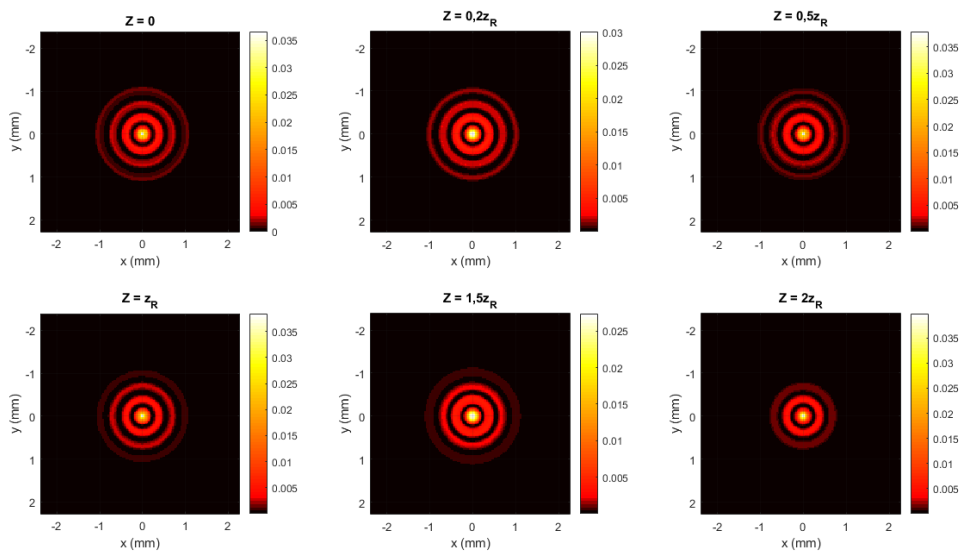
Cono segundo exemplo, modificamos a largura do campo original. Dessa vez, usamos  $\Delta_k = 2\text{mm}^{-1}$ , ou seja, um campo com a distribuição de intensidade e a transformada

de Fourier mostradas na figura 4.10. Nesse caso, obtivemos  $S = 0,6708$ . As próximas imagens mostram os gráficos de  $|A_p|^2 \times p$  (à esquerda),  $|V_0(k_\rho)|^2 \times k_\rho$  (no centro) e  $|\Phi_0(k_\rho)|^2 \times k_\rho$  (à direita), todos com  $z = 0$ .



**Figura 4.15:** Gráficos de  $|A_p|^2 \times p$  (à esquerda),  $|V_0(k_\rho)|^2 \times k_\rho$  (no centro) e  $|\Phi_0(k_\rho)|^2 \times k_\rho$  (à direita), com  $z = 0$ ,  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 2\text{mm}^{-1}$  e  $w_0 = 0.2\text{mm}$ .

As imagens abaixo mostram a distribuição de intensidade de  $\Psi_s(\rho, \phi; z)$  para certas distâncias de propagação.



**Figura 4.16:** Distribuição de intensidade de  $\Psi_0(\rho, \phi; z)$  com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 2\text{mm}^{-1}$  e  $w_0 = 0.2\text{mm}$ , para  $z = 0, 0,2z_R, 0,5z_R, z_R, 1,5z_R$  e  $2z_R$ .

Comparando os exemplos, vemos que ambos apresentam gráficos de de  $|\Phi_0(k_\rho)|^2 \times$

$k_\rho$  bem semelhantes, a principal diferença sendo um fator de escala. No segundo exemplo, a soma de modos de LG aparenta convergir mais rapidamente para o campo  $\beta_0(\rho, \phi; 0)$  desejado, o que é indicado pelo valor de  $S$  maior que o do primeiro exemplo. Ainda assim, os *plots* das distribuições de intensidade para dadas distâncias de propagação não necessariamente refletem essa diferença. Uma análise mais detalhada de como os parâmetros usados afetam a difração desses feixes será feita na seção 5.6.

Podemos usar esse mesmo procedimento para descrever uma combinação linear de feixes semelhantes aos de Bessel em termos dos modos de Laguerre-Gauss. Nesse caso, é esperado que a superposição de modos de Laguerre-Gauss resultante apresente autoimagens aproximadas, isto é, as distribuições de intensidade do campo devem ser semelhante à em  $z = 0$ , para as mesmas distâncias de propagação em que o campo original deve apresentar. Consideremos que o campo original possa ser descrito por  $\frac{1}{\sqrt{(2)}} [\beta_{s_1}(\rho, \phi; 0) + \beta_{s_2}(\rho, \phi; 0)]$ , onde os espectros angulares das componente têm raios  $R_{k_1}$  e  $R_{k_2}$ . Definimos, para  $s_1 \neq s_2$ :

$$\Psi_{s_1, s_2}(\rho, \phi; 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p=0}^{p_{\max}} A_{1p} LG_{s_1 p}(\rho, \phi; 0) + A_{2p} LG_{s_2 p}(\rho, \phi; 0), \quad (4.49)$$

$$\Phi_{s_1, s_2}(k_\rho, k_\phi; 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p=0}^{p_{\max}} A_{s_1 p} e^{-i \frac{N_1 \pi}{2}} LG_{s_1 p}(k_\rho, k_\phi; 0) + A_{s_2 p} e^{-i \frac{N_2 \pi}{2}} LG_{s_2 p}(k_\rho, k_\phi; 0), \quad (4.50)$$

onde  $N_1 = 2p + |s_1|$  e  $N_2 = 2p + |s_2|$ . Já para  $s_1 = s_2 = s$ , temos:

$$\Psi_{s_1, s_2}(\rho, \phi; 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p=0}^{p_{\max}} (A_{1p} + A_{2p}) LG_{sp}(\rho, \phi; 0), \quad (4.51)$$

$$\Phi_{s_1, s_2}(k_\rho, k_\phi; 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p=0}^{p_{\max}} (A_{1p} + A_{2p}) e^{-i \frac{N\pi}{2}} LG_{sp}(k_\rho, k_\phi; 0), \quad (4.52)$$

onde os coeficientes  $A_{jp}$  são calculados como em (4.42) para  $s = s_j$  e  $R_k = R_{k_j}$ . Por fim, basta redefinirmos o somatório da equação (4.54). Para  $s_1 \neq s_2$ , temos:

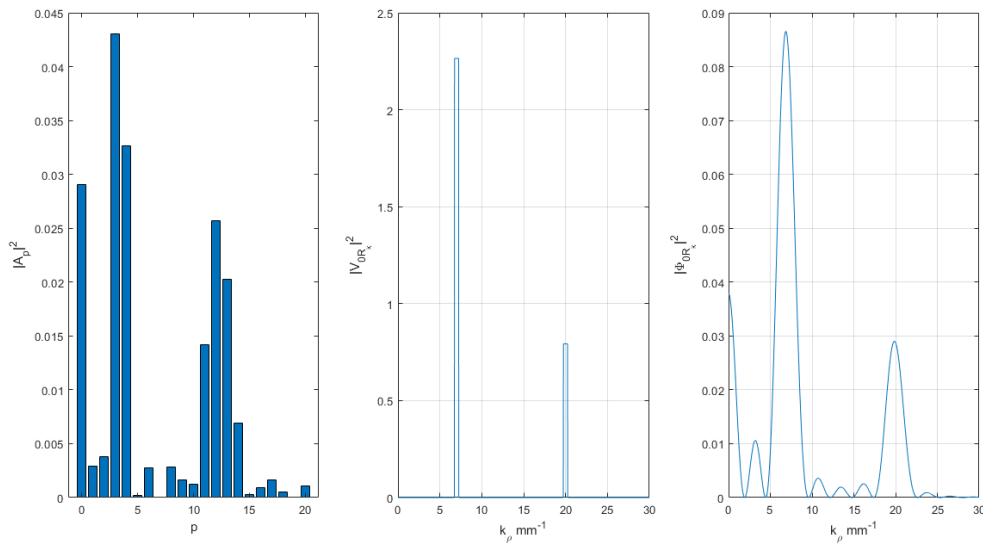
$$S = \sum_{p=0}^{p_{\max}} |A_{1p}|^2 + |A_{2p}|^2. \quad (4.53)$$

Já para  $s_1 = s_2 = s$ ,

$$S = \sum_{p=0}^{p_{\max}} |A_{1p} + A_{2p}|^2. \quad (4.54)$$

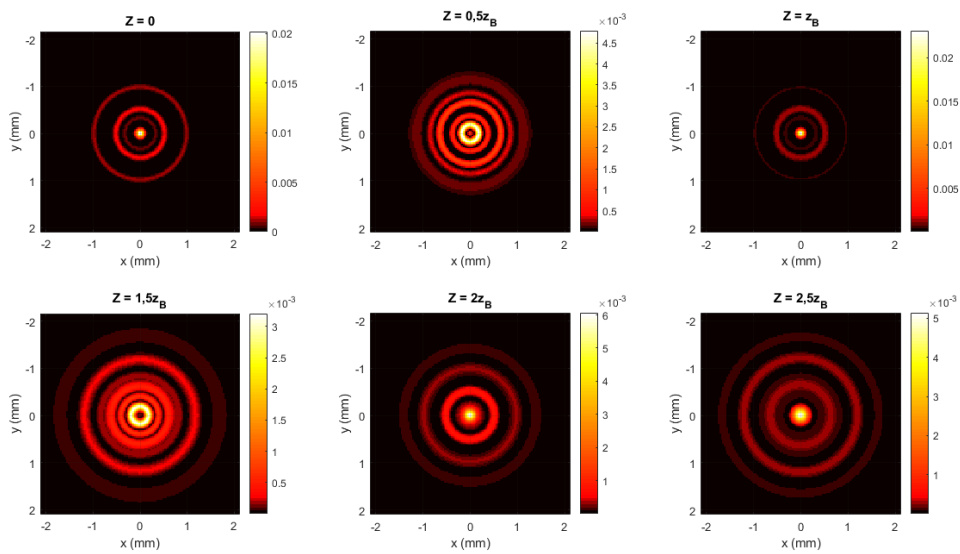


Como exemplo, usamos como campo original a soma de dois campos aproximadamente não-difrativos de ordem  $s = 0$ , com  $R_{k_1} = 7\text{mm}^{-1}$  e  $R_{k_2} = 10\text{mm}^{-1}$ . Usamos, para ambas as componentes,  $\Delta_k = 0,5\text{mm}^{-1}$ . Esse campo deve ter autoimagem à distância  $z_B \approx 357,061\text{mm}$ . Mais uma vez, usamos modos de Laguerre-Gauss com  $w_0 = 0.2\text{mm}$  e  $z_R = 199,47\text{mm}$ . Obtivemos  $S = 0,1926$ . As imagens abaixo mostram os gráficos de  $|A_{1p} + A_{2p}|^2 \times p$  (à esquerda),  $\frac{1}{2}|V_0(k_\rho)|^2 \times k_\rho$  (no centro) e  $|\Phi_0(k_\rho)|^2 \times k_\rho$  (à direita), todos com  $z = 0$ .



**Figura 4.17:** Gráficos de  $|A_{1p} + A_{2p}|^2 \times p$  (à esquerda),  $|V_0(k_\rho)|^2 \times k_\rho$  (no centro) e  $|\Phi_0(k_\rho)|^2 \times k_\rho$  (à direita), com  $z = 0$ ,  $R_{k_1} = 7\text{mm}^{-1}$ ,  $R_{k_2} = 20\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 0,5\text{mm}^{-1}$  e  $w_0 = 0.2\text{mm}$ .

As imagens a seguir mostram a distribuição de intensidade de  $\Psi_0(\rho, \phi; z)$  para certas distâncias de propagação. Podemos observar que, em  $z = z_B$ , forma-se uma autoimagem aproximada.



**Figura 4.18:** Distribuição de intensidade de  $\Psi_0(\rho, \phi; z)$ , com  $R_{k_1} = 7\text{mm}^{-1}$ ,  $R_{k_2} = 20\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 0,5\text{mm}^{-1}$  e  $w_0 = 0,2\text{mm}$ , para  $z = 0, 0,5z_B, z_B, 1,5z_B$  e  $2z_B$ .

Na seção 3.2.1, vimos que uma combinação linear de modos Gaussianos de ordens diferentes forma autoimagens quando as diferenças entre as fases de Gouy de suas componentes são múltiplas de  $2\pi$ . Para que isso ocorra, é necessário que as diferenças de ordem entre os modos envolvidos seja maior que 4. Tais autoimagens são idênticas à distribuição de intensidade do campo na origem, a menos de um fator de escala. Não devemos confundi-las com a autoimagem aproximada observada na figura, visto que esta é apenas semelhante à distribuição de intensidade do campo original.

## Capítulo 5

# Proposta de Método Quantitativo para Análise de Invariância por Propagação

Nos capítulos anteriores, apresentamos formas de se obter campos invariantes por propagação: aproximadamente não-difrativos ou com padrões de repetição. Neste capítulo, nos concentraremos em entender como os parâmetros desses campos afetam sua difração. Além disso, analisaremos a difração de alguns campos distintos com distribuições de intensidade iniciais semelhantes.

Diversas comparações entre alguns dos campos apresentados nessa dissertação podem ser encontradas na literatura. Por exemplo, foi realizada uma comparação da divergência e eficiência no transporte de potência entre um feixe Gaussiano fundamental e um feixe de Bessel truncado com mesmas largura à meia altura e potência total [8]. Esta análise demonstrou que a eficiência no transporte de potência de ambos os feixes é próxima, mas que, diferente do que acontece com o feixe Gaussiano, a região central do feixe de Bessel praticamente não diverge.

Houve, também, a comparação entre feixes de Laguerre-Gauss e feixes de Bessel com condições iniciais semelhantes, mencionada na seção 4.3, a qual concluiu que ambos podem ser considerados aproximadamente não-difrativos na mesma região de propagação [25].

Foi realizada, ainda, uma comparação entre as distribuições de intensidade de feixes de Bessel-Gauss, feixes de Bessel e feixes Gaussianos fundamentais difratados por uma abertura circular [27]. Ela constatou que, quando a intensidade axial era considerada, o feixe de Bessel obteve a melhor performance, isto é, ele se estendeu por uma distância

maior da abertura. Já para a intensidade transversal, concluíram que o feixe de Bessel-Gauss pode ser considerando aproximadamente não-difrativo, dependendo da relação entre o raio da abertura, a cintura do feixe  $w_{BG}$  e o raio  $R_k$  de sua transformada de Fourier.

Nesta dissertação, nos limitaremos a comparar difração dos campos no espaço livre.

## 5.1 O Produto Interno Como Medida de Semelhança Entre Campos

Até o momento, mostramos apenas comparações visuais entre as distribuições de intensidade de um campo ao longo de sua propagação. Durante meu mestrado, buscamos uma forma de avaliar quantitativamente o quão não-difrativo é um campo ou o quão exatas são suas autoimagens. Concluímos que o módulo do produto interno entre as distribuições de amplitude do campo na origem e em outras distâncias de propagação pode ser um bom critério para essa avaliação.

Seja  $\mathcal{P}(z)$  o produto interno entre as distribuições de amplitude de um campo na origem ( $z = 0$ ) e em uma dada distância de propagação  $z$ , dividido pela norma do campo.

$$\mathcal{P}(z) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W^*(\mathbf{r}_{\perp}; 0) W(\mathbf{r}_{\perp}; z) d^2\mathbf{r}_{\perp}}{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |W(\mathbf{r}_{\perp}; 0)|^2 d^2\mathbf{r}_{\perp} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |W(\mathbf{r}_{\perp}; z)|^2 d^2\mathbf{r}_{\perp} \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (5.1)$$

onde  $W(\mathbf{r}_{\perp}; z)$  é dado por (2.28). Como a propagação no espaço livre preserva a norma dos campos, podemos escrever, simplesmente:

$$\mathcal{P}(z) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W^*(\mathbf{r}_{\perp}; 0) W(\mathbf{r}_{\perp}; z) d^2\mathbf{r}_{\perp}}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |W(\mathbf{r}_{\perp}; 0)|^2 d^2\mathbf{r}_{\perp}}. \quad (5.2)$$

Como a transformada de Fourier preserva produtos escalares, a equação acima pode ser reescrita em termos dos espectros angulares dos campos envolvidos. Sejam  $\mathcal{F}\{W(\mathbf{r}_{\perp}; 0)\} = V(\mathbf{k}_{\perp}; 0)$  e  $\mathcal{F}\{W(\mathbf{r}_{\perp}; z)\} = V(\mathbf{k}_{\perp}; z)$ . Como o espectro angular do campo à distância de propagação  $z$  é dado por (2.24), a equação (5.2) pode ser reescrita como:

$$\mathcal{P}(z) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |V(\mathbf{k}_{\perp}; 0)|^2 e^{-i\frac{|\mathbf{k}_{\perp}|^2}{2k}z} d^2\mathbf{k}_{\perp}}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |V(\mathbf{k}_{\perp}; 0)|^2 d^2\mathbf{k}_{\perp}}. \quad (5.3)$$

Suponhamos que exista um campo  $W_{ND}(\mathbf{r}_\perp; z)$  perfeitamente não-difrativo e normalizável cuja evolução ao longo do eixo de propagação pudesse ser descrita pela equação (4.5). Nesse caso, também teríamos  $V_{ND}(\mathbf{k}_\perp; z) = V_{ND}(\mathbf{k}_\perp; 0)e^{-i\frac{R_k^2}{2\kappa}z}$ . Usando (5.3), temos:

$$\mathcal{P}_{ND}(z) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |V_{ND}(\mathbf{k}_\perp; 0)|^2 e^{-i\frac{R_k^2}{2\kappa}z} d^2\mathbf{k}_\perp}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |V_{ND}(\mathbf{k}_\perp; 0)|^2 d^2\mathbf{k}_\perp} = e^{-i\frac{R_k^2}{2\kappa}z}. \quad (5.4)$$

Portanto, para um campo não-difrativo,  $|\mathcal{P}_{ND}(z)|^2 = 1$  para qualquer distância  $z$ .

Consideremos, agora, uma superposição de campos não-difrativos normalizados:  $W_A(\mathbf{r}_\perp; 0) = \alpha W_{ND_1}(\mathbf{r}_\perp; 0) + \gamma W_{ND_2}(\mathbf{r}_\perp; 0)$ , com  $|\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1$ . Nesse caso, a evolução em  $z$  de seu espectro angular pode ser descrita por  $V_A(\mathbf{k}_\perp; z) = \alpha V_{ND_1}(\mathbf{k}_\perp; 0)e^{-i\frac{R_{k_1}^2}{2\kappa}z} + \gamma V_{ND_2}(\mathbf{k}_\perp; 0)e^{-i\frac{R_{k_2}^2}{2\kappa}z}$ . Como cada componente não-difrativa tem espectro angular com um raio diferente, os termos do cálculo de (5.3) que envolverem o produto de componentes distintas será nulo e, assim, temos:

$$\mathcal{P}_A(z) = |\alpha|^2 \mathcal{P}_{ND_1}(z) + |\gamma|^2 \mathcal{P}_{ND_2}(z) = |\alpha|^2 e^{-i\frac{R_{k_1}^2}{2\kappa}z} + |\gamma|^2 e^{-i\frac{R_{k_2}^2}{2\kappa}z}, \quad (5.5)$$

e, portanto:

$$|\mathcal{P}_A(z)|^2 = |\alpha|^4 + |\gamma|^4 + 2|\alpha\gamma|^2 \cos\left(\frac{R_{k_2}^2 - R_{k_1}^2}{2\kappa}z\right) \quad (5.6)$$

Logo, temos  $|\mathcal{P}_A(z)|^2 = 1$  quando o argumento do cosseno acima é múltiplo de  $2\pi$ , isto é, quando  $z$  é uma distância de aparição de autoimagem.

Esses resultados indicam que o valor de  $|\mathcal{P}(z)|^2$  pode ser usado como critério para mensurar quantitativamente a semelhança entre a distribuição de intensidade de um campo na origem e a uma certa distância de propagação  $z$ . Quanto mais próximo de 1 for esse valor, maior deve ser a semelhança. Assim, quanto mais lentamente o valor de  $|\mathcal{P}(z)|^2$  de um campo diminuir, menos difrativo ele deve ser. Nas próximas seções, apresentaremos exemplos que corroboram com essa conclusão.

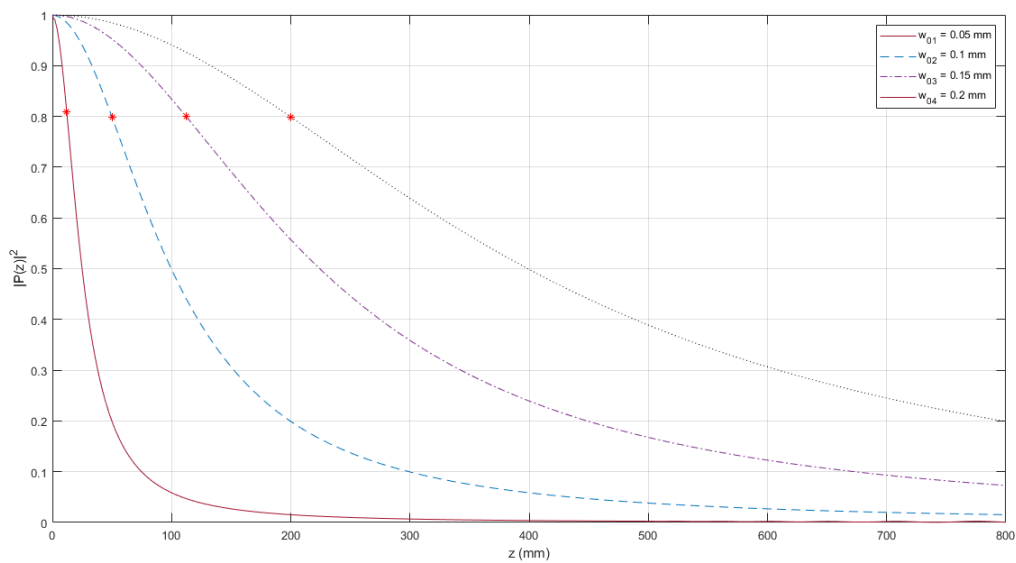
## 5.2 Modos Gaussianos

Começaremos mostrando o resultado dos cálculos numéricos de  $|\mathcal{P}(z)|^2$  para alguns modos Gaussianos. Apesar da distribuição de intensidade desses campos manter o mesmo

padrão ao longo da propagação, ela sofre uma alteração de escala e por isso, apesar de serem estruturalmente estáveis, eles não são não-difrativos.

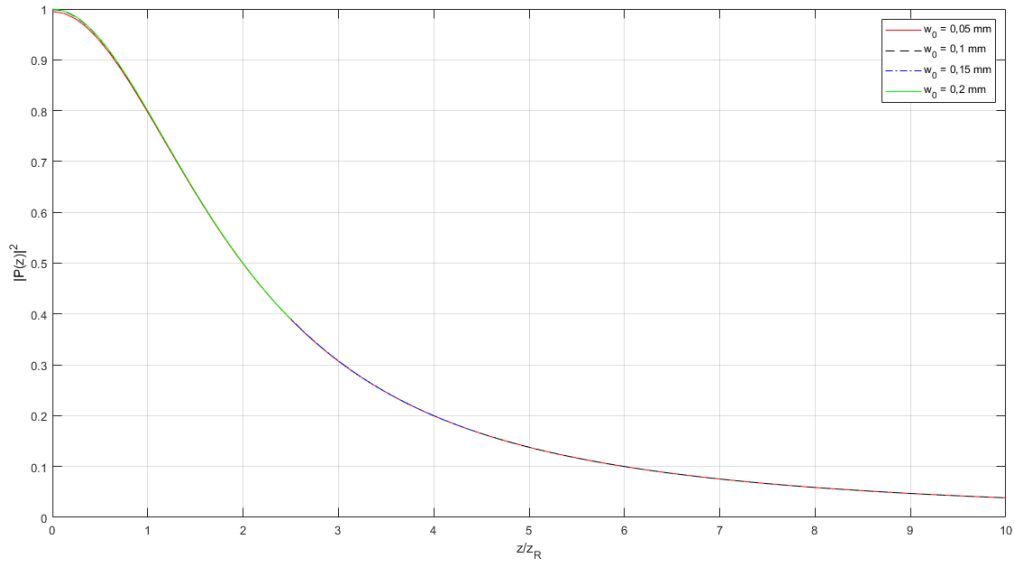
### 5.2.1 Variando a Cintura

A imagem abaixo mostra os gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para modos Gaussianos fundamentais  $G_{00}(\mathbf{r}_\perp; z)$ , com cinturas  $w_0 = 0,05\text{mm}$  ( $z_R \approx 12,47\text{mm}$ ),  $0,1\text{mm}$  ( $z_R \approx 49,87\text{mm}$ ),  $0,15\text{mm}$  ( $z_R \approx 112,20\text{mm}$ ) e  $0,2\text{mm}$  ( $z_R \approx 199,47\text{mm}$ ).



**Figura 5.1:** Gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para  $G_{00}$  com  $w_0 = 0,05\text{mm}$  ( $z_R \approx 12,47\text{mm}$ ),  $0,1\text{mm}$  ( $z_R \approx 49,87\text{mm}$ ),  $0,15\text{mm}$  ( $z_R \approx 112,20\text{mm}$ ) e  $0,2\text{mm}$  ( $z_R \approx 199,47\text{mm}$ ). Os pontos  $(z_R \mathcal{P}(z_R))$  estão marcados por um asterisco vermelho.

Da definição do modo Gaussiano fundamental (3.7), vemos que, quanto maior a distância de Rayleigh, mais lenta deve ser a alteração de escala sofrida pelo campo. Assim, é esperado que, quanto maior for a distância de Rayleigh do campo, menor deve ser  $\left| \frac{d|\mathcal{P}(z)|^2}{dz} \right|$ , o que é confirmado pela imagem acima. Da mesma forma, se refizermos esses gráficos em termos não da distância  $z$ , mas de  $\frac{z}{z_R}$ , então todas as curvas devem coincidir, como no exemplo abaixo:

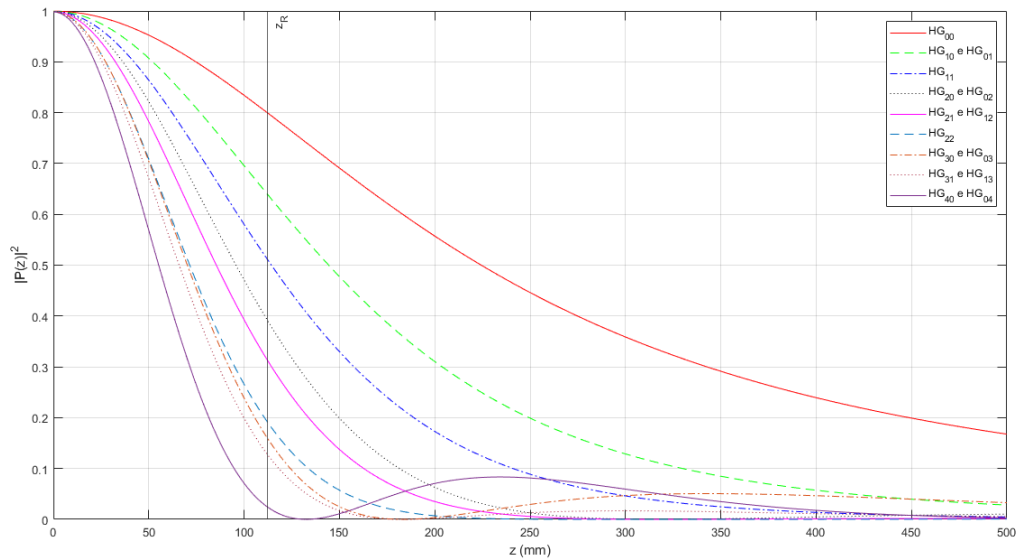


**Figura 5.2:** Gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times \frac{z}{z_R}$  para  $G_{00}$  com  $w_0 = 0,05$ mm ( $z_R \approx 12,47$ mm),  $0,1$ mm ( $z_R \approx 49,87$ mm),  $0,15$ mm ( $z_R \approx 112,20$ mm) e  $0,2$ mm ( $z_R \approx 199,47$ mm).

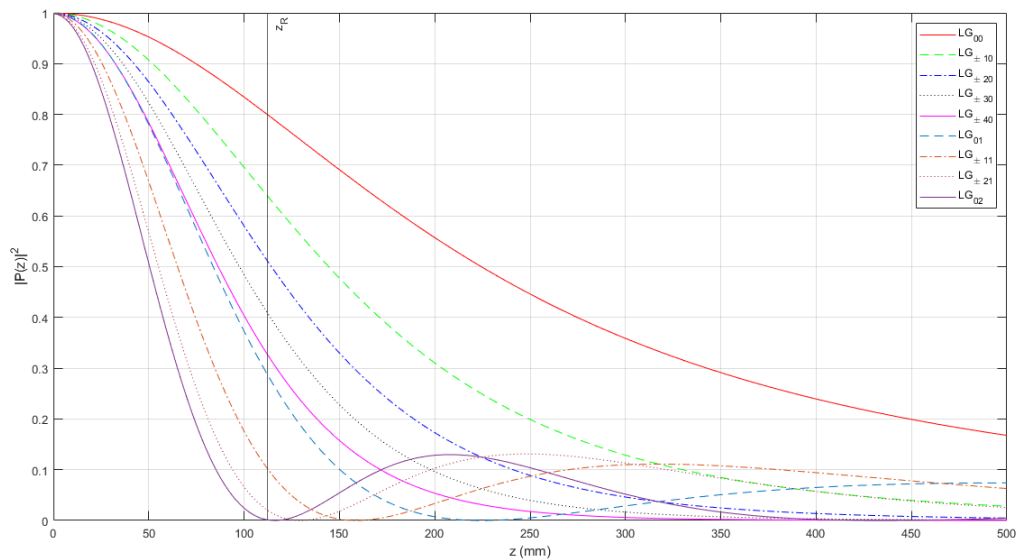
Evidentemente, os mesmos resultados serão obtido se refizermos esses exemplos para, em vez do modo Gaussiano fundamental, modos de Hermite ou Laguerre-Gauss de ordens maiores.

### 5.2.2 Variando a Ordem

Também mostraremos gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para modos de Hermite e Laguerre-Gauss com índices diferentes. Por simetria, sabemos que um modo  $HG_{ij}$  tem os mesmos valores de  $|\mathcal{P}(z)|^2$  que o modo  $HG_{ji}$ . O mesmo deve acontecer para os modos  $LG_{-ij}$  e  $LG_{ij}$ . As imagens abaixo mostram os gráficos de  $\mathcal{P}(z) \times z$  para os modos de Hermite-Gauss (fig. 5.3) e Laguerre-Gauss (fig. 5.4) de ordens de 0 a 4. Em todos os casos, usamos  $w_0 = 0,15$ mm e  $z_R \approx 112,20$ mm.



**Figura 5.3:** Gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para:  $HG_{00}$ ,  $HG_{10}$ ,  $HG_{01}$ ,  $HG_{11}$ ,  $HG_{20}$ ,  $HG_{02}$ ,  $HG_{21}$ ,  $HG_{12}$ ,  $HG_{30}$ ,  $HG_{03}$ ,  $HG_{22}$ ,  $HG_{31}$ ,  $HG_{13}$ ,  $HG_{40}$  e  $HG_{04}$ , com  $w_0 = 0,15$ mm e  $z_R \approx 112,20$ mm. A distância de Rayleigh está marcada por uma linha vertical.

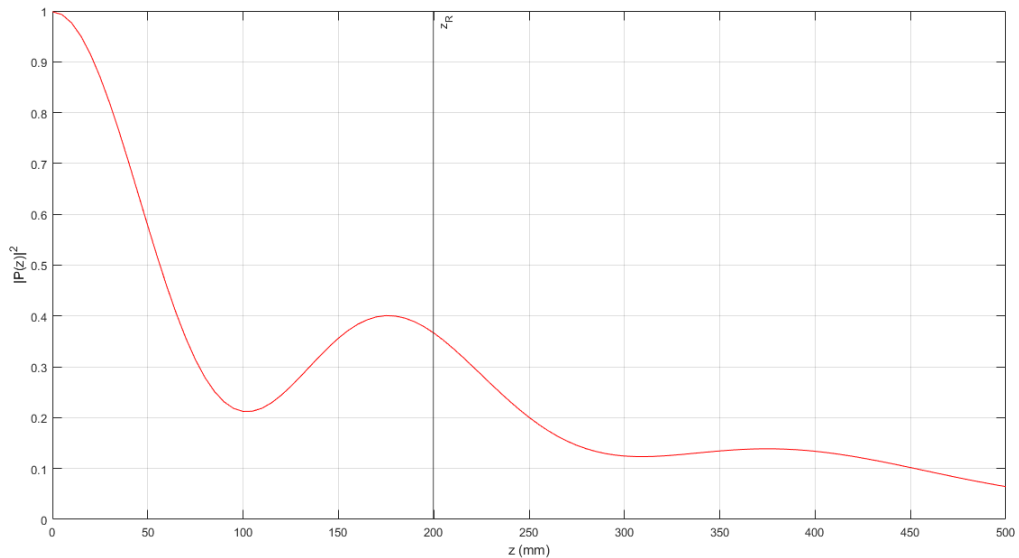


**Figura 5.4:** Gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para:  $LG_{00}$ ,  $LG_{\pm 10}$ ,  $LG_{\pm 20}$ ,  $LG_{01}$ ,  $LG_{\pm 30}$ ,  $LG_{\pm 11}$ ,  $LG_{\pm 40}$ ,  $LG_{\pm 21}$  e  $LG_{02}$ , com  $w_0 = 0,15$ mm e  $z_R \approx 112,20$ mm. A distância de Rayleigh está marcada por uma linha vertical.

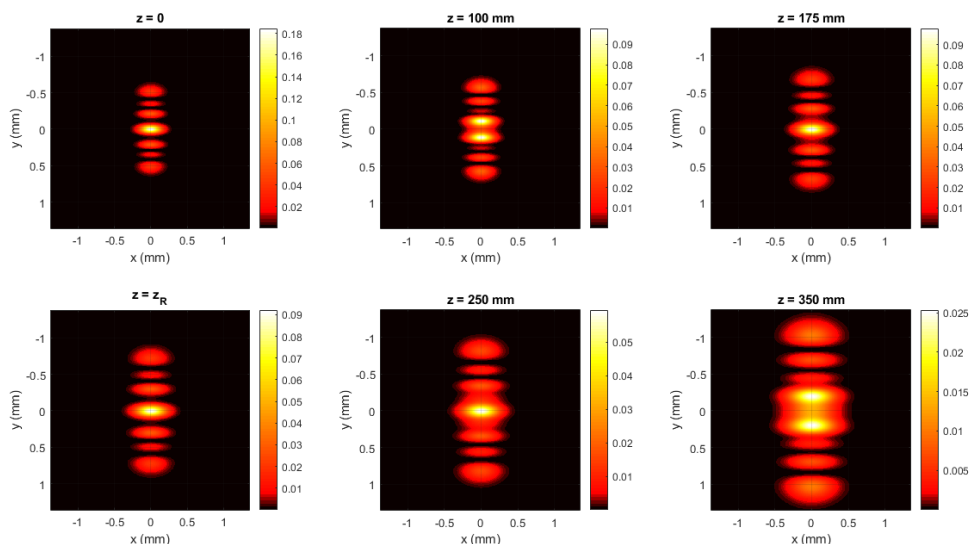
Como podemos ver nos gráficos acima, alguns modos Gaussianos de mesma ordem, por exemplo,  $HG_{11}$  e  $HG_{02}$ , têm gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  distintos. No caso dos modos de Laguerre-Gauss, os exemplos acima indicam que o aumento do índice radial  $p$  parece afetar mais a difração do campo do que o do índice azimutal  $l$ , mesmo para modos de mesma ordem.



Para o próximo exemplo, usaremos a superposição  $\frac{1}{\sqrt{2}}[HG_{00}(x, y; z) + HG_{08}(x, y; z)]$  com cintura  $w_0 = 0,2\text{mm}$ . Ela deve formar autoimagens em  $z = z_R \approx 199,47\text{mm}$  e  $z \rightarrow \infty$ . As imagens abaixo mostram o gráfico de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  (fig. 5.5) e a distribuição de intensidade do campo para certas distâncias de propagação (fig. 5.6).



**Figura 5.5:** Gráfico de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para:  $\frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{00} + HG_{08})$ , com  $w_0 = 0,2\text{mm}$  e  $z_R \approx 199,47\text{mm}$ . A distância de Rayleigh está marcada por uma linha vertical.



**Figura 5.6:** Distribuição de intensidade de  $\frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{00} + HG_{08})$ , com  $w_0 = 0,2\text{mm}$  para  $z = 0, 100, 175, 199,47, 250$  e  $350$  mm.

Vemos que o gráfico de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  apresenta um pico centrado em  $z = 175\text{mm}$ , que não é a distância de *revival*. Este gráfico não reflete adequadamente a aparição das

autoimagens desse campo. Isso se deve ao fato de que há uma diferença de escala entre a distribuição de intensidade do campo na origem e suas autoimagens.

### 5.2.3 Considerando a Mudança de Escala no Cálculo do Produto Interno

Como vimos ao longo desta seção, campos estruturalmente estáveis, mas que ainda sofrem difração, não terão valores de  $|\mathcal{P}(z)|^2$  constantes. Visto que conhecemos a forma como a distribuição de amplitude de um modo Gaussiano se altera ao longo de sua propagação, podemos adaptar o método para que ele avalie a semelhança entre os padrões das distribuições de intensidade de um campo formado pela superposição de modos Gaussianos na origem e em uma dada distância de propagação, agora considerando a alteração da escala. Ou seja, o método que apresentaremos a seguir não avaliará o quão não-difrativo é o campo, mas sim se ele se propaga como é esperado de um modo Gaussiano.

Das definições dos modos Gaussianos (equações (3.10) e (3.14)), vemos que a distribuição de intensidade de um modo de cintura  $w_0$  e distância de Rayleigh  $z_R$  em uma certa distância de propagação  $z$  é idêntica à de um modo de cintura  $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}$  na origem. Além dessa mudança de escala, há uma diferença de fase entre o campo na origem e o propagado, dada por  $\left[ \kappa \frac{x^2 + y^2}{2R_0(z)} - \Psi_N(z) \right]$ , onde  $R_0(z) = z \left( 1 + \frac{z^2}{z_R^2} \right)$  e  $\Psi_N(z)$  é a fase de Gouy. Seja  $W(\mathbf{r}_\perp; z)$  uma combinação linear de modos Gaussianos de cintura  $w_0$  e distância de Rayleigh  $z_R$ , definimos:

$$\mathcal{P}_g(z) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W^*(\mathbf{r}_\perp; z) W'(\mathbf{r}_\perp; 0) e^{i\kappa \frac{x^2 + y^2}{2R_0(z)}} d^2\mathbf{r}_\perp}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |W(\mathbf{r}_\perp; 0)|^2 d^2\mathbf{r}_\perp}, \quad (5.7)$$

onde  $W'(\mathbf{r}_\perp; 0)$  é a mesma combinação linear de modos Gaussianos, mas agora com cintura  $w(z)$ . No caso em que  $W(\mathbf{r}_\perp; z) = HG_{mn}(\mathbf{r}_\perp; z)$ , temos:

$$\mathcal{P}_g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} HG_{mn}^*(\mathbf{r}_\perp; z) HG'_{mn}(\mathbf{r}_\perp; 0) e^{i\kappa \frac{x^2 + y^2}{2R_0(z)}} d^2\mathbf{r}_\perp, \quad (5.8)$$

onde, novamente,  $HG'_{mn}(\mathbf{r}_\perp; 0)$  é o mesmo modo de Hermite-Gauss, mas com cintura  $w(z)$ . Como  $w(z)$  também é a largura do campo  $HG_{mn}(\mathbf{r}_\perp; z)$ , a equação acima se resume a:

$$\mathcal{P}_g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |HG_{mn}(\mathbf{r}_\perp; z)|^2 e^{-i\Psi_N(z)} d^2\mathbf{r}_\perp = e^{-i\Psi_N(z)}. \quad (5.9)$$

Assim, nesse caso,  $|\mathcal{P}_g(z)|^2 = 1$ . Evidentemente, o mesmo cálculo é válido para um modo

de Laguerre-Gauss. Já para uma superposição normalizada descrita por:

$$W(\mathbf{r}_\perp; z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} HG_{mn}(\mathbf{r}_\perp; z), \quad (5.10)$$

temos:

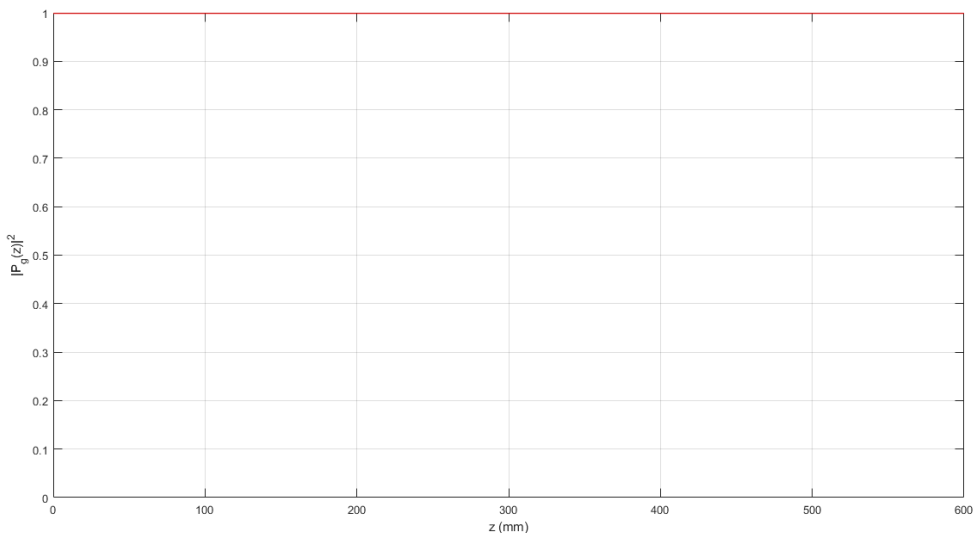
$$\mathcal{P}_g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn}^* HG_{mn}^*(\mathbf{r}_\perp; z) \right] \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} HG_{mn}'(\mathbf{r}_\perp; z) \right] e^{i\kappa \frac{x^2+y^2}{2R_0(z)}} d^2\mathbf{r}_\perp. \quad (5.11)$$

Devido à ortonormalidade dos modos de Hermite-Gauss, a equação anterior se torna:

$$\mathcal{P}_g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |c_{mn}|^2 e^{-i\Psi_N(z)}. \quad (5.12)$$

Portanto,  $|\mathcal{P}_g(z)|^2$  só será 1 quando a diferença entre as fases de Gouy de cada componente for múltipla de  $2\pi$ .

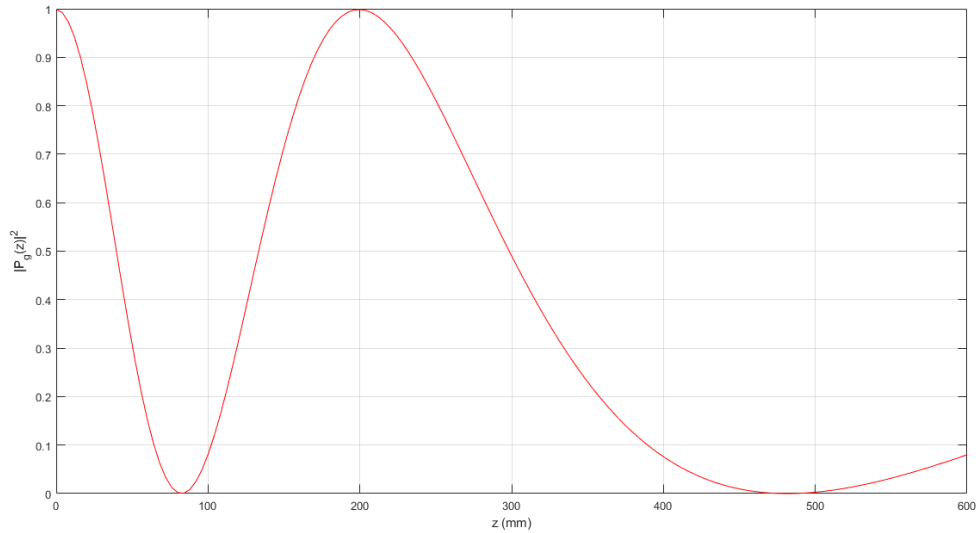
Como um primeiro exemplo, usaremos um campo estruturalmente estável descrito por  $\frac{1}{\sqrt{2}} [HG_{11}(\mathbf{r}_\perp; z) + HG_{02}(\mathbf{r}_\perp; z)]$ , cuja distribuição de intensidade para algumas distâncias de propagação pode ser encontrada na figura 3.7. A imagem abaixo mostra o gráfico de  $|\mathcal{P}_g(z)|^2 \times z$  para esse campo.



**Figura 5.7:** Gráfico de  $|\mathcal{P}_g(z)|^2 \times z$  para:  $\frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{11} + HG_{02})$ , com  $w_0 = 0,2\text{mm}$  e  $z_R \approx 199,47\text{mm}$ .

Por ser uma superposição de modos de mesma ordem, esse campo é estruturalmente estável e, como o esperado,  $|\mathcal{P}_g(z)|^2$  é constante.

Agora, usaremos como exemplo o campo  $\frac{1}{\sqrt{2}} [HG_{00}(\mathbf{r}_\perp; z) + HG_{44}(\mathbf{r}_\perp; z)]$ , com  $w_0 = 0,2\text{mm}$  e  $z_R \approx 199,47\text{mm}$ . Sua distribuição de intensidade para algumas distâncias de propagação se encontra na figura 3.12. A imagem a seguir mostra o gráfico de  $|\mathcal{P}_g(z)|^2 \times z$  para esse campo. Dessa vez, o campo deve formar uma autoimagem em  $z = z_R \approx 199,47\text{mm}$ .



**Figura 5.8:** Gráfico de  $|\mathcal{P}_g(z)|^2 \times z$  para:  $\frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{00} + HG_{44})$ , com  $w_0 = 0,2\text{mm}$  e  $z_R \approx 199,47\text{mm}$ .

Podemos ver no gráfico acima que realmente há um pico na distância  $z$  esperada.

### 5.3 Feixes de Bessel Truncados

Nessa seção, mostraremos os resultados de cálculos numéricos de  $|\mathcal{P}(z)|^2$  para feixes de Bessel truncados definidos por (4.17). Da relação entre funções de Bessel:

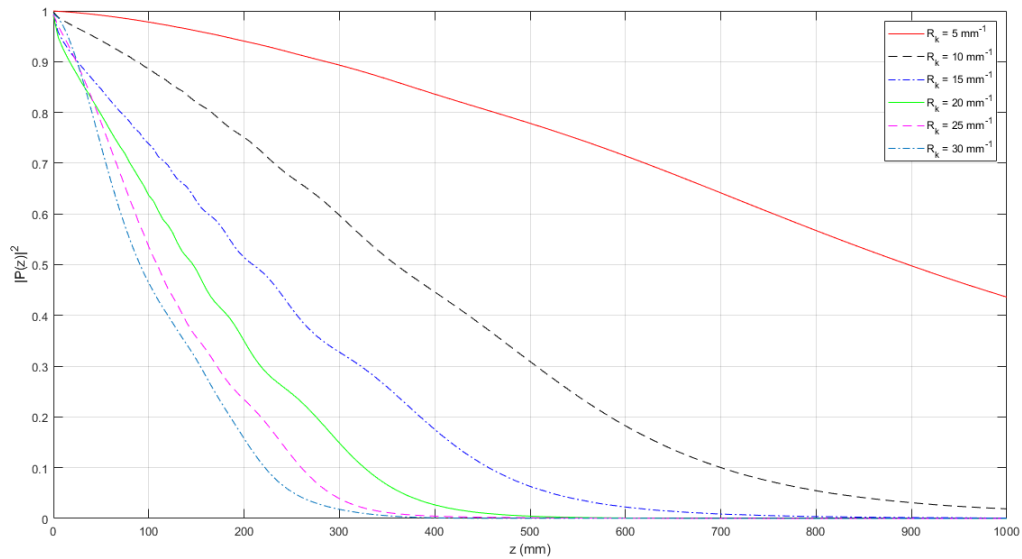
$$J_{-a}(x) = (-1)^a J_a(x), \quad (5.13)$$

onde  $a$  é um número inteiro, vemos que, tanto as distribuições de intensidade dos campos quanto os valores de  $|\mathcal{P}(z)|^2$  serão os mesmos para feixes de ordens  $s$  e  $-s$ .

#### 5.3.1 Variando o Raio do Espectro Angular

Para nosso primeiro exemplo, usaremos feixes de Bessel com  $s = 0$ , truncados em um raio  $R_{\max} = 0,5\text{mm}$  e com  $R_k = 5, 10, 15, 20, 25$  e  $30 \text{ mm}^{-1}$ . A imagem abaixo

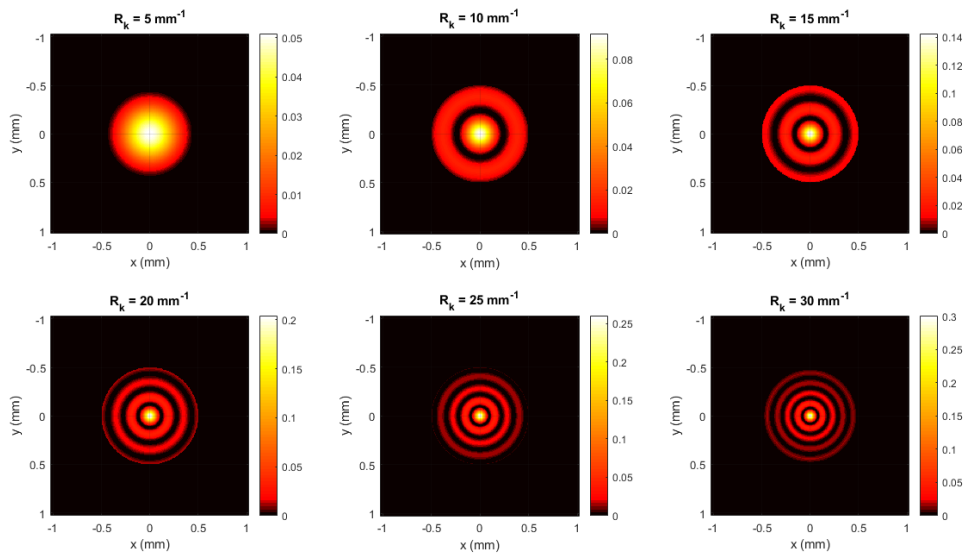
mostra os gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para esses campos.



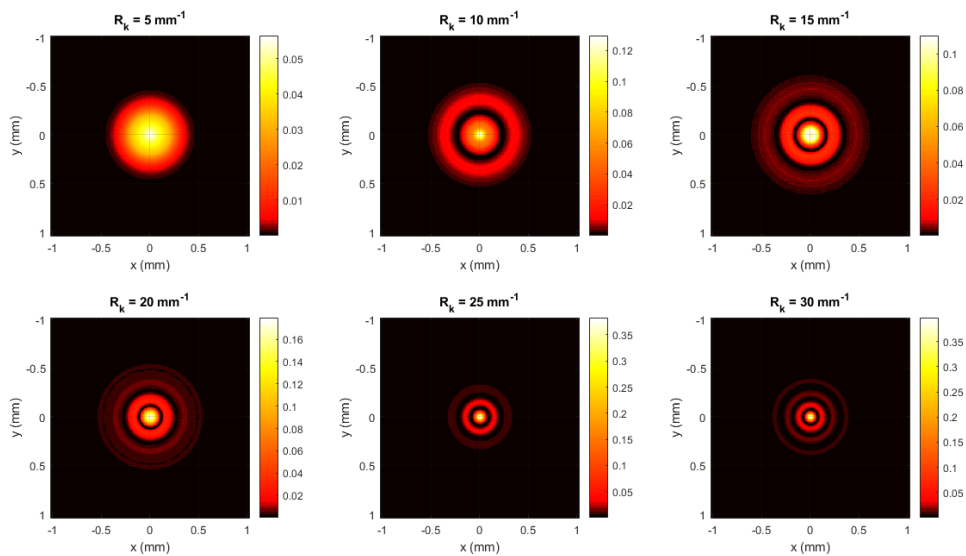
**Figura 5.9:** Gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para feixes de Bessel com  $s = 0$ , truncados em um raio  $R_{\max} = 0,5\text{mm}$  e com  $R_k = 5, 10, 15, 20, 25$  e  $30 \text{ mm}^{-1}$ .

Os gráficos acima sugerem que, conforme  $R_k$  aumenta, menor é a distância na qual esses feixes podem ser considerados aproximadamente não-difrativos. O mesmo resultado foi obtido para cálculos realizados com os outros tipos feixes aproximadamente não-difrativos de ordem  $s = 0$  apresentados no capítulo 4.

As imagens seguintes mostram as distribuições de intensidade desses campos em  $z = 0$  (figura 5.10) e  $z = 100\text{mm}$  (figura 5.11).



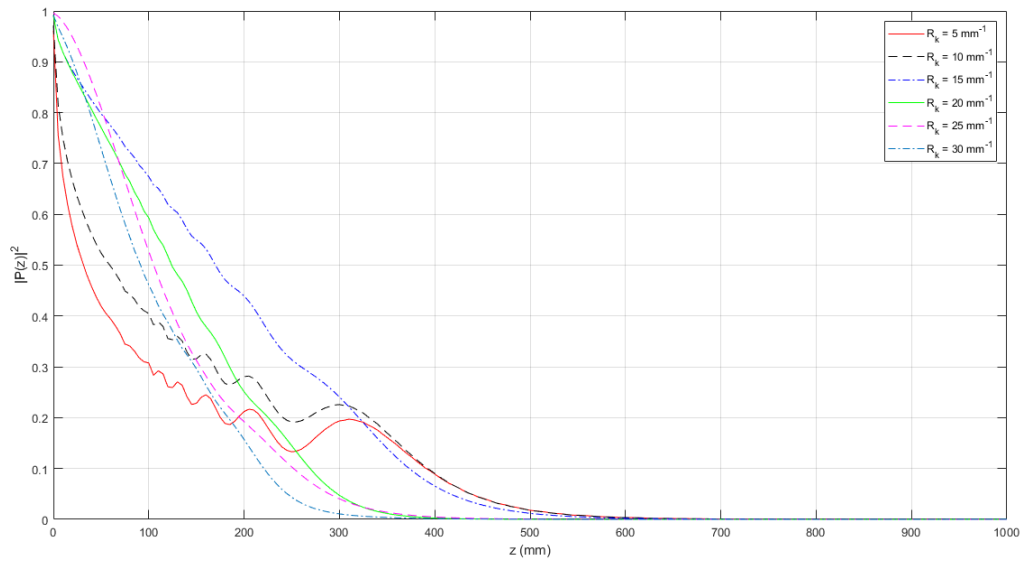
**Figura 5.10:** Distribuições de intensidade em  $z = 0$  de  $Bt_0(\rho, \phi; 0)$  truncados em  $R_{\max} = 0,5\text{mm}$  para  $R_k = 5, 10, 15, 20, 25$  e  $30 \text{ mm}^{-1}$ .



**Figura 5.11:** Distribuições de intensidade em  $z = 100\text{mm}$  de  $Bt_0(\rho, \phi; 0)$  truncados em  $R_{\max} = 0,5\text{mm}$  para  $R_k = 5, 10, 15, 20, 25$  e  $30 \text{ mm}^{-1}$ .

Uma comparação visual entre as imagens acima indica que há uma diferença maior entre as distribuições de intensidade do mesmo campo em  $z = 0$  e  $z = 100\text{mm}$  conforme o aumento de  $R_k$ , corroborando com o previsto nos gráficos da figura 5.9.

Em nosso segundo exemplo, repetimos os valores de  $R_k$  do anterior e usamos  $R_{\max} = 0,5\text{mm}$  e  $s = 5$ . As imagens abaixo mostram os gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  (fig. 5.12) e as distribuições de intensidade desses campos em  $z = 0$  (fig. ??) e  $z = 100\text{mm}$  (fig. ??).

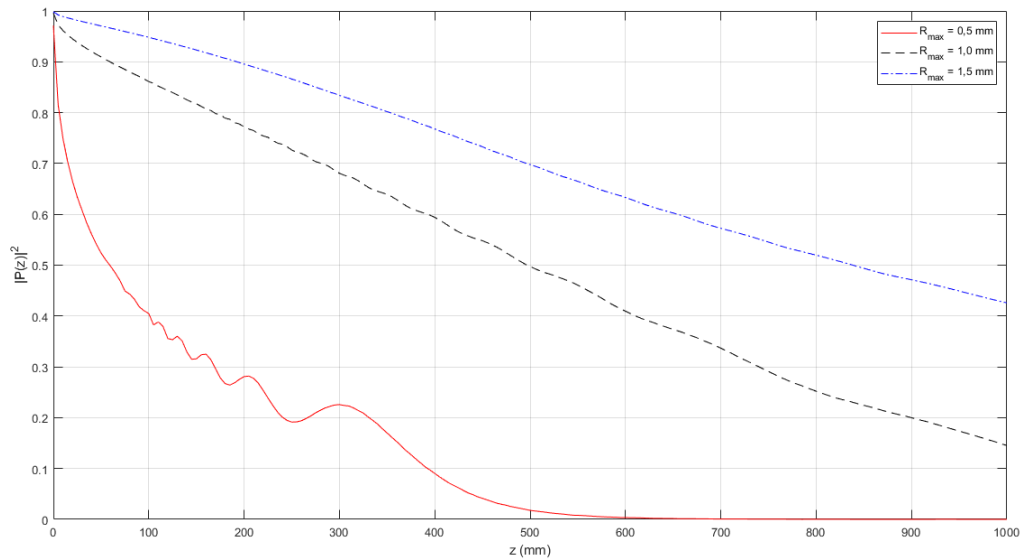


**Figura 5.12:** Gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para feixes de Bessel com  $s = 5$ , truncados em um raio  $R_{\max} = 0,5 \text{ mm}$  e com  $R_k = 5, 10, 15, 20, 25$  e  $30 \text{ mm}^{-1}$ .

Nesse caso, o campo com o menor valor de  $R_k$  obteve a pior performance, ao menos até  $z \approx 190 \text{ mm}$ , o que indica que o resultado obtido no exemplo anterior não é válido para campos de qualquer ordem.

### 5.3.2 Variando o Raio Máximo

Também realizamos cálculos variando o raio em que os feixes foram truncados. Usamos  $R_k = 10 \text{ mm}^{-1}$ ,  $s = 5$  e  $R_{\max} = 0,5, 1,0$  e  $1,5 \text{ mm}$ . A imagem abaixo mostra os gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$ :



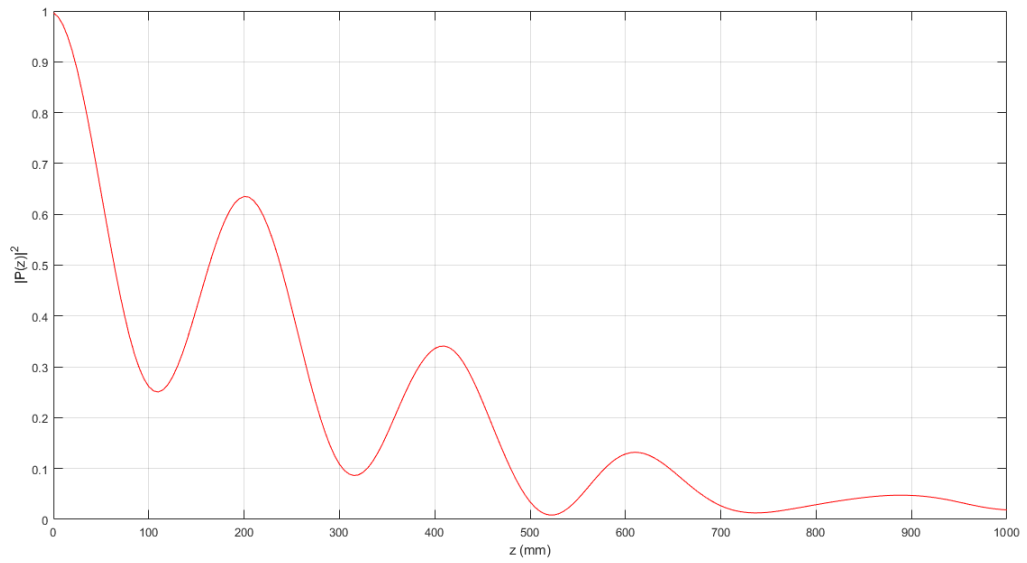
**Figura 5.13:** Gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para feixes de Bessel com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$ ,  $s = 5$  e  $R_{\max} = 0,5, 1,0$  e  $1,5$  mm.

Quanto maior for o raio máximo do feixe de Bessel truncado ( $R_{\max}$ ), mais semelhante a um feixe de Bessel ideal ele será e, portanto, menos difrativo. Os gráficos acima corroboram com essa ideia.

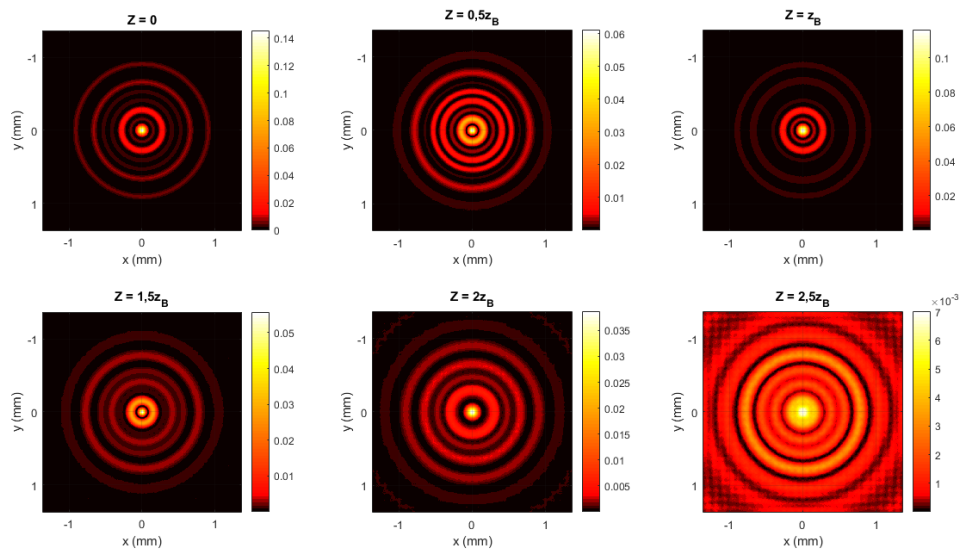
### 5.3.3 Superposição de Feixes de Bessel Truncados

Para o último exemplo dessa seção, usamos uma superposição normalizada de feixes de Bessel de ordem  $s = 0$ , truncados em  $R_{\max} = 1,0\text{mm}$ . O primeiro tem espectro angular de raio  $R_{k_1} = 5\text{mm}^{-1}$ , enquanto, para o segundo,  $R_{k_2} = 25\text{mm}^{-1}$ . Assim, é esperado que esse campo forme autoimagens aproximadas a distâncias de propagação múltiplas de  $z_B \approx 208,88\text{mm}$ . As imagens a seguir mostram o gráfico de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  (figura 5.14) e a distribuição de intensidade do campo para algumas distâncias de propagação (figura 5.15).





**Figura 5.14:** Gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para uma superposição de feixes de Bessel de ordem  $s = 0$ , truncados em  $R_{\max} = 1,0\text{mm}$ , com  $R_{k_1} = 5\text{mm}^{-1}$  e  $R_{k_2} = 25\text{mm}^{-1}$ .



**Figura 5.15:** Distribuição de intensidade de uma superposição de feixes de Bessel de ordem  $s = 0$ , truncados em  $R_{\max} = 1,0\text{mm}$ , com  $R_{k_1} = 5\text{mm}^{-1}$  e  $R_{k_2} = 25\text{mm}^{-1}$ , para  $z = 0, 0,5z_B, z_B, 1,5z_B, 2z_B$  e  $2,5z_B$ .

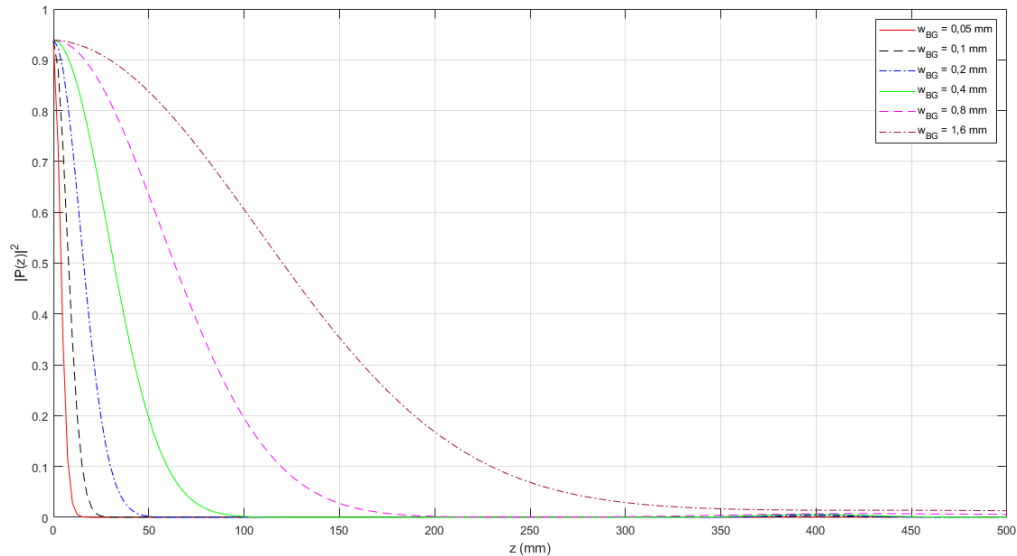
Podemos ver que, como poderíamos esperar, o gráfico de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  tem picos nas distâncias de formação de autoimagens.

## 5.4 Feixes de Bessel-Gauss

Nessa seção, mostraremos o resultado de cálculos numéricos realizados para feixes de Bessel-Gauss, definidos por (4.27). Mais uma vez, tanto os valores de  $|\mathcal{P}(z)|^2$  quanto as distribuições de intensidade são as mesmas para os campos de ordens  $s$  e  $-s$ .

### 5.4.1 Variando a Cintura da Gaussiana

Para o próximo exemplo, usaremos campos de Bessel-Gauss com  $s = 0$ ,  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$  e cinturas  $w_{BG} = 0,05, 0,1, 0,2, 0,4, 0,8$  e  $1,6$  mm. As imagens abaixo mostram os gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$ .



**Figura 5.16:** Gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para feixes de Bessel-Gauss com  $s = 0$ ,  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$  e  $w_{BG} = 0,05, 0,1, 0,2, 0,4, 0,8$  e  $1,6$  mm.

Assim como ocorre para os feixes de Bessel truncados, os gráficos indicam que tornar o feixe mais semelhante a um feixe de Bessel ideal, o que, nesse caso, é feito através do aumento de  $w_{BG}$ , torna o campo menos difrativo.

## 5.5 Feixes Semelhantes aos de Bessel

Na seção 4.5, apresentamos um campo cujo espectro angular é constante em uma pequena largura em torno de um raio central e nulo fora dela. Para esse campo, o cálculo

analítico de  $\mathcal{P}(z)$  pode ser facilmente realizado. Para isso, começaremos substituindo seu espectro angular, dado por (4.31), na equação (5.3):

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{2\pi R_k \Delta_k} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty |\text{rect}(-\Delta_k/2, \Delta_k/2, k_\rho - R_k) e^{-isk_\phi}|^2 k_\rho e^{-i\frac{k_\rho^2}{2\kappa}z} dk_\rho dk_\phi . \quad (5.14)$$

Como a função retangular apenas altera os limites de integração, após alguns cálculos, temos:

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{R_k \Delta_k} \int_{R_k - \frac{\Delta_k}{2}}^{R_k + \frac{\Delta_k}{2}} k_\rho e^{-i\frac{k_\rho^2}{2\kappa}z} dk_\rho . \quad (5.15)$$

Diferente do que ocorre com feixes de Bessel truncados ou de Bessel-Gauss, nesse caso, vemos que  $\mathcal{P}(z)$  não depende da ordem  $s$ . Finalmente, resolvendo a integral acima, temos:

$$\mathcal{P}(z) = e^{-i\frac{R_k^2 + \frac{\Delta_k^2}{4}}{2\kappa}z} \text{sinc}\left(\frac{R_k \Delta_k}{2\kappa}z\right) , \quad (5.16)$$

onde

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0. \end{cases} \quad (5.17)$$

Com isso, vemos que:

$$|\mathcal{P}(z)|^2 = \text{sinc}^2\left(\frac{R_k \Delta_k}{2\kappa}z\right) = \text{sinc}^2\left(\frac{\pi z}{2z_{ND}}\right) . \quad (5.18)$$

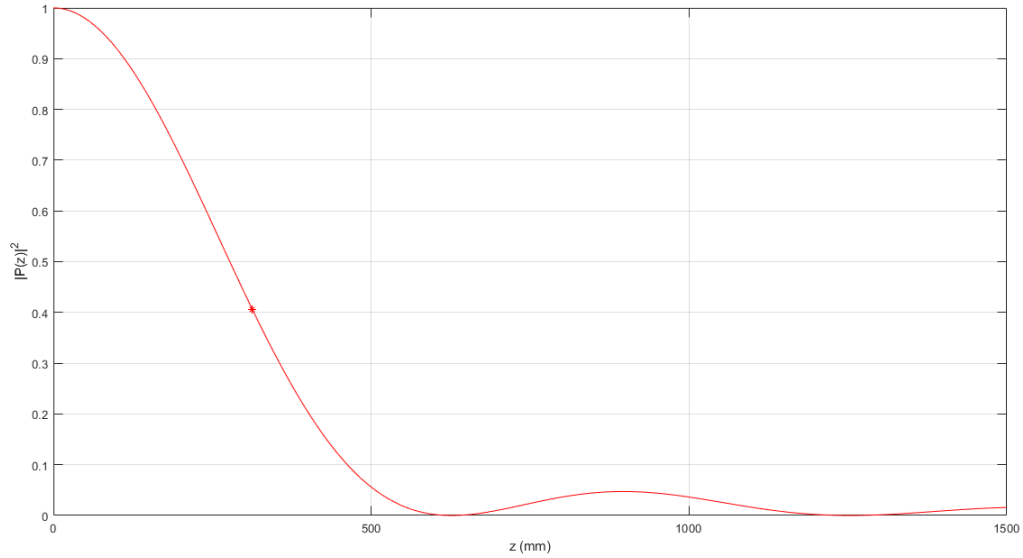
onde  $z_{ND}$  é a distância até a qual consideramos o campo aproximadamente não-difrativo, dada por (4.36). As raízes de (5.18) são as soluções de  $\left[\text{sinc}\left(\frac{\pi z}{2z_{ND}}\right) = n\pi\right]$ , onde  $n$  é um número inteiro diferente de 0. São elas:

$$z_0 = \frac{2n\kappa\pi}{R_k \Delta_k} = 2nz_{ND} , \quad (5.19)$$

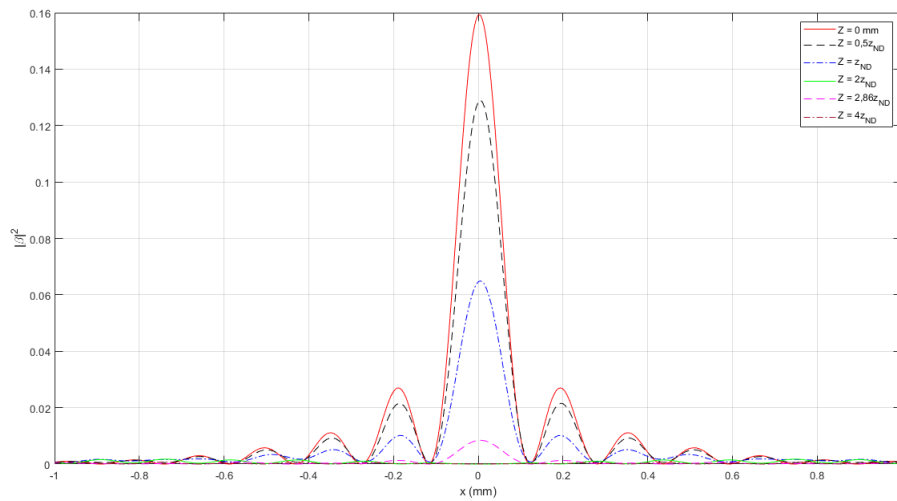
Além disso, essa função deve apresentar pontos de máximo dados pelas soluções de  $\tan\left(\frac{\pi z}{2z_{ND}}\right) = \frac{\pi z}{2z_{ND}}$ . O primeiro, evidentemente, está em  $z = 0$ , enquanto o segundo, em  $z \approx 4,493 \frac{2\kappa}{R_k \Delta_k} \approx 2,860z_{ND}$ .

As imagens abaixo mostram o gráfico de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  (figura 5.17) e a distribuição de

intensidade em  $y = 0$  (figura 5.18) de um campo com  $s = 0$ ,  $R_k = 20\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 5\text{mm}^{-1}$  e  $z_{ND} = 313,3208\text{mm}$ .



**Figura 5.17:** Gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para  $\beta_0$  com  $R_k = 20\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 5\text{mm}^{-1}$ . O ponto  $(z_{ND}, |\mathcal{P}(z_{ND})|^2)$  está marcado por um asterisco vermelho.



**Figura 5.18:** Gráfico de  $|\beta_0|^2 \times x$  para  $y = 0$ , com  $R_k = 20\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 5\text{mm}^{-1}$  para  $z = 0, 0,5z_{ND}, z_{ND}, 2z_{ND}, 2,86z_{ND}$  e  $4z_{ND}$ .

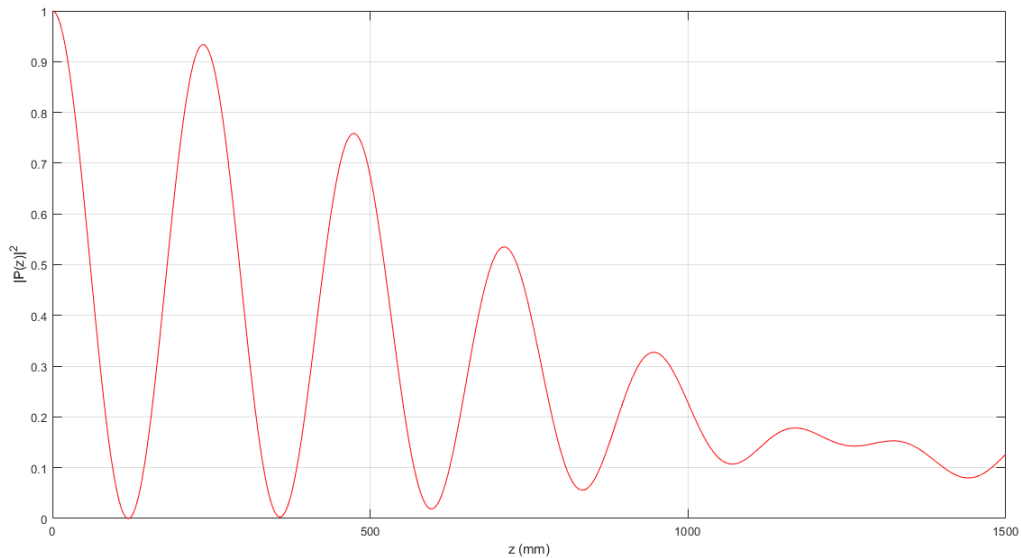
Mais uma vez, as distâncias para as quais o valor de  $|\mathcal{P}(z)|^2$  é mais alto apresenta as distribuições de intensidade mais visualmente semelhantes à distribuição em  $z = 0$ .

### 5.5.1 Superposição de Feixes Semelhantes aos de Bessel

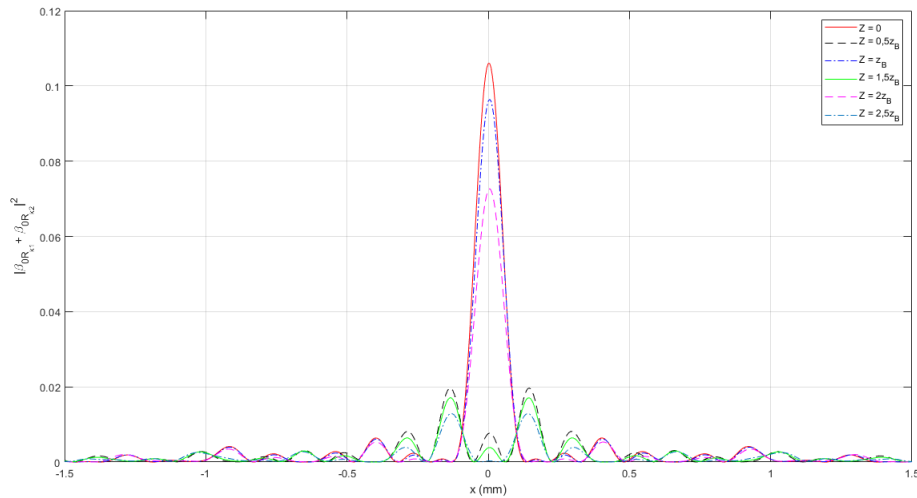
Consideremos, agora, uma superposição de campos aproximadamente não-difrativos que possa ser descrita por:  $\alpha\beta_{s_1}(\rho, \phi; 0) + \gamma\beta_{s_2}(\rho, \phi; 0)$ , onde  $|\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1$  e ambas as componentes têm o mesmo  $\Delta_k$  e  $|R_{k_2} - R_{k_1}| > \Delta_k$ . Nesse caso:

$$\mathcal{P}(z) = |\alpha|^2 e^{-i\frac{R_{k_1}^2 + \frac{\Delta_k^2}{4}}{2\kappa}z} \text{sinc}\left(\frac{R_{k_1}\Delta_k}{2\kappa}z\right) + |\beta|^2 e^{-i\frac{R_{k_2}^2 + \frac{\Delta_k^2}{4}}{2\kappa}z} \text{sinc}\left(\frac{R_{k_2}\Delta_k}{2\kappa}z\right). \quad (5.20)$$

As imagens a seguir mostram o gráfico de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  (figura 5.19) e a distribuição de intensidade em  $y = 0$  (figura 5.20) de uma superposição de campos com  $R_{k_1} = 10\text{mm}^{-1}$ ,  $R_{k_2} = 25\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 2\text{mm}^{-1}$  e  $z_{ND_1} \approx 1566,66\text{mm}$  e  $z_{ND_2} \approx 238,72\text{mm}$ . Esse campo deve apresentar autoimagens em distâncias de propagação múltiplas de  $z_B \approx 238,72\text{mm}$ .



**Figura 5.19:** Gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para uma superposição de campos semelhantes ao de Bessel com  $R_{k_1} = 10\text{mm}^{-1}$ ,  $R_{k_2} = 25\text{mm}^{-1}$  e  $\Delta_k = 2\text{mm}^{-1}$ .



**Figura 5.20:** Distribuições de intensidade de uma superposição de campos semelhantes ao de Bessel para  $y = 0$ , com  $s = 0$ ,  $R_{k_1} = 10\text{mm}^{-1}$ ,  $R_{k_2} = 25\text{mm}^{-1}$  e  $\Delta_k = 2\text{mm}^{-1}$  para  $z = 0, 0,5z_B, z_B, 1,5z_B, 2z_B$  e  $2,5z_B$ .

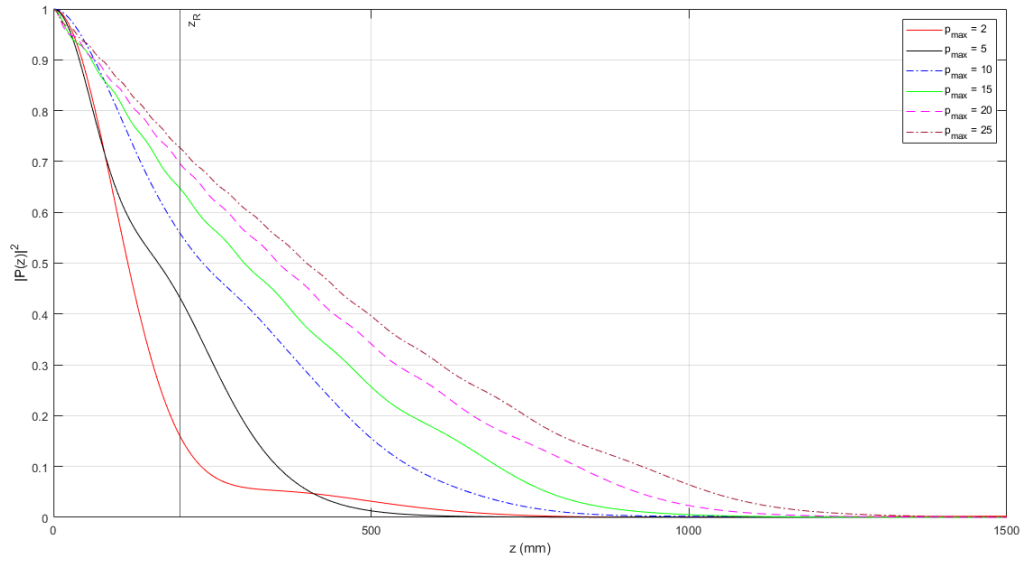
## 5.6 Superposições Aproximadamente Não-Difrativas de Modos de Laguerre-Gauss

Na seção 4.6, mostramos que um campo paraxial aproximadamente não-difrativo pode ser descrito como uma superposição de modos de Laguerre-Gauss. Vimos que podemos obter um campo aproximadamente não-difrativo mesmo truncando a soma de modos LG em um índice radial máximo  $p_{\max}$ . Nesta seção, mostraremos os resultados dos cálculos numéricos de  $|\mathcal{P}(z)|^2$  para essas superposições de modos de Laguerre-Gauss.

Para todos os cálculos, utilizamos modos LG com índice azimutal  $l = 0$ , cintura  $w_0 = 0,2\text{mm}$  e distância de Rayleigh  $z_R \approx 199.46\text{mm}$ . Iremos nos referir ao campo que estivermos descrevendo em termos dos modos LG como o "campo original" e, em todos os casos, ele será definido pela equação (4.34).

### 5.6.1 Variando o Índice Radial Máximo

Para nosso primeiro exemplo, usaremos um campo original  $\beta_0(\rho, \phi; 0)$  com  $R_k = 20\text{mm}^{-1}$  e  $\Delta_k = 0,5\text{mm}^{-1}$ . Fizemos os cálculos para somas de modos LG com  $p_{\max} = 2, 5, 10, 15, 20$  e  $25$ . As imagens abaixo mostram os gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$ .

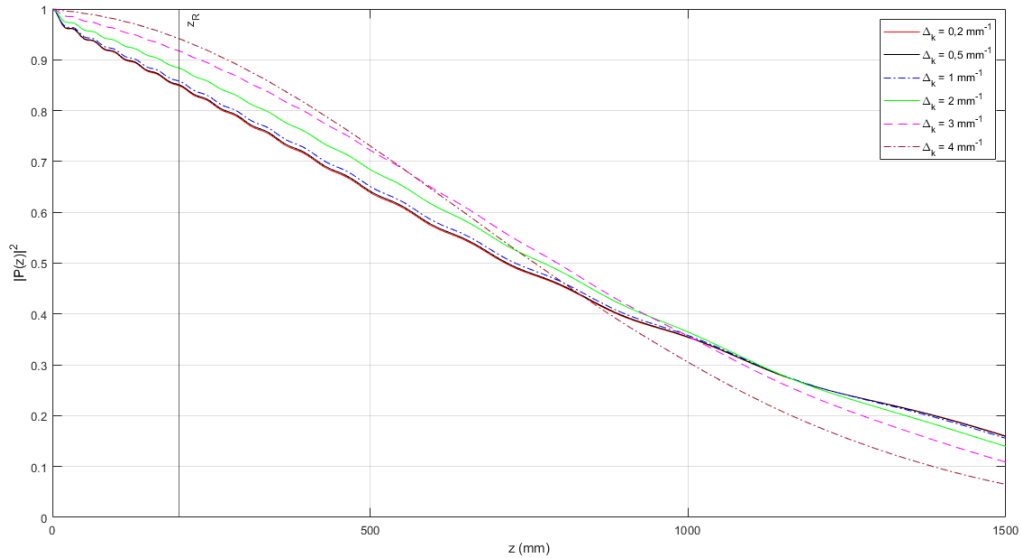


**Figura 5.21:** Gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para  $\Psi_0$  com  $R_k = 20\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 0,5\text{mm}^{-1}$  e  $p_{\max} = 2, 5, 10, 15, 20$  e  $25$ . A distância de Rayleigh  $z_R$  está marcada por uma reta vertical.

Os gráficos anteriores indicam que, como poderíamos esperar, os campos se tornam menos difrativo com o aumento de  $p_{\max}$ , já que as superposições de modos de Laguerre-Gauss ficam mais semelhantes ao campo original, que é aproximadamente não-difrativo.

### 5.6.2 Variando a Largura do Espectro Angular do Campo Original

Nos próximos exemplos, veremos como o valor de  $\Delta_k$  influencia a difração desses campos. Para isso, usaremos  $p_{\max} = 20$  e  $\Delta_k = 0, 2, 0, 5, 1, 2, 3$  e  $4 \text{ mm}^{-1}$ . As imagens a abaixo apresentam os gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para campos com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$ .



**Figura 5.22:** Gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para  $\Psi_0$  com  $p_{\max} = 20$ ,  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$  e  $\Delta_k = 0, 2, 0,5, 1, 2, 3$  e  $4$ . A distância de Rayleigh  $z_R$  está marcada por uma reta vertical.

Nesse caso, vemos que o aumento de  $\Delta_k$  tornava o campo um pouco menos difrativo até uma certa distância, a partir da qual os campos com os menores valores  $\Delta_k$  os superavam.

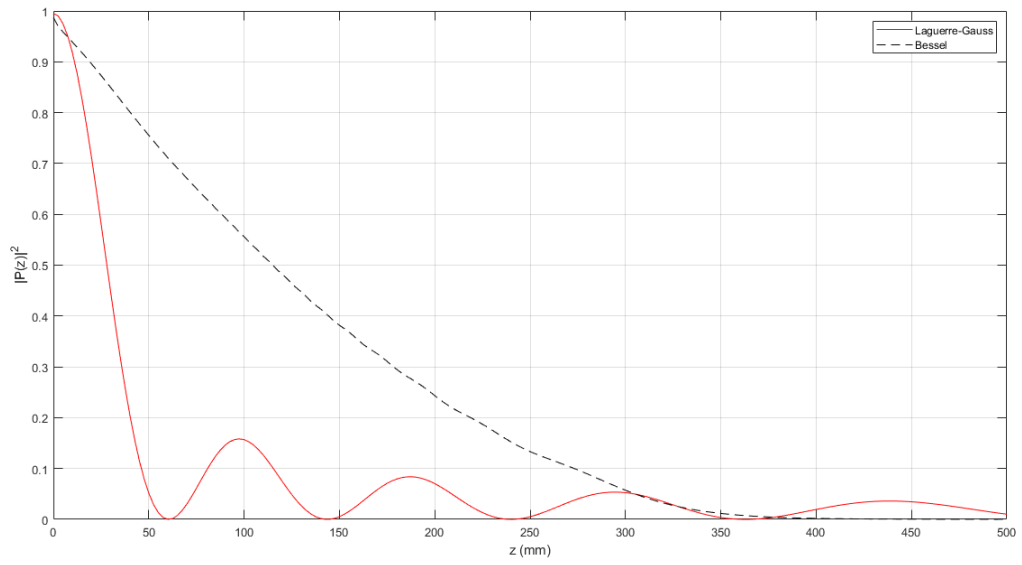
## 5.7 Campos de Tipos Diferentes

Nessa última seção, compararemos os gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para campos de tipos distintos com distribuições de intensidade originais semelhantes.

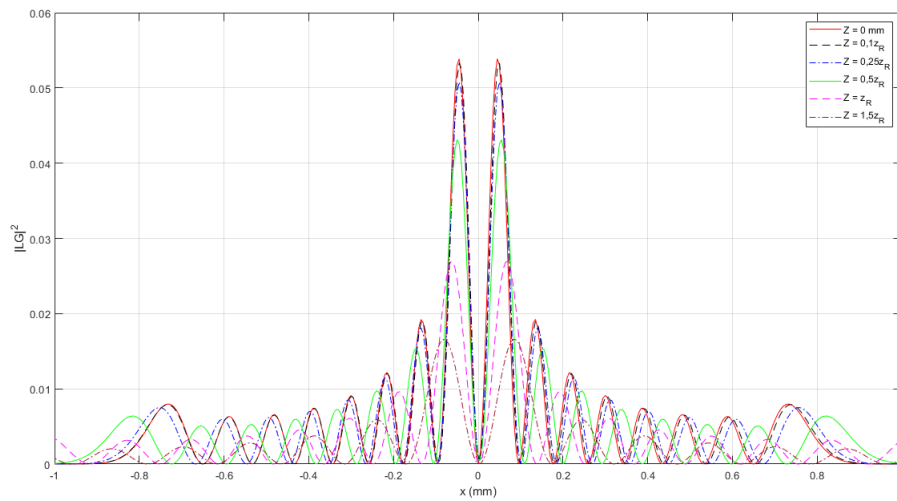
### 5.7.1 Modo de Laguerre-Gauss e Feixe de Bessel Truncado

Nossa primeira comparação será entre o modo de Laguerre-Gauss e o campo de Bessel truncado apresentados na seção 4.3. Vimos que um modo LG com índices  $l = 1$  e  $p = 0$  e cintura  $w_0 = 0,2\text{mm}$  tem uma distribuição de intensidade semelhante a um feixe de Bessel de ordem  $s = 1$  e raio do espectro angular  $R_k = 38,73\text{mm}^{-1}$ , truncado em um raio  $R_{\max} = 0,78\text{mm}$ . As imagens a seguir mostram os gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  (fig. 5.23) e as distribuições de intensidade com  $y = 0$  (figs. 5.24 e 5.25) para certas distâncias de propagação. Nesse caso a distância de Rayleigh do modo de Laguerre-Gauss é  $z_R = 199,47\text{mm}$ .

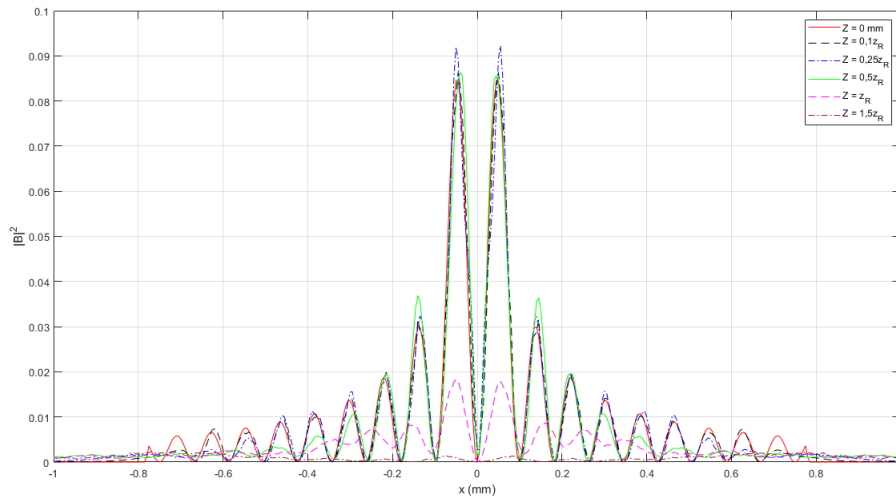




**Figura 5.23:** Gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para  $LG_{17}$  com  $w_0 = 0,2\text{mm}$  e para um feixe de Bessel com  $s = 1$  e  $R_k = 38,73\text{mm}^{-1}$  truncado em  $R_{\text{max}} = 0,78\text{mm}$ .



**Figura 5.24:** Gráfico de  $|LG_{17}|^2 \times x$  para  $y = 0$ , com  $w_0 = 0,2\text{mm}$  e  $\Delta_k = 0,5\text{mm}^{-1}$  e  $z_R = 199,47\text{mm}$ , para  $z = 0, 0,1z_R, 0,25z_R, 0,5z_R, z_R$  e  $1,5z_R$ .



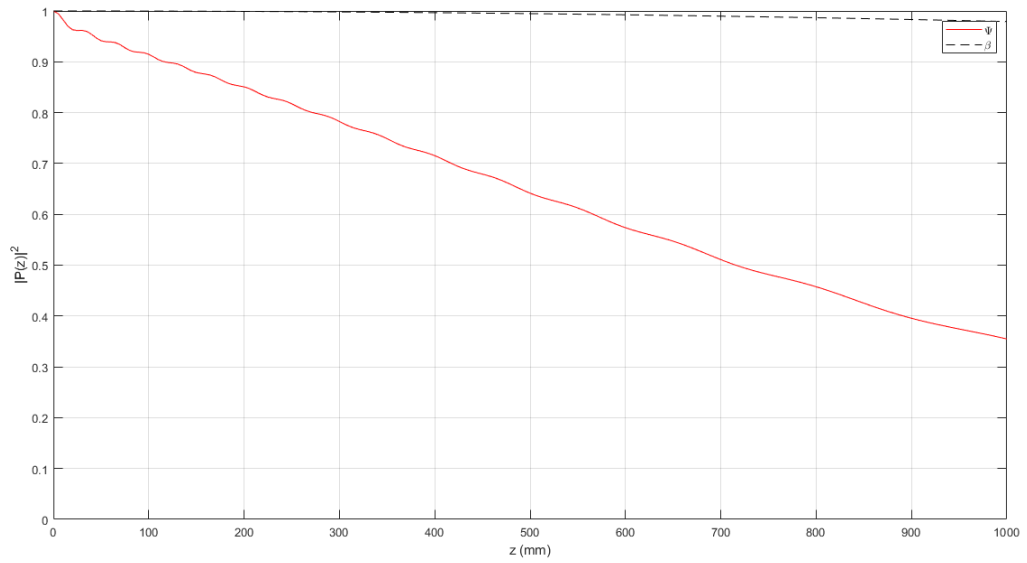
**Figura 5.25:** Gráfico de  $|Bt_1|^2 \times x$  para  $y = 0$ , com  $s = 1$ ,  $R_k = 38,73\text{mm}^{-1}$  e  $R_{\text{max}} = 0,78\text{mm}$ , para  $z = 0, 0,1z_R, 0,25z_R, 0,5z_R, z_R$  e  $1,5z_R$ .

Portanto, podemos ver que, apesar de terem distribuições de intensidade semelhantes, o feixe de Bessel truncado pode ser considerado menos difrativo do que o modo de Laguerre-Gauss.

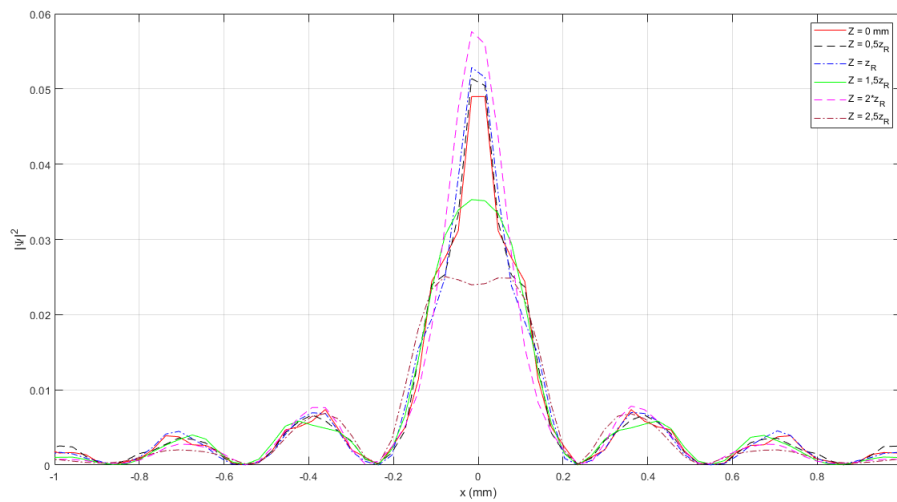
### 5.7.2 Feixe Semelhante ao de Bessel e Superposição de Modos de Laguerre-Gauss

Nossa segunda comparação é entre campos semelhantes ao de Bessel definidos por (4.34) e suas descrições como superposições de modos de Laguerre-Gauss truncadas em um índice radial  $p_{\text{max}}$ , descritas por (4.46). Usaremos campos  $\beta_0(\rho, \phi; 0)$  com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$ . Já  $\Psi_0(\rho, \phi; 0)$  tem modos LG de cintura  $w_0 = 0,2\text{mm}$  ( $z_R = 199,47\text{mm}$ ) e índice  $p$  máximo  $p_{\text{max}} = 20$ .

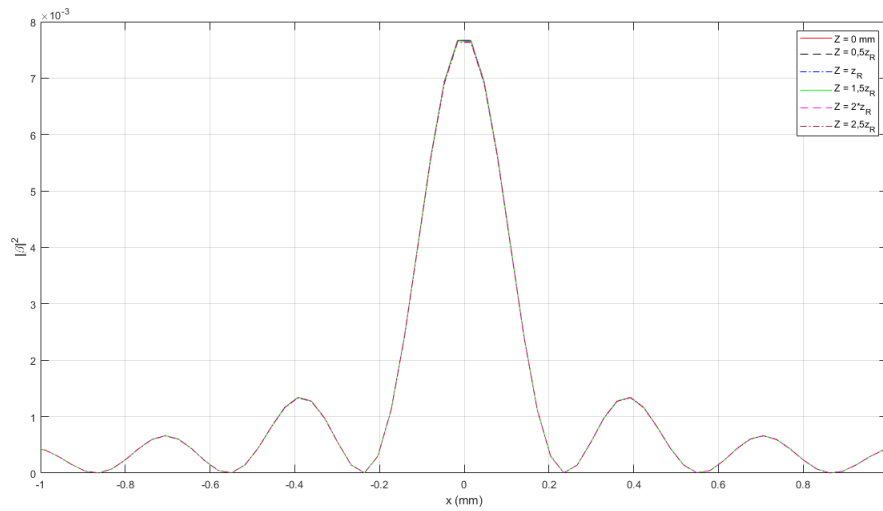
Primeiro, fizemos os cálculos com a largura do espectro angular de  $\beta_0(\rho, \phi; 0)$  sendo  $\Delta_k = 0,5\text{mm}^{-1}$ . Nesse caso, obtivemos  $S = 0,1955$  (4.54). As imagens abaixo mostram os gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  (fig. 5.26) e as distribuições de intensidade com  $y = 0$  (figs. 5.27 e 5.28) para certas distâncias de propagação.



**Figura 5.26:** Gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para  $\beta_0$  e  $\Psi_0$  com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 0,5\text{mm}^{-1}$  e  $p_{\max} = 20$ .



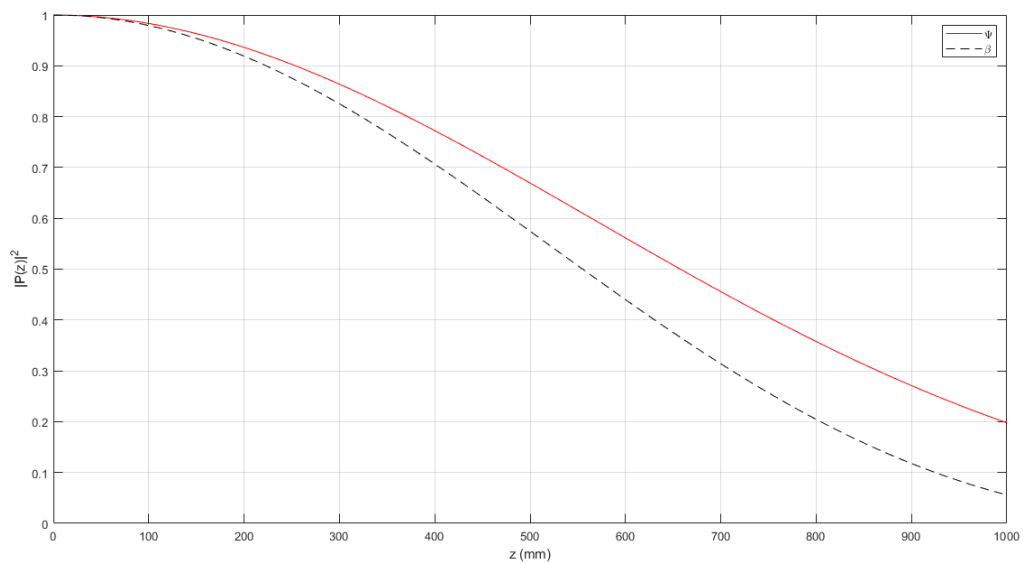
**Figura 5.27:** Gráfico de  $|\Psi_0|^2 \times x$  para  $y = 0$ , com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 0,5\text{mm}^{-1}$ ,  $p_{\max} = 20$ ,  $w_0 = 0,2\text{mm}$  e  $z_R = 199,47\text{mm}$ , para  $z = 0, 0,5z_R, z_R, 1,5z_R, 2z_R$  e  $2,5z_R$ .



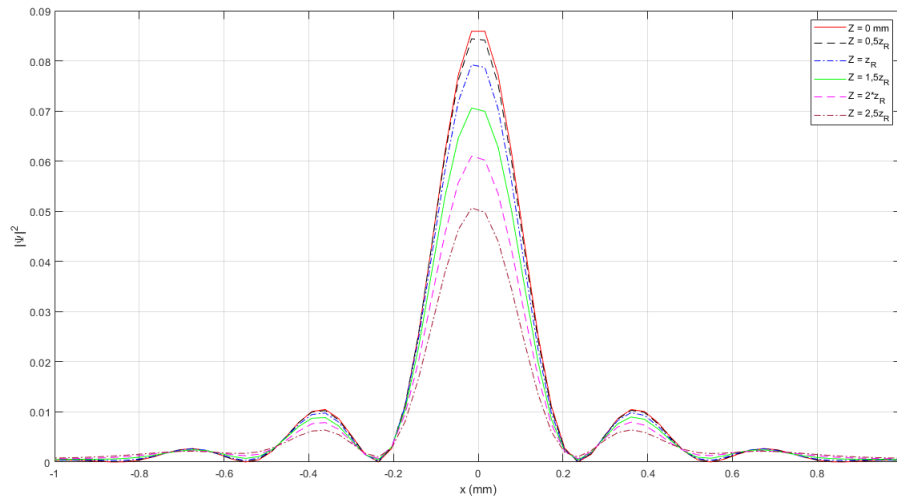
**Figura 5.28:** Gráfico de  $|\beta_0|^2 \times x$  para  $y = 0$ , com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 0,5\text{mm}^{-1}$ , para  $z = 0, 0,5z_R, z_R, 1,5z_R, 2z_R$  e  $2,5z_R$ .

Podemos ver, nesse caso, que o campo original  $\beta_0(\rho, \phi; 0)$  pode ser considerado aproximadamente não-difrativo por uma distância bem maior do que a superposição de Laguerre-Gauss.

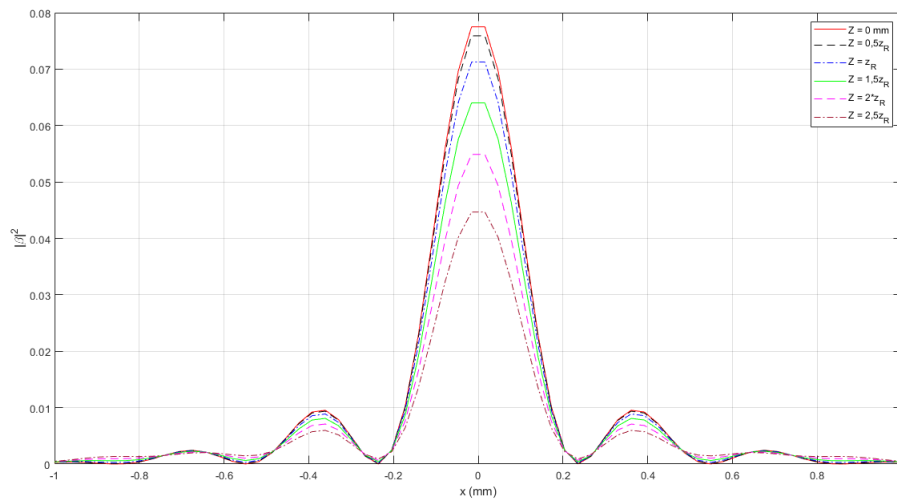
Repetimos esses mesmos cálculos, alterando apenas a largura do espectro angular do campo original para  $\Delta_k = 5\text{mm}^{-1}$  e obtivemos  $S = 0,9028$ . As imagens a seguir mostram os gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  (fig. 5.29) e as distribuições de intensidade  $y = 0$  dos campos normalizados para certas distâncias de propagação (figs. 5.30 e 5.31).



**Figura 5.29:** Gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para  $\beta_0$  e  $\Psi_0$  com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 5\text{mm}^{-1}$  e  $p_{\max} = 20$ .



**Figura 5.30:** Gráfico de  $|\Psi_0|^2 \times x$  para  $y = 0$ , com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 5\text{mm}^{-1}$ ,  $p_{\max} = 20$ ,  $w_0 = 0,2\text{mm}$  e  $z_R = 199,47\text{mm}$ , para  $z = 0, 0,5z_R, z_R, 1,5z_R, 2z_R$  e  $2,5z_R$ .



**Figura 5.31:** Gráfico de  $|\beta_0|^2 \times x$  para  $y = 0$ , com  $R_k = 10\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 5\text{mm}^{-1}$ , para  $z = 0, 0,5z_R, z_R, 1,5z_R, 2z_R$  e  $2,5z_R$ .

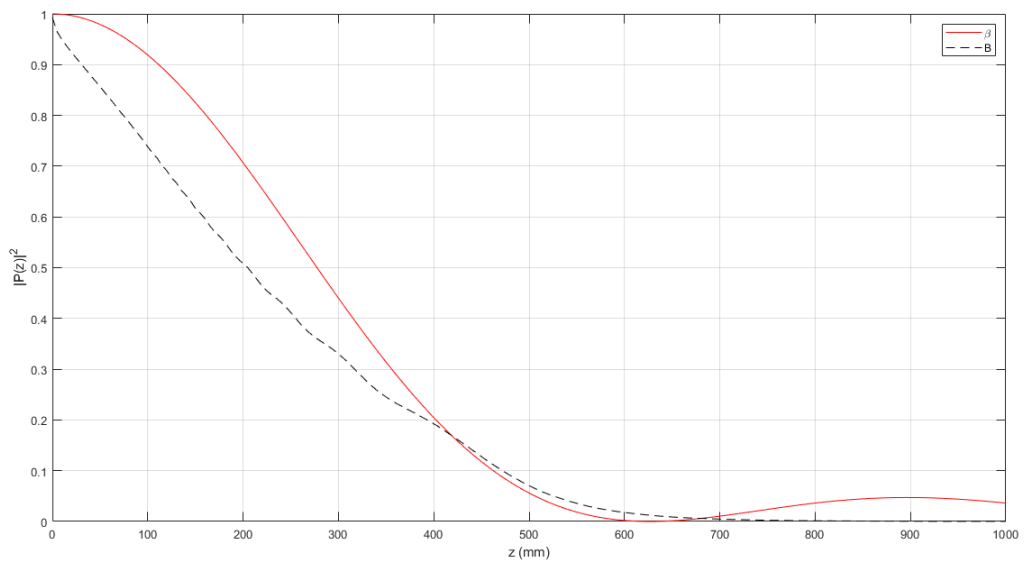
É interessante notar que, embora as distribuições de intensidade dos campos sejam muito semelhantes, o gráfico de  $|\mathcal{P}(z)|^2$  de  $\Psi_0(\rho, \phi; 0)$  está acima do de  $\beta_0(\rho, \phi; 0)$ . Isso indica que a superposição de modos LG é aproximadamente não-difrativa por uma distância um pouco maior do que o campo original.

### 5.7.3 Feixe de Bessel Truncado e Feixe Semelhante ao de Bessel

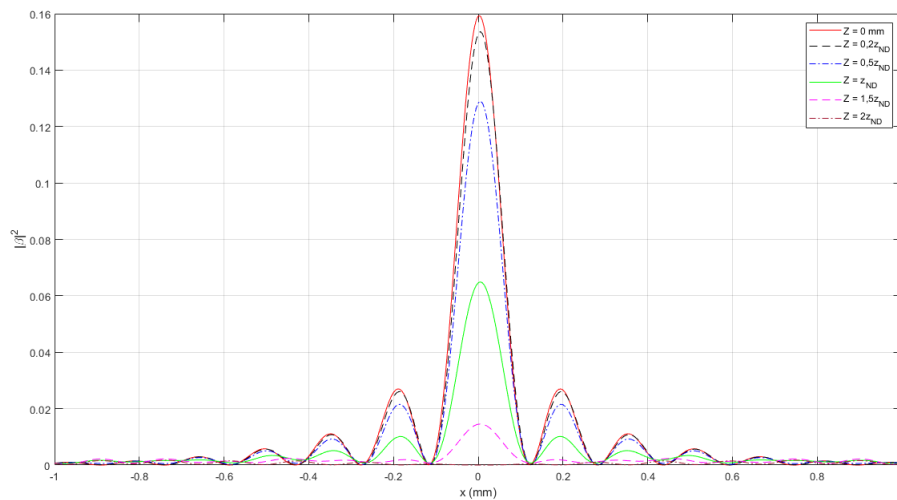
Por fim, comparamos feixes de Bessel truncados  $Bt_s(\rho, \phi; 0)$  (4.17) com feixes  $\beta_s(\rho, \phi; 0)$  semelhantes aos de Bessel (4.34). Usamos os mesmos valores de  $R_k$  e mesma

ordem  $s$  para ambos e truncamos o feixe de Bessel de forma que ambos os campos comparados fossem significativamente diferentes de 0 na mesma região do plano  $xy$ . Usamos  $R_k = 20\text{mm}^{-1}$  e  $\Delta_k = 5\text{mm}^{-1}$  em ambos os cálculos. A distância de não-difração desse campo  $\beta_s(\rho, \phi; 0)$  é  $z_{ND} = 313.3208\text{mm}$ .

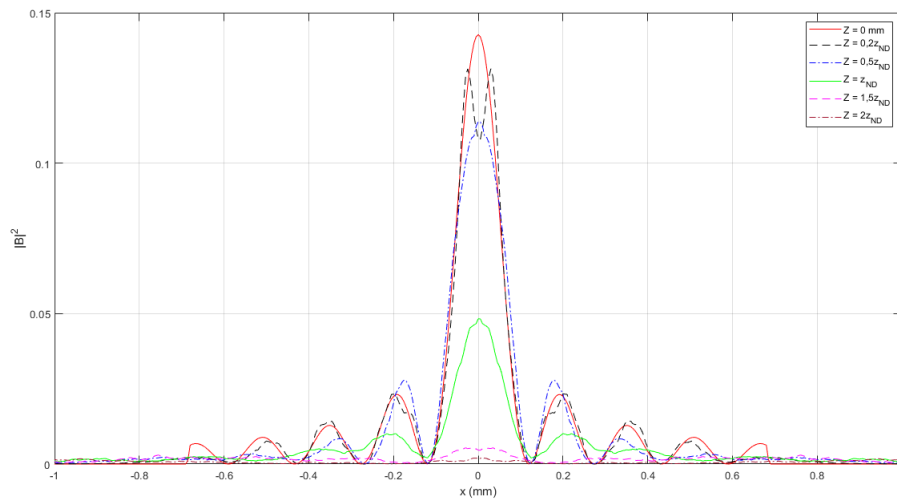
Primeiro, usamos campos de ordem  $s = 0$ . Nesse caso, o feixe de Bessel foi truncado em um raio  $R_{\max} = 0,685\text{mm}$ . As próximas imagens mostram os gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  (fig. 5.32) e as distribuições de intensidade com  $y = 0$  (figs. 5.33 e 5.34) para certa distâncias de propagação.



**Figura 5.32:** Gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para  $\beta_0$  e  $Bt_0$  com  $R_k = 20\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 5\text{mm}^{-1}$  e  $R_{\max} = 0,685\text{mm}$ .



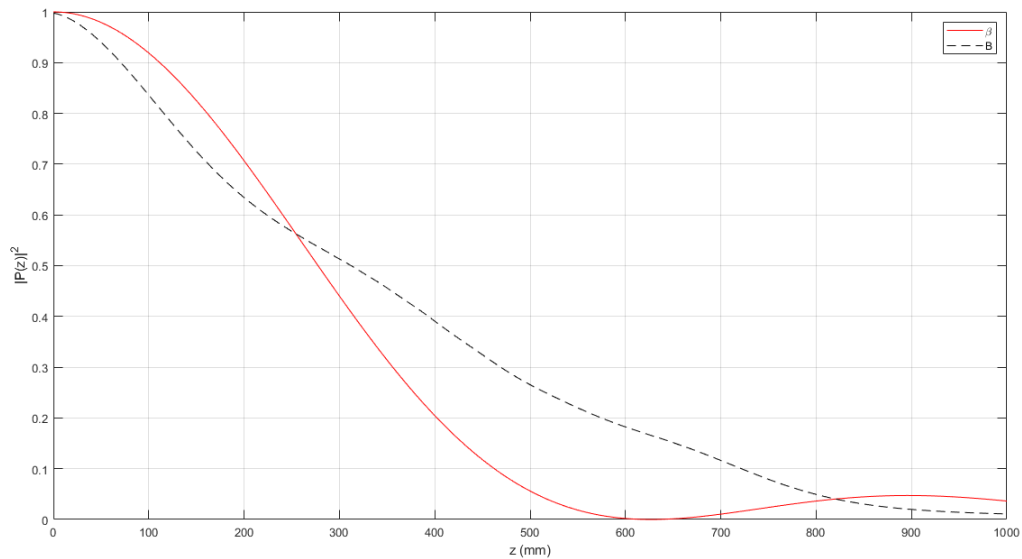
**Figura 5.33:** Gráfico de  $|\beta_0|^2 \times x$  para  $y = 0$ , com  $R_k = 20\text{mm}^{-1}$  e  $\Delta_k = 5\text{mm}^{-1}$ , para  $z = 0, 0,2z_{ND}, 0,5z_{ND}, z_{ND}, 1,5z_{ND}$  e  $2z_{ND}$ .



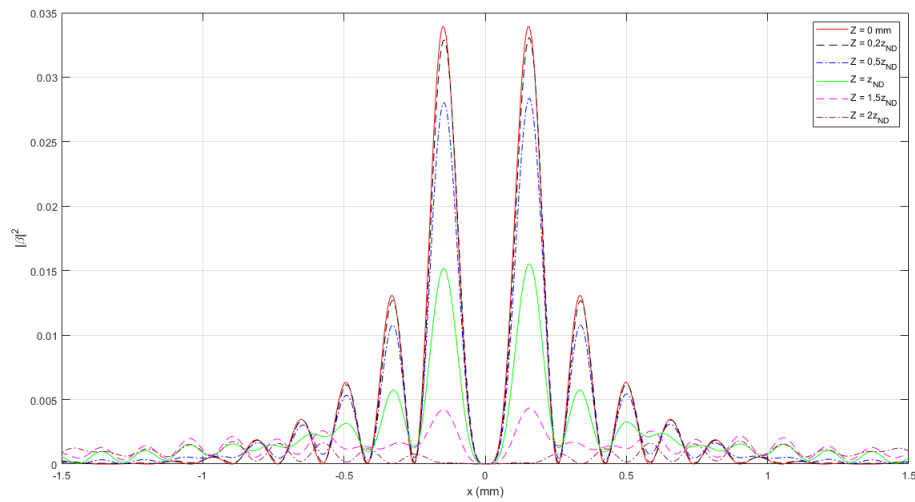
**Figura 5.34:** Gráfico de  $|Bt_0|^2 \times x$  para  $y = 0$ , com  $R_k = 20\text{mm}^{-1}$  e  $R_{\max} = 0,685\text{mm}^{-1}$ , para  $z = 0, 0,2z_{ND}, 0,5z_{ND}, z_{ND}, 1,5z_{ND}$  e  $2z_{ND}$ .

Podemos ver que o campo  $\beta_0(\rho, \phi; 0)$  pode ser considerado aproximadamente não-difrativo por uma distância um pouco maior do que o feixe de Bessel truncado.

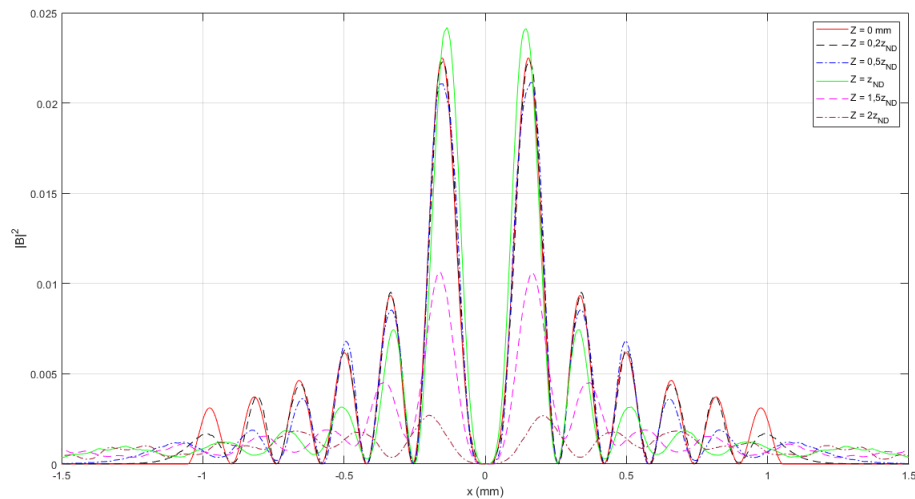
Por fim, repetimos os cálculos anteriores para campos de ordem  $s = 2$ . Nesse caso,  $R_{\max} = 1,05\text{mm}$ . As imagens abaixo mostram os gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  (fig. 5.35) e as distribuições de intensidade com  $y = 0$  (figs. 5.36 e 5.37) para certas distâncias de propagação.



**Figura 5.35:** Gráficos de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  para  $\beta_2$  e  $Bt_2$  com  $R_k = 20\text{mm}^{-1}$ ,  $\Delta_k = 5\text{mm}^{-1}$  e  $R_{\max} = 0,685\text{mm}$ .



**Figura 5.36:** Gráfico de  $|\beta_2|^2 \times x$  para  $y = 0$ , com  $R_k = 20\text{mm}^{-1}$  e  $\Delta_k = 5\text{mm}^{-1}$ , para  $z = 0, 0,2z_{ND}, 0,5z_{ND}, z_{ND}, 1,5z_{ND}$  e  $2z_{ND}$ .



**Figura 5.37:** Gráfico de  $|Bt_2|^2 \times x$  para  $y = 0$ , com  $R_k = 20\text{mm}^{-1}$  e  $R_{\max} = 1,05\text{mm}^{-1}$ , para  $z = 0, 0,2z_{ND}, 0,5z_{ND}, z_{ND}, 1,5z_{ND}$  e  $2z_{ND}$ .

Dessa vez, o gráfico de  $|\mathcal{P}(z)|^2 \times z$  do campo  $\beta_0(\rho, \phi; 0)$  só está acima do outro até uma distância  $z \approx 255\text{mm}$ .



# Capítulo 6

## Conclusão

Neste trabalho, revisamos conceitos importantes sobre a propagação de feixes paraxiais, em particular, os que têm algum tipo de invariância por propagação. Apresentamos os modos Gaussianos, que são estruturalmente estáveis, os feixes de Bessel, que são completamente não-difrativos e mostramos dois feixes aproximadamente não-difrativos conhecidos: os de Bessel truncados, os de Bessel-Gauss e um feixe cujo espectro angular seja constante em uma pequena largura em torno de um raio central e nulo fora dela. Também mostramos como usar os feixes citados para gerar autoimagens.

Além disso, propusemos um método quantitativo para analisar propriedades de invariâncias por propagação. O método proposto é baseado no produto escalar entre as distribuições de amplitude de um campo na origem e em outras distâncias de propagação. Vimos, através de exemplos, que há concordância entre essa medida e uma comparação visual entre as distribuições de intensidade de um campo ao longo de sua propagação.

Também aplicamos o método proposto para estudar diversos feixes e suas propriedades não-difrativas e de autoimagem. Observamos que elevar o número de anéis do campo, por exemplo, aumentando o índice radial de um modo de Laguerre-Gauss ou o raio do espectro angular de um campo aproximadamente não-difrativo, torna ele menos não-difrativo. Por fim, comparamos alguns dos campos apresentados nesta dissertação com distribuições de intensidade iniciais semelhantes, buscando ver quais poderiam ser considerados aproximadamente não-difrativos pela maior distância. Observamos que quando um feixe é descrito como uma superposição de modos de Laguerre-Gauss e essa soma é truncada em um índice radial máximo, o novo feixe obtido pode ser menos difrativo do que o original, dependendo dos parâmetros usados em sua construção. Além disso, em

uma comparação entre feixes de Bessel truncados e feixes cujos espectros angulares são anéis de largura finita, os segundos obtiveram performances melhores que os primeiros.

# Apêndice A

## Identidades da Transformada de Fourier

Nesse apêndice, apresentaremos brevemente as principais identidades das transformadas de Fourier. Suas provas podem ser encontradas na referência [14]. Sejam  $W(x, y; z)$  e  $H(x, y; z)$  funções no espaço das posições,  $V(k_x, k_y; z) = \mathcal{F}\{W(x, y; z)\}$  e  $K(k_x, k_y; z) = \mathcal{F}\{H(x, y; z)\}$  suas respectivas transformadas de Fourier e  $a$  e  $b$  números complexos. A transformada de Fourier é definida pela equação (2.19), enquanto a transformada de Fourier inversa é definida por (2.20). As principais identidades são:

### 1. Linearidade:

$$\mathcal{F}\{aW(x, y; z) + bH(x, y; z)\} = aV(k_x, k_y; z) + bK(k_x, k_y; z). \quad (\text{A.1})$$

### 2. Similaridade:

$$\mathcal{F}\{W(ax, by; z)\} = \frac{1}{|ab|} V\left(\frac{k_x}{a}, \frac{k_y}{b}; z\right). \quad (\text{A.2})$$

### 3. Translação:

$$\mathcal{F}\{W(x - a, y - b; z)\} = V(k_x, k_y; z)e^{-i(k_x a + k_y b)}, \quad (\text{A.3})$$

ou ainda:

$$\mathcal{F}\left\{e^{-i(ax+by)}W(x, y; z)\right\} = V(k_x + a, k_y + b; z). \quad (\text{A.4})$$

### 4. Teorema de Rayleigh:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |W(x, y; z)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |V(k_x, k_y; z)|^2 dk_x dk_y. \quad (\text{A.5})$$

### 5. Teorema da Convolução:

Usaremos o símbolo “ $\otimes$ ” para representar a operação de convolução, definida como:

$$W(x, y; z) \otimes H(x, y; z) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(u, v; z) H(x - u, y - v) du dv . \quad (\text{A.6})$$

De acordo com o Teorema da Convolução para transformadas de Fourier,

$$\mathcal{F}\{W(x, y; z) \otimes H(x, y; z)\} = 2\pi V(k_x, k_y; z) K(k_x, k_y; z) , \quad (\text{A.7})$$

ou ainda:

$$\mathcal{F}\{W(x, y; z) H(x, y; z)\} = \frac{1}{2\pi} V(k_x, k_y; z) \otimes K(k_x, k_y; z) . \quad (\text{A.8})$$

### 6. Teorema da Inversão de Fourier

Nos pontos  $(x, y)$  em que  $W(x, y; z)$  é contínua, vale:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{W(x, y; z)\}\} = W(x, y; z) , \quad (\text{A.9})$$

ou ainda:

$$\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{W(x, y; z)\}\} = W(-x, -y; z) . \quad (\text{A.10})$$

Em um ponto de descontinuidade, o resultado das transformadas sucessivas é a média angular dos valores de  $W(x, y; z)$  em uma vizinhança pequena do ponto.

As identidades da transformada Inversa de Fourier são análogas às apresentadas acima.

## Referências Bibliográficas

- [1] Arlt, J., Garcés-Chávez, V., Sibbett, W. e Dholakia, K. 2001 Opt. Commun. **197(4-6)**, 239.
- [2] Ashkin, A., Dziedzic, J. M., Bjorkholm, J. E. e Chu, S. 1986 Opt. Lett. **11(5)**, 288.
- [3] Courtial, J. 1998 Opt. Commun. **151(1-3)**, 1.
- [4] Courtial, J., Whyte, G., Bouchal, Z. e Wagner, J. 2006 Opt. Express **14(6)**, 2108.
- [5] da Silva, B. P., Pinillos, V. A., Tasca, D. S., Oxman, L. E. e Khoury, A. Z. 2020 Phys. Rev. Lett. **124(3)**, 033902.
- [6] Durnin, J. J. J. A. 1987 J. Opt. Soc. Am. **4(4)**, 651.
- [7] Durnin, J. J. J. M., Miceli Jr, J. J. e Eberly, J. H. 1987 Phys. Rev. Lett **58(15)**, 1499.
- [8] Durnin, J., Miceli, J. J. e Eberly, J. H. 1988 Opt. Lett. **13(2)**, 79.
- [9] Feng, S., e Winful, H. G. 2001 Opt. Lett. **26(8)**, 485.
- [10] Garcés-Chávez, V., McGloin, D., Melville, H., Sibbett, W. e Dholakia, K. 2002 Nature **419(6903)**, 145.
- [11] Goodman, J. W. 1996 *Introduction to Fourier Optics* (New York, McGraw-Hill) 2<sup>a</sup> ed., cap. 3
- [12] Goodman, J. W. 1996 *Introduction to Fourier Optics* (New York, McGraw-Hill) 2<sup>a</sup> ed., cap. 4.
- [13] Goodman, J. W. 1996 *Introduction to Fourier Optics* (New York, McGraw-Hill) 2<sup>a</sup> ed., cap. 5

- [14] Goodman, J. W. 1996 *Introduction to Fourier Optics* (New York, McGraw-Hill) 2<sup>a</sup> ed., ap. A
- [15] Gori, F., Guattari, G. e Padovani, C. 1987 *Opt. Commun.*, **64(6)**, 491.
- [16] Gradshteyn, I. S. e Ryzhik, I. M. 2007 *Table of integrals, series, and products* (Cambridge, Academic Press) 7<sup>a</sup> ed
- [17] Griffiths, D.J. 2017 *Introduction to Electrodynamics* (Cambridge, Cambridge University Press) 4<sup>a</sup> ed, cap. 9.
- [18] Huang, H. e Yu, Y. 2019 *J. Microw. Optoelectron. Electromagn. Appl.* **18**, 306.
- [19] Indebetouw, G. 1989 *J. Opt. Soc. Am.* **6(1)**, 150.
- [20] Krenn, M., Malik, M., Scheidl, T., Ursin, R. e Zeilinger, A. 2016 *Optics in Our Time*, (Cham, Springer International Publishing), cap. 18.
- [21] Lee, W. M. e Yuan, X. C. 2003 *Appl. Phys. Lett.* **83(25)**, 5124.
- [22] Lee, W. M., Yuan, X. C. e Tang, D. Y. 2003 *Opt. Express* **11(3)**, 199.
- [23] Lin, Y., Seka, W., Eberly, J. H., Huang, H. e Brown, D. L. 1992 *Appl. Opt.* **31(15)**, 2708.
- [24] McGloin, D., Garcés-Chávez, V. e Dholakia, K. 2003 *Opt. Lett.* **28(8)**, 657.
- [25] Mendoza-Hernández, J., Arroyo-Carrasco, M. L., Iturbe-Castillo, M. D. e Chávez-Cerda, S. 2015 *Opt. Lett.* **40(16)**, 3739.
- [26] O’Neil, A. T. e Courtial, J. 2000 *Opt. Commun.* **181(1-3)**, 35.
- [27] Overfelt, P. L. e Kenney, C. S. 1991 *Opt. Soc. Am.* **8(5)**, 732.
- [28] Padgett, M. J. 2017 *Opt. Express* **25(10)**, 11265.
- [29] Patorski, K. 1989 *Progress in optics, vol. 27* (Amsterdam, Elsevier), cap. 1
- [30] Phillips, R. L. e Andrews, L. C. 1983 *Appl. Opt.* **22(5)**, 643.
- [31] Saleh, B.E.A e Teich, M.C. 1991 *Fundamentals of Photonics* (New York, John Wiley & Sons, Inc.), cap. 3.

- [32] Schulze, C., Flamm, D., Duparré, M. e Forbes, A. 2012 Opt. Lett. **37(22)**, 4687.
- [33] Talbot, H. F. 1836 Philos. Mag. **9(56)**, 401.
- [34] Turunen, J., Vasara, A. e Friberg, A. T. 1988 Appl. Opt. **27(19)**, 3959.
- [35] Vaity, P. e Rusch, L. 2015 Opt. Lett. **40(4)**, 597
- [36] Gaussian beam. (2022, 15 de Janeiro). Em *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Gaussian\\_beam&oldid=1065900021](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Gaussian_beam&oldid=1065900021)