

Universidade Federal Fluminense



Classificação da não-separabilidade de modos spin-órbita com aprendizado de máquina

Telma Fátima Clarita de Carvalho

Volta Redonda

2022

Telma Fátima Clarita de Carvalho

Classificação da não-separabilidade de modos spin-órbita com aprendizado de máquina

Dissertação de Mestrado apresentada ao programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Mestre em Física.

Universidade Federal Fluminense – UFF

Instituto de Física

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Prof. Dr. José Augusto Oliveira Huguenin

Volta Redonda – RJ

2022

Ficha catalográfica automática - SDC/BIF
Gerada com informações fornecidas pelo autor

C331c Carvalho, Telma Fátima Clarita de
Classificação da não-separabilidade de modos spin-órbita
com aprendizado de máquina / Telma Fátima Clarita de
Carvalho ; José Augusto Oliveira Huguenin, orientador.
Niterói, 2022.
85 p. : il.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,
Niterói, 2022.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22409/PPGF.2022.m.12406156710>

1. Computação quântica e informação quântica. 2.
Estados tipo Werner. 3. Modos spin-órbita. 4. Aprendizado de
máquina. 5. Produção intelectual. I. Huguenin, José
Augusto Oliveira, orientador. II. Universidade Federal
Fluminense. Instituto de Física. III. Título.

CDD -

Telma Fátima Clarita de Carvalho

Classificação da não-separabilidade de modos spin-órbita com aprendizado de máquina

Dissertação de Mestrado apresentada ao programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Mestre em Física.

Trabalho aprovado. Volta Redonda – RJ, 28 de abril de 2022:

**Prof. Dr. José Augusto Oliveira
Huguenin**
Orientador

**Prof.Dr. Fernando Luis da Silva
Semiao (UFABC)**
Membro Externo

**Prof.Dr. Antônio Zelaquett Khoury
(UFF)**
Membro Interno

Volta Redonda – RJ
2022

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de demonstrar minha eterna gratidão aos meus pais, José de Carvalho e Vicentina de Carvalho, pelo apoio incondicional e pelo incansável amparo em todos os momentos no decorrer da pós-graduação e, sobretudo, no transcorrer da vida. Ademais, também gostaria de agradecer ao meu irmão, Rodrigo de Carvalho, que, mesmo distante, me incentivou a manter o foco na busca pelos objetivos em cada etapa do curso. Agradeço ao meu companheiro de vida, Daniel Ferreira, por me motivar a jamais desistir, me fortalecendo nos momentos mais difíceis durante o mestrado e valorizando cada pequeno avanço realizado, sendo capaz de acreditar mais em mim do que eu mesma. Essa conquista não é só minha, é nossa! Além disso, aproveito para expressar minha gratidão aos familiares e amigos pela compreensão nas horas de ausência devido à dedicação aos estudos.

Em particular, gostaria de agradecer ao meu orientador, professor Dr. José Augusto Oliveira Huguenin, por acolher minha curiosidade inicial com a área, me impulsionar desde o início do mestrado de tal modo, que levou adiante meu pedido e oportunizou minha participação nas disciplinas como aluna ouvinte antes mesmo de ingressar no curso. Como também, pela paciência e excepcional dedicação na elaboração deste trabalho e flexibilidade diante das mudanças necessárias no desenvolvimento da pesquisa devido a pandemia. Estendo o reconhecimento ao professor Dr. Wagner Franklin Balthazar, a quem considero como mentor, sempre solícito e disposto a contribuir, seja relacionado a este trabalho, seja com dúvidas a respeito de carreira. Por fim, agradeço à Capes por me conceder uma bolsa de pós-graduação, a qual me possibilitou dedicação integral a minha formação acadêmica.

*The 'paradox' is only a conflict between reality and your feeling of what reality
ought to be.*
(Richard Feynman)

Resumo

Neste trabalho, apresentamos um estudo sobre a não-separabilidade de modos spin-órbita mistos de um feixe de laser, que emula estados mistos emaranhados, usando classificação de Aprendizado de Máquina. A não-separabilidade dos modos spin-órbita mistos segue os resultados do critério PPT para classificação de emaranhamento de estados quânticos mistos genuínos. Apresentamos também um circuito linear que otimiza a produção de uma ampla classe de modos spin-órbita mistos, especialmente os estados de spin-órbita do tipo Werner. Nossos resultados mostram que os modos spin-órbita também podem ser aplicados no cenário dos estados mistos. Além disso, estudamos o problema de classificação usando dados de tomografias parciais e os resultados obtidos são muito precisos para caracterizar a não-separabilidade.

Palavras-chaves: computação quântica e informação quântica. estados tipo Werner. modos spin-órbita. tomografia de estados quânticos. aprendizado de máquina.

Abstract

In this work, we present a study about the non-separability of mixed spin-orbit modes of a laser beam, which emulates entangled mixed states, using Machine Learning classification. The non-separability of the mixed spin-orbit modes follows the results of the PPT criterion for entanglement classification of genuine mixed quantum states. We also present a linear circuit that optimizes the production of a wide class of mixed spin-orbit modes, especially the spin-orbit Werner-like states. Our results show that spin-orbit modes can also be applied in the scenario of the mixed states. In addition, we study the classification problem using partial tomographic data and the obtained results are very precise to characterize the non-separability.

Key-words: quantum computation and quantum information. Werner-like states. spin-orbit modes. quantum states tomography. machine learning.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação de uma onda eletromagnética com seus respectivos campos elétrico e magnético oscilando perpendicularmente entre si. Fonte: (38)	26
Figura 2 – Representação de uma onda linearmente polarizada. Fonte: (45)	28
Figura 3 – Representação de uma onda circularmente polarizada à direita. Fonte: (45)	29
Figura 4 – Representação de uma onda elipticamente polarizada. Fonte: (45)	30
Figura 5 – Representação de uma placa de onda, onde há incidência de um campo elétrico, cujo eixo $x(y)$ é denominado por eixo rápido (lento) e possui espessura d . Fonte: (38)	30
Figura 6 – Representação de duas placas de onda, uma HWP seguida por uma QWP, que sofrem incidência de luz circularmente polarizada. Fonte: (38), adaptado pela autora	32
Figura 7 – Representação dos estados de polarização na esfera de Poincaré. Fonte: (38)	33
Figura 8 – Representação da esfera de Bloch: a) para um sistema de um q-bit – fonte: (3) – e b) para a polarização – fonte: própria autora	34
Figura 9 – Propriedades de um feixe Gaussiano e perfil de intensidade transversal do mesmo. Fonte: (38)	36
Figura 10 – Perfil de intensidade dos modos HG. Fonte: (49)	37
Figura 11 – Combinação linear entre os modos HG. Fonte: própria autora	37
Figura 12 – Representação de feixes com suas respectivas frentes de onda: (a) Feixe HG com sua frente de onda plana e (b) Feixe LG com sua frente de onda helicoidal. Fonte: (38)	38
Figura 13 – Perfil de intensidade dos modos LG. Fonte: (49)	39
Figura 14 – Representação dos modos transversos de primeira ordem na esfera de Poincaré. Fonte: (38)	39
Figura 15 – Representação da esfera de Bloch para os modos transversos. Fonte: própria autora	41
Figura 16 – Perfil transversal de modos spin-órbita maximamente não-separáveis. Fonte: (39)	43
Figura 17 – Circuito óptico de preparação de estados de Werner com modos spin-órbita. Fonte: (31)	51
Figura 18 – Representação do circuito óptico de tomografia para sistemas bipartites codificados em modos spin-órbita. Fonte: (31), adaptado pela autora	56

Figura 19 – Representação de uma rede neural artificial com uma camada oculta. Os neurônios são ilustrados pelos círculos em azul, os quais são separados por camadas – indicadas pelo sombreado cinza – e as setas representam as conexões entre eles. Fonte: própria autora	60
Figura 20 – Circuito óptico para preparação de estados spin-órbita do tipo Werner. Fonte: própria autora	67
Figura 21 – Simulação do perfil transversal associado ao modo de polarização radial ($ \Psi_+\rangle$) e modos separáveis (elementos de base spin-órbita). Fonte: própria autora	68
Figura 22 – Circuito óptico para: a) preparação de estado misto com dois modos spin-órbita do tipo Bell e b) preparação de estado misto com quatro modos spin-órbita do tipo Bell. Cada modo ρ_{Bell_i} é preparado em um feixe de laser independente. Fonte: própria autora	70
Figura 23 – Gráfico da classificação da rede neural. Cada estado testado é representado por um ponto. Pontos em ciano indicam estado separável e pontos em azul indicam não-separável. Sombreado: região de emaranhamento do estado quântico de Werner ($p > \frac{1}{3}$).	73
Figura 24 – Gráfico da classificação da rede neural. Treinamento com dados da matriz densidade completa e teste com dados contendo medições parciais e erros de ângulo nos dispositivos ópticos: a) medição em S_z e S_y , b) medição em S_z e S_x e c) medição em S_z	74
Figura 25 – Gráfico da classificação da rede neural. Treinamento e teste com dados contendo medidas parciais e erros de ângulo nos dispositivos ópticos: a) medição em S_z e S_y , b) medição em S_z e S_x e c) medição em S_z	76
Figura 26 – Gráfico da classificação da rede neural. Treinamento e teste com modos spin-órbita mistos conforme a equação 6.1, usando medição parcial e simulando erros de ângulo nos dispositivos ópticos: a) medição em S_z e S_y , b) medição em S_z e S_x e c) medição em S_z . Sombreado: região de emaranhamento do estado quântico correspondente de acordo com os resultados do critério PPT.	77
Figura 27 – Gráfico da classificação da rede neural. Treinamento e teste com medição parcial em S_z e erros de ângulo nos dispositivos ópticos. Os estados preparados são dados pela Equação 6.2 para a) $\epsilon = 0,8$, b) $\epsilon = 0,6$, c) $\epsilon = 0,5$ e d) $\epsilon = 0,2$	78

Lista de tabelas

Tabela 1 – Relação dos parâmetro de Stokes, bases de medida e os dispositivos ópticos. O índice $i(j)$ se refere ao primeiro (segundo) q-bit. As bases $\{ H\rangle, V\rangle\}$ e $\{ h\rangle, v\rangle\}$ correspondem à base computacional, enquanto $\{ +\rangle, -\rangle\}$, $\{ R\rangle, L\rangle\}$ e $\{ r\rangle, l\rangle\}$ são estabelecidas através das equações 2.10-2.13. Fonte: (51), adaptado pela autora	57
---	----

Lista de abreviaturas e siglas

q-bit	bit quântico.
DoF	Graus de liberdade, do inglês <i>Degrees of freedom</i> .
MQ	Mecânica Quântica.
BS	Divisor de feixe, do inglês <i>Beam Splitter</i> .
PBS	Divisor de feixe polarizado, do inglês <i>Polarization Beam Splitter</i> .
MZIM	Interferômetro de Mach-Zehnder com uma reflexão espelho adicional.
CL	Lentes cilíndricas, do inglês <i>Cylindrical lenses</i> .
DP	Prisma de Dove, do inglês <i>Dove Prism</i> .
QWP	Placa de quarto de onda, do inglês <i>Quarter Wave Plate</i> .
HWP	Placa de meia onda, do inglês <i>Half Wave Plate</i> .
HG	Hermite-Gauss.
LG	Laguerre-Gauss.
MAO	Momento angular orbital.
PPT	Transposição parcial positiva, do inglês <i>Positive Partial Transposition</i> .
ML	Aprendizagem de máquina, do inglês <i>Machine Learning</i> .
NN	Rede neural, do inglês <i>Neural Network</i> .
ReLU	Unidade Linear Retificada, do inglês <i>Rectified Linear Unit</i> .
NF	Filtro neutro, do inglês <i>Neutral filter</i> .
SWP	Placa S, do inglês <i>S Wave Plate</i> .

Sumário

	Introdução	21
1	GRAUS DE LIBERDADE DA LUZ E A CODIFICAÇÃO DE Q-BITS	25
1.1	Q-bits	26
1.2	Polarização	27
1.3	Modos transversos	35
1.4	Modos spin-órbita	41
2	ESTADOS DE WERNER COM OS MODOS SPIN-ÓRBITA	45
2.1	Formalismo da matriz densidade para sistemas bipartites	45
2.2	Estados de Werner	47
2.3	Separabilidade e emaranhamento dos estados de Werner	48
2.3.1	Critério PPT	48
2.3.2	Aplicação do Critério PPT para os estados de Werner	49
2.4	Estados do tipo Werner com modos spin-órbita	50
2.5	Circuitos ópticos para geração de modos spin-órbita do tipo Werner	51
3	TOMOGRAFIA DE MODOS SPIN-ÓRBITA	53
3.1	Tomografia de 1 q-bit	53
3.2	Tomografia de 2 q-bits	55
3.3	Circuito óptico de tomografia de modos spin-órbita	55
4	APRENDIZADO DE MÁQUINA	59
5	CIRCUITOS ÓPTICOS PARA SIMULAÇÃO DE MODOS DO TIPO WERNER E OUTROS ESTADOS MISTOS	67
6	CLASSIFICAÇÃO DA NÃO-SEPARABILIDADE DE ESTADOS MISTOS POR APRENDIZADO DE MÁQUINA	73
6.1	Estados do tipo Werner	73
6.2	Diferentes classes de modos spin-órbita mistos	76
7	CONCLUSÃO	79
	REFERÊNCIAS	81

Introdução

Os alicerces da mecânica quântica estabelecidos durante a primeira metade do século XX foram responsáveis por uma grande revolução científica que alteraram o arquétipo de realidade física. Fenômenos quânticos, tais como os sistemas em estado de superposição descritos por Schrödinger (1), se distanciam da mecânica clássica e princípios, como o da incerteza formulado por Heisenberg (2), mudaram a compreensão do mundo em escala atômica e sub-atômica ao ponto de dar origem a um novo campo de estudo dentro da física: a mecânica quântica.

Com o passar do tempo, ao invés de apenas olhar para os sistemas quânticos puramente como fenômenos a serem explicados, sobreveio a concepção de enxergá-los como sistemas que poderiam ser projetados. A princípio, tal mudança de perspectiva nos parece pequena, no entanto suas implicações são profundas, cujo resultado foi o fortalecimento do interesse pelos fundamentos da mecânica quântica e também muitas novas questões combinando física, ciência da computação e teoria da informação (3).

Um dos fenômenos mais intrigantes da natureza e, ao mesmo tempo, mais úteis para aplicações de criptografia é o chamado emaranhamento, que é um recurso essencial para informação quântica e computação quântica (3). Apesar destes consistirem no estudo de processamento de informações que podem ser realizadas usando sistemas quânticos, os sistemas ópticos desempenham um papel importante no desenvolvimento e implementação do protocolo de informação quântica, haja vista que os sistemas ópticos são fontes confiáveis de emaranhamento (4).

Além disso, os bits quânticos (q-bits) podem ser codificados nos graus de liberdade (DoF) da luz, o que representa precisão na manipulação dos mesmos. Dessarte, vários protocolos foram implementados usando DoF da luz de forma bem sucedida no uso de sistemas ópticos, como, por exemplo, portas quânticas básicas (5), protocolos de computação quântica (6), teletransporte (7) e criptografia quântica (8).

Neste sentido, a classificação de estados emaranhados é um assunto de grande importância e o critério mais utilizado é a Transposição Parcial Positiva (PPT) (9, 10), que é suficiente para classificar sistemas bipartidos como estados separáveis ou emaranhados, embora, para estados de alta dimensão, o critério PPT possa falhar e um critério mais forte deva ser usado (11).

Ademais, para aplicar o critério PPT, se faz necessário determinar a matriz densidade do estado através da tomografia quântica, que caracteriza completamente a dinâmica de um sistema quântico. Todavia, tal processo é algo trabalhoso por razão de um estado não permitir ser determinado diretamente por uma única medição, de modo que é necessário

realizar preparações repetidas do mesmo estado quântico para que seja medido de maneiras diferentes e construir uma descrição completa do sistema quântico, por meio da tomografia quântica (3).

Em vista disso, o problema de classificação ganhou uma ferramenta poderosa nos últimos anos: aprendizado de máquina (ML) (12) por razão de ser um sistema computacional que pode modificar seu comportamento autonomamente tendo como base a sua própria experiência com mínima interferência humana, também estendido ao domínio da mecânica quântica (13).

Recentemente, o aprendizado de máquina tem sido empregado em vários domínios da óptica, como comunicação quântica (14), espectroscopia coerente (15), distribuição de chaves quânticas (16), *solitons* (17), ressonâncias não lineares (18), entre outras.

Outrossim, o ML tem sido usado para a classificação de emaranhamento de vetores de duas, quatro e oito dimensões, usando um computador quântico fotônico de pequena escala (19). Também foi realizado um estudo de uma pesquisa automatizada de novos experimentos quânticos (20), além do desenvolvimento de um modelo de aprendizado autônomo que aprende a projetar experimentos quânticos complexos (21).

Para a estimativa de estados quânticos, em vez de usar 36 medições de coincidência, por meio do treinamento de modelos de ML, a estimativa de alta fidelidade foi alcançada através de dados de tomografia parcial (22). O que representa um ganho considerável no que tange o processo de caracterização de sistemas quânticos.

Com relação à classificação de estados emaranhados e separáveis, foi proposto um classificador via aprendizado de máquina (23). Além do mais, foi demonstrado que podemos treinar experimentalmente uma rede neural artificial (NN) para classificar a separabilidade de estados quânticos sem precisar de todas as informações (24).

Por outro lado, muitos trabalhos mostraram que circuitos ópticos lineares com modos spin-órbita associados a feixes de laser intensos podem ser usados para simular experimentos de fóton único. Por exemplo, fases topológicas, previstas na evolução de um par de q-bits emaranhados, foram observadas em um feixe de laser intenso (25). Desigualdades quânticas para sistemas bipartidos também foram violadas pelos conhecidos modos spin-órbita maximamente não-separáveis, tal como, a desigualdade de Bell (26, 27) e a contextualidade (28, 29). Para sistemas tripartites, a desigualdade de Mermin foi violada (30).

Recentemente, foi proposto um circuito óptico para preparar estados X com modos spin-órbita mostrando os cálculos de discórdia para várias classes de estados (31). Outras aplicações de modos spin-órbita de um feixe de laser intenso foram propostas, incluindo a simulação de emaranhamento induzido pelo ambiente (32), criptografia quântica (33) e operações condicionais para emular portas quânticas (34, 35).

Diante dessa perspectiva, apresentamos um estudo sobre a classificação de não-separabilidade de modos spin-órbita mistos por meio de aprendizado de máquina. Partimos de uma investigação sobre os graus de liberdade da luz e a codificação de q-bits, discutimos acerca dos estados de Werner com modos spin-órbita, apresentamos o critério PPT, assim como, a tomografia com modos spin-órbita.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira: no Capítulo 1 abordamos os graus de liberdade da luz, bem como sua codificação em q-bits através dos modos transversos e de polarização; no Capítulo 2 apresentamos os estados de Werner com modos spin-órbita juntamente com o critério PPT e sua aplicação, além de descrever um circuito óptico para a geração de tais estados; no Capítulo 3 detalhamos o processo de tomografia quântica com modos spin-órbita; no Capítulo 4 desenvolvemos a construção do aprendizado de máquina; no Capítulo 5 propomos uma melhoria de circuitos ópticos para simulação de modos do tipo Werner e outros estados mistos; no Capítulo 6 discutimos os resultados obtidos pela rede neural na classificação da não-separabilidade de modos mistos; e no Capítulo 7 apresentamos as conclusões que concebemos com este trabalho.

1 Graus de liberdade da luz e a codificação de q-bits

A teoria eletrodinâmica clássica teve início com Maxwell tomando como ponto de partida a analogia primitiva entre os campos elétrico e magnético e as oscilações de um fluido, onde os campos poderiam se propagar de maneira similar a ondas mecânicas, sucedendo o conceito, mais adiante, de que o campo eletromagnético exerceria a função de mediador na interação entre as cargas elétricas (36). Dessarte, a dinâmica do campo eletromagnético no vácuo com ausência de fontes externas é descrita pelas equações de Maxwell na forma a seguir (37)

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.4)$$

onde μ_0 e ϵ_0 são as constantes de permeabilidade magnética e permissividade elétrica do vácuo, respectivamente.

O teorema de Helmholtz assegura que um campo vetorial se torna completamente caracterizado se forem conhecidos seu divergente, rotacional e condições de contorno e, com base nisto, temos garantida a existência de soluções únicas para o campo eletromagnético. As equações acima formam um conjunto de equações diferenciais acopladas de primeira ordem, tendo em vista que as equações 1.3 e 1.4 apresentam uma dependência recíproca, onde variações temporais em $\mathbf{E}(\mathbf{B})$ acarretam variações espaciais em $\mathbf{B}(\mathbf{E})$. Desde modo, podemos desacoplá-las aplicando o rotacional nas equações 1.3 e 1.4, obtendo

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (1.5)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (1.6)$$

onde consideramos $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$, as quais resultam nas equações desacopladas de segunda ordem para o campo elétrico e magnético.

Podemos notar que estas equações 1.5 e 1.6 possuem a mesma forma da equação da onda em três dimensões se propagando com velocidade c , o que nos permite algumas classes de soluções, sendo a mais simples a solução da onda plana definida por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (1.8)$$

onde $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{k}}$ é o vetor de onda apontando na direção da propagação $\hat{\mathbf{k}}$, ω é a frequência angular e os termos \mathbf{E}_0 e \mathbf{B}_0 são vetores reais.

Isto posto, ao realizar a substituição das soluções 1.7 e 1.8 nas equações de Maxwell apresentadas inicialmente (1.1 - 1.4), chegamos as relações que nos mostram que \mathbf{E}_0 , \mathbf{B}_0 e \mathbf{k} são mutuamente ortogonais como a seguir

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0, \quad (1.10)$$

e, conseqüentemente, consistem em ondas transversais, haja vista que os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} oscilam perpendicularmente à direção de propagação da onda conforme pode ser visto na figura 1.

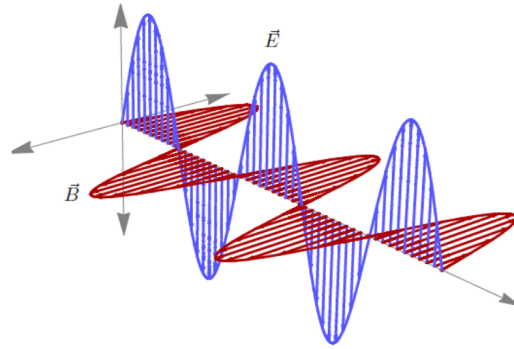


Figura 1 – Representação de uma onda eletromagnética com seus respectivos campos elétrico e magnético oscilando perpendicularmente entre si. Fonte: (38)

Esta característica de onda transversa permite a polarização que, juntamente com os modos transversos, compõem um conjunto de graus de liberdade que são utilizados para a codificação de q-bits.

1.1 Q-bits

Todavia, para que possamos compreender do que se trata o q-bit e como decorre sua codificação através da manipulação dos DoF de uma onda eletromagnética, precisamos partir do entendimento do conceito do bit clássico. Este último, por sua vez, consiste em um dígito binário que contempla a menor quantidade de informação clássica que pode ser armazenado em um bit através de dois estados físicos distintos: “0” ou “1”. O qual pode ser codificado num sistema físico como o estado “0” quando não há sinal de corrente e

estado “1” para quando há transmissão de corrente nos componentes eletrônicos de um computador clássico, por exemplo.

De maneira análoga, a computação e informação quântica se utiliza de q-bits, que consistem na menor quantidade de informação quântica possível de ser armazenada em um bit quântico. Diferente do bit clássico que comportam somente estados físicos distintos, o q-bit permite uma combinação linear dos estados, ao que chamamos de superposição de estados quânticos, que é representado por um sistema de dois níveis, onde $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são os estados da base computacional. Deste modo, o q-bit na sua forma mais geral pode ser descrito como a seguir (3)

$$|\Psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (1.11)$$

onde α e β são coeficientes complexos e devem satisfazer a condição de normalização $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Esta última, advinda de um postulado da mecânica quântica, que possui uma interpretação probabilística na qual uma medida na base computacional possui uma probabilidade $|\alpha|^2$ de se obter o estado $|0\rangle$, bem como, uma probabilidade $|\beta|^2$ de se obter o estado $|1\rangle$ e, por conseguinte, a soma de todas essas probabilidades deve resultar em 1.

A equação 1.11 descreve uma característica quântica que permite ao q-bit ser codificado em um sistema de dois níveis de maneira semelhante aos bits clássicos, os quais também são codificados em sistemas físicos de dois níveis, porém com a diferença de ser possível resultar em um estado de superposição quântica ao invés de se limitar somente ao resultado contendo estados físicos excludentes, como o “ligado” ou “desligado” de um componente eletrônico no caso clássico.

Nesse sentido, os dois níveis de codificação de um q-bit podem ser caracterizados através dos graus de liberdade de feixes clássicos, como polarização e modos transversos, conforme visto em diversos trabalhos (39, 40, 41). Adiante, será discutido de maneira mais detalhada os DoF da polarização e dos modos transversos, a fim de elucidar a codificação de q-bits por meio de modos spin-órbita.

1.2 Polarização

Iniciando nossa discussão sobre a polarização da luz, conforme (42, 43, 44), nosso enfoque aqui será no campo elétrico. Haja vista que, além deste último ter uma atribuição mais significativa na interação com a matéria do que o campo magnético, o campo \mathbf{B} pode ser encontrado de maneira simples por meio das equações de Maxwell 1.3 e 1.4 bastando que o campo \mathbf{E} seja conhecido graças a relação entre os campos ser bem definida.

Dito isto, vamos partir da equação 1.7 para propor a solução tipo onda plana monocromática que se propaga na direção \hat{z} , que em sua forma mais geral tem seu campo elétrico dado por

$$\mathbf{E}(z, t) = (E_{0x}\hat{x} + e^{i\delta} E_{0y}\hat{y})e^{i(kz - \omega t)}, \quad (1.12)$$

onde E_{0y} e E_{0x} são as amplitudes das respectivas componentes transversais \hat{x} e \hat{y} do campo elétrico e $\delta = \delta_x - \delta_y$ é a diferença de fase existente entre essas duas componentes.

O estado de polarização de uma onda plana monocromática é determinado classicamente através da fase relativa δ e da razão entre as amplitudes E_{0x} e E_{0y} . E, partindo da equação 1.12, podemos alcançar os principais estados de polarização: linear, circular e elíptica. Sendo o mais simples deles, a luz polarizada linearmente, onde a direção de vibração do campo \mathbf{E} é constante, descrevendo um movimento harmônico simples ao longo de uma direção \hat{e} , com $\delta = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Assumindo a forma

$$\mathbf{E}(z, t) = (E_{0x}\hat{x} \pm E_{0y}\hat{y})e^{i(kz - \omega t)}, \quad (1.13)$$

onde \pm sinaliza a correspondência de $n = \text{par}$ para $+$ e de $n = \text{ímpar}$ para $-$.

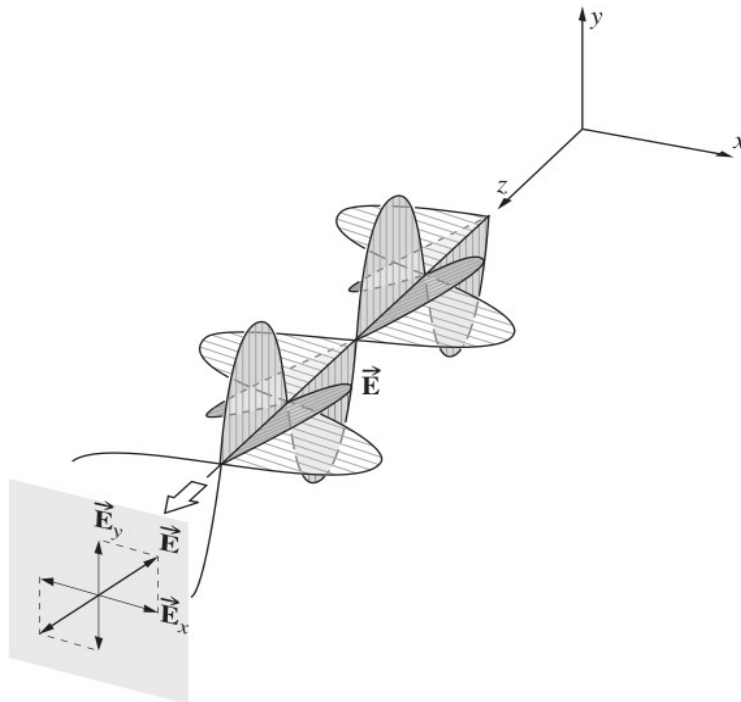


Figura 2 – Representação de uma onda linearmente polarizada. Fonte: (45)

Dentro da polarização linear temos algumas características que são definidas de acordo com valor das amplitudes na direção x e y . Deste modo, quando temos $E_{0x} = 0$, contamos com luz linearmente polarizada na vertical, por sua vez, quando temos $E_{0y} = 0$, nos deparamos com uma luz polarizada de forma linear na horizontal e, ainda, no caso de termos $E_{0x} = E_{0y}$, temos uma onda linearmente polarizada na diagonal (anti-diagonal), conforme ilustra a figura 2, na qual o eixo de polarização se encontra inclinado a 45° (135°) em relação ao eixo na horizontal.

Por conseguinte, no cenário onde as amplitudes E_{0x} e E_{0y} são iguais mas a diferença de fase é $\delta = n\pi + \frac{\pi}{2}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), obtemos uma onda circularmente polarizada. Nesta configuração, a ponta do vetor \mathbf{E} reproduz um trajeto circular, fazendo com que a equação 1.12 se torne

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0(\hat{x} \pm i\hat{y})e^{i(kz - \omega t)}, \quad (1.14)$$

onde \pm sinaliza o sentido para o qual a extremidade do vetor do campo elétrico circula, cujo sinal $+$ corresponde a $n = \text{par}$ e define a polarização circular à esquerda (sentido anti-horário), enquanto o sinal $-$ corresponde a $n = \text{ímpar}$ e caracteriza a luz circularmente polarizada à direita (sentido horário), conforme ilustrado na figura 3.

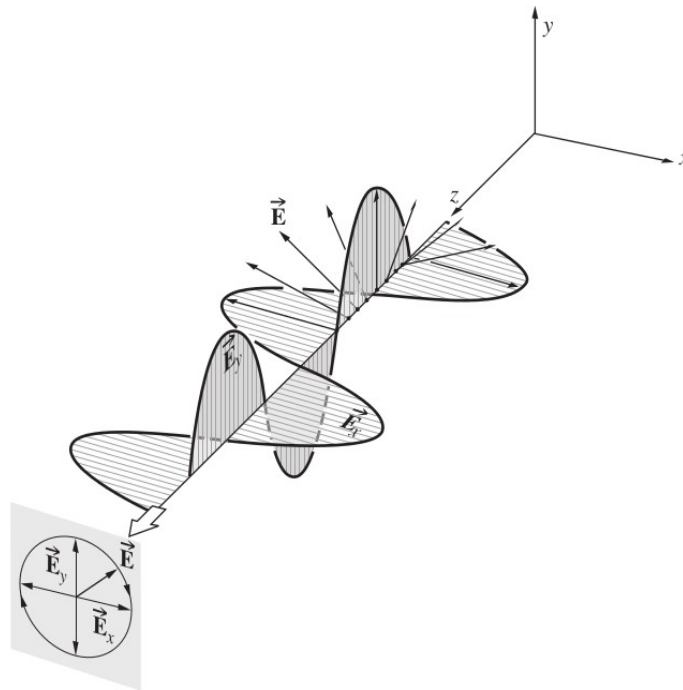


Figura 3 – Representação de uma onda circularmente polarizada à direita. Fonte: (45)

Por fim, no caso da fase relativa ser da mesma forma que a apresentada no estado com polarização circular, porém com as amplitudes das componentes do campo elétrico diferentes entre si, nos deparamos com uma luz elípticamente polarizada, ilustrada na figura 4. Dessarte, a equação 1.12 assume a forma

$$\mathbf{E}(z, t) = (E_{0x}\hat{x} \pm iE_{0y}\hat{y})e^{i(kz - \omega t)}, \quad (1.15)$$

onde $+(-)$ corresponde a $n = \text{par}(\text{ímpar})$ indicando um estado com polarização elíptica à esquerda (direita).

A polarização desempenha um papel importante para a nossa proposta tendo em vista que, através dela, podemos desenvolver um conjunto de bases de medida para o

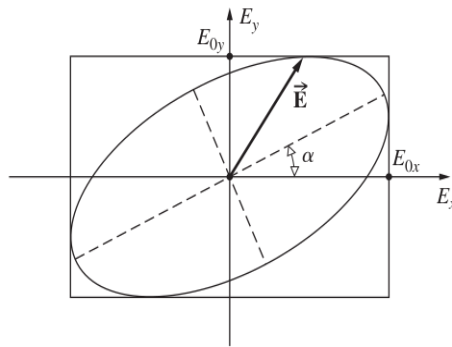


Figura 4 – Representação de uma onda elipticamente polarizada. Fonte: (45)

processo de caracterização da matriz densidade de um estado, que será melhor explicitado no próximo capítulo.

Para se obter o tipo que seja da polarização pretendida, fazemos uso de instrumentos ópticos chamados placas de onda. Estes consistem em cristais birrefringentes, conforme exposto na figura 5, capazes de inserir uma diferença de fase entre as amplitudes E_{0x} e E_{0y} , modificando, assim, o estado de polarização da luz.

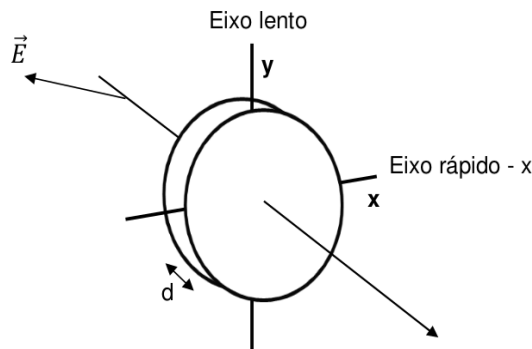


Figura 5 – Representação de uma placa de onda, onde há incidência de um campo elétrico, cujo eixo $x(y)$ é denominado por eixo rápido (lento) e possui espessura d . Fonte: (38)

A diferença de fase produzida pelas placas de onda ocorrem devido ao material que as compõem, que apresentam índices de refração diferentes na direção do eixo rápido e lento. Assim, temos

$$N\lambda = d(n_l - n_r), \quad (1.16)$$

onde N é um número real, λ é o comprimento de onda da luz que incide na placa, d é a espessura da mesma e $n_l(n_r)$ é o índice de refração do eixo lento (rápido).

O valor de N determina algumas características importantes às placas, de maneira que, para $N = \frac{1}{2}$ temos uma placa de meia onda (HWP), que insere uma fase relativa $\delta = \pi$ devido à diferença de caminho óptico percorrida pela luz através da placa ser equivalente a $\frac{\lambda}{2}$. Ao passo que, para $N = \frac{1}{4}$ temos uma placa de quarto de onda (QWP), cuja diferença de caminho é $\frac{\lambda}{4}$ produzindo uma fase relativa $\delta = \frac{\pi}{2}$ entre as componentes do campo.

Uma notação muito útil para designar os efeitos das placas de ondas, entre outros instrumentos ópticos, são as matrizes de Jones (46), cujos estados de polarização da luz são representados por matrizes conforme a seguir

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x} \\ e^{i\delta} E_{0y} \end{bmatrix} e^{i(kz - \omega t)}. \quad (1.17)$$

Ademais, os tipos de polarização descritas anteriormente podem tomar forma de vetores através do formalismo de Jones. Deste modo, para uma luz linearmente polarizada obtemos

$$\mathbf{E}_{(lin)} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix}, \quad (1.18)$$

onde $+$ ($-$) equivale a polarização diagonal (anti-diagonal), para polarização circular temos

$$\mathbf{E}_{(cir)} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix}, \quad (1.19)$$

onde $+$ ($-$) sinaliza que é circular à esquerda (direita) e para um estado elípticamente polarizado dispomos

$$\mathbf{E}_{(elip)} = \begin{bmatrix} E_{0x} \\ \pm i E_{0y} \end{bmatrix}, \quad (1.20)$$

onde $+$ ($-$) equivale a elíptica à esquerda (direita).

As placas de onda também são representadas através das matrizes de Jones que transformam os estados de polarização, conforme a seguir

$$HWP = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sen(2\theta) \\ \sen(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix}, \quad (1.21)$$

$$QWP = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) + i\sen^2(\theta) & \cos(\theta)\sen(\theta)(1 - i) \\ \cos(\theta)\sen(\theta)(1 - i) & i\cos^2(\theta) + \sen^2(\theta) \end{bmatrix}, \quad (1.22)$$

onde θ é o ângulo entre o eixo rápido e o eixo x.

A fim de melhor elucidar a conexão entre um circuito óptico e a notação de Jones, vamos supor uma luz circularmente polarizada à esquerda (direita) incidindo sobre duas placas de onda em sequência, sendo uma HWP e a outra QWP, com $\theta = 0$ em ambas, conforme ilustrado na figura 6.

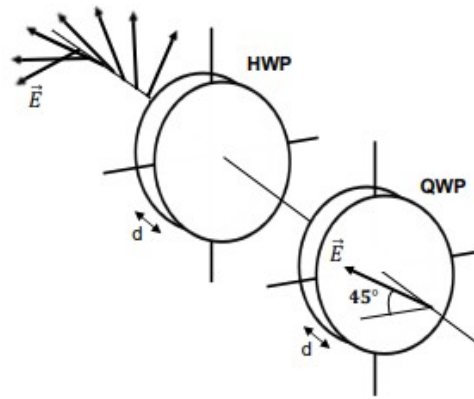


Figura 6 – Representação de duas placas de onda, uma HWP seguida por uma QWP, que sofrem incidência de luz circularmente polarizada. Fonte: (38), adaptado pela autora

Nesta configuração, as matrizes de Jones estarão dispostas da seguinte maneira

$$\begin{matrix} (QWP) \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} (HWP) \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{matrix} \mathbf{E}_{(circ)} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix} \end{matrix} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{matrix} \mathbf{E}_{(lin)} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (1.23)$$

onde o resultado será uma luz linearmente polarizada na diagonal (anti-diagonal), conforme podemos verificar na equação 1.18.

Ao observar a equação 1.23, podemos perceber que a ordem das matrizes é fundamental. De forma que, em um primeiro momento, a luz incide na placa HWP e, por isso, sua matriz se encontra multiplicando diretamente a matriz do estado de polarização inicial $\mathbf{E}_{(circ)}$. Logo em seguida, temos a matriz QWP mais à esquerda multiplicando a matriz HWP, visto que a luz ao sair da placa anterior incide na QWP por último, resultando no estado $\mathbf{E}_{(lin)}$.

A compreensão da polarização compõe um papel importante no processo de desenvolvimento do trabalho que propomos, tendo em vista que se trata de um dos graus de liberdade do campo eletromagnético que iremos utilizar.

Além do formalismo de Jones, existe uma maneira de representar os estados de polarização geometricamente através da esfera de Poincaré (47). Nesta representação, os estados se localizam na superfície da esfera que possui um raio unitário, conforme ilustra a figura 7. Podemos observar que os estados posicionados ao longo do equador se tratam de polarização linear, enquanto os que estão nos polos são polarização circular, bem como, os elipticamente polarizados se encontram entre o equador e os polos.

A composição das matrizes de Jones é similar à representação dos estados quânticos via notação de Dirac (48). Destarte, isto nos possibilita a construção de uma analogia

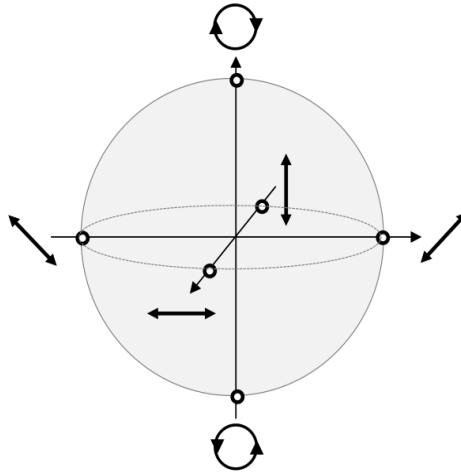


Figura 7 – Representação dos estados de polarização na esfera de Poincaré. Fonte: (38)

entre circuitos que utilizam feixes clássicos e conjunturas efetivamente quânticas, de tal modo que sistemas quânticos possam ser simulados em circuitos ópticos lineares.

Os estados linearmente 1.18 e circularmente 1.19 polarizados são semelhantes aos estados em superposição caracterizados em seus kets de estado, conforme a seguir

$$|\Psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix}, \quad (1.24)$$

$$|\Phi_{(R/L)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix}, \quad (1.25)$$

cujo formalismo matemático que compõe a estrutura de suas matrizes densidade serão discutidas no próximo capítulo.

A polarização pode ser tomada como base computacional para q-bits, dado que matematicamente tem o mesmo formato de um sistema de dois níveis. Dessa forma, a codificação do estado de um q-bit, $|0\rangle$ e $|1\rangle$, se sucede através da polarização na horizontal e vertical, $|H\rangle$ e $|V\rangle$, respectivamente. Dessarte, podemos realizar a codificação de q-bits por meio da utilização de versores $\{\hat{e}_H, \hat{e}_V\}$, os quais descrevem a polarização, através da notação de Dirac dada por (25)

$$\hat{e}_H \equiv |H\rangle \equiv |0\rangle, \quad (1.26)$$

$$\hat{e}_V \equiv |V\rangle \equiv |1\rangle. \quad (1.27)$$

Os elementos ópticos HWP e QWP, representados pelas matrizes de Jones nas equações 1.21 e 1.22, atuam no estado do feixe clássico de modo análogo a operadores unitários que determinam a evolução dos kets de estado na mecânica quântica (MQ).

Nesta conformidade, a intensidade normalizada desempenha a função da probabilidade de medida, enquanto a coerência óptica executa o papel da coerência quântica.

Tendo em vista que as transformações na polarização possuem representação por meio da esfera de Poincaré, um q-bit também pode ser representado geometricamente através da esfera de Bloch, conforme figura 8-a). Nesta representação, o q-bit fica localizado na superfície da esfera que, assim como a esfera de Poincaré, também possui raio unitário, que é dado pela condição de normalização. Os ângulos θ e φ são os ângulos polar e azimutal, respectivamente, que definem a posição na superfície.

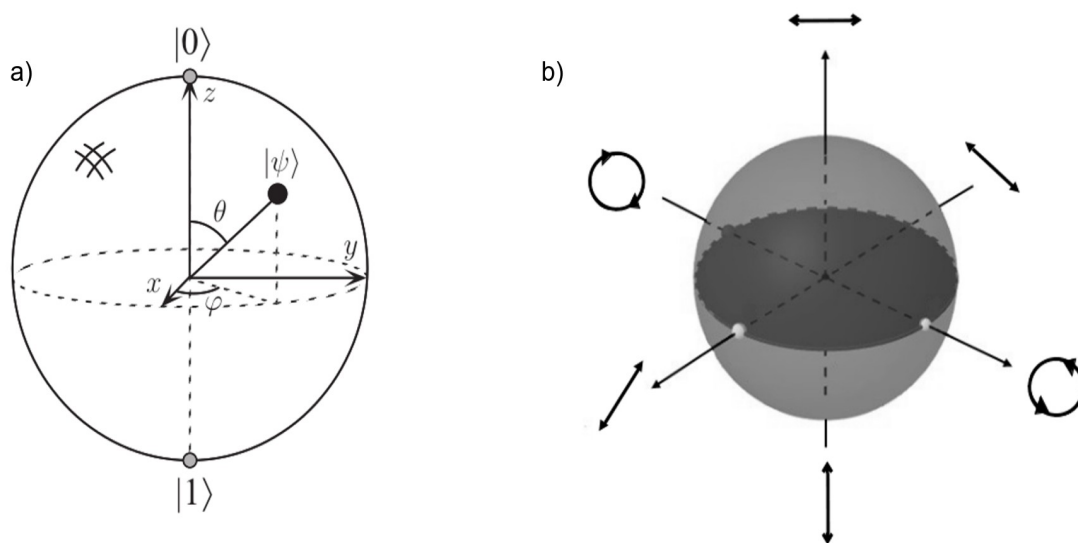


Figura 8 – Representação da esfera de Bloch: a) para um sistema de um q-bit – fonte: (3) – e b) para a polarização – fonte: própria autora

Nesta conformidade, temos na figura 8-b) a esfera de Bloch para a polarização. Note que se trata da esfera de Poincaré rotacionada, dado que os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ se encontram nos polos norte e sul, respectivamente.

A esfera de Bloch é muito frutífera para a visualização das transformações que podem ser exercidas sobre um q-bit, ilustrando de forma instrutiva seu estado e facilitando, deste modo, a compreensão das analogias entre o q-bit e os estados de dois níveis da polarização.

O trabalho que propomos utiliza-se de estados bipartites, de modo que os q-bits podem ser codificados utilizando os graus de liberdade de um feixe laser através da polarização e dos modos transversos, sendo este último discutido na sessão seguinte.

1.3 Modos transversos

A apresentação dos modos transversos será feita em concordância com as referências (38, 49), através da aproximação paraxial da equação de Helmholtz para um feixe gaussiano. Os modos transversos compõem o outro grau de liberdade, do mesmo modo que a polarização, e determinam a distribuição de energia no plano transversal à direção de propagação da onda.

Conforme já exposto anteriormente, o comportamento do campo elétrico é descrito pela equação 1.5, a qual possui a solução da onda plana definida pela equação 1.7. Ainda assim, podemos escrever a solução da função de onda na forma a seguir

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_0 E_0(\mathbf{r}) e^{-ikz} e^{i\omega t}, \quad (1.28)$$

onde $E_0(\mathbf{r})$ é a amplitude complexa que define a estrutura transversal e \mathbf{e}_0 é o versor que determina a polarização.

Ao substituir a equação 1.28 na equação 1.5, concebemos a equação diferencial denominada como Equação de Helmholtz dada por

$$(\nabla^2 + k^2) E_0(\mathbf{r}) e^{-ikz} = 0, \quad (1.29)$$

a qual corresponde somente às coordenadas espaciais devido ao termo $e^{i\omega t}$ ser diferente de zero. Ao calcular as derivadas da equação 1.29, obtemos a seguinte expressão

$$\nabla^2 E_0(\mathbf{r}) - 2ik\hat{z} \cdot \nabla E_0(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.30)$$

A dependência em z na amplitude $E_0(\mathbf{r})$ corresponde a uma taxa de variação mais lenta do que aquelas em x e y . Nessa conformidade, podemos fazer uso da aproximação paraxial a seguir

$$\left| \frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial y^2} \right| \text{ e } 2k \left| \frac{\partial E_0(\mathbf{r})}{\partial z} \right|. \quad (1.31)$$

De maneira que a equação paraxial de Helmholtz pode ser escrita na seguinte forma

$$\nabla_t^2 E_0(\mathbf{r}) - 2ik \frac{\partial E_0(\mathbf{r})}{\partial z} = 0, \quad (1.32)$$

onde ∇_t^2 é o laplaciano transversal que é definido por

$$\nabla_t^2 = \frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial y^2} = 0. \quad (1.33)$$

Para o modo fundamental, também chamado de feixe gaussiano devido à sua intensidade variar ao longo da direção radial conforme uma gaussiana, a solução mais simples da equação 1.32 é como segue

$$E(x, y, z) = \frac{1}{\omega(z)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)}\right] \exp\left[i\left(\psi(z) - \frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)}\right)\right], \quad (1.34)$$

onde $\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$ é a largura do feixe na posição z , na qual ω_0 é cintura do feixe estabelecida em $z = 0$ (vide figura 9) e $z_R = \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}$ é o comprimento de Rayleigh; $\psi(z) = tg^{-1}\left(\frac{z}{z_R}\right)$ é a fase de Gouy e $R(z) = z + \frac{z_R^2}{z}$ é o raio de curvatura do feixe.

Na figura 9 podemos identificar os parâmetros descritos anteriormente, bem como, o perfil de intensidade de um feixe gaussiano.

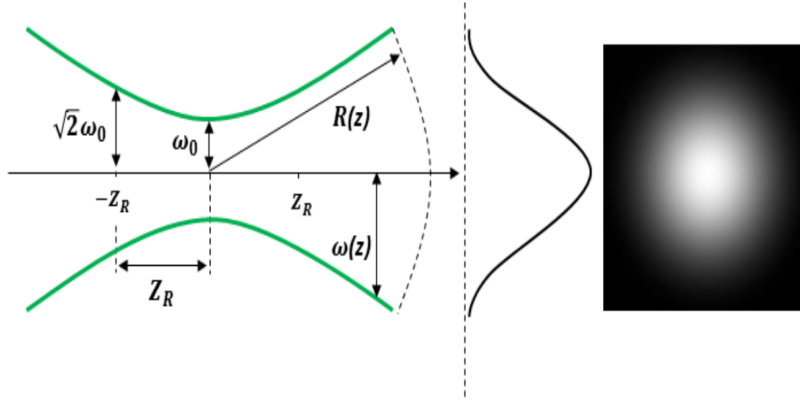


Figura 9 – Propriedades de um feixe Gaussiano e perfil de intensidade transversal do mesmo.
Fonte: (38)

Além da equação 1.34, dispomos de outras soluções de ordem mais altas, cada uma correspondendo a um modo transversal do feixe. Dessarte, outra solução para equação 1.32 em coordenadas cartesianas, dessa vez em sua forma mais geral, é expressa por

$$E_{mn}(x, y, z) = \frac{C_{nm}}{\omega(z)} H_n \left[\frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)} \right] H_m \left[\frac{\sqrt{2}y}{\omega(z)} \right] \times \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)} \right] \exp \left[-\frac{ik(x^2 + y^2)}{2R(z)} \right] \exp [-i(n + m + 1)\psi(z)], \quad (1.35)$$

a qual produz os modos Hermite-Gauss (HG), onde os termos H_n e H_m correspondem aos polinômios de Hermite e os parâmetros m e n estabelecem a ordem dos modos. Através de combinações lineares de seus polinômios, tais modos constituem uma base ortonormal de soluções da equação paraxial, cujo perfil de intensidade pode ser visualizado através da figura 10.

Utilizando os modos de primeira ordem, podemos escrever os modos HG composto pela soma dos modos horizontais e verticais, de modo que se encontrem rodados da seguinte maneira

$$HG_{01}^\theta = \cos(\theta)HG_{01} + \sin(\theta)HG_{10}, \quad (1.36)$$

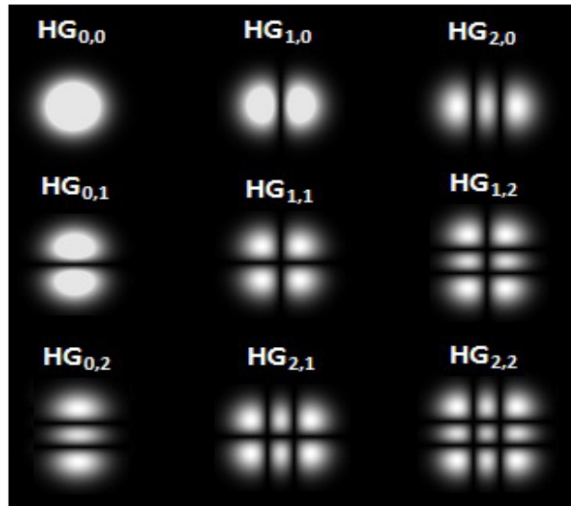


Figura 10 – Perfil de intensidade dos modos HG. Fonte: (49)

onde, especificamente para $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$, obtemos

$$HG_{01}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{01} + HG_{10}) \quad (1.37)$$

$$\text{e } HG_{01}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{01} - HG_{10}), \quad (1.38)$$

respectivamente ilustrados na figura 11.

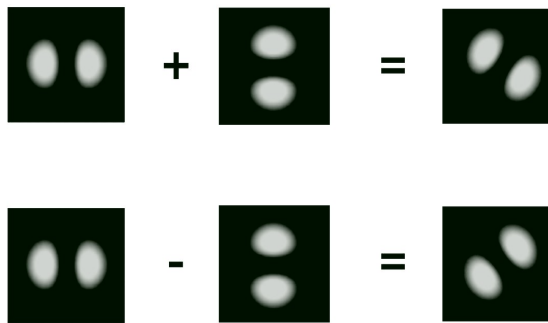


Figura 11 – Combinação linear entre os modos HG. Fonte: própria autora

Podemos observar, através das equações 1.37 e 1.38, que somos capazes de obter um sistema de dois níveis a partir da distribuição das intensidades dos modos HG. Assim, da mesma forma que estados de polarização diagonal e anti-diagonal são descritos em termos

dos vetores de polarização horizontal e vertical, podemos descrever os modos transversos rodados a 45° e 135° através dos modos Hermite de primeira ordem.

Outros modos transversos, que faremos uso na presente proposta, são os modos Laguerre-Gauss (LG). Diferente dos modos HG, cuja frente de onda é plana – vide figura 12-a) – e o momento angular orbital (MAO) é nulo, os modos LG são portadores de MAO, o que denota uma frente de onda helicoidal. De modo que, o vetor de onda espirala em torno da direção de propagação da frente de onda (50), conforme podemos observar na figura 12-b).

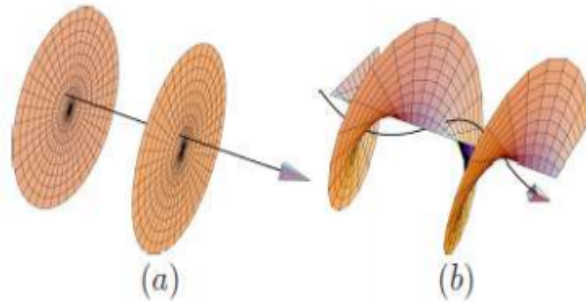


Figura 12 – Representação de feixes com suas respectivas frentes de onda: (a) Feixe HG com sua frente de onda plana e (b) Feixe LG com sua frente de onda helicoidal. Fonte: (38)

Os modos LG são obtidos por meio da resolução da equação paraxial de Helmholtz em coordenadas cilíndricas, que é descrita como

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \phi^2} + 2ik \frac{\partial E}{\partial z} = 0, \quad (1.39)$$

cujas soluções são dadas em termos dos polinômios associados de Laguerre L_p^l a seguir

$$E_p^l(r, z, \phi) = \left[\frac{2p!}{\pi \omega^2(z) (p + |l|)!} \right]^{1/2} \left[\frac{\sqrt{2}r}{\omega(z)} \right]^{|l|} \exp \left[-\frac{r^2}{\omega^2(z)} \right] \times L_p^l \left[\frac{2r^2}{\omega^2(z)} \right] \exp \left\{ i \left[kz - (2p + |l| + 1)\Psi(z) + \frac{kr^2}{2R(z)} + l\phi \right] \right\}. \quad (1.40)$$

Na equação 1.40 acima, os índices p e l são, respectivamente, os índices radial e azimutal, enquanto o termo $\phi = \text{tg}^{-1} \left(\frac{x}{y} \right)$ provê o MAO do feixe. Nessa conformidade, quando temos $p = 0$, o perfil de intensidades dos modos LG são compostos conforme ilustra a figura 13, onde podemos observar que, nos casos em que $l \neq 0$, temos uma ausência de intensidade no centro dos modos ocasionada pela singularidade de fase produzida por ϕ .

De maneira similar aos modos HG, podemos escrever os modos LG de primeira ordem como uma combinação linear deles, ao considerar uma diferença de fase $\phi = 90^\circ$,

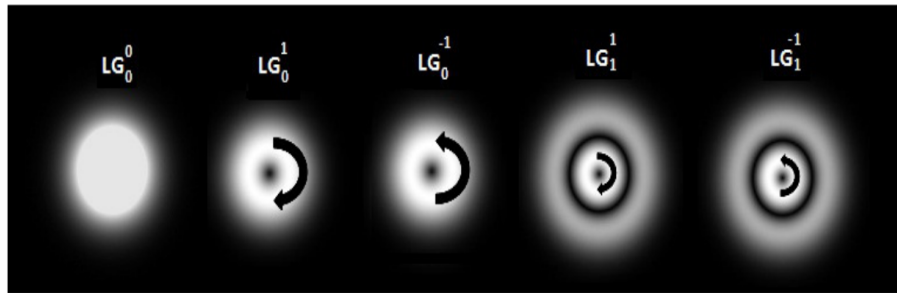


Figura 13 – Perfil de intensidade dos modos LG. Fonte: (49)

da seguinte forma

$$LG_0^{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{10} \pm iHG_{01}). \quad (1.41)$$

Para se obter um estado com a espécie de modo transverso desejado, podemos utilizar dispositivos ópticos, como lentes cilíndricas (CL) e prisma de Dove (DP), que atuam somente nos modos transversos do feixe, da mesma maneira que as HWP e QWP atuam apenas na polarização.

Isto posto, podemos representar os modos transversos geometricamente através da esfera de Poincaré (47) de maneira análoga à polarização, conforme ilustra a figura 14. Nesta representação, os estados do modo transversos se encontram na superfície da esfera. Sendo os modos HG de primeira ordem posicionados ao longo do equador de maneira similar a polarização linear, nos polos se localizam os modos LG, também de primeira ordem, semelhante a polarização circular e, por fim, entre o polos e o equador, os modos elípticos, cujas amplitudes HG_{01} e HG_{10} são desbalanceadas.

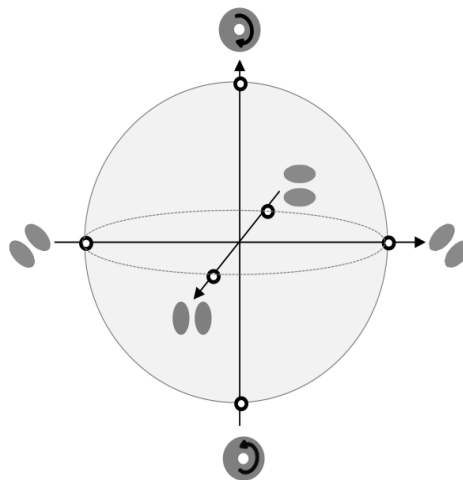


Figura 14 – Representação dos modos transversos de primeira ordem na esfera de Poincaré. Fonte: (38)

A partir da distribuição de intensidades dos modos HG de primeira ordem, somos capazes de obter um sistema de dois níveis, o qual propicia uma base para a codificação de q-bits no modo transversal no mesmo sentido que apresentamos na sessão anterior para a polarização. Destarte, para os modos transversos, os modos HG_{01} e HG_{10} compõem um subespaço que proporcionam dois graus de liberdade, semelhante à atribuição desempenhada pela polarização horizontal e vertical.

Os modos LG de primeira ordem da equação 1.41 são capazes de desempenhar, através da diferença de fase $\phi = 0$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$, respectivamente, o papel de um estado de superposição, de maneira análoga ao caso da polarização linear e circular, como kets de estado expressos nas equações 1.24 e 1.25.

Deste modo, a codificação dos q-bits utilizando os modos Hermite de primeira ordem como base na notação de Dirac é dada por

$$HG_{10} \equiv |h\rangle = |0\rangle, \quad (1.42)$$

$$HG_{01} \equiv |v\rangle = |1\rangle. \quad (1.43)$$

Isto posto, é importante mencionar que o produto escalar entre os modos transversos descritos em 1.42-1.43 será

$$\langle h|v\rangle = 0, \quad (1.44)$$

por razão dos vetores nestas bases serem ortogonais entre si. Haja vista que o produto escalar no espaço de Hilbert é formalmente definido por (3)

$$\langle v|w\rangle = \sum_{ij} v_i^* w_j \delta_{ij} = \sum_i v_i^* w_i, \quad (1.45)$$

onde $|v\rangle = \sum_i w_i |i\rangle$ e $|w\rangle = \sum_j w_j |j\rangle$ correspondem a vetores arbitrários em relação a uma base ortonormal $|i\rangle$, $\langle i|j\rangle \equiv \delta_{ij}$ se refere a relação de ortonormalidade entre as bases, definida por

$$\langle i|j\rangle = \begin{cases} 1, & \text{para } i = j \\ 0, & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (1.46)$$

$$(1.47)$$

e consideramos a relação de completeza $\sum_i |i\rangle \langle i| = I$.

Por fim, por meio da codificação descrita em 1.42-1.43, temos a esfera de Bloch para os modos transversos na figura 15 de maneira análoga a polarização. Note que, ao comparar com a esfera de Bloch de um q-bit ilustrada na figura 8-a), também se trata da esfera de Poincaré rotacionada, dado que os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ se encontram nos polos norte e sul, respectivamente.

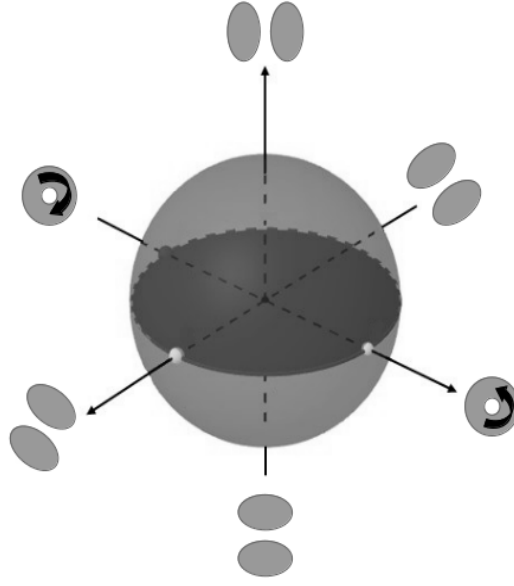


Figura 15 – Representação da esfera de Bloch para os modos transversos. Fonte: própria autora

1.4 Modos spin-órbita

Os modos spin-órbita em sua forma mais simples são definidos através das bases de polarização e modos Hermite de primeira ordem, com base nas referências (38, 39, 51). De acordo com as codificações feitas anteriormente para polarização e modo transverso, em um fóton com polarização e modo Hermite de primeira ordem podemos codificar dois q-bits de maneira que termos um sistema bipartido.

Desta forma, de modo análogo a estados produto que descrevem sistemas separáveis na MQ, os kets de base podem ser descritos na seguinte notação

$$\hat{e}_H HG_{10} \equiv |H\rangle \otimes |h\rangle = |Hh\rangle \equiv |00\rangle, \quad (1.48)$$

$$\hat{e}_V HG_{10} \equiv |V\rangle \otimes |h\rangle = |Vh\rangle \equiv |10\rangle, \quad (1.49)$$

$$\hat{e}_H HG_{01} \equiv |H\rangle \otimes |v\rangle = |Hv\rangle \equiv |01\rangle, \quad (1.50)$$

$$\hat{e}_V HG_{01} \equiv |V\rangle \otimes |v\rangle = |Vv\rangle \equiv |11\rangle. \quad (1.51)$$

Como podemos preparar estados por meio de uma combinação linear dos modos das equações acima, de maneira que possam ter momento angular de spin não nulos relativo a polarização circular e elíptica, assim como, $MAO \neq 0$ relativo aos modos Hermite de primeira ordem, estes recebem o nome de modos spin-órbita.

A partir da codificação de qbits em modos spin-órbita, temos a possibilidade de simular sistemas bipartites e investigar as particularidades existentes nos análogo clássicos

emaranhados. Diante disso, vamos considerar o vetor do modo spin-órbita em sua forma mais geral

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = C_{vH}HG_{01}(\mathbf{r})\hat{e}_H + C_{vV}HG_{01}(\mathbf{r})\hat{e}_V + C_{hV}HG_{10}(\mathbf{r})\hat{e}_V + C_{vH}HG_{10}(\mathbf{r})\hat{e}_H, \quad (1.52)$$

onde C_{jJ} são os coeficientes complexos, cujos índices em minúsculo (maiúsculo) se referem aos modos transversos (polarização). A depender dos valores das amplitudes podemos ter modos separáveis ou não-separáveis, sendo estes últimos uma peculiaridade encontrada em sistemas quânticos.

Em sua forma mais simples, os modos separáveis descritos nas equações 1.48 - 1.51 podem ser fatorados, uma propriedade presente em estados não emaranhados na MQ. Todavia, de maneira análoga a sistemas quânticos emaranhados, tal propriedade não é possível em modos spin-órbita não-separáveis.

Para verificar a separabilidade de um sistema bipartite podemos utilizar a função de concorrência (52) definida como

$$c = 2|C_{hV}C_{vH} - C_{vV}C_{hH}|, \quad (1.53)$$

de modo que, para estados separáveis dispomos de $c = 0$ e para estados não-separáveis temos $0 < c \leq 1$, de maneira que a não-separabilidade cresce à medida que o valor de c se distancia de 0 e se aproxima de 1.

Isto posto, dispomos de modos não-separáveis que podem ser escritos da seguinte forma

$$\Phi^\pm(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[HG_{10}(\mathbf{r})\hat{e}_V \pm HG_{01}(\mathbf{r})\hat{e}_H], \quad (1.54)$$

$$\Psi^\pm(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[HG_{10}(\mathbf{r})\hat{e}_H \pm HG_{01}(\mathbf{r})\hat{e}_V], \quad (1.55)$$

os quais, ao serem codificados em q-bits (via equações 1.48 - 1.51), torna possível observar a similaridade aos estados de Bell que, por definição, são dados por

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|00\rangle \pm |11\rangle], \quad (1.56)$$

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|01\rangle \pm |10\rangle]. \quad (1.57)$$

Os estados de Bell são maximamente emaranhados, onde as medidas realizadas de forma independente em dois de seus q-bits apresentam correlação em seus resultados. Deste modo, são conhecidos como modos não-separáveis, por razão da impossibilidade de serem fatorados de forma que seja possível escrevê-los como um produto entre a estrutura transversa e o versor que caracteriza a polarização. Por violarem a desigualdade de Bell, os estados das equações 1.56 e 1.57 são assim nomeados.

A figura 16 ilustra o perfil transverso dos modos spin-órbita não-separáveis, onde a intensidade é caracterizada pelo formato de rosca e as setas representam a polarização de maneira que o modo Ψ_+ é caracterizado com polarização radial e o modo Φ_- possui de polarização azimutal.

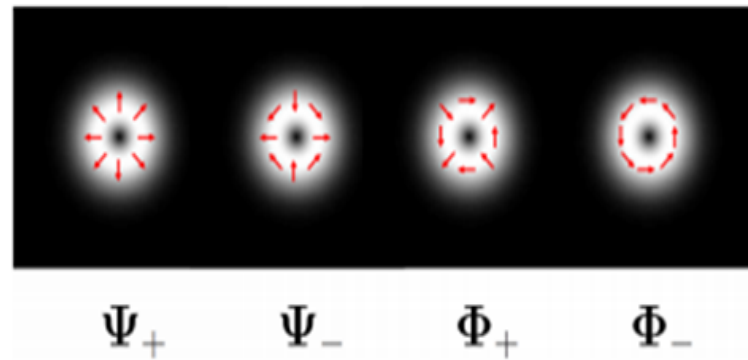


Figura 16 – Perfil transverso de modos spin-órbita maximamente não-separáveis. Fonte: (39)

Por fim, podemos notar que estes modos não-separáveis formam uma base ortonormal, compondo um elemento essencial para a sua utilização na codificação de q-bits.

2 Estados de Werner com os modos spin-órbita

Os estados conhecidos de Werner são estados mistos que possuem características de emaranhamento e separabilidade em sua composição e são muito utilizados em investigações de informação quântica.

Deste modo, no presente capítulo iremos discutir os estados de Werner e apresentar o análogo destes estados preparados com os modos spin-órbita, bem como, sua produção e suas condições de separabilidade e não-separabilidade. Estes últimos serão verificados por meio do critério PPT e nosso ponto de partida transcorrerá por meio da definição do formalismo da matriz densidade na MQ dos referidos estados.

2.1 Formalismo da matriz densidade para sistemas bipartites

Sistemas quânticos, cujos estados não são completamente conhecidos, possuem uma maneira apropriada de serem descritos através do formalismo da matriz densidade ρ – também chamado operador densidade – representados via notação de Dirac da seguinte forma (3)

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|, \quad (2.1)$$

onde p_i se refere à probabilidade estatística, $|\Psi_i\rangle$ é um estado dentre os vários possíveis em um sistema quântico e i é o índice respectivo ao i -ésimo estado puro da mistura estatística.

Através do formalismo da matriz densidade, somos capazes de descrever tanto estados mistos, como também, estados puros. Nessa conformidade, um sistema quântico, no qual o estado $|\Psi\rangle$ é completamente conhecido, é denominado como um estado puro e seu operador densidade é dado por

$$\rho = |\Psi\rangle \langle \Psi|. \quad (2.2)$$

Caso contrário, é tido como uma mistura dos diferentes estados puros do sistema quântico e denominado como um estado misto.

Toda a informação fisicamente relevante possível de ser obtida a respeito do *ensemble* se encontra contida no operador densidade. Destarte, para que este corresponda a um sistema físico, algumas propriedades precisam ser satisfeitas (48), dentre elas:

- ser Hermitiano

$$\rho = \rho^\dagger, \quad (2.3)$$

- cumprir a condição de normalização de traço unitário

$$\text{tr}(\rho) = \sum_i p_i \text{tr}(|\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|) = 1 \quad (2.4)$$

- e ser positivo

$$\langle \Phi | \rho | \Phi \rangle = \sum_i p_i \langle \Phi | \Psi_i \rangle \langle \Psi_i | \Phi \rangle \geq 0. \quad (2.5)$$

Isto posto, os postulados da MQ podem ser reformulados em termos da matriz densidade de maneira a possibilitar sua reconstrução via notação de Dirac através do formalismo desenvolvido devido a sua generalização.

Por conseguinte, vamos partir para um sistema com dois graus de liberdade e sua matriz densidade, a qual em sua forma mais geral pode ser expressa por (53)

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 S_i \sigma_i \quad (2.6)$$

onde σ_i são as matrizes de Pauli que, por definição na base computacional, são dadas por (3)

$$\sigma_0 \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_1 \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 \equiv \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \sigma_3 \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Os termos S_i presentes na equação 2.6 são os parâmetros de Stokes obtidos por meio do valor esperado das matrizes de Pauli através de um processo similar à expansão de kets de estado em termos de kets de base. Assim, aplicando o operador traço sobre o produto de σ_j com $\hat{\rho}$ da seguinte maneira

$$\text{Tr}(\sigma_j \hat{\rho}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 S_i \text{Tr}(\sigma_j \sigma_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 S_i 2\delta_{ij}, \quad (2.8)$$

obtemos

$$S_i = \text{Tr}(\sigma_i \hat{\rho}). \quad (2.9)$$

E tomando a representação das bases de medida na base computacional na forma a seguir

$$|+\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad (2.10)$$

$$|-\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle), \quad (2.11)$$

$$|R\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle), \quad (2.12)$$

$$|L\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle), \quad (2.13)$$

a matriz densidade de um q-bit pode ser representada exclusivamente pelos parâmetros $\{S_1, S_2, S_3\}$.

Os parâmetros de Stokes caracterizam completamente o estado de um sistema, de modo que cada um desses parâmetros corresponde diretamente à probabilidade de um par de resultados de medidas projetivas realizadas na base de autoestados $\{\sigma_i\}$, definidos por (53)

$$S_0 = p_{|0\rangle} + p_{|1\rangle}, \quad (2.14)$$

$$S_1 = p_{|+\rangle} - p_{|-\rangle}, \quad (2.15)$$

$$S_2 = p_{|R\rangle} - p_{|L\rangle}, \quad (2.16)$$

$$S_3 = p_{|0\rangle} - p_{|1\rangle}, \quad (2.17)$$

onde $p_{|\Psi\rangle}$ se refere à probabilidade de medida no estado $|\Psi\rangle$.

Estendendo a representação da matriz densidade 2.6 para sistemas de dimensão maior, de acordo com (53), um sistema de n q-bits pode ser descrito como

$$\rho^{(n)} = \frac{1}{2^n} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n}^3 S_{i_1, i_2, \dots, i_n} \sigma_{i_1} \otimes \sigma_{i_2} \otimes \dots \otimes \sigma_{i_n}, \quad (2.18)$$

onde os parâmetros de Stokes são obtidos pelo mesmo processo realizado nas equações 2.8 e 2.9 resultando em

$$S_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \text{Tr}[(\sigma_{i_1} \otimes \sigma_{i_2} \otimes \dots \otimes \sigma_{i_n}) \rho^{(n)}]. \quad (2.19)$$

Isto posto, a relação entre os parâmetros de Stokes e as probabilidades de medidas projetivas para sistemas dados pela equação 2.18, é expressa por (53)

$$S_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \left(p_{|\Psi_{i_1}\rangle} \pm p_{|\Psi_{i_1}^\perp\rangle} \right) \otimes \left(p_{|\Psi_{i_2}\rangle} \pm p_{|\Psi_{i_2}^\perp\rangle} \right) \otimes \dots \otimes \left(p_{|\Psi_{i_n}\rangle} \pm p_{|\Psi_{i_n}^\perp\rangle} \right). \quad (2.20)$$

Neste sentido, a matriz densidade para um sistema bipartite será descrita por

$$\rho^{(AB)} = \frac{1}{4} \sum_{i, j=0}^3 S_{i, j} \sigma_i \otimes \sigma_j. \quad (2.21)$$

Dessarte, a relação entre os parâmetros de Stokes e as probabilidades de medidas projetivas de estados bipartites será expressa por

$$S_{ij} = \left(p_{|\Psi_i\rangle} \pm p_{|\Psi_i^\perp\rangle} \right) \otimes \left(p_{|\Psi_j\rangle} \pm p_{|\Psi_j^\perp\rangle} \right), \quad (2.22)$$

a qual constitui o cerne do processo de tomografia dos modos spin-órbita, que será aprofundado no próximo capítulo.

2.2 Estados de Werner

Os estados de Werner podem ser delineados de maneira simples como estados contendo ruído, conforme (54), e podem ser produzidos através da passagem de estados

emaranhados por canais ruidosos. Sua matriz densidade é composta por (55)

$$\rho_W = P |\Psi\rangle \langle\Psi| + \frac{(1-P)}{d^2} (I_1 \otimes I_2), \quad (2.23)$$

onde $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^d |i_1\rangle |i_2\rangle$ corresponde ao estado maximamente emaranhado, d denota a dimensão no espaço de Hilbert, I é a matriz identidade e o parâmetro P satisfaz $0 \leq P \leq 1$.

A equação 2.23 demonstra que o estado de Werner é constituído por uma mistura de um estado maximamente emaranhado e um estado separável maximamente misturado.

2.3 Separabilidade e emaranhamento dos estados de Werner

A inserção de uma mistura na matriz densidade do estado emaranhado conduz a uma redução do emaranhamento e, até mesmo, a uma possível separabilidade entre os modos do estado. Neste sentido, o parâmetro P confere a característica de não-separabilidade ao estado de Werner quando $P > \frac{1}{(1+d)}$ (55).

Um dos critérios utilizados para classificar a separabilidade dos estados quânticos é a Transposição Parcial Positiva (PPT) que, de acordo com (9), é suficiente para determinar se sistemas 2×2 e 2×3 estão emaranhados. Portanto, como nossos modos do tipo Werner são sistemas contendo dois q-bits, o critério PPT será suficiente para o nosso propósito.

2.3.1 Critério PPT

O critério PPT de Peres-Horodecki confere a denominação de separável ao estado bipartite que, através do processo de transpor a matriz densidade correspondente a um subsistema, resulte apenas em autovalores positivos (10). Por outro lado, se encontrarmos autovalores negativos após realizar transposição parcial, o sistema é dito emaranhado, ou, no caso de modos spin-órbita, não-separável.

Este critério funciona para estados puros e mistos, uma vez que utiliza a matriz densidade. Considerando estados mistos separáveis gerais, é necessário que suas matrizes densidade sejam moldadas pela soma convexa do produto direto dado por

$$\rho^{(AB)} = \sum_i p_i \rho_i^{(A)} \otimes \rho_i^{(B)} \equiv \rho_{m\mu, n\nu}, \quad (2.24)$$

onde $\rho_i^{(A)}$ e $\rho_i^{(B)}$ são matrizes densidade de dois subsistemas através da escolha de bases locais, cujos índices latinos e gregos, ρ_{mn} e $\rho_{\mu\nu}$, respectivamente, se referem aos q-bits inerentes a cada subsistema. Os coeficientes p_i referem-se à probabilidade populacional fracionária e são positivos satisfazendo $\sum p_i = 1$.

Isto posto, apenas os índices de um subsistema são transpostos, aqui caracterizados pelos índices latinos, mantendo os índices pertencentes ao outro subsistema intactos,

identificados aqui pelos índices gregos, na maneira a seguir

$$\sigma^{(AB)} = \sum_i p_i (\rho_i^{(A)})^T \otimes \rho_i^{(B)} \quad (2.25)$$

$$\rho_{m\mu, n\nu} \rightarrow \sigma_{n\mu, m\nu}. \quad (2.26)$$

Deste modo, se o sistema bipartite $\rho^{(AB)}$ transformado pela equação 2.26 for separável, nenhum dos autovalores de $\sigma^{(AB)}$ serão negativos, conforme (10).

2.3.2 Aplicação do Critério PPT para os estados de Werner

A fim de melhor elucidar a aplicação do critério PPT em um sistema bipartite, vamos supor o estado de Werner em sua forma mais simples, definido por $d = 2$ e com $|\Psi_{Bell}\rangle$ como um dos quatro estados de Bell. De modo que a matriz densidade do referido estado, dado por

$$\rho_W = P |\Psi_{Bell}\rangle \langle \Psi_{Bell}| + \frac{(1-P)}{4} (I \otimes I), \quad (2.27)$$

pode ser representado pela forma matricial, via base computacional, da seguinte maneira

$$\rho_W \equiv \begin{bmatrix} & \text{Bell} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \frac{P}{2} & \frac{P}{2} & 0 \\ & 0 & \frac{P}{2} & \frac{P}{2} & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & \text{Identidade} \\ & \frac{1-P}{4} & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \frac{1-P}{4} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & \frac{1-P}{4} & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \frac{1-P}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \frac{1-P}{4} & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \frac{1+P}{4} & \frac{P}{2} & 0 \\ & 0 & \frac{P}{2} & \frac{1+P}{4} & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \frac{1-P}{4} \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Assim, realizamos a transposição parcial com relação a um subsistema, com base na referência (9), por meio da conversão de linhas em colunas – sinalizadas pelos elementos de mesma cor na matriz abaixo, desconsiderando o padrão preto – esquematizado a seguir

$$\rho_W^{TB} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1-P}{4} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & \frac{1+P}{4} & \frac{P}{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{P}{2} & \frac{1+P}{4} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & \frac{1-P}{4} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1-P}{4} & 0 & \mathbf{0} & \frac{P}{2} \\ 0 & \frac{1+P}{4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1+P}{4} & 0 \\ \frac{P}{2} & \mathbf{0} & 0 & \frac{1-P}{4} \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

e calculamos os autovalores na sequência, obtendo o menor autovalor igual a $\frac{1-3P}{4}$ e os demais autovalores iguais a $\frac{1+P}{4}$. Visto que, para que o estado seja separável todos os resultados precisam ser positivos, o estado de Werner será emaranhado quando

$$\frac{1-3P}{4} < 0 \rightarrow P > \frac{1}{3}. \quad (2.30)$$

A compreensão do desenvolvimento dos cálculos inerentes ao critério PPT é parte fundamental para o nosso trabalho, tendo em vista que precisamos aplicá-lo em cada estado de Werner produzido para obter a classificação da separabilidade que alimentará o ML.

Para o trabalho que propomos, construímos um algoritmo que aplica o critério PPT em estados de Werner com modos spin-órbita, executando a transposição do modo de apenas um subsistema conforme a expressão 2.26, onde os índices $mn(\mu\nu)$ estão relacionados aos graus de liberdade da polarização (modo transverso). Na sequência, os autovalores são computados pelo algoritmo para verificar se há valores negativos, classificando-os como não-separáveis (rótulo 0) caso exista. Do contrário, são classificados como separáveis (rótulo 1). Isto posto, precisamos compreender a composição dos estados de Werner com modos spin-órbita que será discutido na próxima seção.

2.4 Estados do tipo Werner com modos spin-órbita

Os estados de Werner que utilizamos no presente trabalho, cuja matriz densidade é expressa pela equação 2.27, são constituídos por uma mistura de um dos estados de Bell e operador identidade. Deste modo, os referidos estados foram codificados nos modos transversos e de polarização.

Conforme já discutido anteriormente, podemos escrever os modos do laser spin-órbita dos estados de Bell como os feixes de polarização radial e azimutal na forma dada pelas expressões 1.54 e 1.55. Nesta conformidade, temos a codificação dos estados de Bell nos modos spin-órbita dada por

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|hH\rangle \pm |vV\rangle], \quad (2.31)$$

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|hV\rangle \pm |vH\rangle]. \quad (2.32)$$

Por conseguinte, para formar os estados de Werner, precisamos adicionar à matriz densidade de um dos estados de Bell descritos por 2.31 e 2.32, uma matriz densidade de um estado separável maximamente misturado, que é composto pelo operador identidade. Note que o termo $\frac{(1-P)}{4}$, que multiplica o referido operador na equação 2.27, garante a normalização do estado com $\text{tr}(\rho) = 1$.

O operador identidade é constituído por uma matriz $n \times n$, na qual todos os elementos da diagonal são iguais a 1 e o restante iguais a zero. Pelo trabalho que propomos tratar de sistemas com 2 q-bits, a matriz identidade deve possuir dimensão 4×4 que, na notação de Dirac, pode ser descrita na base computacional por

$$I = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11|. \quad (2.33)$$

Retomando a notação dada pelas expressões 1.48-1.51 e comparando à equação

2.33, obtemos a matriz identidade em modo spin-órbita

$$I = |HG_{10}\hat{e}_H\rangle \langle HG_{10}\hat{e}_H| + |HG_{10}\hat{e}_V\rangle \langle HG_{10}\hat{e}_V| + |HG_{01}\hat{e}_H\rangle \langle HG_{01}\hat{e}_H| + |HG_{01}\hat{e}_V\rangle \langle HG_{01}\hat{e}_V|. \quad (2.34)$$

Podemos observar que, devido ao estado de Werner ser uma mistura descrita pela equação 2.27, o parâmetro P é fator decisivo na separabilidade dos modos spin-órbita. Haja vista que, quando o valor de P se aproxima de 0 temos pouca contribuição do estado de Bell com predominância da matriz identidade, prevalecendo, assim, o estado como separável. Por outro lado, quando temos o valor de P próximo a 1, temos a prevalência do estado de Bell com pouca contribuição do operador identidade, caracterizando o estado de Werner, então, como não-separável.

2.5 Circuitos ópticos para geração de modos spin-órbita do tipo Werner

Para se obter o análogo de estados mistos com modos spin-órbita por meio de circuitos ópticos, podemos utilizar o trabalho (31) que propôs a preparação de um estado X geral, cujo circuito está ilustrado na figura 17, dentre eles, o modo spin-órbita do tipo Werner. Tendo em vista que os estados de Werner são um subconjunto dos estados X (56), a mistura estatística pode ser emulada pela superposição de lasers independentes com a mesma frequência, cada um preparado em diferentes modos spin-órbita.

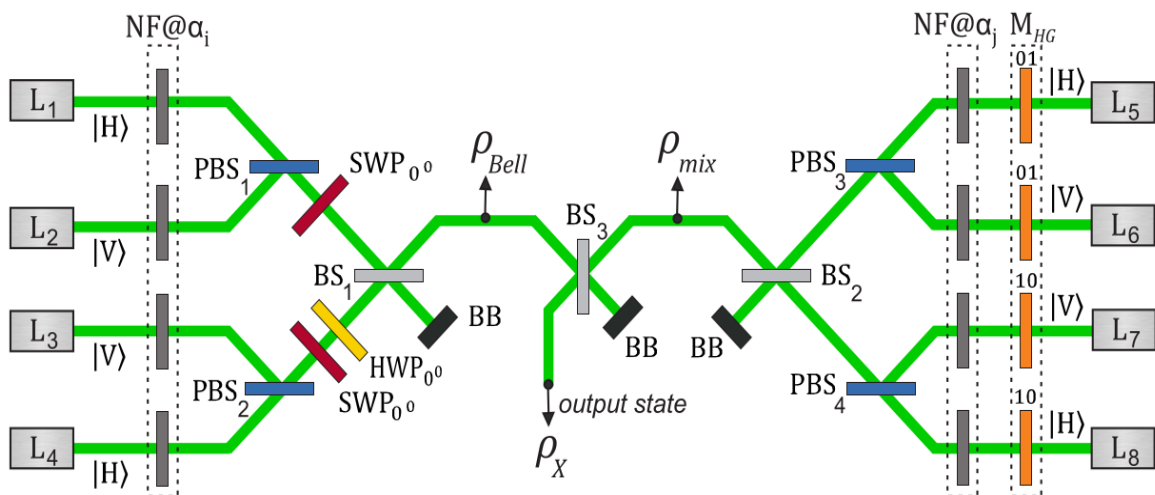


Figura 17 – Circuito óptico de preparação de estados de Werner com modos spin-órbita. Fonte: (31)

Os modos spin-órbita do tipo Werner foram produzidos por um circuito que usa cinco lasers independentes, onde os filtros neutros (NF) são responsáveis por realizar o

controle da população de cada estado. De forma que, para preparar estados de Werner, é necessário manter ligado apenas o laser L_4 do lado esquerdo em conjunto com todos os demais do lado direito da figura 17. Sendo adicionado os lasers L_1 , L_2 e L_3 , apenas quando deseja-se gerar os demais estados tipo X, os quais não são usados no presente trabalho.

Desta maneira, após passar pelo NF, o feixe do laser preparado no estado de polarização $|H\rangle$ proveniente do L_4 passa por uma placa *S-plate* (SWP) (57), gerando o modo spin-órbita não-separável com polarização azimutal que, em seguida, sofre uma atuação da HWP (ângulo = 0°), a qual adiciona uma diferença de fase de π , para a obtenção do estado $\rho_{Bell} = |\Psi_-\rangle\langle\Psi_-|$, expresso pela equação 2.32. Este será o análogo ao estado de Bell nos modos spin-órbita para a composição do estado do tipo Werner.

Para gerar o estado misto dado pela identidade, presente na expressão 2.27, temos os outros quatro lasers L_5 , L_6 , L_7 e L_8 , localizadas no lado direito do circuito da figura 17, que preparam feixes nos estados de polarização $|H\rangle$, $|V\rangle$, $|V\rangle$ e $|H\rangle$, respectivamente. Os modos transversos HG_{10} e HG_{01} , descritos pelas equações 1.42 e 1.43, são produzidos pela atuação das máscaras holográficas M_{10} e M_{01} , de modo a gerar os estados pares ($|Hh\rangle$, $|Vv\rangle$) e estados ímpares ($|Hv\rangle$, $|Vh\rangle$) ao serem combinados por meio da atuação dos dispositivos ópticos PBS_3 , PBS_4 e BS_2 . O resultado será o estado $\rho_{mix} = \frac{1}{4}(I \otimes I)$ que, ao ser combinado com o estado ρ_{Bell} através do BS_3 , produz o estado de Werner expresso pela equação 2.27.

Devido à mistura ser realizada por dois divisores de feixe balanceados (BS), o circuito óptico apresenta perdas por definição. Para fótons únicos, na superposição dos dois feixes realizada pelo BS_2 , a probabilidade do evento ocorrer é a razão entre o número de resultados favoráveis e o número de resultados possíveis, resultando em $\frac{1}{4}$ de probabilidade de sucesso na produção do modo ρ_{mix} e, na sequência, temos a combinação desse modo com o modo ρ_{Bell} pelo BS_3 , onde temos novamente 1 resultado favorável para 4 resultados possíveis, resultando em $\frac{1}{16}$ de probabilidade de sucesso na produção do estado de Werner. Dessarte, essas perdas implicam em uma fonte de estado probabilística que apresenta uma eficiência máxima de 6,25%. Em vista disto, propomos uma melhoria do circuito de preparação de diferentes classes de modos spin-órbita mistos que será apresentado mais adiante no Capítulo 5.

Cientes da preparação de estados de Werner com modos spin-órbita, partimos para o estudo do processo que é responsável por determinar os elementos que compõem a referida matriz, conhecido como tomografia de modos spin-órbita, o qual será aprofundado no próximo capítulo.

3 Tomografia de modos spin-órbita

Neste capítulo será discorrido sobre o método de caracterização dos estados por meio da tomografia quântica, tomando como referência (51, 53). Tal processo consiste na realização de medidas projetivas em diferentes bases, as quais viabilizam a determinação dos parâmetros de Stokes, que, por sua vez, reproduzem a matriz densidade do estado.

É relevante mencionar que é preciso preparar uma gama de estados da mesma maneira para realizar medições únicas nas diversas bases da tomografia, haja vista que o ato de fazer uma medida projetiva provoca um colapso da função de onda para um dos possíveis estados, implicando na perda da superposição. Destarte, temos, por consequência, uma execução maior de medidas projetivas conforme maior o tamanho do sistema. Motivo pelo qual o uso do ML na classificação de separabilidade dos estados nos oportuniza um ganho valioso com relação ao tempo desempenhado na realização de uma tomografia.

A realização da tomografia se faz necessária para o nosso trabalho apenas inicialmente, devido ao uso das matrizes densidade por ela produzidas no cálculo do critério PPT, com a finalidade de classificar a separabilidade de cada estado que será fornecido ao ML durante seu processo de aprendizagem e, ao final desse processo, para atestar se o mesmo está classificando corretamente.

Para o nosso objetivo, a tomografia de sistemas com dois q-bits será suficiente. Deste modo, nas próximas seções partiremos da construção da tomografia de um único q-bit até o desenvolvimento da tomografia de sistemas bipartites através de circuitos ópticos de modos spin-órbita.

3.1 Tomografia de 1 q-bit

A tomografia de um sistema contendo dois graus de liberdade efetua a caracterização da matriz densidade por meio das medidas projetivas em diferentes bases, que são definidas por

$$S_0 : \{|0\rangle, |1\rangle\}, \quad (3.1)$$

$$S_1 : \{|+\rangle, |-\rangle\}, \quad (3.2)$$

$$S_2 : \{|R\rangle, |L\rangle\}, \quad (3.3)$$

$$S_3 : \{|0\rangle, |1\rangle\}, \quad (3.4)$$

onde S_0 e S_3 correspondem à base computacional, enquanto S_1 e S_2 são estabelecidos pelas equações 2.10-2.13.

Por conseguinte, se faz necessário determinar os parâmetros de Stokes através das equações 2.14-2.17 que associam os parâmetros $\{S_0, S_1, S_2, S_3\}$ às probabilidades de medida nas bases distintas.

A fim de elucidar melhor o processo de tomografia, vamos tomar como exemplo um q-bit que foi preparado preliminarmente em um estado puro (51)

$$|\gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle). \quad (3.5)$$

Isto posto, as medidas projetivas são calculadas através da regra de Born a seguir

$$p_{|0\rangle}^{\gamma} = |\langle 0|\gamma\rangle|^2 = 0,5, \quad (3.6)$$

$$p_{|1\rangle}^{\gamma} = |\langle 1|\gamma\rangle|^2 = 0,5, \quad (3.7)$$

$$p_{|+\rangle}^{\gamma} = \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| + \langle 1|)|\gamma\rangle \right|^2 = 0,5, \quad (3.8)$$

$$p_{|-\rangle}^{\gamma} = \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| - \langle 1|)|\gamma\rangle \right|^2 = 0,5, \quad (3.9)$$

$$p_{|R\rangle}^{\gamma} = \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| + i\langle 1|)|\gamma\rangle \right|^2 = 1, \quad (3.10)$$

$$p_{|L\rangle}^{\gamma} = \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| - i\langle 1|)|\gamma\rangle \right|^2 = 0. \quad (3.11)$$

Assim, os parâmetros de Stokes são determinados através das equações 2.14-2.17 da seguinte maneira

$$S_0 = p_{|0\rangle} + p_{|1\rangle} = 0,5 + 0,5 = 1, \quad (3.12)$$

$$S_1 = p_{|+\rangle} - p_{|-\rangle} = 0,5 - 0,5 = 0, \quad (3.13)$$

$$S_2 = p_{|R\rangle} - p_{|L\rangle} = 1 - 0 = 1, \quad (3.14)$$

$$S_3 = p_{|0\rangle} - p_{|1\rangle} = 0,5 - 0,5 = 0. \quad (3.15)$$

Deste modo, obtemos a matriz densidade do estado $|\gamma\rangle$ por meio da equação 2.6 e da aplicação das matrizes de Pauli (vide expressão 2.7) na forma a seguir

$$\rho^{\gamma} = \frac{1}{2}(S_0\sigma_0 + S_1\sigma_1 + S_2\sigma_2 + S_3\sigma_3) = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_2) \quad (3.16)$$

$$\rho^{\gamma} = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

A caracterização da matriz densidade de um estado puro realizada pelo processo de tomografia aqui exemplificado pode ser estendido a estados mistos. Cientes da estrutura da tomografia de um q-bit, partimos para a construção da tomografia de dois q-bits na próxima seção.

3.2 Tomografia de 2 q-bits

A tomografia para sistemas bipartites segue o mesmo sentido do processo apresentado na seção anterior, mas que, nesse caso por ser constituído de 2 q-bits ao invés de apenas 1, precisa de uma quantidade maior de medidas projetivas a serem realizadas com o intuito de contemplar os 16 parâmetros de Stokes que são necessários para caracterizar completamente o sistema.

Para estabelecer as associações entre as probabilidades relacionadas às medidas projetivas e os parâmetros de Stokes, recorreremos à expressão 2.22. A fim de ilustrar esse processo, propomos como exemplo a determinação dos parâmetros $S_{00}, S_{01}, S_{02}, S_{03}$ em função das respectivas probabilidades de medidas, os quais resultam em

$$S_{00} = p_{|00\rangle} + p_{|01\rangle} + p_{|10\rangle} + p_{|11\rangle} \quad (3.18)$$

$$S_{01} = p_{|0+\rangle} - p_{|0-\rangle} + p_{|1+\rangle} - p_{|1-\rangle} \quad (3.19)$$

$$S_{02} = p_{|0r\rangle} - p_{|0l\rangle} + p_{|1r\rangle} - p_{|1l\rangle} \quad (3.20)$$

$$S_{03} = p_{|00\rangle} - p_{|01\rangle} + p_{|10\rangle} - p_{|11\rangle}. \quad (3.21)$$

Podemos observar que é necessário medir nas bases $\{|Hh\rangle, |Hv\rangle, |Vh\rangle, |Vv\rangle\}$, $\{|H+\rangle, |H-\rangle, |V+\rangle, |V-\rangle\}$ e $\{|Hr\rangle, |Hl\rangle, |Vr\rangle, |Vl\rangle\}$ para defini-los, tendo em vista que os parâmetros acima dependem das probabilidades de medida nestas bases.

Neste sentido, as medidas projetivas são realizadas nas diferentes bases para a obtenção das probabilidades com o intuito de determinar os parâmetros de Stokes. De posse dos parâmetros de Stokes, retomamos a equação 2.21 para determinar a matriz densidade do sistema bipartite.

3.3 Circuito óptico de tomografia de modos spin-órbita

Cientes do processo de tomografia de sistemas bipartites, podemos seguir para a construção da tomografia de modos spin-órbita por meio da analogia com a óptica clássica. O formalismo de Jones (46) possibilita a montagem de um circuito óptico com o objetivo de simular a tomografia, haja vista que a representação dos dispositivos ópticos, dos estados de polarização e modos transversos no formato das matrizes de Jones, nos permite executar as projeções nas diferentes bases.

O circuito óptico para a realização da tomografia de estados com modos spin-órbita é mostrado na figura 18, onde os modos sofrem atuação do PBS, BS e MZIM e, na sequência, dois dispositivos ópticos HWP e QWP para medir a polarização ou DP e CL para medir o modo transverso.

Para o caso da analogia clássico-quântica de feixes intensos, as probabilidades de medida são estabelecidas de forma indireta pelas intensidades normalizadas (51) definidas

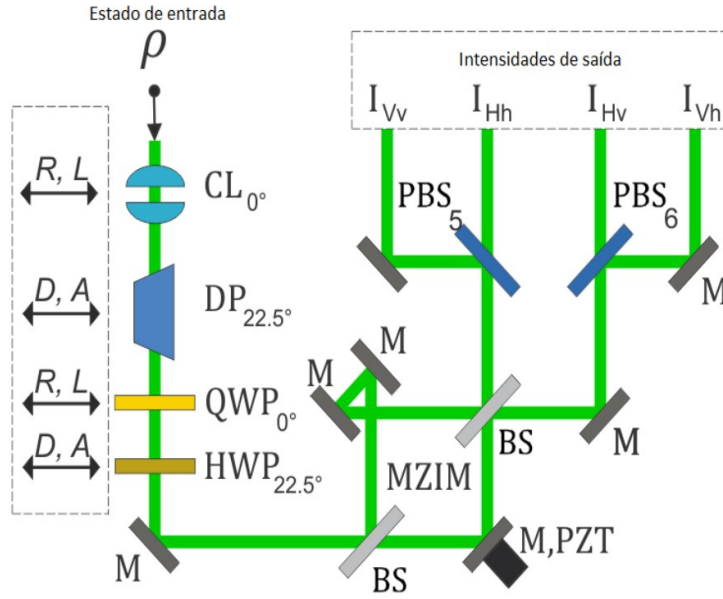


Figura 18 – Representação do circuito óptico de tomografia para sistemas bipartites codificados em modos spin-órbita. Fonte: (31), adaptado pela autora

por

$$p_{|i\rangle} = \frac{I_i}{I_i + I_j} \quad \text{e} \quad p_{|j\rangle} = \frac{I_j}{I_i + I_j}, \quad (3.22)$$

onde os índices i, j indicam as componentes que estabelecem a base de medida.

Desta forma, precisamos considerar as associações entre os parâmetros de Stokes, as respectivas bases de medida e os elementos ópticos listados na tabela 3.3.

Nosso ponto de partida será reaver a codificação da polarização – definida pelas expressões 1.26 e 1.27 – e do modos transversos – estabelecida por 1.42 e 1.43 – a fim de caracterizar os q-bits, determinando, assim, os parâmetros de Stokes através da realização das medidas projetivas da polarização nas bases $\{|H\rangle, |V\rangle\}$, $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ e $\{|R\rangle, |L\rangle\}$ e dos modos transversos nas bases $\{|h\rangle, |v\rangle\}$, $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ e $\{|r\rangle, |l\rangle\}$. A figura 18 demonstra o arranjo experimental da tomografia de um sistema bipartido codificado nos modos spin-órbita.

As medidas projetivas na base computacional $\{|Hh\rangle, |Hv\rangle, |Vh\rangle, |Vv\rangle\}$ ocorrem através do Mach-Zehnder com espelho adicional (MZIM), que opera como seletor de paridade juntamente com o PBS, o qual transmite (reflete) estados de polarização horizontal (vertical). Deste modo, o dispositivo PBS atua em todas as medidas, realizando as operações indicadas em 1.26-1.27 e 1.42-1.43.

Para medir nas demais bases, introduzimos ou retiramos os elementos ópticos indicados por setas ao lado destes – vide retângulo pontilhado à esquerda na figura 18 – em conformidade com a base de medida que se deseja medir.

(i,j)	Base de medida	Dispositivos ópticos
(0,0);(3,0)	$\{ Hh\rangle, Hv\rangle, Vh\rangle, Vv\rangle\}$	MZIM + PBS
(0,3);(3,3)		
(0,1);(3,1)	$\{ H+\rangle, H-\rangle, V+\rangle, V-\rangle\}$	DP + MZIM + PBS
(0,2);(3,2)	$\{ Hr\rangle, Hl\rangle, Vr\rangle, Vl\rangle\}$	MZIM + PBS + CL + DP + MZIM + PBS
(1,0);(1,3)	$\{ +h\rangle, +v\rangle, -h\rangle, -v\rangle\}$	HWP + MZIM + PBS
(1,1)	$\{ ++\rangle, +-\rangle, -+\rangle, --\rangle\}$	DP + HWP + MZIM + PBS
(1,2)	$\{ +r\rangle, +l\rangle, -r\rangle, -l\rangle\}$	CL + DP + HWP + MZIM + PBS
(2,0);(2,3)	$\{ Rh\rangle, Rv\rangle, Lh\rangle, Lv\rangle\}$	QWP + HWP + MZIM + PBS
(2,1)	$\{ R+\rangle, R-\rangle, L+\rangle, L-\rangle\}$	DP + QWP + HWP + MZIM + PBS
(2,2)	$\{ Rr\rangle, Rl\rangle, Lr\rangle, Ll\rangle\}$	CL + DP + QWP + HWP + MZIM + PBS

Tabela 1 – Relação dos parâmetro de Stokes, bases de medida e os dispositivos ópticos. O índice i(j) se refere ao primeiro (segundo) q-bit. As bases $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ e $\{|h\rangle, |v\rangle\}$ correspondem à base computacional, enquanto $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, $\{|R\rangle, |L\rangle\}$ e $\{|r\rangle, |l\rangle\}$ são estabelecidas através das equações 2.10-2.13. Fonte: (51), adaptado pela autora

Conforme já mencionado anteriormente, as placas de onda são responsáveis por selecionar a base de medida na polarização. De modo que, para medir na base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, utilizamos uma combinação da HWP (eixo rápido = 45°) com o PBS para transmitir (refletir) polarização diagonal (anti-diagonal), a fim de executar o mapeamento dado por

$$|+\rangle \rightarrow |H\rangle \equiv |0\rangle, \quad (3.23)$$

$$|-\rangle \rightarrow |V\rangle \equiv |1\rangle. \quad (3.24)$$

No caso dos modo transversos, o DP (ângulo = $22,5^\circ$) desempenha a mesma função da matriz de Jones da HWP, embora atuem em espaços distintos. Assim, juntamente com MZIM e PBS, o DP é responsável por realizar o seguinte mapeamento

$$|+\rangle \rightarrow |h\rangle \equiv |0\rangle, \quad (3.25)$$

$$|-\rangle \rightarrow |v\rangle \equiv |1\rangle. \quad (3.26)$$

Para medir na base $\{|R\rangle, |L\rangle\}$, adicionamos a QWP (ângulo = $22,5^\circ$) na combinação da HWP com o PBS. Desta maneira, somos capazes de transmitir (refletir) luz circularmente polarizada à esquerda (à direita), estabelecendo o mapeamento a seguir

$$|R\rangle \rightarrow |H\rangle \equiv |0\rangle, \quad (3.27)$$

$$|L\rangle \rightarrow |V\rangle \equiv |1\rangle. \quad (3.28)$$

De modo similar, medimos a base $\{|h\rangle, |v\rangle\}$ do modo transversos por meio de duas lentes cilíndricas (CL) distanciadas entre si por $d = \sqrt{2}f - f$ indica a distância focal – em

conjunto com DP, MZIM e PBS. Assim, as CL desempenham a mesma função da matriz de Jones da HWP, realizando o mapeamento dado por

$$|r\rangle \rightarrow |h\rangle \equiv |0\rangle, \quad (3.29)$$

$$|l\rangle \rightarrow |v\rangle \equiv |1\rangle. \quad (3.30)$$

Após a realização das medidas projetivas em todas as bases com a normalização das intensidades de saída, obtemos os parâmetros de Stokes via equação 2.22. Deste modo, somos capazes de caracterizar qualquer estado spin-órbita por meio da equação 2.21.

O processo de tomografia de q-bits codificados na polarização e no modo transversal consiste em uma parte importante para a classificação da separabilidade. Para a aplicação do critério PPT, precisamos da matriz densidade a fim de rotular os estados como separáveis ou não-separáveis, pois os dados contendo tais rótulos serão utilizados para treinar o ML e, ao final, para verificar se o mesmo é capaz de classificar corretamente os estados. A maneira como esses dados alimentam o ML, bem como sua construção e desenvolvimento, serão discutidos no próximo capítulo.

4 Aprendizado de Máquina

Os dados que compõem nosso trabalho correspondem à matriz densidade – determinada pelo processo de tomografia com modos spin-órbita descrito no Capítulo 3 – e à classificação de separabilidade de cada respectivo estado – estabelecida pela aplicação do critério PPT apresentado na Seção 2.3 – ou seja, dispomos de um rótulo de separabilidade (separável ou não separável) para cada matriz densidade.

Em vista disso, nossa melhor opção foi desenvolver um aprendizado de máquina (ML) supervisionado de classificação, uma vez que, a definição desse tipo de aprendizagem consiste em categorizar dados a partir de informações anteriores entregues quando não temos disponível uma solução analítica (58).

A aprendizagem supervisionada, em outras palavras, parte da premissa básica de aprender com base em exemplos explícitos de qual deve ser a saída correta para determinadas entradas, que estão presentes nos dados de treinamento. Embora não seja o único tipo na literatura, tendo em vista que dispomos de aprendizado por reforço, aprendizagem não-supervisionada, entre outros, este é o método de aprendizagem mais estudado e utilizado na ciência de dados (58).

Desta forma, desenvolvemos um ML que consiste em uma rede neural (NN), na qual há uma compilação de neurônios interconectados que aprendem com os dados a adquirir tendências lineares e não lineares essenciais em dados complexos, para que possam ser fornecidas previsões confiáveis para novas situações, mesmo que tais situações tenham apenas informação parcial e/ou ruído (59).

Nossa rede neural é, mais especificamente, um perceptron (rede neural de múltiplas camadas) com aprendizagem supervisionada como classificador, haja vista que os neurônios no perceptron são limiares trabalhando em conjunto, aprendendo com dados de exemplo e com pesos sendo alterados durante esse processo.

O perceptron teve seu primeiro modelo neural proposto por Rosenblatt (60), após este ter focado seu estudo em como o cérebro humano aprende com a experiência, reconhece padrões, agrupa experiências parecidas e as diferencia de experiências diferentes, respondendo de maneira similar a experiências semelhantes. Neste sentido, ele procurou desenvolver neurônios artificiais capazes de modelar funções cerebrais, como a cognição por exemplo, que fossem flexíveis o suficiente para aprender e se adaptar ao ambiente.

A figura 19 apresenta o esquema da rede neural que desenvolvemos, que é composta por três camadas: a de entrada, a oculta e a de saída. O primeiro conjunto de setas representa o conjunto de pesos $\{w_i\}$ estabelecidos inicialmente de maneira aleatória com

intervalo de $[-1,1]$ – conexões de entrada dos neurônios ocultos – que ligam a camada de entrada $\{x_i\}$ à camada intermediária, composta por vários neurônios ocultos. Os neurônios ocultos somam as entradas ponderadas correspondentes, conforme indicado por u_j na figura 19, e cada neurônio oculto passa sua soma ponderada através de uma função de transferência não linear – função de ativação. Assim, as saídas dos neurônios ocultos são alimentadas por meio do segundo conjunto de pesos $\{w_j\}$, que também foram estabelecidos inicialmente de maneira aleatória com intervalo de $[-1,1]$ – conexões de saída dos neurônios ocultos – no neurônio de saída v , que monta as saídas y calculando a soma ponderada e passando-a por outra função não linear.

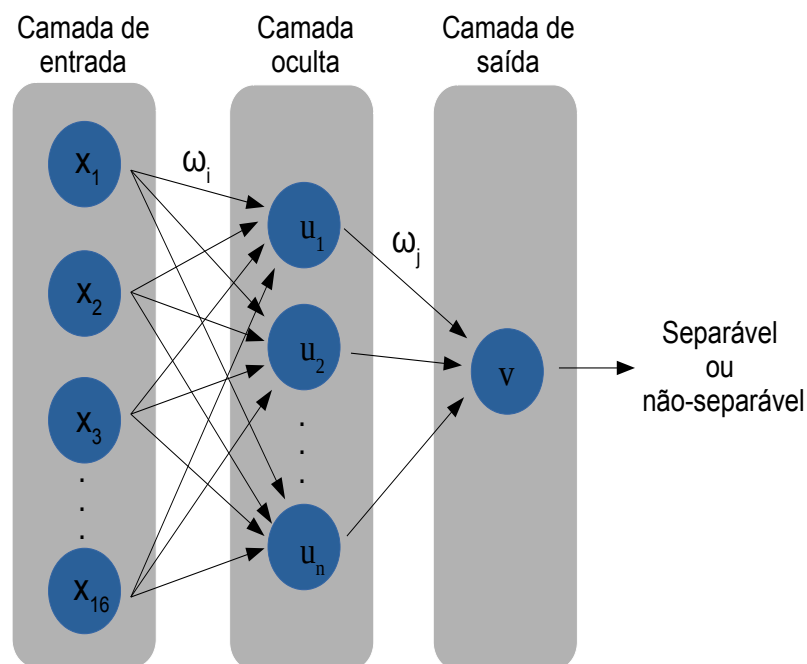


Figura 19 – Representação de uma rede neural artificial com uma camada oculta. Os neurônios são ilustrados pelos círculos em azul, os quais são separados por camadas – indicadas pelo sombreado cinza – e as setas representam as conexões entre eles. Fonte: própria autora

Podemos dizer que o neurônio artificial, presente em quantidade variada em cada camada da rede neural, é responsável pelo processo de aprendizagem do ML, tendo em vista que o mesmo funciona como um neurônio biológico no cérebro – capta seus sinais de entrada probabilísticos, trabalha com eles e os converte em uma saída correspondente ao axônio do neurônio biológico (61).

A camada de entrada é responsável por receber os dados que contém a matriz densidade e seu rótulo correto. A quantidade de neurônios nesta camada depende da quantidade de variáveis que compõem os dados de entrada que, no nosso caso, contém

16 neurônios para corresponder a conexão dos neurônios com cada elemento da matriz densidade de um sistemas com dois q-bits. Destarte, a rede de entrada u_i para cada neurônio da camada intermediária é a soma das entradas ponderadas (59)

$$u_j = \sum_{i=1}^{16} w_i x_i, \quad (4.1)$$

onde x_i é o vetor de entrada, w_i consiste no vetor de peso associado à conexão da camada de entrada à camada oculta e o índice i corresponde ao total de variáveis de uma entrada.

A camada oculta se encontra entre as camadas de entrada e saída, na qual os neurônios artificiais recebem o conjunto de entradas ponderadas 4.1 e cada um deles produz uma saída através da função de ativação. A referida camada recebe este nome devido ao fato dos neurônios nela contidos não estarem expostos ao ambiente externo como a primeira e a terceira camada (59).

Utilizamos funções de ativação não lineares e contínuas na camada oculta, as quais possuem a característica de permanecer dentro de alguns limites superiores e inferiores. A não linearidade permite que a NN realize um mapeamento não linear entre as entradas e saídas, enquanto que a continuidade assegura que as funções sejam diferenciáveis, possibilitando a implementação da regra de delta para ajustar os pesos na retropropagação dos erros (59).

Nesta conformidade, usamos função de ativação Unidade Linear Retificada (ReLU) definida por (62)

$$f_{ReLU}(u_j) = \max(0, u_j), \quad (4.2)$$

que retorna 0 para todos os valores negativos e o próprio valor para valores positivos. Assim, se a entrada for negativa, ela será convertida em zero e o neurônio não será ativado. Isso significa que, simultaneamente, apenas alguns neurônios são ativados, tornando a rede esparsa e eficiente para a computação.

Em seguida, a saída de cada neurônio oculto sofre atuação do segundo conjunto de pesos a fim de alimentar o neurônio da camada de saída. Destarte, a rede de dados para o neurônio da última camada corresponde a soma ponderada das saídas da camada oculta

$$v = \sum_{j=1}^n w_j f_{ReLU}(u_j), \quad (4.3)$$

onde w_j consiste no vetor de peso associado à conexão da camada oculta à camada de saída e o índice n corresponde ao total de neurônios presentes na camada oculta.

Na camada de saída usamos a função Sigmoide – função matemática de amplo uso na computação que recebe esse nome devido ao formato em “S” do seu gráfico – definida por (59)

$$f_{Sigmoide}(v) = \frac{1}{1 + e^{-v}}. \quad (4.4)$$

Quando temos vários neurônios com função Sigmóide como função de ativação, a saída não é linear e varia de 0 a 1 tendo uma forma “S”. Neste sentido, a função 4.4 essencialmente tenta empurrar os valores de saída para os extremos, o que é uma qualidade muito desejável quando queremos classificar os valores para uma classe específica.

Em ambos os estágios das funções acima, os pesos são ajustados com o propósito de minimizar o erro através do processo de retropropagação, o qual consiste em duas etapas de computação: o processamento direto e o processamento reverso. No processamento direto, a entrada é aplicada à rede neural, seu efeito é propagado pela rede, camada a camada, e os pesos da rede permanecem fixos. No processamento reverso, o erro – calculado na função final da saída da rede – é propagado no sentido reverso, camada a camada, e ao final deste processo os pesos são ajustados de acordo com uma regra de correção de erro.

O conceito de retropropagação foi proposto pela primeira vez por Werbos (63), o qual possibilita seguir uma cadeia de associação dos erros determinados na saída até as entradas por meio da concepção da regra da cadeia – que encontra as derivadas quando a ligação do erro a um peso não é direta – tendo em mente que a derivada do erro é crucial para o ajuste dos pesos.

O referido erro E , mencionado anteriormente, consiste na diferença entre os rótulos (*não-separáveis* = 0, *separáveis* = 1) corretos z e as saídas y produzidas pela função Sigmoid 4.4, dado por (59)

$$E = (z - y), \quad (4.5)$$

Contudo, utilizamos o erro quadrático ε ao invés do erro simples E , pelo fato do quadrado não ter o sinal de E , evitando, assim, causar algum problema quando o erro é somado sobre todas as entradas (59). Deste modo, ε é dado por (64)

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (z^{(k)} - y^{(k)})^2, \quad (4.6)$$

onde o índice k se refere à k -ésima iteração, enquanto m indica a quantidade total de entradas e a fração $\frac{1}{2}$ é arbitrária e é usada por conveniência matemática.

Destarte, os dois conjuntos de pesos ajustados são definidos por

$$w_i^{(k+1)} = w_i^{(k)} + \Delta w_i, \quad (4.7)$$

$$w_j^{(k+1)} = w_j^{(k)} + \Delta w_j, \quad (4.8)$$

onde w^{k+1} corresponde ao vetor de pesos atualizados associados a cada camada, w^k consiste no vetor de pesos anteriores de cada camada, estabelecidos inicialmente de forma aleatória, e a regra de delta generalizada Δw é a regra de correção de erro dada por (59, 64)

$$\Delta w \propto -\frac{\partial \varepsilon}{\partial w} = -\eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial w}. \quad (4.9)$$

Note que, de acordo com a regra de delta generalizada 4.9, a mudança de peso é proporcional ao negativo do gradiente do erro quadrático, devido a necessidade de descer a curva de erro para minimizá-lo. Essa proporcionalidade \propto pode ser substituída pela taxa de aprendizado η (59), que é responsável por determinar a velocidade na qual a NN aprende.

Para obter o resultado de Δw_j com a função de ativação não linear para ajustar o segundo conjunto de pesos, utilizamos a regra da cadeia a seguir (64)

$$\frac{\partial \varepsilon^{(k)}}{\partial w_j} = \frac{\partial \varepsilon^{(k)}}{\partial v^{(k)}} \frac{\partial v^{(k)}}{\partial w_j}, \quad (4.10)$$

onde, no segundo termo, obtemos

$$\frac{\partial v^{(k)}}{\partial w_j} = \frac{\partial}{\partial w_j} \left[\sum_{j=1}^n w_j f_{ReLU}(u_j) \right] = f_{ReLU}(u_j). \quad (4.11)$$

Para obter o primeiro termo, o reescrevemos na forma a seguir

$$-\frac{\partial \varepsilon^{(k)}}{\partial v^{(k)}} = -\frac{\partial \varepsilon^{(k)}}{\partial f_{Sigmoide}^{(k)}(v)} \frac{\partial f_{Sigmoide}^{(k)}(v)}{\partial v^{(k)}}, \quad (4.12)$$

onde a derivada da função Sigmoide é dada por

$$\frac{\partial f_{Sigmoide}^{(k)}(v)}{\partial v^{(k)}} = y^{(k)}(1 - y^{(k)}). \quad (4.13)$$

Como a saída é dada por

$$y^{(k)} = f_{Sigmoide}^{(k)}(v), \quad (4.14)$$

então, o resultado do primeiro termo da equação 4.12 é dado por

$$\frac{\partial \varepsilon^{(k)}}{\partial f_{Sigmoide}^{(k)}(v)} = -(z^{(k)} - y^{(k)}) = -E^{(k)}. \quad (4.15)$$

Substituindo os resultados de 4.13 e 4.15 em 4.12, temos

$$\frac{\partial \varepsilon^{(k)}}{\partial v^{(k)}} = E^{(k)} y^{(k)} (1 - y^{(k)}). \quad (4.16)$$

Por fim, ao substituir os resultados das equações 4.11 e 4.16 em 4.10, obtemos

$$\Delta w_j = \frac{\partial \varepsilon^{(k)}}{\partial w_j} = E^{(k)} y^{(k)} (1 - y^{(k)}) f_{ReLU}(u_j). \quad (4.17)$$

E, realizando o mesmo processo para o primeiro conjunto de pesos, obtemos

$$\Delta w_i = \frac{\partial \varepsilon^{(k)}}{\partial w_i} = E^{(k)} y^{(k)} (1 - y^{(k)}) x_i. \quad (4.18)$$

Nesta conformidade, os resultados encontrados em 4.17 e 4.18 vão compor os ajustes dos pesos estabelecidos em 4.7-4.8.

Como vimos, a terceira camada produz a saída y e é onde acontece a classificação final. Ela é composta por apenas um neurônio que produz um vetor com intervalo de $[0, 1]$ de modo que, quanto mais próximo de 0 significa não-separável e, caso contrário, mais próximo de 1 significa separável – devido ao algoritmo do critério PPT estabelecer rótulo 0 para estados não-separáveis e rótulo 1 para estados separáveis.

Por fim, a configuração que estabelecemos para nossa rede neural foi uma taxa de aprendizado de $\eta = 0.3$, um total de $n = 10$ neurônios na camada oculta e 10.000 épocas – este último é um termo computacional que significa a quantidade de uma iteração de todos os dados de entrada com os neurônios presentes nas camadas (59), ou seja, cada época corresponde a um ciclo completo através de todos os dados no processo de treinamento e portanto, como foi estabelecido um total de 10.000 épocas, significa dizer que os dados de entrada passarão pela rede neural 10.000 vezes e a cada vez (cada época) os pesos serão ajustados na direção do ideal.

Para atingir o objetivo de ensinar a rede neural, atribuímos dois conjuntos de dados: de treinamento e de teste (58). O conjunto de treinamento são dados selecionados usados para treinar o ML, onde o aprendizado ocorre através do processo de minimização de erros com as matrizes de densidade e seus rótulos corretos. O conjunto de teste é o restante dos dados que não foram envolvidos no processo de treinamento, que é usado para avaliar o quão bem a NN aprendeu sobre as matrizes densidade.

Em nosso estudo, os treinamentos e testes foram realizados com dados contendo a matriz densidade completa – através de simulações de medições da tomografia completa – ou com a matriz densidade parcial – apenas duas ou uma base foram utilizadas na medição da tomografia. Também incluímos na simulação do circuito algum ruído, obtido assumindo um erro de 1% nos suportes de rotação do circuito de tomografia – figura 18. Em geral, usamos 70% de dados no processo de treinamento e os restantes 30% foram usados na etapa de teste.

A esta altura, é importante salientar o critério utilizado para a seleção dos dados para treinamento e teste, haja vista que, ainda que a seleção seja aleatória, precisamos assegurar que não sejam selecionados dados repetidos a fim de evitar qualquer viés para a rede neural.

Nesse sentido, como cada valor de P indica um dado de entrada, utilizamos uma função computacional que produz números aleatórios para selecionar os 70% dos dados de entrada através do valor de P vinculado a cada estado e foi utilizada outra função computacional – que produz um vetor contendo uma permutação aleatória de números de 0 a um total previamente estabelecido – para organizar esses valores de P sem repetir nenhum

valor. Deste modo, garantimos que nenhum estado alimentaria o ML repetidamente dentro de uma época no estágio de treinamento.

Em seguida, percorremos todos os valores de P , comparando com aqueles que foram usados na etapa de treinamento, descartando-os em caso afirmativo, de maneira que selecionamos apenas os estados que não foram usados antes para compor os 30% dos dados utilizados na etapa teste para alimentar a NN.

Vale mencionar que a linguagem computacional escolhida para realizar a implementação da rede neural foi o MATLAB, por razão de seu alto desempenho para cálculo numérico e por possuir integração de cálculo com matrizes.

Por fim, compreendendo a construção e desenvolvimento do ML, partimos para a confecção de um circuito óptico otimizado, que produz modos spin-órbita mistos do tipo Werner, no capítulo a seguir.

5 Circuitos ópticos para simulação de modos do tipo Werner e outros estados mistos

Neste capítulo, propomos uma melhoria do circuito de preparação de diferentes classes de modos mistos spin-órbita que foi desenvolvido no trabalho (31). Estes estados são simulados a partir da codificação de q-bits por meio da base computacional expressa nas equações 1.26 e 1.27 para a polarização e nas equações 1.42 e 1.43 para o modo transversal de um feixe laser.

No circuito que elaboramos, ilustrado na figura 20, a identidade é obtida por quatro lasers independentes preparados nos quatro elementos básicos do modo spin-órbita $|Vv\rangle$, $|Hh\rangle$, $|Hv\rangle$ e $|Vh\rangle$, respectivamente. Note que os lasers precisam ser independentes em razão de uma mistura estatística não dispor de correlação de fase, deste modo, para simular esses estados é necessário que os feixes sejam oriundos de fontes independentes.

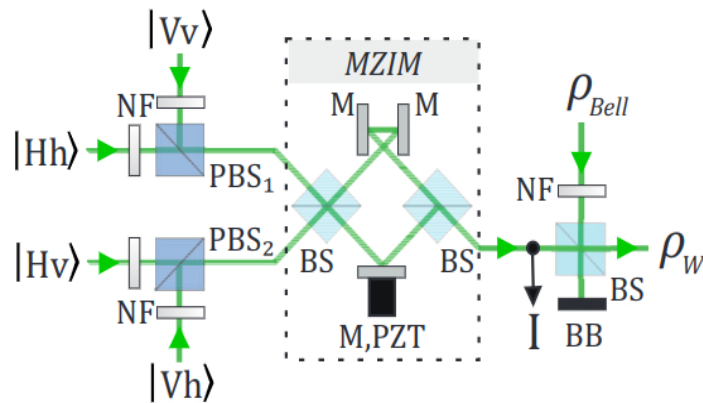


Figura 20 – Circuito óptico para preparação de estados spin-órbita do tipo Werner. Fonte: própria autora

Os modos pares ($|Hh\rangle$, $|Vv\rangle$) são sobrepostos pelo PBS_1 e os modos ímpares ($|Hv\rangle$, $|Vh\rangle$) pelo PBS_2 . Em seguida, esses dois modos mistos vão para um interferômetro March Zehnder com um espelho adicional (MZIM). Ao entrar em portas diferentes do MZIM, os modos par e ímpar saem na mesma porta de saída e temos o termo de identidade $\frac{1}{4}(I \otimes I)$ do modo do tipo Werner, expresso na referida equação 2.27, sem perdas.

O modo spin-órbita não-separável $\rho_{Bell} = |\Psi_+\rangle \langle \Psi_+|$, também presente em 2.27, é preparado por outro laser independente usando uma placa SWP. Desta maneira, a mistura do modo spin-órbita com o termo identidade é realizada pelo BS, resultando no estado do tipo Werner descrito por sua matriz densidade ρ_w . Note que somente nesta etapa o circuito

óptico apresenta perdas por definição em razão da mistura ser realizada por apenas um divisor de feixe balanceado em regime de fóton único. A probabilidade do evento ocorrer é a razão entre o número de resultados favoráveis e o número de resultados possíveis, resultando em $\frac{1}{4}$ de probabilidade de sucesso na produção do modo ρ_w . Portanto, essas perdas implicam em uma fonte de estado probabilística com eficiência máxima de 25%.

Nesta conformidade, no que se refere ao trabalho (31), nossa proposta de circuito quadruplica a eficiência da preparação do estado spin-órbita de Werner para uma implementação de um protocolo de informação quântica completo. Este ganho é muito importante considerando fontes probabilísticas.

O parâmetro P estabelecido na equação 2.27 é controlado pela transmitância T dos filtros neutros (NF), os quais podem ser regulados girando-os em um ângulo α . Assim, a intensidade de transmissão é estabelecida no NF como $T = \cos^2\alpha$, de maneira que, para atingir a transmissão máxima com $T = 1$, estabelecemos $\alpha = 0^\circ$ e, para a transmissão mínima com $T = 0$, configuramos $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Assim, para estabelecermos $P = 1$, por exemplo, regulamos o ângulo do NF de ρ_{Bell} com $\alpha = 0^\circ$ e os ângulos dos NFs dos feixes provenientes das demais fontes do circuito 20 com $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Isto posto, emulamos o circuito de preparação usando o referido formalismo de Jones e, com o intuito de ilustrar o perfil transversal, apresentamos o perfil de intensidade dos modos simulados para alguns valores de P – Coluna A – na figura 21.

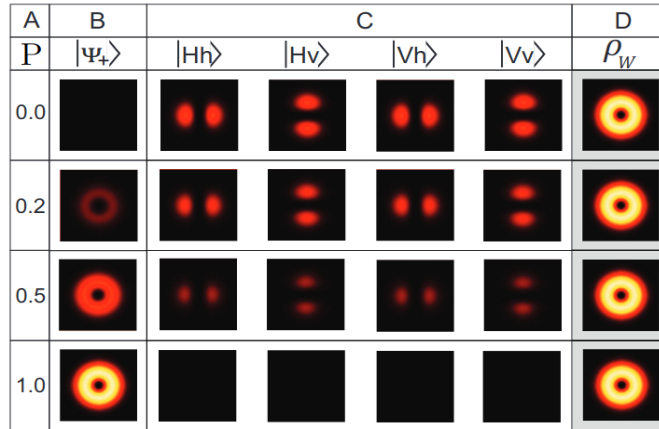


Figura 21 – Simulação do perfil transversal associado ao modo de polarização radial ($|\Psi_+\rangle$) e modos separáveis (elementos de base spin-órbita). Fonte: própria autora

Podemos observar que quando $P = 0$, não temos intensidade no modo $P|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+|$ – coluna B – e apenas o estado maximamente misto $\frac{1-P}{4}(|Hh\rangle\langle Hh| + |Hv\rangle\langle Hv| + |Vh\rangle\langle Vh| + |Vv\rangle\langle Vv|)$ – coluna C – apresenta intensidade, de maneira que temos o modo spin-órbita misto separável. Quando $P = 0.2$ e $P = 0.5$, podemos observar que o modo $|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+|$ aumenta a intensidade, enquanto o estado misto diminui a intensidade quando comparado com $P = 0$. Para $P = 1$, apenas o modo $P|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+|$ mostra intensidade não nula, de

maneira que temos o modo spin-órbita puro maximamente não-separável. Para todos os casos, o modo do tipo Werner resultante ρ_W , mostrado na coluna D, apresenta o mesmo perfil transversal e intensidade total idêntica.

Dessarte, a matriz densidade de todas as classes de estados de Werner, apresentadas acima e descritas na equação 2.27, pode ser completamente reconstruída através de uma série de medidas conhecidas como processo de tomografia quântica, conforme vimos no Capítulo 3.

Como exemplo, vamos apresentar os resultados obtidos pela simulação da preparação de alguns modos spin-órbita do tipo Werner. A simulação do circuito da figura 20, bem como, das matrizes densidade dos modos foram construídas através do referido formalismo de Jones. Deste modo, a matriz densidade – simulada com tomografia sem erros de rotação nos dispositivos ópticos – para $P = 0.2$ e $P = 0.5$ são, respectivamente

$$\begin{bmatrix} P = 0.2 \\ 0.300 & 0.000 & 0.000 & 0.100 \\ 0.000 & 0.200 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.200 & 0.000 \\ 0.100 & 0.000 & 0.000 & 0.300 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} P = 0.5 \\ 0.375 & 0.000 & 0.000 & 0.250 \\ 0.000 & 0.125 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.125 & 0.000 \\ 0.250 & 0.000 & 0.000 & 0.375 \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

e para $P = 0$ temos o modo misto $\frac{I}{4}$ e para $P = 1$ o modo $|\Psi_+\rangle$.

O circuito óptico da figura 20 também pode preparar diferentes classes de modos spin-órbita mistos. Por exemplo, podemos transformar os estados de produtos mistos em um único estado produto bloqueando três lasers no lado esquerdo do circuito da figura 20, bem como, realizar uma mistura de dois ou três elementos. De forma mais geral, cada elemento da base pode ser preparado com um peso variável ajustando o respectivo NF, tomando cuidado com a normalização da mistura do elemento de base e do termo de Bell.

Por outro lado, podemos facilmente misturar dois modos spin-órbita do tipo Bell como

$$\rho = P\rho_{Bell1} + (1 - P)\rho_{Bell2}, \quad (5.2)$$

com o circuito óptico muito simples descrito na figura 22-a). Usando duas placas SWP em dois lasers independentes, é possível preparar dois modos do tipo Bell usando um BS balanceado. Neste sentido, por meio do uso de NFs podemos controlar o peso de cada modo na saída de maneira a manter a mistura normalizada. É evidente que tal mistura apresenta perdas, portanto, para a preparação de um único fóton teremos 25% de sucesso.

Nesta conformidade, apresentamos alguns exemplos da simulação das matrizes densidade de estados preparados pelo circuito ilustrado na figura 22-a), conforme equação

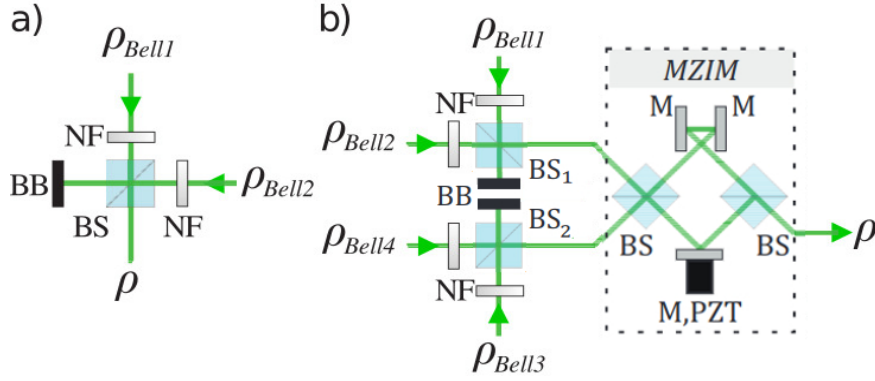


Figura 22 – Circuito óptico para: a) preparação de estado misto com dois modos spin-órbita do tipo Bell e b) preparação de estado misto com quatro modos spin-órbita do tipo Bell. Cada modo ρ_{Bell_i} é preparado em um feixe de laser independente. Fonte: própria autora

5.2, dadas por

$$\begin{bmatrix} 0.100 & 0.000 & 0.000 & 0.100 \\ 0.000 & 0.400 & 0.400 & 0.000 \\ 0.000 & 0.400 & 0.400 & 0.000 \\ 0.100 & 0.000 & 0.000 & 0.100 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} 0.250 & 0.000 & 0.000 & 0.250 \\ 0.000 & 0.250 & 0.250 & 0.000 \\ 0.000 & 0.250 & 0.250 & 0.000 \\ 0.250 & 0.000 & 0.000 & 0.250 \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

e para $P = 0$ temos o modo não-separável ρ_{Bell2} e para $P = 1$ apenas o modo não-separável ρ_{Bell1} .

A preparação de um modo spin-órbita misto com os quatro modos do tipo Bell pode ser obtido usando um MZIM conforme indicado na figura 22-b). Observe que podemos preparar um par de dois modos spin-órbita do tipo Bell misturados com dois circuitos apresentados na figura 22-a). Um prepara os modos ímpares ($|\Psi_{\pm}\rangle$) e o outro prepara os modos pares ($|\phi_{\pm}\rangle$). Ao entrar em diferentes portas do MZIM, eles sairão na mesma porta de saída, de maneira que temos a mistura dos quatro modos do tipo Bell com peso ajustável, conforme os exemplos das matrizes densidade de alguns estados simulados a seguir

$$\begin{bmatrix} 0.100 & 0.000 & 0.000 & -0.060 \\ 0.000 & 0.400 & -0.240 & 0.000 \\ 0.000 & -0.240 & 0.400 & 0.000 \\ -0.060 & 0.000 & 0.000 & 0.100 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} 0.250 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.250 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.250 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.250 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Também podemos usar o circuito da mistura de Bell da figura 22-a) em associação com o circuito da figura 20. Neste caso, podemos misturar a identidade (ou algum elemento de base) com um estado misto com dois Bell, basta substituir o modo ρ_{Bell} do circuito da figura 20 pelo modo ρ da saída do circuito da figura 22-a).

Como podemos observar, uma ampla classe de modos spin-órbita mistos pode ser preparada com o circuito óptico linear. A caracterização dos diferentes modos é realizada por medidas tomográficas com o mesmo circuito apresentado na figura 18.

Dispondo da matriz densidade, podemos aplicar o critério de separabilidade PPT para estados quânticos (10), frequentemente utilizado para detectar emaranhamento em sistemas 2×2 (9). Conforme já mencionado, este critério foi usado como classificador para a implementação do ML. No próximo capítulo, apresentamos os resultados obtidos para cada classe preparada pelos circuitos aqui descritos.

6 Classificação da não-separabilidade de estados mistos por aprendizado de máquina

Neste capítulo, vamos discutir os resultados e, conforme já mostrado anteriormente, podemos simular a preparação de um número expressivo de classes de modos spin-órbita mistos variando o parâmetro P . Os estados de Werner são amplamente estudados na literatura e nos permitem comparar a não-separabilidade dos modos com o emaranhamento dos estados de Werner, assim como, verificar a eficiência da classificação da NN com medições da tomografia parcial.

Dessarte, iniciamos mostrando os resultados obtidos para os modos spin-órbita do tipo Werner e, na sequência, discutimos outras duas classes de modos spin-órbita mistos. Como o alto número de modos é muito importante para o sucesso do treinamento de redes neurais na classificação do ML, geramos um total de 1001 modos para cada classe, variando P de 0 a 1, em passos de 0,01.

6.1 Estados do tipo Werner

Primeiramente, treinamos e testamos a rede neural com matrizes densidade completas, obtidas através de simulações das medições da tomografia completas, ou seja, os dados utilizados foram obtidos por meio de simulações de tomografia realizadas com medidas em todas as bases. O resultado é mostrado na figura 23, onde cada ponto representa uma classificação de um estado associado a P . Os pontos em ciano indicam estados separáveis e os pontos em azul indicam aqueles que são não-separáveis. O sombreado no gráfico mostra a região $P > \frac{1}{3}$, para a qual os estados de Werner são emaranhados de acordo com o critério PPT.

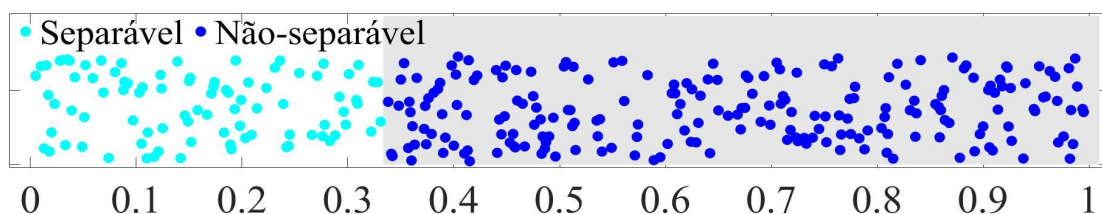


Figura 23 – Gráfico da classificação da rede neural. Cada estado testado é representado por um ponto. Pontos em ciano indicam estado separável e pontos em azul indicam não-separável. Sombreado: região de emaranhamento do estado quântico de Werner ($p > \frac{1}{3}$).

Como podemos notar, a separabilidade dos modos spin-órbita do tipo Werner combinam em excelente acordo com a classificação de emaranhamento para estados quânticos de Werner. Para este caso, usamos 1001 estados correspondendo a 70% destes dados para treinamento e 30% para teste.

Para explorar o poder de classificação do ML, realizamos o processo de treinamento com matrizes densidade completas e o teste com dados obtidos com tomografias parciais, ou seja, na fase de teste utilizamos dados obtidos por meio de simulações de tomografia com medidas em algumas bases apenas. Além disso, simulamos erros nos dispositivos ópticos do processo de tomografia, onde usamos erros aleatórios nos ângulos das placas de onda, prisma de Dove e lentes cilíndricas na faixa $\pm 1.0^\circ$, típico para dispositivos de rotação manual.

A tomografia parcial foi realizada com as seguintes configurações: *a)* medição em S_z e S_y , excluindo DP e HWP do circuito de tomografia; *b)* medição em S_z e S_x , excluindo CL e QWP; *c)* medição em S_z , usando apenas MZIN e PBS.

Deste modo, os resultados da classificação da NN são apresentados na figura 24, onde observamos 66.8% de acertos nas configurações *a)* e *b)*, classificados como não-separáveis para $P > 0.67$, falhando apenas para os modos contidos na região $0.33 < P < 0.67$. Na configuração *c)*, com medida em S_z , obtivemos 64.2% de classificação correta, o que significa que nosso ML classificou como não-separável para $P > 0.69$, aumentando a margem de erro dos modos, agora englobados na região $0.33 < P < 0.69$.

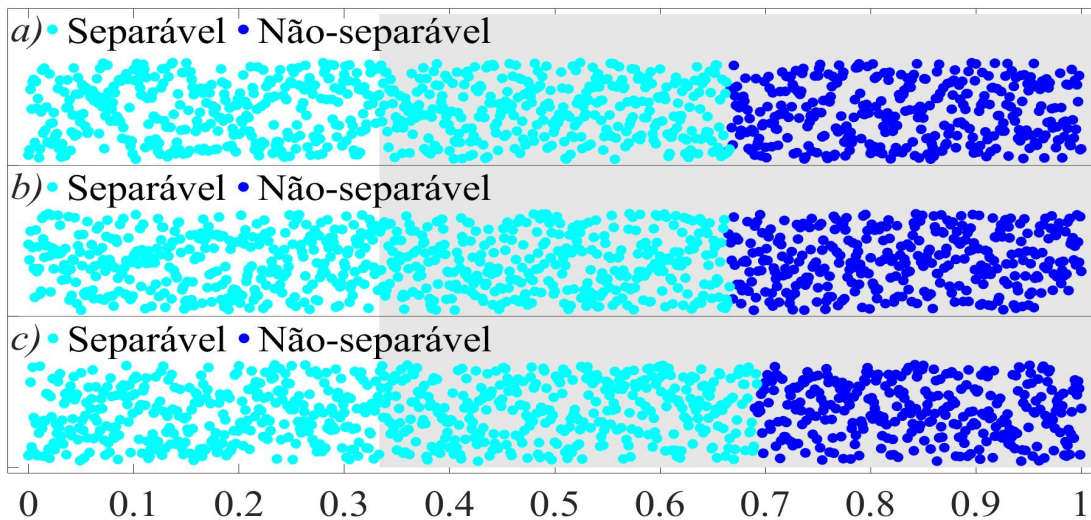


Figura 24 – Gráfico da classificação da rede neural. Treinamento com dados da matriz densidade completa e teste com dados contendo medições parciais e erros de ângulo nos dispositivos ópticos: *a)* medição em S_z e S_y , *b)* medição em S_z e S_x e *c)* medição em S_z .

Neste caso, usamos para treinar todas as matrizes densidade completas e, para

testar, todas as matrizes produzidas por medições de tomografias parciais, de modo que usamos 100% dos dados completos e 100% dos dados parciais contendo ruído em cada etapa do processo, respectivamente. Por esta razão, temos mais dados na Figura 24.

Vale ressaltar que, para esta conjuntura, o ML foi treinado com as matrizes densidade completas e a etapa de teste foi realizada com tomografia parcial. Isso significa que não realizamos medições projetivas em todas as bases para o teste e, por essa razão, a rede neural entendeu os estados da região $0.33 < P < 0.67$ como separáveis. Isso acontece pelo motivo de que, na etapa de teste, temos menos informação na matriz, com alguns elementos fora da diagonal sendo nulos como acontece para modos separáveis. Dessarte, a falta de informação contribui para a classificação do ML como separável. Nas extremidades de P , a diferença é mais acentuada e a NN classifica corretamente mesmo com medições de tomografias parciais na etapa de teste.

Além disso, a rede neural formula uma série de hipóteses durante o processo de treinamento com base nos dados de entrada a fim de alcançar a classificação correta, conforme o rótulo estabelecido pelo critério PPT. Na etapa de teste, apenas a melhor hipótese desenvolvida por ela na etapa anterior é utilizada para avaliar seu desempenho. Neste sentido, devido aos dados de treinamento – matrizes densidade completas – serem diferentes dos dados de teste – matrizes com tomografias parciais –, a hipótese feita anteriormente pode não condizer com os dados parciais no processo de teste, levando a um maior percentual de erro.

Em seguida, realizamos as medições das tomografias completas com erro na rotação dos dispositivos ópticos e realizamos uma primeira classificação dos modos com o critério PPT a fim de obter o rótulo de separabilidade para cada P .

De posse dos rótulos de cada modo, realizamos as tomografias parciais para todos os modos e efetuamos o treinamento com 70% destes dados e o teste com os restantes 30%. A figura 25 apresenta os resultados e podemos observar que a NN classificou corretamente 100% dos estados em todas as configurações de medida parcial.

Vale ressaltar que, em conformidade com a abordagem do ML supervisionado, precisamos dos rótulos corretos para treinar a rede neural com dados parciais. O esforço inicial para a obtenção dos respectivos rótulos é o preço que precisamos pagar para classificar estados com medidas de tomografias parciais. Note que não estamos interessados em obter a matriz densidade completa mas, exclusivamente, em classificar como separáveis e não-separáveis.

Outro aspecto importante foi a verificação de que a tomografia parcial fornece uma matriz densidade única para cada parâmetro P , o que implica uma relação unívoca entre P e a matriz densidade, característica essencial para o sucesso do uso do ML.

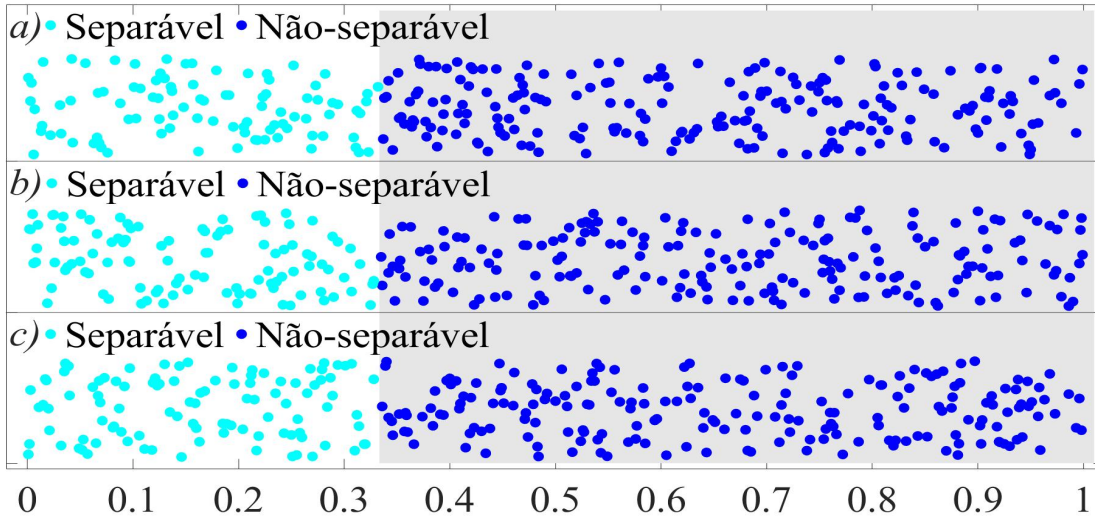


Figura 25 – Gráfico da classificação da rede neural. Treinamento e teste com dados contendo medidas parciais e erros de ângulo nos dispositivos ópticos: *a)* medição em S_z e S_y , *b)* medição em S_z e S_x e *c)* medição em S_z .

6.2 Diferentes classes de modos spin-órbita mistos

Nesta seção, vamos apresentar os resultados para duas classes diferentes de modos de spin-órbita mistos, que são variações de modos do tipo Werner.

Primeiramente, estudamos uma classe de modos composta pela mistura de um modo do tipo Bell e dois elementos de base. O estado preparado pode ser escrito como

$$\rho = p |\Psi_+\rangle \langle \Psi_+| + \frac{(1-p)}{2} [|Hh\rangle \langle Hh| + |Vv\rangle \langle Vv|], \quad (6.1)$$

que pode ser preparado bloqueando a saída de PBS_2 no circuito da Figura 20. Dessarte, este modo passa por todos os caminhos de classificação do ML apresentados para modos do tipo Werner com medições parciais.

Deste modo, treinamos e testamos a rede neural com dados da tomografia parcial com erros nos dispositivos ópticos. Os resultados estão ilustrados na Figura 26 e, como os estados são classificados como não-separáveis quando $P > 0.5$ conforme o critério PPT, podemos observar que o ML classificou corretamente 100% dos estados em todas as configurações com medição parcial. Como pode ser visto, não há combinação preferencial de pares da medição de tomografia parcial e, em princípio, podemos escolher a mais simples, sem perda de generalidade.

Em relação à matriz densidade, note que removemos elementos diagonais, os quais contribuem para a separabilidade do estado. Por esta razão, a não-separabilidade se mantém para um P maior, comparado com o modo do tipo Werner que contém todos os elementos diagonais do estado misto. Mais uma vez, o comportamento do modo spin-órbita misto segue o estado de contrapartida quântica.

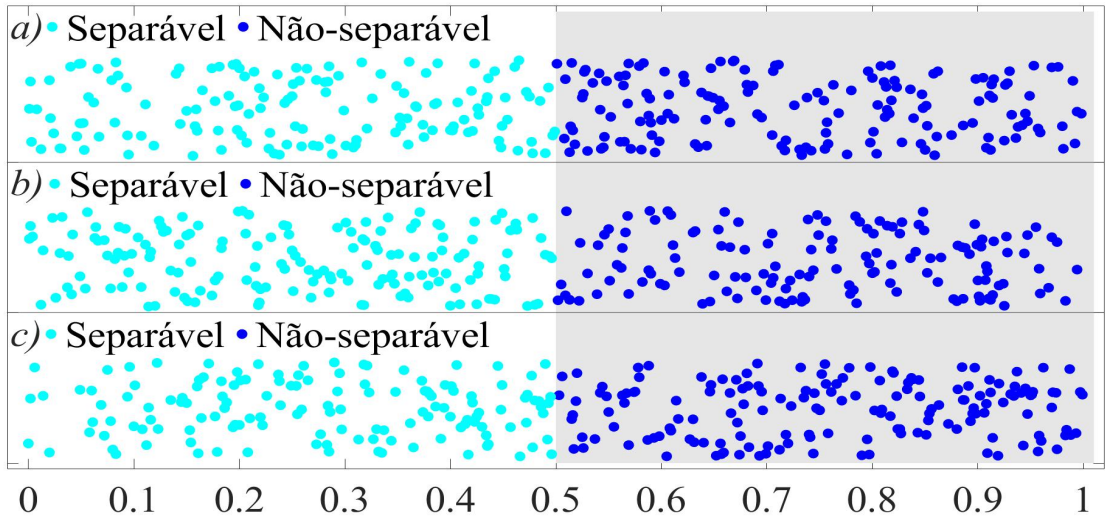


Figura 26 – Gráfico da classificação da rede neural. Treinamento e teste com modos spin-órbita mistos conforme a equação 6.1, usando medição parcial e simulando erros de ângulo nos dispositivos ópticos: *a)* medição em S_z e S_y , *b)* medição em S_z e S_x e *c)* medição em S_z . Sombreado: região de emaranhamento do estado quântico correspondente de acordo com os resultados do critério PPT.

Por fim, vamos discutir um modo misto envolvendo dois modos do tipo Bell. Deste modo, usando a saída do circuito da figura 22-a) para substituir o estado ρ_{Bell} no circuito da figura 20, podemos preparar o modo

$$\rho = \epsilon P |\Psi_+\rangle \langle \Psi_+| + (1 - \epsilon) P |\Phi_+\rangle \langle \Phi_+| + \frac{(1 - P)}{4} (I \otimes I), \quad (6.2)$$

onde ϵ representa o peso de $|\Psi_+\rangle$. Observe que para $\epsilon = 1$ temos o modo do tipo Werner discutido na Seção 6.1. Para $\epsilon = 0$, ainda temos um modo do tipo Werner, mas com um estado de Bell diferente, $|\Phi_+\rangle$ na equação 6.2. Para determinados valores de ϵ , realizamos o mesmo procedimento e, neste caso, usamos apenas a medida parcial S_z . A figura 27 apresenta os resultados para cada ϵ .

Em 27-a) definimos $\epsilon = 0.8$ e, como pode ser visto, temos um comportamento análogo ao modo de Werner. A pequena mistura de $|\Phi_+\rangle$ nos leva a obter a não-separabilidade para $P > 0.454$. Observe que continuamos com uma excelente concordância entre a classificação do ML e a esperada pelo critério PPT para o estado quântico correspondente – região sombreada.

Em 27-b) definimos $\epsilon = 0.6$ e, para este caso, abordamos um estado misto com um desbalanceamento pequeno entre os dois modos tipo Bell. Tal composição contribui para a separabilidade do estado e, por isso, temos não-separabilidade para $P > 0.714$, conforme esperado pelo critério PPT para os estados quânticos correspondentes.

De fato, como mostrado na figura 27-c), temos este interessante caso particular com $\epsilon = 0.5$, o que significa que temos um estado misto balanceado do tipo Bell. Como

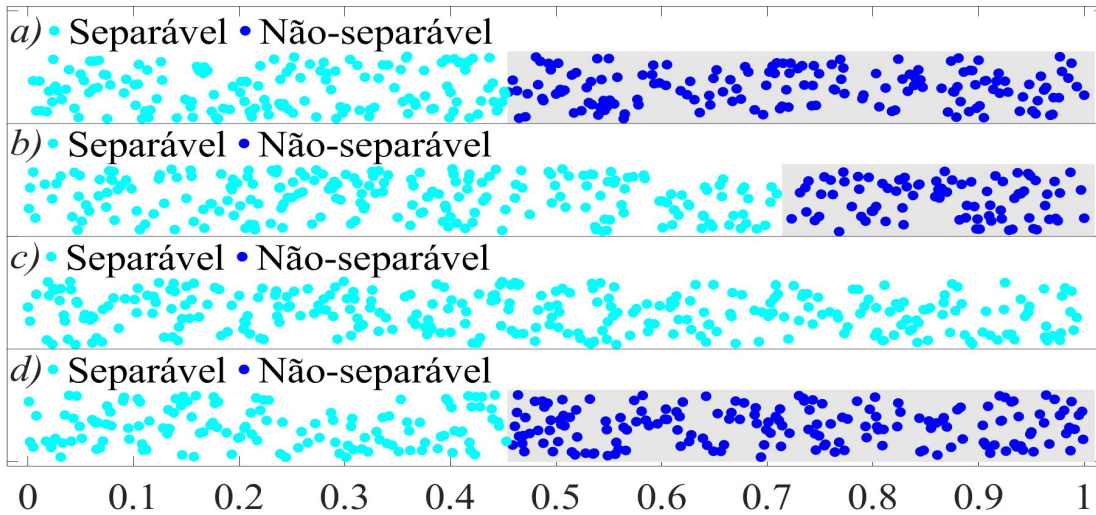


Figura 27 – Gráfico da classificação da rede neural. Treinamento e teste com medição parcial em S_z e erros de ângulo nos dispositivos ópticos. Os estados preparados são dados pela Equação 6.2 para a) $\epsilon = 0.8$, b) $\epsilon = 0.6$, c) $\epsilon = 0,5$ e d) $\epsilon = 0,2$.

se sabe, tal estado não apresenta emaranhamento, mas apenas correlação clássica. Por esta razão, temos apenas modos spin-órbita mistos separáveis como pode ser visto na classificação do ML.

Por fim, em 27-d), configuramos $\epsilon = 0.2$ e recuperamos o resultado da figura 27-a). Isto era esperado, uma vez que temos o mesmo peso para contribuição de modo não-separável, apenas trocando o peso de $|\Psi_+\rangle$ e $|\Phi_+\rangle$. Fisicamente, os estados para $\epsilon = 0.8$ e $\epsilon = 0.2$ apresentam a mesma não-separabilidade. Para os dois últimos casos a concordância do critério PPT para o estado quântico correspondente com a simulação dos modos spin-órbita também é notável.

7 Conclusão

No presente trabalho, apresentamos um estudo da separabilidade de modos spin-órbita mistos. Realizamos uma abordagem sobre os graus de liberdade da luz e sua codificação em q-bits por meio da polarização e dos modos transversos. Deste modo, vimos que o formalismo de Jones desempenha um papel importante para a associação dos dispositivos ópticos com operadores quânticos atuando em vetores de estados (bases de polarização e modos transversos de primeira ordem) que, graças a coerência óptica, podemos fazer a associação entre os modos spin-órbita e estados quânticos.

Em particular, exploramos o modo spin-órbita do tipo Werner, amplamente estudado na literatura e observamos uma excelente concordância entre a não-separabilidade do modo e os resultados quânticos. Além disso, propomos um circuito óptico linear que pode melhorar a eficiência da preparação de estados quânticos spin-órbita de Werner para o regime fóton único.

Ademais, escolhemos o critério PPT como método classificador de separabilidade em razão do mesmo ser suficiente para classificar sistemas 2×2 e exploramos sua aplicação para modos spin-órbita mistos do tipo Werner. Para isso, precisamos reconstruir suas matrizes densidade através de medidas de tomografia, cujo processo foi detalhado e nos possibilitou observar a necessidade de preparar uma gama de estados da mesma maneira para realizar medições únicas nas diversas bases. Neste sentido, o uso do aprendizado de máquina na classificação de separabilidade dos estados nos oportunizou um ganho valioso com relação ao tempo desempenhado na realização de uma tomografia.

Ao aplicarmos o critério PPT para identificar a separabilidade dos referidos modos, obtivemos os mesmos resultados para o emaranhamento dos estados quânticos correspondentes. Por conseguinte, esses resultados estendem o escopo da analogia quântico-clássica dos modos spin-órbita para estados mistos emaranhados.

Também exploramos diferentes classes de modos spin-órbita mistos, sempre observando total concordância da classificação de não-separabilidade em comparação com o emaranhamento do estado quântico correspondente, o que reforça o poder dos modos clássicos não-separáveis para emular cenários quânticos.

Desta maneira, dado que a quantização de modos spin-órbita não-separáveis nos leva a um verdadeiro emaranhamento quântico entre graus de liberdade internos de um único fóton (65), nossos resultados também são aplicados para um único fóton preparado em modo spin-órbita misto. Uma vez que os dispositivos ópticos lineares atuam tanto em um feixe de laser intenso quanto em fótons únicos, os circuitos ópticos das figuras 20 e 22 serão os mesmos. Para uma investigação quântica genuína, apenas precisamos trocar os

feixes de laser independentes por fontes de fótons únicos e os detectores D_i por contadores de fótons, conforme discutido na referência (31).

Outra importante contribuição do nosso trabalho é o estudo da classificação de separabilidade com ML. Ao longo do mesmo, desenvolvemos um perceptron com aprendizagem supervisionada e apresentamos a teoria que estabelece a estrutura conceitual e computacional para a sua aprendizagem, bem como, as heurísticas que impactam seu desempenho.

A precisão dos resultados obtidos após o treinamento da rede neural na fase de teste foi excelente, haja vista que, além de mostrar que a classificação da separabilidade dos modos pode ser feita pela NN por meio de medições de tomografia completas, as medidas parciais associadas à classificação pelo critério PPT podem resultar na identificação da separabilidade com máxima eficiência, inclusive com medida apenas em S_2 . Este é um resultado notável considerando que, após um esforço inicial de classificação com critério PPT, o treinamento do ML pode oferecer a identificação da não-separabilidade de estados com medição projetiva simples – por razão da execução de um menor número de medidas projetivas que oportuniza um ganho valioso com relação ao tempo desempenhado na realização de uma tomografia – e com baixo custo computacional – devido ao baixo tempo de processamento que a NN leva para classificar uma grande quantidade de modos spin-órbita.

Em razão do presente trabalho contemplar a proposta de simulação de circuitos ópticos para a preparação de modos spin-órbita do tipo Werner e outros estados mistos, no que tange às perspectivas de trabalhos futuros, nosso próximo passo consistiria em desenvolver tais circuitos experimentalmente com feixes intensos e em regime de contagem de fótons. A julgar por muitos resultados experimentais no decorrer da história da física terem consolidado evidências importantes de previsões teóricas, nosso fator motivacional é o de que os resultados experimentais das simulações viria a fortalecer o trabalho proposto e agregaria positivamente para a comunidade científica.

Referências

- 1 Schrödinger, E. Discussion of Probability Relations between Separated Systems. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 31, n. 4, p. 555, jan. 1935.
- 2 HEISENBERG, W. *The physical principles of the quantum theory*. [S.l.]: Courier Corporation, 1949.
- 3 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. *Quantum computation and quantum information*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 2002.
- 4 WALBORN, S. P. et al. Entanglement and conservation of orbital angular momentum in spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 69, p. 023811, Feb 2004. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.69.023811>>.
- 5 LIN, Q.; HE, B. Single-photon logic gates using minimal resources. *Physical Review A*, American Physical Society (APS), v. 80, n. 4, Oct 2009. ISSN 1094-1622. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.80.042310>>.
- 6 HOR-MEYLL, M. et al. Deterministic quantum computation with one photonic qubit. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 92, p. 012337, Jul 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.92.012337>>.
- 7 BARREIRO, J. T.; WEI, T.-C.; KWIAT, P. G. Remote preparation of single-photon “hybrid” entangled and vector-polarization states. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 105, p. 030407, Jul 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.030407>>.
- 8 D’AMBROSIO, V. et al. Complete experimental toolbox for alignment-free quantum communication. *Nature*, Nature Group, v. 3, p. 961, Jul 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/ncomms1951>>.
- 9 HORODECKI, M.; HORODECKI, P.; HORODECKI, R. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions. *Physics Letters A*, Elsevier BV, v. 223, n. 1–2, p. 1–8, Nov 1996. ISSN 0375-9601. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2)>.
- 10 PERES, A. Separability criterion for density matrices. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 77, n. 8, p. 1413–1415, Aug 1996. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>>.
- 11 DOHERTY, A. C.; PARRILO, P. A.; SPEDALIERI, F. M. Distinguishing separable and entangled states. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 88, n. 18, Apr 2002. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.187904>>.
- 12 MICHALSKI, R. S.; CARBONELL, J. G.; MITCHELL, T. M. *Machine learning: An artificial intelligence approach*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.

- 13 BIAMONTE, J. et al. Quantum machine learning. *Nature*, Nature Group, v. 549, p. 195, Sep 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/nature23474>>.
- 14 ISMAIL, Y.; SINAYSKIY, I.; PETRUCCIONE, F. Integrating machine learning techniques in quantum communication to characterize the quantum channel. *J. Opt. Soc. Am. B*, OSA, v. 36, n. 3, p. B116–B121, Mar 2019. Disponível em: <<http://opg.optica.org/josab/abstract.cfm?URI=josab-36-3-B116>>.
- 15 NAMUDURI, S. et al. Machine learning enabled lineshape analysis in optical two-dimensional coherent spectroscopy. *J. Opt. Soc. Am. B*, OSA, v. 37, n. 6, p. 1587–1591, Jun 2020. Disponível em: <<http://opg.optica.org/josab/abstract.cfm?URI=josab-37-6-1587>>.
- 16 HE, Z.; WANG, Y.; HUANG, D. Wavelength attack recognition based on machine learning optical spectrum analysis for the practical continuous-variable quantum key distribution system. *J. Opt. Soc. Am. B*, OSA, v. 37, n. 6, p. 1689–1697, Jun 2020. Disponível em: <<http://opg.optica.org/josab/abstract.cfm?URI=josab-37-6-1689>>.
- 17 HERRERA, R. A. Evaluating a neural network and a convolutional neural network for predicting soliton properties in a quantum noise environment. *J. Opt. Soc. Am. B*, OSA, v. 37, n. 10, p. 3094–3098, Oct 2020. Disponível em: <<http://opg.optica.org/josab/abstract.cfm?URI=josab-37-10-3094>>.
- 18 BARMPARIS, G. D.; TSIRONIS, G. P. Discovering nonlinear resonances through physics-informed machine learning. *J. Opt. Soc. Am. B*, OSA, v. 38, n. 9, p. C120–C126, Sep 2021. Disponível em: <<http://opg.optica.org/josab/abstract.cfm?URI=josab-38-9-C120>>.
- 19 CAI, X.-D. et al. Entanglement-based machine learning on a quantum computer. *Physical review letters*, APS, v. 114, n. 11, p. 110504, 2015.
- 20 KRENN, M. et al. Automated search for new quantum experiments. *Physical review letters*, APS, v. 116, n. 9, p. 090405, 2016.
- 21 MELNIKOV, A. A. et al. Active learning machine learns to create new quantum experiments. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Academy of Sciences, v. 115, n. 6, p. 1221–1226, 2018. ISSN 0027-8424. Disponível em: <<https://www.pnas.org/content/115/6/1221>>.
- 22 DANACI, O. et al. Quantum state estimation from partial tomography data using a stack of machine learning models and imputation. *Frontiers in Optics / Laser Science*, Optical Society of America, p. FTu8D.5, 2020. Disponível em: <<http://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=FiO-2020-FTu8D.5>>.
- 23 LU, S. et al. Separability-entanglement classifier via machine learning. *Physical Review A*, APS, v. 98, n. 1, p. 012315, 2018.
- 24 GAO, J. et al. Experimental machine learning of quantum states. *Physical Review Letters*, APS, v. 120, n. 24, p. 240501, 2018.
- 25 SOUZA, C. E. R. et al. Topological phase for spin-orbit transformations on a laser beam. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 99, n. 16, Oct 2007. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.99.160401>>.

- 26 BORGES, C. V. S. et al. Bell-like inequality for the spin-orbit separability of a laser beam. *Physical Review A*, American Physical Society (APS), v. 82, n. 3, Sep 2010. ISSN 1094-1622. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.82.033833>>.
- 27 QIAN, X.-F. et al. Shifting the quantum-classical boundary: theory and experiment for statistically classical optical fields. *Optica*, OSA, v. 2, n. 7, p. 611–615, Jul 2015. Disponível em: <<http://www.osapublishing.org/optica/abstract.cfm?URI=optica-2-7-611>>.
- 28 LI, T. et al. Experimental contextuality in classical light. *Scientific*, Nature Publishing Group, v. 7, n. 1, p. 1–8, 2017.
- 29 PASSOS, M. H. M. et al. Classical analog of quantum contextuality in spin-orbit laser modes. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 98, p. 062116, Dec 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.98.062116>>.
- 30 BALTHAZAR, W. F. et al. Tripartite nonseparability in classical optics. *Opt. Lett.*, OSA, v. 41, n. 24, p. 5797–5800, Dec 2016. Disponível em: <<http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-41-24-5797>>.
- 31 BALTHAZAR, W. F. et al. Spin-orbit x states. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 103, p. 022411, Feb 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.103.022411>>.
- 32 PASSOS, M. H. M. et al. Experimental investigation of environment-induced entanglement using an all-optical setup. *Physical Review A*, v. 97, p. 022321, 2018.
- 33 SOUZA, C. E. R. et al. Quantum key distribution without a shared reference frame. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 77, p. 032345, Mar 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.77.032345>>.
- 34 SOUZA, C. E. R.; KHOURY, A. Z. A michelson controlled-not gate with a single-lens astigmatic mode converter. *Opt. Express*, OSA, v. 18, n. 9, p. 9207–9212, Apr 2010. Disponível em: <<http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-18-9-9207>>.
- 35 BALTHAZAR, W. F.; HUGUENIN, J. A. O. Conditional operation using three degrees of freedom of a laser beam for application in quantum information. *J. Opt. Soc. Am. B*, OSA, v. 33, n. 8, p. 1649–1654, Aug 2016. Disponível em: <<http://josab.osa.org/abstract.cfm?URI=josab-33-8-1649>>.
- 36 MAXWELL, J. C. *A treatise on electricity and magnetism*. [S.l.]: Clarendon press, 1873. v. 1.
- 37 JACKSON, J. D. *Classical electrodynamics*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1999.
- 38 BALTHAZAR, W. *Não-separabilidade de graus de liberdade de um feixe laser e aplicações em informação quântica*. [S.l.]: Tese (Doutorado) — Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Fluminense, Rio De Janeiro, Brasil, 2016., 2016.
- 39 PASSOS, M. et al. Classical analog of quantum contextuality in spin-orbit laser modes. *Physical Review A*, APS, v. 98, n. 6, p. 062116, 2018.
- 40 BORGES, C. et al. Bell-like inequality for spin-orbit separability of a classical laser beam. *arXiv preprint arXiv:0911.2440*, 2009.

- 41 TÖPPEL, F. et al. Classical entanglement in polarization metrology. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 16, n. 7, p. 073019, 2014.
- 42 GERRARD, A.; BURCH, J. M. *Introduction to matrix methods in optics*. [S.l.]: Courier Corporation, 1994.
- 43 FOWLES, G. R. *Introduction to modern optics*. [S.l.]: Dover Publications, 1975.
- 44 NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica: Ótica, relatividade, física quântica (vol. 4)*. [S.l.]: Editora Blucher, 2014.
- 45 HECHT, E. et al. *Optics*. [S.l.]: Addison Wesley San Francisco, 2002. v. 4.
- 46 JONES, R. C. A new calculus for the treatment of optical systems. iv. *Josa*, Optical Society of America, v. 32, n. 8, p. 486–493, 1942.
- 47 PADGETT, M. J.; COURTIAL, J. Poincaré-sphere equivalent for light beams containing orbital angular momentum. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 24, n. 7, p. 430–432, 1999.
- 48 SAKURAI, J. Modern quantum mechanics 2nd edition. *Person New International edition*, 2014.
- 49 PASSOS, M. H. M. *Padrões de Speckles produzidos por Vórtices Óticos e sua Aplicação na Medida de Rugosidade*. [S.l.]: Dissertação (Mestrado) — Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Fluminense, Rio De Janeiro, Brasil, 2016., 2016.
- 50 ALLEN, L. et al. Orbital angular momentum of light and the transformation of laguerre-gaussian laser modes. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 45, p. 8185–8189, Jun 1992. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.45.8185>>.
- 51 LAMEGO, V. d. S. *Proposta de preparação e caracterização de estados X utilizando modos spin-órbita de um feixe laser*. [S.l.]: Dissertação (Mestrado) — Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Fluminense, Rio De Janeiro, Brasil, 2020., 2020.
- 52 WOOTTERS, W. K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Physical Review Letters*, APS, v. 80, n. 10, p. 2245, 1998.
- 53 ALTEPETER, J. B.; JEFFREY, E. R.; KWIAT, P. G. Photonic state tomography. *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, Elsevier, v. 52, p. 105–159, 2005.
- 54 WERNER, R. F. Quantum states with einstein-podolsky-rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 40, p. 4277–4281, Oct 1989. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.40.4277>>.
- 55 MIŠTA, L.; FILIP, R.; FIURÁŠEK, J. Continuous-variable werner state: Separability, nonlocality, squeezing, and teleportation. *Physical Review A*, American Physical Society (APS), v. 65, n. 6, Jun 2002. ISSN 1094-1622. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.65.062315>>.
- 56 ALI, M.; RAU, A. R. P.; ALBER, G. Quantum discord for two-qubit x states. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 81, p. 042105, Apr 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.81.042105>>.

- 57 MATIJOSIĆ, A. et al. Formation of optical vortices with topological charge $|l|=1$ and $|l|=1/2$ by use of the s-waveplate. *Optics Communications*, v. 324, p. 1–9, 2014. ISSN 0030-4018. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401814002545>>.
- 58 ABU-MOSTAFA, Y. S.; MAGDON-ISMAIL, M.; LIN, H.-T. *Learning From Data*. [S.l.]: AMLBook, 2012. ISBN 1600490069.
- 59 SAMARASINGHE, S. *Neural Networks for Applied Sciences and Engineering: From Fundamentals to Complex Pattern Recognition*. [S.l.]: Auerbach Publications, 2006.
- 60 ROSENBLATT, F. The perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain. *Psychological Review*, p. 65–386, 1958.
- 61 JAIN, A.; MAO, J.; MOHIUDDIN, K. Artificial neural networks: a tutorial. *Computer*, v. 29, n. 3, p. 31–44, 1996.
- 62 IDE, H.; KURITA, T. Improvement of learning for cnn with relu activation by sparse regularization. *2017 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)*, p. 2684–2691, 2017.
- 63 WERBOS, P. J. *The Roots of Backpropagation: From Ordered Derivatives to Neural Networks and Political Forecasting*. USA: Wiley-Interscience, 1994. ISBN 0471598976.
- 64 KAZMIERKOWSKI, M. P. Chapter 10 - neural networks and fuzzy logic control in power electronics. In: KAZMIERKOWSKI, M. P.; KRISHNAN, R.; BLAABJERG, F. (Ed.). *Control in Power Electronics*. Burlington: Academic Press, 2002, (Academic Press Series in Engineering). p. 351–418. ISBN 978-0-12-402772-5. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780124027725500119>>.
- 65 PEREIRA, L.; KHOURY, A.; DECHOUM, K. Quantum and classical separability of spin-orbit laser modes. *Physical Review A, APS*, v. 90, n. 5, p. 053842, 2014.