



**INSTITUTO DE FÍSICA**  

---

**Universidade Federal Fluminense**

PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
INSTITUTO DE FÍSICA  
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Sobre a possibilidade de constâncias na  
distribuição magnética de Estrelas de Nêutrons

Leonardo Machado Moreira

MARÇO DE 2022

Leonardo Machado Moreira

Sobre a possibilidade de constâncias na  
distribuição magnética de Estrelas de Nêutrons

Dissertação de Mestrado apresentada  
ao Programa de pós-graduação em  
física da Universidade Federal Fluminense  
como parte dos requisitos  
para a obtenção do título de Mestre  
em Física.

Orientador: Rodrigo Picanço Negreiros, D.Sc.

Universidade Federal Fluminense

Niterói - Rio de Janeiro

2022

Ficha catalográfica automática - SDC/BIF  
Gerada com informações fornecidas pelo autor

M835s Moreira, Leonardo Machado  
Sobre a possibilidade de constâncias na distribuição  
magnética de Estrelas de Nêutrons / Leonardo Machado Moreira  
; Rodrigo Picanço Negreiros, orientador. Niterói, 2022.  
76 f. : il.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,  
Niterói, 2022.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22409/PPGF.2022.m.15274176704>

1. Astrofísica. 2. Estrelas de Nêutrons. 3. Relatividade  
Geral. 4. Produção intelectual. I. Negreiros, Rodrigo  
Picanço, orientador. II. Universidade Federal Fluminense.  
Instituto de Física. III. Título.

CDD -

# Sobre a possibilidade de constâncias na distribuição magnética de Estrelas de Nêutrons

Esta dissertação é parte dos pré-requisitos para a obtenção do título de

**MESTRE EM FÍSICA**

Área de concentração: Astrofísica

Aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora formada pelos  
professores:

---

Rodrigo Picanço Negreiros, D.Sc.  
Orientador

---

Bruno Werneck Mintz, D.Sc.  
Convidado 1

---

Roberto Linares, D.Sc.  
Convidado 2

*Dedico este trabalho aos meus amigos e família, que me apoiaram nestes anos difíceis.*

# Agradecimentos

Agradeço a minha família e amigos pelo apoio emocional, ao meu orientador Rodrigo pelas instruções e pelo corpo docente da Universidade Federal Fluminense pelo suporte físico.

*A arte de vencer se aprende nas derrotas.*

*Simon Bolívar*

# Resumo

Nas últimas décadas, após surgirem as soluções magnetizadas de estrelas de nêutrons, alguns autores tem se voltado para uma pergunta que ainda persiste. Qual o impacto de uma solução das equações de equilíbrio hidrostático cuja equação de estado contém informação do campo magnético local? Esta pergunta tem gerado alguns modelos de distribuição magnética interna às estrelas de nêutrons parametrizada de diversos modos, no intuito de construir soluções simples investigando esta pergunta. Neste trabalho exploramos a natureza destas propostas procurando constâncias na distribuição magnética em estrelas de nêutrons. Uma análise espectral mostra que a maior parte da intensidade magnética está no primeiro e no terceiro harmônico esférico. Posteriormente, uma análise do potencial vetor aponta para a tendência em campos pouco intensos de manter o formato da sua distribuição, implicando que se houver tal distribuição parametrizada ela terá o formato independente da intensidade do campo.

**Palavras-chave:** Astrofísica, Relatividade, Estrelas de Nêutrons.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Gráfico dos termos $g_{tt} = A(r)$ e $g_{rr} = B(r)$ para um objeto esférico de massa $1,5M_{\odot}$ . O raio mínimo que este objeto pode ter, chamado raio de Schwartzchild esta denotado por $R^*$ . . . . .	8
Figura 2 – Equação de estado $P(\epsilon)$ utilizada para a solução ilustrada na figura 3. . . . .	10
Figura 3 – Gráfico dos termos $g_{tt} = A(r)$ e $g_{rr} = B(r)$ para um objeto esférico de massa $\approx 1,69M_{\odot}$ . O raio de superfície deste é denotado por $r^*$ e representa o ponto onde a pressão é nula (ou próxima disto). . . . .	10
Figura 4 – Perfil de distribuição de densidades de uma estrela de nêutrons de densidade central $\epsilon_c = 10^{15}g/cm^3$ . . . . .	10
Figura 5 – Representação esquemática das folheações $\Sigma_t$ do espaço $\mathcal{M}$ . . . . .	11
Figura 6 – Projeções do vetor $\mathbf{v}$ em $\Sigma_t$ e $\mathbf{n}$ . . . . .	13
Figura 7 – Projeções do vetor $\mathbf{v}$ em $\Sigma_t$ e $\mathbf{n}$ . . . . .	19
Figura 8 – Quantidades associadas a equação de Bernouli em (a). Em (b) são apresentadas as derivadas radiais dos termos da equação de Bernouli como a "forças" termodinâmica e gravitacional. . . . .	44
Figura 9 – Exemplos elementos de métrica para modelos esféricos de estrelas de nêutrons para diferentes entalpias centrais. . . . .	44
Figura 10 – Observáveis associados a estrelas calculadas para a equação de estado glendnh3 REFERENCIA em três casos diferentes: (a) e (b) representam as funções métricas $N(r)$ e $A(r)$ , (c) mostra o perfil de densidades e (d) e distribuição de entalpias. . . . .	46
Figura 11 – Pressão magnética . . . . .	46

Figura 12 – (a) Potenciais na equação de Bernouli para o caso magnetizado. (b) Exemplo de força termodinâmica e força magnética (força de Lorentz). . . . .	48
Figura 13 – (a) Curva massa raio ilustrando a região mais sucinta a deformações por variação na amplitude de corrente, em unidades $A/m^2$ . (b) Curva de massa e densidades centrais com o mesmo objetivo. . . . .	52
Figura 14 – (a) Perfil de entalpia para diferentes amplitudes de corrente $\alpha[A/m^2]$ com densidade central fixa. (b) Perfil de pressões para diferentes amplitudes de corrente $\alpha$ com densidade central fixa. (c) Perfil de entalpia para diferentes amplitudes de corrente $\alpha$ com massa bariônica fixa. (d) Perfil de pressões para diferentes amplitudes de corrente $\alpha$ com massa bariônica fixa. . . . .	55
Figura 15 – (a) Perfil equatorial e polar da intensidade do campo magnético para uma estrela de massa central $1.6M_{\odot}$ . (b) Perfis de campo magnético para estrelas diferentes. . . .	57
Figura 16 – (a) Curva massa raio ilustrando a região mais sucinta a deformações por variação na amplitude de corrente. (b) Curva de massa e densidades centrais com o mesmo objetivo. . . . .	58
Figura 17 – (a) Perfil de $A_{\phi}$ equatorial para diferentes amplitudes de corrente, em unidades $A/m^2$ na estrela de massa $\approx 1.44M_{\odot}$ na equação de estado glendnh3. (b) Perfil de $A_{\phi}$ equatorial para diferentes amplitudes de corrente na estrela de massa $\approx 1.44M_{\odot}$ na equação de estado Sly230a.	59
Figura 18 – Representação gráfica do ajuste linear dos dados da tabela 6. . . . .	61

Figura 19 – Perfis de distribuição interna do potencial vetor $A_\phi$ normalizado com respeito ao seu máximo : (a) e (b) representam perfis para estrelas de nêutrons de densidade central baixas e altas respectivamente. . . . .	61
Figura 20 – Dados utilizados para calcular : (a) e (b) representam as funções métricas $N(r)$ e $A(r)$ , (c) mostra o perfil de densidades e (d) e distribuição de entalpias. . . . .	63

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Tabela contendo dados dos impactos causados pela presença de campos magnéticos cada vez mais intensos em uma estrela de nêutrons de densidade central $\approx 6 \times 10^{14} g/cm^3$ e massa $\approx 1.449M_{\odot}$ . . . . .	50
Tabela 2 – Deformação por magnetização da estrela de densidade central $\rho_c = 1.4 \times 10^{15} g/cm^3$ , naturalmente mais densa e compacta que a estrela de nêutrons canônica esta também manifesta as mesmas características de deformação que a primeira. . . . .	52
Tabela 3 – Deformação por magnetização da estrela de densidade central $\rho_c = 3.7 \times 10^{14} g/cm^3$ , menos densa e compacta que a estrela de nêutrons canônica esta manifesta deformações menos intensas que a primeira. . . . .	53
Tabela 4 – Tabela com dados acerca as deformidades em uma estrela de massa bariônica fixa em $\approx 1.56M_{\odot}$ causadas pelo aumento da constante de amplitude de corrente. . . . .	54
Tabela 5 – Tabela com dados pontuais das distribuições de $A_{\phi}$ para diferentes valores da constante de amplitude de função dada uma densidade central fixa. . . . .	60
Tabela 6 – Resultados do ajuste linear dos dados da tabela 5. Todas as relações de linearidade tem coeficiente de correlação linear de Pearson de pelo menos 0.999. . . . .	60

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>GRAVITAÇÃO E FORMALISMO 3+1</b>	<b>5</b>
<b>2.1</b>	<b>Gravitação</b>	<b>5</b>
2.1.1	O tensor métrico e a Equação de Einstein	5
<b>2.2</b>	<b>Tensor momento-energia</b>	<b>6</b>
2.2.1	Soluções esféricas	7
<b>2.3</b>	<b>Formalismo 3+1</b>	<b>11</b>
2.3.1	Projeção ortogonal	13
2.3.2	Relações de Gauss-Codazzi	14
2.3.3	Evolução temporal	15
<b>2.4</b>	<b>Equação de Einstein no formalismo 3+1</b>	<b>17</b>
2.4.1	Decomposição 3+1 do tensor momento-energia	17
2.4.2	Projeções da equação de Einstein	18
<b>2.5</b>	<b>Vetor de shift e componentes 3+1 da métrica</b>	<b>19</b>
<b>3</b>	<b>GRAVITAÇÃO DE OBJETOS AXIALMENTE SIMÉTRICOS</b>	<b>22</b>
<b>3.1</b>	<b>Definições de estacionaridade e simetria axial</b>	<b>22</b>
3.1.1	Estacionariedade	22
3.1.2	Estaticidade	23
3.1.3	Simetria axial	23
<b>3.2</b>	<b>Espaços com circularidade</b>	<b>24</b>
<b>3.3</b>	<b>Sistema de EDPs do equilíbrio hidroestático</b>	<b>26</b>
<b>4</b>	<b>ESTRELAS COM SIMETRIA AXIAL E SEUS OB-</b>	
	<b>SERVÁVEIS</b>	<b>31</b>
<b>4.1</b>	<b>Fluido perfeito</b>	<b>31</b>
<b>4.2</b>	<b>Campos eletromagnéticos</b>	<b>35</b>
<b>4.3</b>	<b>Observáveis físicos</b>	<b>38</b>

<b>4.4</b>	<b>Teoremas do Virial</b>	<b>40</b>
<b>5</b>	<b>CONFIGURAÇÕES MAGNETIZADAS</b>	<b>41</b>
<b>5.1</b>	<b>Considerações sobre configurações esféricas em 3+1</b>	<b>41</b>
5.1.1	Elementos de métrica e entalpia	43
<b>5.2</b>	<b>Configurações com campos magnéticos pouco intensos</b>	<b>45</b>
5.2.1	Considerações iniciais	45
5.2.2	Novamente, elementos da métrica e entalpia	47
5.2.3	Deformidades	49
5.2.4	Análise espectral das propriedades magnéticas	56
<b>5.3</b>	<b>Relações lineares no vetor potencial magnético</b>	<b>59</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>65</b>
<b>A</b>	<b>MÉTODO DOS CAMPOS AUTOCONSISTENTES</b>	<b>67</b>
<b>A.1</b>	<b>Algoritmo SCF</b>	<b>67</b>
<b>A.2</b>	<b>Métodos Pseudospectrais</b>	<b>69</b>
A.2.1	Método de colocação	70
A.2.2	Método pseudoespectral	71
<b>A.3</b>	<b>Mapeamentos</b>	<b>72</b>
<b>A.4</b>	<b>Decomposição de domínios</b>	<b>73</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>75</b>

# 1 Introdução

Na primeira metade do século XX, mais precisamente em 1933, foi proposta pela primeira vez a ideia de um objeto em equilíbrio hidrostático remanescente de supernova. Esta ideia de Walter Baade e Fritz Zwicky (BAADE; ZWICKY, ) acabou ficando um pouco de lado durante 30 anos, até que em 1967 Jocelyn Bell Burnell e seu orientador Antony Hewish descobriram analisando o pulso de radio da observação PSR B1919+21 um objeto que foi chamado de Pulsar e interpretado como uma Estrela de Neutrons magnetizada em rotação.

Em 1939, um artigo foi publicado por Richard Tolman (TOLMAN, ) e mais um pela dupla Robert Oppenheimer e George Volkoff (OPPENHEIMER; VOLKOFF, ) onde juntos construíram o sistema de equações diferenciais que determina a configuração de equilíbrio de objetos esféricos na teoria da relatividade geral e utilizaram dela para determinar, através do uso de uma equação de estado simples, a massa máxima que esses objetos poderiam ter na natureza sem entrar em colapso. Na época esta massa limite ficou determinada por  $\approx 0.7M_{\odot}$ , e embora esteja em grave discordância tanto do limite estipulado pela atual teoria acerca das equações de estado das estrelas de nêutrons quanto pelas próprias observações astronômicas ainda é um importante marco da história dos objetos compactos (LATTIMER; PRAKASH, 2005).

O sistema de equações diferenciais desenvolvido pelo trio acima, conhecida como equações Tolman-Oppenheimer-Volkoff (ou TOV), ainda hoje são parte fundamental da análise teórica das propriedades de modelos de Estrelas de Nêutrons pois preveem muito bem a massa que estes objetos podem vir a ter, sendo capazes de descreditar totalmente algum modelo de equação de estado de matéria compacta que falhe em apresentar as massas e raios característicos das observações atuais de estrelas compactas.

Poucos meses antes da detecção do primeiro pulsar pelo grupo de Jo-

celyn Bell, Franco Pacini (PACINI, ) previu que os pulsares deveriam ter períodos de rotação bem curtos juntamente a campos magnéticos da ordem de  $\approx 10^{12}G$ , iniciando assim a busca pelos mecanismos de emissão de raios-X e raios Gama dos pulsares, e todo o estudo das magnetoesferas associados a isto.

Em 1967 e 1968 tivemos o primeiro modelo de estrela em rotação relativística, calculado por Hartle e Thorne (HARTLE, 1967) (HARTLE; THORNE, 1968) , este primeiro modelo se retém a rotações lentas. Pouco depois, em 1971, Bonazzola e Maschio (BONAZZOLA; MASCHIO, 1971) desenvolveram equações integrais para as configurações estáveis de estrelas em rápida rotação relativista cujas soluções podem ser obtidas através do método de campo auto-consistente<sup>1</sup>. A técnica numérica SCF desenvolvida neste trabalho acabou se tornando praxe da comunidade, sendo utilizada em praticamente todos os modelos que apareceram futuramente. Em 1989, Komatsu, Eriguchi e Hachisu (KOMATSU; ERIGUCHI; HACHISU, 1989) desenvolveram sua própria abordagem, que ficou bastante conhecida na comunidade, denominada HSCF<sup>2</sup> ainda faz uso das equações integrais.

Em 1993, Bonazzola, Gourgoulhon, Salgado e Marck (BONAZZOLA et al., 1993) desenvolveram o sistema de equações diferenciais associado a estrelas com simetria axial. Esta abordagem será a mais próxima da apresentada e utilizada neste trabalho.

Na modernidade a importância destes trabalhos, e muitos outros da área, se manifesta em forma dos grandes projetos de observação espacial, p. e., os interferômetros LIGO e VIRGO ou nos rádio telescópios. A partir de 2016 notícias de detecção de ondas gravitacionais percorrem a mídia e dão início a séries de artigos de análises em revistas científicas. Os perfis de onda gravitacional são analisados a partir de modelos de colisão de Estrelas de Nêutrons ou Buracos Negros, e no primeiro desses casos é evidente que um correto cálculo acerca das propriedades gravitacionais desses objetos é

<sup>1</sup> Do ingles: SCF, Self-Consistent-Field method

<sup>2</sup> Devido as iniciais dos autores.



de grande importância.

As implicações do desenvolvimento das teorias de objetos compactos avançam também para além da cosmologia e da astrofísica. Uma vez que nestes podemos obter dados para efeitos físicos cujos níveis de energia ainda não correspondem ao possível de ser feito em experimentos, podemos por em prova teorias para o comportamento da matéria em densidade nuclear e subnuclear ou sob campos magnéticos de intensidade muitas ordens de grandeza superiores aos recordes dos experimentos terrestres e de fato exercer o método científico.

As soluções computacionais das equações de equilíbrio hidrostático das estrelas de nêutrons magnetizadas, embora sendo possíveis por diversos códigos na atualidade, ainda faltam conter a influencia da distribuição magnética na matéria. Isto é, apesar de sabermos como a matéria responde aos campos magnéticos, não construímos algoritmos que resolvam a distribuição de equilíbrio de estrelas de nêutrons magnetizadas para perfis de entalpia que não sejam uniparamétricas (sendo um destes parâmetros o campo magnético). Por este motivo alguns autores tem proposto distribuições magnéticas pré-definidas, parametrizadas por algum observável estelar, para solucionar as equações diferenciais da ciência de estrelas compactas com algum modo de controle quanto a distribuição da matéria magnetizada.

Neste trabalho utilizamos do framework mais conhecido para realizar os cálculos de estrelas de nêutrons axialmente simétricas, o LORENE (<https://lorene.obspm.fr/>), para determinar a distribuição de campos magnéticos nestes objetos compactos. Fazemos então uma análise espectral e por métodos de regressão mostramos constâncias na distribuição do potencial vetor magnético na estrela, em regimes de intensidade de campo fraco. Por fim determinamos qual seria este formato, parametrizado pelo raio coordenada.

Este documento é apresentado da seguinte maneira: O segundo capítulo apresenta a relatividade geral como a teoria onde reside o objeto teórico

que é a estrela de nêutrons e o seu formalismo 3+1, apresentando as relações de Gauss-Codazi e construindo a versão 3+1 das equações de Einstein. A seguir, no capítulo 3 o conceito de espaço com simetria axial é explorado, fazendo a ponte com o formalismo matemático apresentado no capítulo anterior chegamos nas equações diferenciais que determinam as configurações das estrelas de nêutrons simétricas em torno de um eixo. No quarto capítulo nos aprofundamos neste sistema de equações diferenciais analisando os vínculos impostos pelas condições de conservação do tensor momento-energia e seus observáveis. Neste mesmo capítulo fazemos também a inserção dos campo elétrico e magnético assim como a condição de convergência para uma solução numérica deste sistema. No quinto capítulo são apresentadas exemplos de soluções para equações de estado já conhecidas. Primeiramente é estabelecida a diferença entre as configurações esféricas provenientes das equações TOV e as vindas do modelo aqui apresentado. Passamos então a determinar os observáveis magnéticos que passam a se manifestar na estrela conforme determinados pelas equações diferenciais obtidas no capítulo 4 e as implicações do campo magnético em outros observáveis. Em seguida é apresentado um debate sobre algumas constâncias nas distribuições magnéticas, guiando o trabalho para a exploração de padrões na distribuição interna do potencial vetor magnético. Ao final chegamos na conclusão de que os dados apontam para a existência de algumas relações simplificadas para a distribuição interna do vetor potencial magnético quando construímos soluções de estrelas de nêutrons com baixa intensidade no campo magnético.

## 2 Gravitação e Formalismo 3+1

### 2.1 Gravitação

#### 2.1.1 O tensor métrico e a Equação de Einstein

Quando nos referimos a Estrelas de Nêutrons estamos falando de um objeto com massa em um intervalo aproximado de  $1 - 2M_{\odot}$ <sup>1</sup> e raio da ordem de  $10km$ . Sendo assim, é evidente que os efeitos relativísticos irão se manifestar pois a relação

$$\frac{2M_{\odot}}{R} \approx 0.2. \quad (2.1)$$

Em função disto se faz necessário o uso da teoria de gravitação de Einstein, que consiste de fazer a conexão entre a métrica do espaço

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (2.2)$$

e a matéria, sob representação do tensor  $T_{\mu\nu}$ , através da equação tensorial

$$R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} R = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

Sendo o tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\rho} \Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \partial_{\nu} \Gamma_{\rho\mu}^{\rho} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\rho} \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} \Gamma_{\rho\mu}^{\sigma}, \quad (2.4)$$

e o escalar de Ricci,

$$R = g_{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

ambos ligados a conexão

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{g^{\lambda k}}{2} (\partial_{\nu} g_{\mu k} + \partial_{\mu} g_{\nu k} - \partial_k g_{\mu\nu}), \quad (2.6)$$

que por sua vez faz a ponte final entre  $R_{\mu\nu}$ ,  $R$  e as componentes da métrica.

Sendo assim, a equação tensorial de Einstein se torna uma forma compacta de escrever 10 equações diferenciais de segunda ordem nos termos

<sup>1</sup> Em unidades naturais  $M_{\odot} \approx 1.48km$ .

da métrica<sup>2</sup>. A obtenção destas equações é resultado da seleção de um sistema de coordenadas. Devido ao fato de distribuições esféricas de matéria minimizarem a energia de sistemas conectados por potenciais do tipo  $1/r^2$ , como a gravidade, o universo tem a tendência a apresentar objetos astrofísicos em formatos similares a esferas, e por este motivo utiliza-se majoritariamente sistemas de coordenadas esféricas.

## 2.2 Tensor momento-energia

O lado direito das equações de Einstein, 2.3, associam a curvatura do espaço à distribuição material nele. A matéria nesse contexto é representada pelo tensor simétrico  $T_{\mu\nu}$ , que carrega a informação da densidade de energia, em  $T_{00}$ , dos momentos em  $T_{i0}$ , das pressões em  $T_{ii}$ , e dos cisalhamentos em  $T_{ij}$ . Sendo assim podemos escrever as equações de conservação de momento e energia para qualquer referencial como

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.7)$$

Os dois tensores momento-energia que serão utilizados aqui são

- **Fluido perfeito em equilíbrio:**

Para um fluido perfeito em equilíbrio não existem cisalhamentos e nem transferências internas de momento. Definindo então um campo quadrivetorial  $\vec{u}$  para todos os pontos do fluido temos

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + p) u_{\mu} u_{\nu} + p g_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

sendo  $\varepsilon$  e  $p$  respectivamente a densidade de energia e pressão. No referencial do fluido,  $u^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$  e temos então, em forma matricial

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

<sup>2</sup> O tensor métrico é simétrico, então apenas 10 de suas 16 componentes são de fato independentes.

• **Tensor de estresse eletromagnético:**

A formulação covariante do eletromagnetismo define as equações de Maxwell como

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = \mu_0 j^{\nu}, \quad (2.10)$$

$$\partial_{\alpha} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\gamma\delta} \right). \quad (2.11)$$

com

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}. \quad (2.12)$$

Assim os graus de liberdade a serem determinados nesta teoria são as componentes do quadrivetor  $A^{\mu}$ . Os campos elétrico e magnético vem das expressões de  $A^{\mu}$  através de

$$E_{\nu} = F_{\mu\nu} n^{\mu}, \quad (2.13)$$

$$B_{\nu} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta} n^{\mu} F^{\alpha\beta}. \quad (2.14)$$

Nesta teoria podemos definir o tensor momento-energia

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{\mu\rho} F_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right). \quad (2.15)$$

### 2.2.1 Soluções esféricas

Um exemplo de solução das equações de Einstein pode ser construído analiticamente para um objeto esféricamente simétrico com massa  $M$ . Fora deste, o tensor momento-energia é nulo, então a equação de Einstein é escrita como

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.16)$$

A simetria esférica é caracterizada pelos termos da métrica não dependerem das coordenadas  $\theta$  e  $\phi$ , ou seja  $g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}(r, t)$ . Além disso, o teorema de Birkhoff implica que caso haja esta solução, ela é a única possível, ou seja, não depende do tempo e não existe dinâmica. Pelo mesmo teorema temos  $g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}(r)$ . Sendo assim, é possível decompor totalmente o espaço

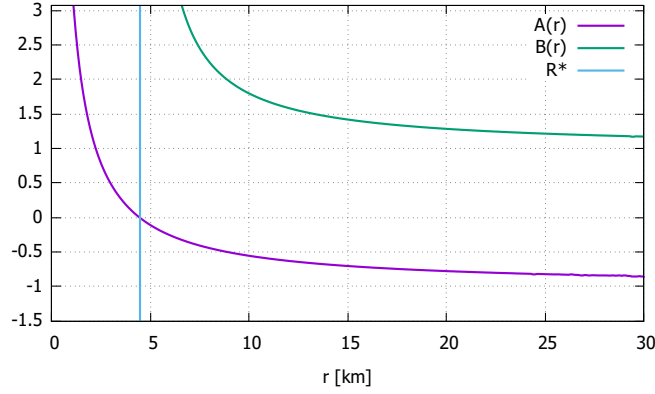


Figura 1 – Gráfico dos termos  $g_{tt} = A(r)$  e  $g_{rr} = B(r)$  para um objeto esférico de massa  $1,5M_{\odot}$ . O raio mínimo que este objeto pode ter, chamado raio de Schwarzschild esta denotado por  $R^*$ .

$\mathcal{M}$  em diversas esferas de raio  $R$ , o que zera diversos termos da métrica, pois

$$g_{\mu\nu} = \vec{e}_{\mu} \cdot \vec{e}_{\nu}, \quad (2.17)$$

e todos os vetores de base serão ortogonais. Temos por fim um tensor métrico no formato

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

A inserção dessa métrica na equação (2.16) leva a equações diferenciais que podem ser resolvidas analiticamente resultando em

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{1}{\left( 1 - \frac{2M}{R} \right)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.19)$$

Nesta expressão fica explícito o porque de a relação na equação (2.1) ser interessante para determinar a magnitude dos efeitos relativísticos, ela garante que os termos  $A(r)$  e  $B(r)$  se distanciam de seus valores para a métrica plana. A figura 1 mostra os termos da métrica em função da distância até o centro do objeto. Como esperado ao se distanciar do objeto massivo os termos da métrica tendem ao seu valor para o espaço plano.

Podemos fazer também a solução interna da equação de Einstein esféricamente simétrica. Neste caso usamos o tensor momento-energia (2.8) no lado di-

reito de (2.3). Usando da métrica (2.18) no formato

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{\alpha(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\beta(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

ou seja,  $A(r) = e^{\alpha(r)}$  e  $B(r) = e^{\beta(r)}$ , somos levados as equações diferenciais

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi\rho r^2, \quad m(r=0) = 0, \quad (2.21)$$

$$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{4\pi r^3 P + m}{r^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)}, \quad \alpha(r=r^*) = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2m}{r^*}\right) \quad (2.22)$$

$$\frac{dP}{dr} = -(P + \rho) \frac{d\alpha}{dr}. \quad P(r=0) = P_c, \quad (2.23)$$

com  $\rho$  sendo a densidade de massa,  $m(r)$  a massa em cada ponto interno  $r$ ,  $r^*$  o raio que determina a borda da estrela ( $P(r^*) = 0$ ) e  $P$  a pressão. O termo  $\beta(r)$  é determinado por

$$e^{\beta(r)} = \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}}. \quad (2.24)$$

Este sistema de equações pode ser usado para calcular o intervalo de massas possível para a estrelas de nêutrons, dada uma relação  $P(\varepsilon)$  chamada equação de estado.

Na figura 2 temos um exemplo de equação de estado para estrelas de nêutrons que consiste da crosta cristalina BPS e BBP (BAYM; PETHICK; SUTHERLAND, 1971) (BAYM; BETHE; PETHICK, 1971) e matéria de híperons para densidades nucleares (GLENDENNING, 2012)

Utilizando desta para resolver as equações diferenciais (2.21) - (2.23) juntamente a condição inicial  $\varepsilon_c(P_c) = 10^{15} \text{g/cm}^3$  chegamos na solução ilustrada pela figura 3, onde pode se notar que as soluções interna (representadas pela extensão das curvas) e externa da métrica do espaço-tempo devem coincidir no raio de superfície  $r^*$ .

Também é possível produzir o perfil de densidades da estrela. Ainda nos referindo a solução apresentada em 3 temos o seguinte perfil na figura 6.

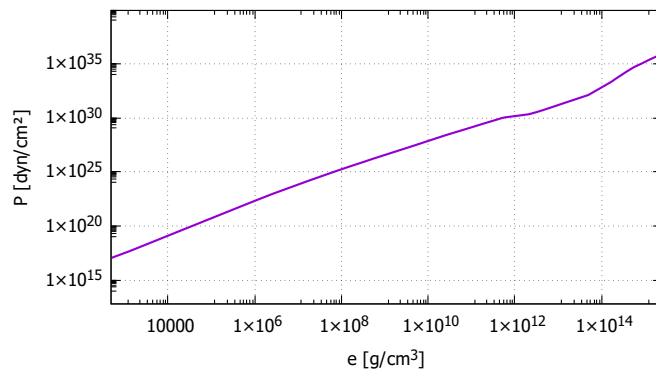


Figura 2 – Equação de estado  $P(\epsilon)$  utilizada para a solução ilustrada na figura 3.

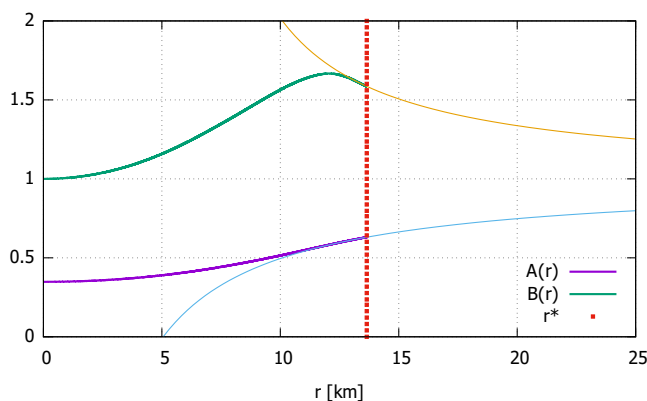


Figura 3 – Gráfico dos termos  $g_{tt} = A(r)$  e  $g_{rr} = B(r)$  para um objeto esférico de massa  $\approx 1,69M_{\odot}$ . O raio de superfície deste é denotado por  $r^*$  e representa o ponto onde a pressão é nula (ou próxima disto).

Que consegue ilustrar muito bem a distribuição material dentro da estrela

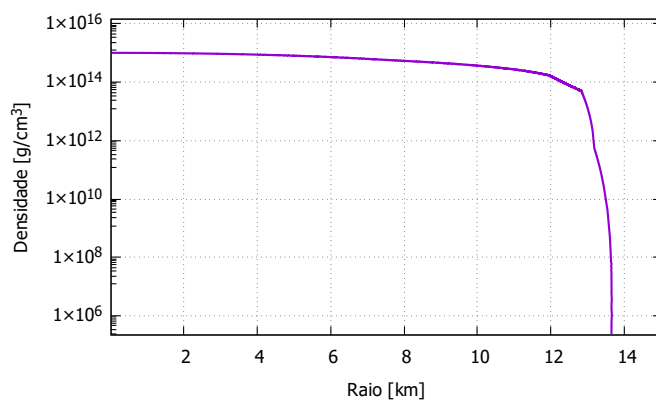


Figura 4 – Perfil de distribuição de densidades de uma estrela de nêutrons de densidade central  $\epsilon_c = 10^{15}g/cm^3$

de nêutrons, uma vez que se conhece que tipo de matéria esta presente em cada intervalo de densidades.



Estamos neste trabalho interessados em obter as informações do tensor métrico e das distribuições materiais em estrelas com campo magnético. Isto implica na inviabilidade de utilizar a métrica do espaço que contenha esta estrela no formato (2.18). As demonstrações dos casos relativísticos acima são executadas com técnicas convencionais de cálculo e podem ser checadas em (CARROLL, 2019). No que se segue iremos desenvolver a geometria necessária para obter as equações diferenciais associadas a configurações mais complexas de estrelas a partir das equações de Einstein. Mais precisamente para configurações com simetria axial, ao redor de um eixo.

### 2.3 Formalismo 3+1

Considerando um espaço  $\mathcal{M}$  quadridimensional de assinatura  $(-, +, +, +)$ , queremos decompor  $\mathcal{M}$  em hipersuperfícies tridimensionais de assinatura  $(+, +, +)$ , associadas a um parâmetro  $t$ , que chamaremos de  $\Sigma_t$ , este parâmetro será contínuo e relacionado a coordenada  $x_0$  do espaço  $\mathcal{M}$ . Pressuporemos então que

$$\bigcup_t \Sigma_t = \mathcal{M}, \quad (2.25)$$

$$\bigcap_t \Sigma_t = \emptyset. \quad (2.26)$$

Ou seja, as hipersuperfícies não se intersectam e a união de todas elas compõem o espaço  $\mathcal{M}$ .

Cada hipersuperfície  $\Sigma_t$  é munida de uma métrica tridimensional  $\gamma_{\mu\nu}$  e um vetor normal  $\vec{n}$ . Assim como associado a métrica  $g_{\mu\nu}$  do espaço  $\mathcal{M}$  temos os tensores e escalares de curvatura  $R^\mu{}_{\nu\lambda\sigma}$ ,  $R_{\mu\nu}$  e

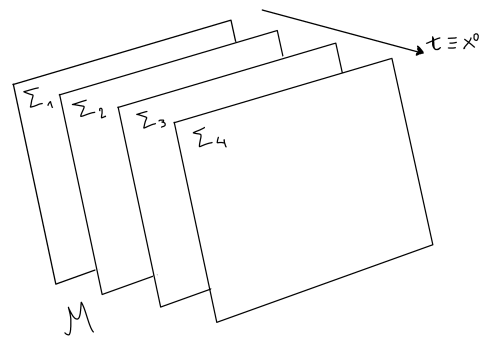


Figura 5 – Representação esquemática das folheações  $\Sigma_t$  do espaço  $\mathcal{M}$ .

$R$ , todos associados a  $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$  como já

foi comentado anteriormente em 2.6, a hipersuperfície  $\Sigma_t$  também possui seus tensores análogos, que chamaremos de  ${}^3R^{\mu}_{\nu\lambda\sigma}$ ,  ${}^3R_{\mu\nu}$ ,  ${}^3R$  e  ${}^3\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$ . A derivada covariante em  $\mathcal{M}$ ,

$$\nabla_{\mu}v^{\nu} = \partial_{\mu}v^{\nu} - \Gamma_{\rho\mu}^{\nu}v^{\rho}, \quad (2.27)$$

também encontram um correspondente em  $\Sigma_t$ ,

$$D_{\mu}v^{\nu} = \partial_{\mu}v^{\nu} - {}^3\Gamma_{\rho\mu}^{\nu}v^{\rho}. \quad (2.28)$$

O que torna fácil compreender a relação entre  $R^{\mu}_{\nu\lambda\sigma}$  e  ${}^3R^{\mu}_{\nu\lambda\sigma}$ , pois se

$$R^{\mu}_{\nu\lambda\sigma}v^{\nu} = (\nabla_{\lambda}\nabla_{\sigma} - \nabla_{\sigma}\nabla_{\lambda})v^{\mu}, \quad (2.29)$$

então

$${}^3R^{\mu}_{\nu\lambda\sigma}v^{\nu} = (D_{\lambda}D_{\sigma} - D_{\sigma}D_{\lambda})v^{\mu}, \quad (2.30)$$

Quanto ao vetor normal  $\vec{\mathbf{n}}$ , o definiremos por

$$\vec{\mathbf{n}} = -N\vec{\nabla}_t, \quad (2.31)$$

com normalização  $N$  escolhida de modo que

$$\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = -1, \quad \text{Se } \Sigma_t \text{ é de tipo espaço,} \quad (2.32)$$

$$\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 1, \quad \text{Se } \Sigma_t \text{ é de tipo tempo.} \quad (2.33)$$

No nosso caso, optaremos pela normalização para hipersuperfícies do tipo espaço. Ou seja,

$$\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = N^2\vec{\nabla}_t \cdot \vec{\nabla}_t = -1. \quad (2.34)$$

O que implica em

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{\nabla}_t = \frac{-1}{N^2}. \quad (2.35)$$

Além da curvatura intrínseca  $\gamma_{\mu\nu}$  de  $\Sigma_t$ , também podemos definir a curvatura extrínseca  $K_{\mu\nu}$ , associada a como o vetor normal  $\vec{\mathbf{n}}$  varia conforme se move em  $\Sigma_t$ , como a operação

$$\mathbf{K}(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) = -\vec{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{n}}, \quad (2.36)$$

sendo  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  dois vetores quaisquer em  $\Sigma_t$ . A operação é simétrica, de modo que

$$\mathbf{K}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathbf{K}(\vec{v}, \vec{u}). \quad (2.37)$$

A diferença entre a curvatura intrínseca e extrínseca esta em observar que a primeira dessas existe mesmo que

$$\Sigma_t = \mathcal{M}, \quad (2.38)$$

enquanto que a curvatura extrínseca depende da existência de uma imersão do espaço  $\Sigma_t$  e  $\mathcal{M}$ , garantindo a existência de  $\mathbf{n}$ .

### 2.3.1 Projeção ortogonal

Seja um vetor  $\vec{v}$  em  $\mathcal{M}$ , podemos decompô-lo em sua forma 3+1 através das suas projeções em  $\Sigma_t$  e  $\vec{n}$ . A projeção deste vetor em  $\vec{n}$  é dada por

$$\vec{v}_t = -(\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n}. \quad (2.39)$$

E como o vetor  $\vec{v}$  pode ser escrito por

$$\vec{v} = \vec{v}_\Sigma + \vec{v}_t, \quad (2.40)$$

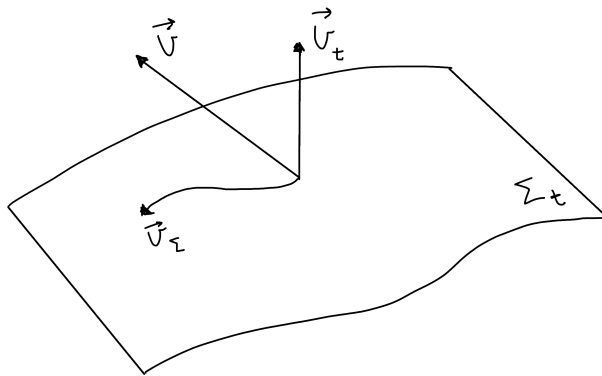


Figura 6 – Projeções do vetor  $\mathbf{v}$  em  $\Sigma_t$  e  $\mathbf{n}$ .

calcular  $\vec{v}_\Sigma$  irá se resumir em fazer

$$\vec{v}_\Sigma = \vec{v} + (\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n}. \quad (2.41)$$

Então, definimos a operação de projeção em  $\Sigma_t$  por

$$\vec{\gamma}\vec{v} = \vec{v} + (\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n}, \quad (2.42)$$

que em notação de índices será

$$\gamma^\mu{}_\nu v^\nu = \delta^\mu{}_\nu v^\nu + n^\mu n_\nu v^\nu. \quad (2.43)$$

Para o caso de tensores de segunda ordem

$$\gamma^\mu{}_\lambda \gamma^\nu{}_\sigma T^{\lambda\sigma} = (\delta^\mu{}_\lambda + n^\mu n_\lambda)(\delta^\nu{}_\sigma + n^\nu n_\sigma) T^{\lambda\sigma}. \quad (2.44)$$

Se fizermos a operação (2.44) no tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  de  $\mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \gamma^\mu{}_\lambda \gamma^\nu{}_\sigma g_{\mu\nu} &= (\delta^\mu{}_\lambda + n^\mu n_\lambda)(\delta^\nu{}_\sigma + n^\nu n_\sigma) g_{\mu\nu} \\ &= g_{\lambda\sigma} + g_{\lambda\nu} n^\nu n_\sigma + g_{\mu\sigma} n^\mu n_\lambda + g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu n_\lambda n_\sigma \\ &= g_{\lambda\sigma} + 2n_\lambda n_\sigma - n_\lambda n_\sigma \\ &= g_{\lambda\sigma} + n_\lambda n_\sigma. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Como a métrica da hipersuperfície  $\Sigma_t$  é a projeção da métrica de  $M$ , então

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu. \quad (2.46)$$

### 2.3.2 Relações de Gauss-Codazzi

Para a aplicação destes conceitos na equação de Einstein será muito útil fazermos a conexão entre os tensores de curvatura no espaço  $\mathcal{M}$  e nas hipersuperfícies  $\Sigma_t$  através das operações de projeção definidas em 2.3.1. As demonstrações de todas as relações de Gauss-Codazzi presentes aqui podem ser encontradas de maneira bastante didática em (GOURGOULHON, 2007).

Primeiramente, a projeção completa do tensor de Riemann em  $\Sigma_t$  se relaciona os tensores da hipersuperfície como

$$\gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\gamma{}_\rho \gamma^\sigma{}_\delta R^{\rho\sigma\mu\nu} = {}^3R^\gamma{}_{\delta\alpha\beta} + K^\gamma{}_\alpha K_{\delta\beta} - K^\gamma{}_\beta K_{\alpha\delta}, \quad (2.47)$$

esta é chamada de **relação de Gauss**<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> Do inglês: Gauss relation

A contração dos índices  $\alpha$  e  $\mu$  levam a

$$\gamma^\nu{}_\beta \gamma^\sigma{}_\delta R_{\sigma\nu} + \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\sigma{}_\delta n^\mu n_\rho R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = {}^3R_{\delta\beta} + KK_{\delta\beta} - K^\alpha{}_\beta K_{\alpha\delta}, \quad (2.48)$$

conhecida como a **relação de Gauss contraída**<sup>4</sup>. E por fim, se tomarmos o traço desta equação teremos

$$R + 2n^\delta n^\beta R_{\delta\beta} = {}^3R + K^2 - K_{\delta\beta} K^{\delta\beta}, \quad (2.49)$$

chamada **relação escalar de Gauss**<sup>5</sup>.

Além destas, a aplicação da relação de Ricci, equação (2.29), no vetor normal  $\vec{\mathbf{n}}$

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) n^\gamma = R^\gamma{}_{\mu\alpha\beta} n^\mu \quad (2.50)$$

projetada por sua vez em  $\Sigma_t$

$$\gamma^\gamma{}_\rho n^\sigma \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = D_\beta K^\gamma{}_\alpha - D_\alpha K^\gamma{}_\beta, \quad (2.51)$$

leva a **relação de Codazzi-Mainardi**, mais conhecida apenas como **relação de Codazzi**<sup>6</sup>. Assim como na relação de Gauss, podemos contrair a equação 2.51 nos índices  $\alpha$  e  $\mu$ , ficando com

$$\gamma^\mu{}_\alpha n^\nu R_{\mu\nu} = D_\alpha K - D_\mu K^\mu{}_\alpha, \quad (2.52)$$

que por fim, é conhecida como **relação de Codazzi contraída**.

### 2.3.3 Evolução temporal

Como mencionado anteriormente, o vetor  $\vec{\mathbf{n}}$  normal a  $\Sigma_t$  é definido por

$$\vec{\mathbf{n}} = -N\vec{\mathbf{V}}_t. \quad (2.53)$$

Associado a este, podemos construir o vetor de evolução normal como

$$\vec{\mathbf{m}} = N\vec{\mathbf{n}}. \quad (2.54)$$

<sup>4</sup> Do inglês: contracted Gauss relation

<sup>5</sup> Do inglês: scalar Gauss relation

<sup>6</sup> Do inglês: Codazzi relation

Podemos fazer

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}t \cdot \mathbf{m} &= N\vec{\nabla}t \cdot \vec{\mathbf{n}} \\ &= N^2(-\vec{\nabla}t \cdot \vec{\nabla}t) \\ &= 1.\end{aligned}\tag{2.55}$$

O que leva por conclusão em

$$m^\mu \nabla_\mu t = 1.\tag{2.56}$$

Isto indica que o vetor  $\vec{\mathbf{m}}$  é adaptado ao campo escalar  $t$ . O que implica que a evolução temporal dos objetos em  $\Sigma_t$  é melhor calculada pela derivada de Lie<sup>7</sup> em  $\vec{\mathbf{m}}$ .

Usando da derivada de Lie sobre o vetor de evolução normal na métrica intrínseca de  $\Sigma_t$  chegamos, com um pouco de álgebra, na expressão

$$\mathcal{L}_{\mathbf{m}}\gamma_{\mu\nu} = -2NK_{\mu\nu},\tag{2.59}$$

que relaciona a métrica intrínseca e extrínseca.

Projetando a relação de Ricci (2.29) duas vezes em  $\Sigma_t$  e uma vez em  $\mathbf{n}$ , ou seja

$$\gamma_{\mu\alpha}n^\sigma\gamma^\beta{}_\nu(\nabla_\beta\nabla_\sigma n^\alpha - \nabla_\sigma\nabla_\beta n^\alpha) = \gamma_{\mu\alpha}n^\sigma\gamma^\beta{}_\nu R^\alpha{}_{\rho\beta\sigma}n^\rho\tag{2.60}$$

somos conduzidos a **equação de Ricci**,

$$\gamma_{\mu\alpha}n^\sigma\gamma^\beta{}_\nu n^\rho R^\alpha{}_{\rho\beta\sigma} = \frac{1}{N}\mathcal{L}_{\mathbf{m}}K_{\mu\nu} + \frac{1}{N}D_\mu D_\nu N + K_{\mu\alpha}K^\alpha{}_\nu.\tag{2.61}$$

Esta acaba por completar a decomposição 3+1 do tensor de Riemann, uma vez que uma hipotética quarta relação, com três projeções em  $\vec{\mathbf{n}}$ , é nula devido as simetrias de  $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ .

<sup>7</sup> Por completeza, a derivada de Lie de um vetor é definida por

$$\mathcal{L}_{\mathbf{u}}v^\mu = u^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} - v^\nu \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu},\tag{2.57}$$

e para um tensor de segunda ordem

$$\mathcal{L}_{\mathbf{m}}T^\mu{}_\nu = u^\lambda \frac{\partial T^\mu{}_\nu}{\partial x^\lambda} - T^\lambda{}_\nu \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\lambda} + T^\mu{}_\lambda \frac{\partial u^\lambda}{\partial x^\nu}\tag{2.58}$$

É interessante notar que o lado direito da equação (2.61) é um termo da equação contraída de Gauss, eq. (2.48). Ou seja, podemos combinar as duas para formar

$$\gamma^\alpha{}_\mu \gamma^\beta{}_\nu R_{\mu\nu} = -\frac{1}{N} \mathcal{L}_m K_{\mu\nu} - \frac{1}{N} D_\mu D_\nu N + {}^3R_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - 2K_{\mu\alpha} K^\alpha{}_\nu, \quad (2.62)$$

que é uma relação que não mais contém o tensor de Riemann do espaço  $\mathcal{M}$ .

Tomando o traço da equação 2.62 em respeito a  $\gamma$  temos

$$\gamma^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -\frac{1}{N} \gamma^{\mu\nu} \mathcal{L}_m K_{\mu\nu} - \frac{1}{N} D_\mu D^\mu N + {}^3R + K^2 - 2K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}. \quad (2.63)$$

Utilizando da equação 2.59 e com um pouco de álgebra chegamos em

$$R = {}^3R + K^2 + K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} - \frac{2}{N} \mathcal{L}_m K - \frac{1}{N} D_\mu D^\mu N. \quad (2.64)$$

E agora temos todas as projeções necessárias para construir a decomposição 3+1 da equação de Einstein.

## 2.4 Equação de Einstein no formalismo 3+1

A equação de Einstein, que descreve como o espaço  $\mathcal{M}$  se curva na presença de matéria, pode ser projetada em  $\Sigma_t$  e  $\vec{n}$  utilizando das relações de Gauss-Codazzi. Para os nossos propósitos será útil ter também em mãos a versão da equação de Einstein que não envolve o escalar de Ricci, ou seja

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (2.65)$$

Que pode ser obtida ao se tomar o traço da equação 2.3 e reinserir o resultado na equação inicial.

### 2.4.1 Decomposição 3+1 do tensor momento-energia

Na secção 2.2 apresentamos o tensor energia momento presente do lado direito da equação de Einstein e portador das informações acerca da

matéria no sistema. A projeção total do tensor momento-energia em  $\vec{\mathbf{n}}$  representa a energia medida pelo observador Euleriano

$$E = T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu. \quad (2.66)$$

A projeção mista, uma vez em  $\Sigma_t$  e uma vez em  $\vec{\mathbf{n}}$  representa a densidade de momento medida também pelo observador Euleriano, como

$$p_\alpha = -T_{\mu\nu}n^\mu \gamma^\nu{}_\alpha. \quad (2.67)$$

E por fim, a projeção total em  $\Sigma_t$  representa o tensor de estresse<sup>8</sup>

$$S_{\alpha\beta} = \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\nu{}_\beta T_{\mu\nu}. \quad (2.68)$$

Então, se conhecemos  $E$ ,  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{S}$  podemos reconstruir  $\mathbf{T}$  por

$$T_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + n_\mu p_\nu + p_\nu n_\mu + E n_\mu n_\nu. \quad (2.69)$$

Por fim, tomando o traço de (2.69) temos

$$T = S - E, \quad (2.70)$$

onde  $S$  representa o traço do tensor de estresse.

#### 2.4.2 Projeções da equação de Einstein

Nesta seção faremos três decomposições da equação de Einstein da mesma maneira que foi apresentado para o tensor de Riemann. A primeira, projeção completa em  $\Sigma_t$  é mais facilmente executada usando a versão sem o escalar de Ricci da equação de Einstein, ou seja (3.2). Como de costume a projeção de faz com

$$\gamma^\alpha{}_\mu \gamma^\beta{}_\nu R_{\alpha\beta} = 8\pi \gamma^\alpha{}_\mu \gamma^\beta{}_\nu \left( T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T \right), \quad (2.71)$$

o lado esquerdo é conhecido por (2.62) e o direito vem das próprias definições do tensor momento-energia resultando em

$$\mathcal{L}_{\mathbf{m}} K_{ij} = -D_i D_j N + N \left( {}^3 R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k + 4\pi [(S - E) \gamma_{ij} - 2S_{ij}] \right), \quad (2.72)$$

<sup>8</sup> Também chamado tensor de tensões.



onde são usados índices  $i$  e  $j$  para indicar que todos os tensores na equação são tridimensionais.

A projeção total da equação de Einstein em  $\vec{n}$ , ou seja,

$$R_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta R = 8\pi T_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta, \quad (2.73)$$

se reduz a

$${}^3R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi E. \quad (2.74)$$

A ultima projeção, uma vez em  $\Sigma_t$  e uma em  $\vec{n}$ ,

$$R_{\alpha\beta}n^\alpha \gamma^\beta_\mu - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}n^\alpha \gamma^\beta_\mu = 8\pi T_{\alpha\beta}n^\alpha \gamma^\beta_\mu \quad (2.75)$$

retorna, usando da relação de Codazzi contraída, eq. (2.52),

$$D_j K^j_i - D_i K = 8\pi p_i, \quad (2.76)$$

que por fim completa a decomposição 3+1 da equação de Einstein.

## 2.5 Vetor de shift e componentes 3+1 da métrica

Seja um vetor de base  $\vec{e}_t$ , vide figura 7, determinado por

$$\vec{e}_t = \vec{m} + \vec{\beta}. \quad (2.77)$$

Se impormos que o vetor  $\vec{\beta}$ , chamado vetor de shift, resida totalmente em

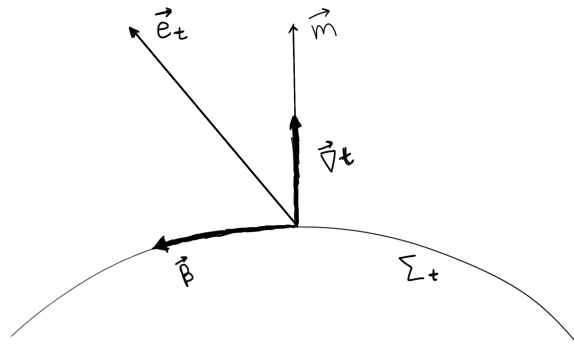


Figura 7 – Projeções do vetor  $\mathbf{v}$  em  $\Sigma_t$  e  $\mathbf{n}$ .

$\Sigma_t$ , então  $\vec{\nabla}_t \cdot \vec{\beta} = 0$  e por consequência

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_t \cdot \vec{e}_t &= \vec{\nabla}_t \cdot \vec{m} + \vec{\nabla}_t \cdot \vec{\beta} \\ &= 1\end{aligned}\quad (2.78)$$

Lembrando então da relação entre os termos do tensor métrico e os vetores de base

$$\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu = g_{\mu\nu}, \quad (2.79)$$

e utilizando-a para calcular o termo  $g_{tt}$  chegamos em

$$\begin{aligned}\vec{e}_t \cdot \vec{e}_t &= (\vec{m} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{m} + \vec{\beta}) \\ &= \vec{m} \cdot \vec{m} + \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} \\ &= -N^2 + \beta_k \beta^k\end{aligned}\quad (2.80)$$

E para  $g_{tj}$  e  $g_{ij}$

$$\vec{e}_t \cdot \vec{e}_j = \beta_j, \quad (2.81)$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \gamma_{ij}. \quad (2.82)$$

Temos então por fim a expansão 3+1 do tensor métrico

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^2 + \beta^k \beta_k & \beta_j \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Por exemplo, que o tensor métrico de Schwarzschild, eq. (2.19), no formato 3+1 fica como

$$\vec{\beta} = 0, \quad (2.84)$$

$$N = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}, \quad (2.85)$$

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.86)$$

No próximo capítulo estaremos fazendo então as considerações necessárias sobre as simetrias axiais em estrelas com rotação e campo magnético para

determinar o melhor formato para o tensor métrico que comporte estas simetrias, assim como é feito para estrelas com simetria esférica. Este tensor métrico por fim será interpretado pelo formalismo 3+1 e assim conseguiremos construir o sistema de equações diferenciais para as configurações de equilíbrio através das equações 3+1 de Einstein, (2.72), (2.74) e (2.76).

## 3 Gravitação de objetos axialmente simétricos

No capítulo 2 calculamos as decomposições 3+1 da equação de Einstein, onde obtemos o sistema de equações

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_\beta\right) K_{ij} = -D_i D_j N + N \left[ {}^3R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K^k{}_j + 4\pi ((S - E) \gamma_{ij} - 2S_{ij}) \right], \quad (3.1)$$

$${}^3R + K^2 - K_{ij} K^{ij} = 16\pi E, \quad (3.2)$$

$$D_j K^j{}_i - D_i K = 8\pi p_i. \quad (3.3)$$

Neste contexto, temos tensores da hipersuperfície  $\Sigma_t$  interagindo com quantidades relacionada aos observáveis da matéria.

Estamos interessados em soluções estacionarias com simetria axial, ou seja, que não dependem do tempo e tem simetria em torno de um eixo. Na natureza isso corresponde a objetos astrofísicos com rotação ou campos magnéticos, o que significa que são um tipo de solução muito mais presente na natureza do que as de simetria esférica. O processo de encontrar estas soluções assim como para determinar as configurações simétricas começa com a determinação do formato do tensor métrico que comporte as simetrias do sistema. Usualmente essas simetrias impõem vínculos e relações de ortogonalidade que zeram alguns dos 10 termos iniciais presentes no tensor métrico.

### 3.1 Definições de estacionariedade e simetria axial

#### 3.1.1 Estacionariedade

Um espaço  $\mathcal{M}$  é estacionário se

- Existe um grupo  $G$  isomorfo a  $(\mathbb{R}, +)$ .
- A ação do grupo  $G$  gera orbitas em  $\mathcal{M}$  cujas curvas são do tipo luz.

- A métrica é invariante quanto a ação do grupo, ou seja

$$\mathcal{L}_\xi \mathbf{g} = 0. \quad (3.4)$$

O que induz,

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0. \quad (3.5)$$

onde  $\xi$  é o gerador do grupo  $G$ . A equação (3.5) é chamada equação de Killing e o vetor  $\xi$  vetor de Killing.

### 3.1.2 Estaticidade

Um espaço  $\mathcal{M}$  é estático se

- $\mathcal{M}$  é estacionário.
- O vetor de Killing  $\xi$  é ortogonal as superfícies  $\Sigma_t$ .

### 3.1.3 Simetria axial

Um espaço  $\mathcal{M}$  tem simetria axial se

- A ação de um grupo  $SO(2)$ , de rotações em um plano, não afeta a métrica. Ou seja, temos a mesma propriedade (3.4), mas desta vez para outro vetor de Killing  $\chi$ .

$$\nabla_\mu \chi_\nu + \nabla_\nu \chi_\mu = 0. \quad (3.6)$$

- O conjunto de pontos invariantes sob a ação do grupo  $SO(2)$  é uma superfície bidimensional denotada por  $\Delta$  e chamada de eixo de rotação.

No sistema de coordenadas polares temos  $(x^0, x^1, x^2, x^3) \mapsto (t, r, \theta, \phi)$  o eixo de rotação corresponde aos pontos onde  $r \in [0, +\infty]$  e  $\phi \in \{0, \pi\}$ . Os vetores de Killing são os vetores de base associados a coordenada  $x^0 = t$  e  $x^3 = \phi$ . Ou seja

$$\vec{\mathbf{e}}_t = \vec{\xi}, \quad (3.7)$$

$$\vec{\mathbf{e}}_\phi = \vec{\chi}. \quad (3.8)$$

Consequentemente, a aplicação de (3.4) para ambos os vetores de Killing induz

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \phi} = 0, \quad (3.10)$$

então

$$g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}(r, \theta). \quad (3.11)$$

Por esse motivo as coordenadas polares são chamadas de coordenadas adaptadas a simetria do espaço<sup>1</sup>.

## 3.2 Espaços com circularidade

Apesar de as condições (3.9) e (3.10) inserirem alguma restrição a métrica do espaço  $\mathcal{M}$  ainda é possível utilizar de uma grande variedade de espaços que respeitem estas restrições. Dando um passo adiante, é possível construir um conjunto de espaços que são mais restritivos, porém que conservam o interesse físico.

Lembrando da definição do elemento de métrica sabemos que uma situação de ortogonalidade,  $\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu = 0$ , implica em  $g_{\mu\nu} = 0$ . Vamos agora explorar o fato de que sempre existe uma superfície definida por  $\vec{\xi} \times \vec{\chi}$ . Se existir também uma segunda superfície, definida por  $\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta$  que seja em totalmente ortogonal com a primeira então podemos definir

$$g_{tr} = 0, \quad (3.12)$$

$$g_{t\theta} = 0, \quad (3.13)$$

$$g_{r\phi} = 0, \quad (3.14)$$

$$g_{\theta\phi} = 0. \quad (3.15)$$

Este é o caso de um espaço com a propriedade de **circularidade**. Além disto, é possível provar que para que o tensor momento-energia de um

<sup>1</sup> Note que nesse sentido as coordenadas cilíndricas também são adaptadas a simetria axial.

fluido perfeito (2.8) desenvolva um espaço com circularidade seu quadri-  
vetor velocidade deve ter o formato

$$\vec{\mathbf{u}} = u^t \left( \vec{\xi} + \Omega \vec{\chi} \right). \quad (3.16)$$

No espaço estacionário, circular e de simetria axial podemos relacionar  
a métrica da superfície gerada por  $\vec{\mathbf{e}}_r \times \vec{\mathbf{e}}_\theta$  através de

$$g_{ab} dx^a dx^b = A^2(r, \theta) (dr^2 + r^2 d\theta^2). \quad (3.17)$$

Vamos também definir que exista uma relação

$$g_{t\phi} = -\omega g_{\phi\phi}, \quad (3.18)$$

de tal modo que

$$\omega(r, \theta) = -\frac{\vec{\xi} \cdot \vec{\chi}}{\vec{\chi} \cdot \vec{\chi}}. \quad (3.19)$$

E por fim, se

$$g_{\phi\phi} = B^2(r, \theta) r^2 \sin^2 \theta, \quad (3.20)$$

então por conclusão podemos definir a métrica do espaço  $\mathcal{M}$  do modo

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt^2 + A^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2) + B^2 r^2 \sin^2 \theta (d\phi - \omega dt)^2. \quad (3.21)$$

A relação métrica (3.21) possui mais restrições do que a proposta na  
seção 3.1.3, onde  $g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}(r, \theta)$  com dez variáveis independentes. Desse  
modo, as relações de circularidade inserem novos vínculos, e temos por  
fim apenas quatro funções a se determinar

$$N \equiv N(r, \theta), \quad (3.22)$$

$$A \equiv A(r, \theta), \quad (3.23)$$

$$B = B(r, \theta), \quad (3.24)$$

$$\omega \equiv \omega(r, \theta). \quad (3.25)$$

A métrica (3.21) pode ser analisada sob a ótica do formalismo 3+1  
através da comparação com (2.83). Aqui, fazemos a identificação

$$\beta^i = (0, 0, 0, -\omega), \quad (3.26)$$

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j = A^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2) + B^2 r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (3.27)$$

Usando a eq. (2.59)

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left( -\omega \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \phi} - \gamma_{\phi j} \frac{\partial \omega}{\partial x^i} - \gamma_{i\phi} \frac{\partial \omega}{\partial x^j} \right), \quad (3.28)$$

cujas únicas componentes não nulas são

$$K_{r\phi} = -\frac{B^2 r^2 \sin^2 \theta}{2N} \frac{\partial \omega}{\partial r}, \quad (3.29)$$

$$K_{\theta\phi} = -\frac{B^2 r^2 \sin^2 \theta}{2N} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \quad (3.30)$$

É útil também conhecer o traço de  $\mathbf{K}$ , que é particularmente fácil, já que qualquer  $K_{ii} = 0$ , resultando em

$$K = 0. \quad (3.31)$$

Outro termo presente nas equações tensoriais é

$$\begin{aligned} K_{ij}K^{ij} &= \frac{B^2 r^2 \sin^2 \theta}{2A^2 N^2} \left[ \left( \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right)^2 \right] \\ &= \frac{B^2 r^2 \sin^2 \theta}{2A^2 N^2} \partial \omega \partial \omega. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Onde é usada a notação

$$\partial a \partial b = \frac{\partial a}{\partial r} \frac{\partial b}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial a}{\partial \theta} \frac{\partial b}{\partial \theta}. \quad (3.33)$$

### 3.3 Sistema de EDPs do equilíbrio hidroestático

O sistema de equações diferenciais (3.1), (3.2) e (3.3) pode ser avaliado no âmbito dos espaços estacionários, circulares e com simetria axial através das expressões da seção 3.2. Tomando o traço da equação (3.1) temos

$$\partial_t K - \beta^i \partial_i K = -D_i D^i N + N \{ {}^3R + K^2 - 2K_{ij}K^{ji} + 4\pi [3(S - E) - 2S] \}. \quad (3.34)$$

Já vimos que  $K = 0$ , então

$$D_i D^i N = N \{ {}^3R + K^2 - 2K_{ij}K^{ji} + 12\pi(S - E) - 8\pi S \}. \quad (3.35)$$



Podemos utilizar da equação (3.2) para determinar  ${}^3R + K^2 = 16\pi E + K_{ij}K^{ij}$ , que de forma mais conveniente é escrita como

$$\begin{aligned} {}^3R + K^2 &= 16\pi E + \gamma^i_j \gamma^j_i K_{ij} K^{ji} \\ &= 16\pi E + 3K_{ij} K^{ij}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Agora, a equação (3.35) pode ser escritar como

$$D_i D^i N = N \{ K_{ij} K^{ij} + 4\pi(S + E) \}. \quad (3.37)$$

O termo  $K_{ij} K^{ij}$  já é conhecido, falta agora o lado esquerdo desta equação.

Usando da expressão

$$\begin{aligned} D_i D^i N &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{\gamma} \gamma^{ij} \frac{\partial N}{\partial x^j} \right) \\ &= \frac{1}{A^2 B r^2 \sin \theta} \partial_i \left( A^2 B r^2 \sin \theta \gamma^{ij} \partial_j N \right) \\ &= \frac{1}{A^2 B r^2 \sin \theta} \left[ \partial_r \left( A^2 B r^2 \sin \theta \{ \gamma^{rr} \partial_r N + \gamma^{r\theta} \partial_\theta N \} \right) \right. \\ &\quad \left. + \partial_\theta \left( A^2 B r^2 \sin \theta \{ \gamma^{\theta r} \partial_r N + \gamma^{\theta\theta} \partial_\theta N \} \right) \right] \\ &= \frac{1}{A^2} \left[ \frac{1}{B} \partial_r B \partial_r N + \frac{2}{r} \partial_r N + \partial_r^2 N + \frac{1}{B r^2} \partial_\theta B \partial_\theta N + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \partial_\theta^2 N \right]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Então, a equação (3.1) tem por formato final

$$\frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \frac{2}{N} \frac{\partial_r N}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial_\theta^2 N}{\partial \theta^2} = 4\pi A^2 N (E + S) + \frac{B^2 r^2 \sin^2 \theta}{2N} \partial \omega \partial \omega + \partial \ln B \partial N. \quad (3.39)$$

A segunda equação do sistema 3+1, eq. (3.2), é rapidamente identificada como

$${}^3R = 16\pi E + \frac{B^2 r^2 \sin^2 \theta}{2N^2} \partial \omega \partial \omega, \quad (3.40)$$

uma vez que é usada a relação (3.32). O desafio agora é calcular o lado esquerdo da equação. O escalar de Ricci na hipersuperfície  $\Sigma_t$  é definido por

$${}^3R = \gamma^{ij} {}^3R_{ij}, \quad (3.41)$$

$${}^3R_{ij} = \frac{\partial^3 \Gamma^k_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial^3 \Gamma^k_{ik}}{\partial x^j} + {}^3\Gamma^k_{ij} {}^3\Gamma^l_{kl} - {}^3\Gamma^l_{ik} {}^3\Gamma^k_{lj}. \quad (3.42)$$

Que ao final de alguma álgebra resulta em

$${}^3R = -\frac{2}{A^3} \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{1}{A} \left( \frac{\partial A}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2 A} \left( \frac{\partial A}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \frac{2}{A^2 B} \left( \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial B}{\partial \theta} \right). \quad (3.43)$$

Assim, a equação (3.2) é escrita como

$$-\frac{1}{A} \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{1}{A} \left( \frac{\partial A}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2 A} \left( \frac{\partial A}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \frac{B^2 r^2 \sin^2 \theta}{4N^2} \partial \omega \partial \omega - \frac{1}{B} \left( \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial B}{\partial \theta} \right) = -8\pi A^2 E \quad (3.44)$$

Agora, tratando da equação (3.3), começamos notando que  $D_i K = 0$  a equação se reduz a

$$D_j K^j_i = 8\pi p_i. \quad (3.45)$$

O lado direito pode ser determinado por

$$D_j K^j_i = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (\sqrt{\gamma} K^r_i) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sqrt{\gamma} K^\theta_i) \right]. \quad (3.46)$$

Como  $K^r_r = K^\theta_\theta = K^r_\theta = K^\theta_r = 0$ , então

$$p_r = 0, \quad (3.47)$$

$$p_\theta = 0. \quad (3.48)$$

Esta é a consequência física mais direta da circularidade e significa que não existem outros movimentos além da rotação, como por exemplo movimento de convecção dentro da estrela, que é permitido pela simetria axial no caso mais geral. Resta agora a equação para  $p_\phi$

$$\frac{N}{B^3} \left[ \frac{\sin \theta}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^4 \frac{B^3}{N} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin^3 \theta \frac{B^3}{N} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) \right] = -16\pi \frac{NA^2}{B^2} \frac{p_\phi}{r \sin \theta}. \quad (3.49)$$

A última das equações que procuramos é a componente  $\phi\phi$  de (3.1). Utilizando de técnicas semelhantes ao apresentado para as outras equações

chegamos por fim em

$$\begin{aligned} \frac{1}{B} \left( \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial B}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{BN} \partial B \partial N + \frac{B^2 r^2 \sin^2 \theta}{2N^2} \partial \omega \partial \omega = \\ = -\frac{1}{rN} \left( \frac{\partial N}{\partial r} + \frac{1}{r \tan \theta} \frac{\partial N}{\partial \theta} \right) + 4\pi A^2 \left( S_r^r + S_\theta^\theta - S_\phi^\phi - E \right) \end{aligned} \quad (3.50)$$

O conjunto de equações (3.39), (3.44), (3.50) e (3.50) constituem o necessário para determinar as funções  $N, A, B$  e  $\omega$ . É possível com estas construir combinações lineares que resultem em equações diferenciais elípticas.

$$\Delta_3 v = 4\pi A^2 (E + S) + \frac{B^2 r^2 \sin^2 \theta}{2N^2} \partial \omega \partial \omega - \partial v \partial (v + \ln B), \quad (3.51)$$

$$\tilde{\Delta}_3(\omega r \sin \theta) = -16\pi \frac{NA^2}{B^2} \frac{p_\phi}{r \sin \theta} + r \sin \theta \partial \omega \partial (v - 3 \ln B), \quad (3.52)$$

$$\Delta_2[(NB - 1)r \sin \theta] = 8\pi NA^2 Br \sin \theta (S_r^r + S_\theta^\theta), \quad (3.53)$$

$$\Delta_2(\ln A + v) = 8\pi A^2 S_\phi^\phi + \frac{3B^2 r^2 \sin^2 \theta}{4N^2} \partial \omega \partial \omega - \partial v \partial v. \quad (3.54)$$

onde,

$$v := \ln N, \quad (3.55)$$

$$\Delta_2 := \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (3.56)$$

$$\Delta_3 := \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (3.57)$$

$$\tilde{\Delta}_3 := \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (3.58)$$

O sistema de equações (3.51) - (3.54) precisa de condições de contorno. Estas podem ser encontradas comparando a métrica (3.21) com a métrica de Minkowsky,

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.59)$$

quando  $r \mapsto \infty$ , o que leva a

$$N(r \mapsto \infty) \mapsto 1, \quad (3.60)$$

$$A(r \mapsto \infty) \mapsto 1, \quad (3.61)$$

$$B(r \mapsto \infty) \mapsto 1, \quad (3.62)$$

$$\omega(r \mapsto \infty) \mapsto 0. \quad (3.63)$$

Este sistema de equações pode ser resolvido pelo método SCF, explicado no apêndice A. Uma vez que tenhamos os valores de  $N, A, B$  e  $\omega$  podemos reconstruir todos os observáveis da estrela em questão. Entretanto ainda precisamos inserir no sistema a equação proveniente da conservação do tensor momento-energia, como será visto no próximo capítulo.

## 4 Estrelas com simetria axial e seus observáveis

A solução da versão 3+1 da equação de Einstein, o sistema composto por (3.51) - (3.54), depende do tipo de tensor energia momento utilizado. Este da origem aos termos  $E$ ,  $p_\phi$ ,  $S^r_r$ ,  $S^\theta_\theta$ ,  $S^\phi_\phi$  e  $S$  do lado direito deste sistema de equações. A conexão entre  $T_{\mu\nu}$  e esses termos acontece por meio de

$$E = T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu, \quad (4.1)$$

$$p_\alpha = -T_{\mu\nu} n^\mu \gamma^\nu_\alpha, \quad (4.2)$$

$$S_{\alpha\beta} = T_{\mu\nu} \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta, \quad (4.3)$$

como ja foi visto anteriormente.

### 4.1 Fluido perfeito

No caso do fluido perfeito o tensor energia-momento tem o formato (2.8). Para garantir que o espaço seja circular o **teorema de Papapetrou** (PAPAPETROU, 1966) e (WALD, 2010) impõe que a quadri-velocidade do fluido perfeito deve ser

$$\vec{u} = u^t (\xi + \Omega \chi), \quad (4.4)$$

com

$$\Omega = \frac{u^\phi}{u^t} = \frac{d\phi}{dt}. \quad (4.5)$$

Usando a definição de  $\xi$  em (3.7) e (2.77) temos

$$\vec{u} = \Gamma (\vec{n} + \vec{U}), \quad (4.6)$$

com

$$\Gamma = Nu^t, \quad (4.7)$$

$$\vec{U} = \frac{\Omega - \omega}{N} \vec{\chi}. \quad (4.8)$$

$\Gamma$  é chamado de fator de Lorentz e o vetor  $\vec{U}$  é a velocidade do fluido.

Podemos calcular o módulo de  $\vec{U}$  imediatamente, pois sabemos que  $\vec{\chi} \cdot \vec{\chi} = B^2 r^2 \sin^2 \theta$ . Então

$$U = \frac{B}{N} (\Omega - \omega) r \sin \theta. \quad (4.9)$$

O fator de Lorentz vem imediatamente

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - U^2}}. \quad (4.10)$$

Usando disto, podemos calcular para o fluido perfeito os termos

$$E = \Gamma^2 (\varepsilon + p) - p, \quad (4.11)$$

$$p_\phi = B (E + p) U r \sin \theta, \quad (4.12)$$

$$S^r_r = p, \quad (4.13)$$

$$S^\theta_\theta = p, \quad (4.14)$$

$$S^\phi_\phi = p + (E + p) U^2, \quad (4.15)$$

$$S = 3p + (E + p) U^2. \quad (4.16)$$

No contexto de objetos astrofísicos compactos podemos considerar a matéria a temperatura zero. Nesta aproximação a equação de estado é uniparamétrica, e pode ser expressa como função da densidade de número bariônico

$$\varepsilon = \varepsilon(n_b), \quad (4.17)$$

$$p = p(n_b). \quad (4.18)$$

Podemos agora expandir a equação de conservação de momento energia

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (4.19)$$

juntamente a equação de conservação de número bariônico

$$\nabla_\mu (n_b u^\mu) = 0, \quad (4.20)$$

chegando na equação de Euler relativística projetada em  $\Sigma_t$

$$(\varepsilon + p) u^\mu \nabla_\mu u_\nu + (\delta^\mu_\nu + n^\mu n_\nu) \nabla_\mu p = 0. \quad (4.21)$$

Utilizando da definição de entalpia

$$h = \frac{\varepsilon + p}{n_b}, \quad (4.22)$$

podemos escrever a equação (4.21) como

$$u^\mu \nabla_\mu (hu_\nu) + \nabla_\nu h = 0, \quad (4.23)$$

ou em outro formato

$$u^\mu [\nabla_\mu (hu_\nu) - \nabla_\nu (hu_\mu)] = 0. \quad (4.24)$$

Com as simetrias do espaço em questão podemos expandir esta equação em

$$\partial_\nu [h(u_t + \Omega u_\phi)] - hu_\phi \partial_\nu \Omega = 0. \quad (4.25)$$

Definindo agora o vetor

$$\vec{\mathbf{k}} = \vec{\xi} + \Omega \vec{\chi}. \quad (4.26)$$

Ou seja

$$\vec{\mathbf{u}} = u^t \vec{\mathbf{k}}. \quad (4.27)$$

Podemos reescrever a equação (4.25) como

$$\vec{\nabla} (h\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{k}}) - h\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\chi} \vec{\nabla} \Omega = 0. \quad (4.28)$$

E para finalizar, dividimos por  $h\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{k}}$

$$\nabla \ln (-h\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{k}}) - \frac{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\chi}}{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{k}}} \nabla \Omega = 0. \quad (4.29)$$

Somos levados assim a dois casos, quando  $\nabla \Omega = 0$  temos  $\Omega = \text{constante}$ , ou seja, uma rotação rígida. Já quando  $\Omega \neq 0$  temos a chamada rotação diferencial.

#### • Rotação rígida:

Neste caso teremos a equação de Euler relativística como

$$\nabla \ln (-h\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{k}}) = 0, \quad (4.30)$$

que implica em

$$-h\vec{u} \cdot \vec{k} = \text{constante.} \quad (4.31)$$

Da definição de  $\vec{k}$

$$\vec{u} \cdot \vec{k} = -\frac{N}{\Gamma}, \quad (4.32)$$

ou seja

$$H(r, \theta) + v(r, \theta) - \ln \Gamma(r, \theta) = \text{constante}, \quad (4.33)$$

onde  $H = \ln(h)$  e  $v = \ln(N)$ .

A constante no lado direito da equação (4.33) pode ser determinada calculando o lado esquerdo da mesma equação no centro da estrela, obtendo-se assim

$$H(r, \theta) + v(r, \theta) - \ln \Gamma(r, \theta) = H_0 + v_0. \quad (4.34)$$

Onde foi-se feito  $H(r=0) = H_0$ ,  $v(r=0) = v_0$  e  $\Gamma(r=0) = 1$ .

#### • Rotação diferencial:

Aqui a análise é parecida com o da rotação diferencial. A equação (4.29) pode ser escrita utilizando os termos da rotação rígida

$$\nabla (H + v - \ln \Gamma) + F(\Omega') d\Omega' = 0, \quad (4.35)$$

sendo

$$F(\Omega) = -\frac{\vec{u} \cdot \vec{\chi}}{\vec{u} \cdot \vec{k}}. \quad (4.36)$$

Integrando a equação temos

$$H(r, \theta) + v(r, \theta) - \ln \Gamma + \int_0^{\Omega(r, \theta)} F(\Omega') d\Omega' = H_0 + v_0. \quad (4.37)$$

Assim, é necessário fornecer de antemão a função  $F \equiv F(\Omega)$  que determina a distribuição da rotação na estrela. Este tipo de rotação é chamada de rotação diferencial. E veio sendo estudada classicamente pela lei de rotação

$$F(\Omega) = \alpha^2 (\Omega_c - \Omega), \quad (4.38)$$

cujo parâmetro  $\alpha$  é escolhido de acordo com a circunstancia que se pretende investigar.



A lei de rotação (4.38) fornece um perfil de velocidades de rotação monotonicamente decrescente, o que é esperado para qualquer estrela que tenha um tempo de vida considerável, devido aos atritos internos.

## 4.2 Campos eletromagnéticos

A definição do tensor momento-energia dos campos eletromagnéticos (2.15) depende da definição inicial do tensor eletromagnético

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (4.39)$$

Onde o quadrivetor potencial  $A^\mu = (\Phi, A^i)$  funciona como gerador do campo elétrico e magnético. Podemos determinar então

$$E_\nu = F_{\mu\nu} n^\mu, \quad (4.40)$$

$$B_\nu = -\frac{1}{2} e_{\nu\mu\alpha\beta} n^\mu F^{\alpha\beta}, \quad (4.41)$$

com  $e_{\nu\mu\alpha\beta} = \sqrt{-g} \varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta}$ ,  $\varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta}$  sendo o tensor de Levi-Civita de quarta ordem e  $g$  o determinante da métrica do espaço em questão.

Nos espaços estacionários e axialmente simétricos a quadricorrente  $j^\mu$  e o quadripotencial  $A^\mu$  tem o formato

$$j^\mu = (j^t, 0, 0, j^\phi), \quad (4.42)$$

$$A^\mu = (A^t, 0, 0, A^\phi). \quad (4.43)$$

Isto juntamente ao fato de que nestes espaços os termos com  $\partial_t$  e  $\partial_\phi$  zeram, torna possível determinar os campos elétricos e magnéticos como

$$E_\nu = \left( 0, \frac{1}{AN} [\partial_r A_t + \omega \partial_r A_\phi], \frac{1}{AN} [\partial_\theta A_t + \omega \partial_\theta A_\phi], 0 \right), \quad (4.44)$$

$$B_\nu = \left( 0, \frac{1}{A^2 B r^2 \sin \theta} \partial_\theta A_\phi, -\frac{1}{A^2 B r^2} \partial_r A_\phi, 0 \right). \quad (4.45)$$

As equações de Maxwell em forma covariante são escritas como

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu, \quad (4.46)$$

e podem ser expressas para  $A_t$  e  $A_\phi$  por

$$\begin{aligned} \Delta_3 A_t = & -\mu_0 A^2 \left( g_{tt} j^t + g_{t\phi} j^\phi \right) - \frac{B^2}{N^2} \omega r^2 \sin^2 \theta \partial A_t \partial \omega \\ & - \left( 1 + \frac{B^2}{N^2} r^2 \sin^2 \theta \omega^2 \right) \partial_\phi \partial \omega - (\partial A_t + 2\omega \partial A_\phi) \partial (\ln B - \nu) \\ & - 2 \frac{\omega}{r} \left( \partial_r A_\phi + \frac{1}{r \tan \theta} \partial_\theta A_\phi \right), \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_3 \left[ \frac{A_\phi}{r \sin \theta} \right] = & -\mu_0 A^2 B^2 \left( j^\phi - \omega j^t \right) r \sin \theta + \frac{B^2}{N^2} r \sin \theta \partial \omega (\partial A_t + \omega \partial A_\phi) \\ & + \frac{1}{r \sin \theta} \partial A_\phi \partial (\ln B - \nu). \end{aligned} \quad (4.48)$$

As quantidades associadas ao tensor momento-energia devem ser recalculadas, novamente acrescentando também a seu componente eletromagnético

$$\begin{aligned} E^{EM} &= T_{\mu\nu}^{EM} n^\mu n^\nu, \\ p_\alpha^{EM} &= -T_{\mu\nu}^{EM} n^\mu \gamma^\nu_\alpha, \\ S_{\alpha\beta}^{EM} &= T_{\mu\nu}^{EM} \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta. \end{aligned}$$

Que tem por definição (2.15), resultando em

$$E^{EM} = \frac{1}{8\pi} (E_i E^i + B_i B^i), \quad (4.49)$$

$$p_\phi^{EM} = \frac{\sqrt{\gamma}}{4\pi} (E^r B^\theta - E^\theta B^r), \quad (4.50)$$

$$S^{EM}_r = \frac{1}{8\pi} (E_\theta E^\theta - E_r E^r + B_\theta B^\theta - B_r B^r), \quad (4.51)$$

$$S^{EM}_\theta = -\frac{1}{8\pi} (E_\theta E^\theta - E_r E^r + B_\theta B^\theta - B_r B^r), \quad (4.52)$$

$$S^{EM}_\phi = \frac{1}{8\pi} (E_i E^i + B_i B^i). \quad (4.53)$$

Utilizando as equações do campo elétrico (4.44) e magnético (4.45)

estas se convertem em

$$E^{EM} = \frac{1 + U^2}{8\pi A^2 B^2 r^2 \sin^2 \theta} (\partial A_\phi)^2, \quad (4.54)$$

$$p_\phi^{EM} = \frac{B}{4\pi A^2 B r \sin \theta} U (\partial A_\phi)^2, \quad (4.55)$$

$$S^{EMr}_r = \frac{1}{8\pi A^2 B^2 r^2 \sin^2 \theta} \left[ \left( \frac{\partial A_\phi}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right)^2 \right], \quad (4.56)$$

$$S^{EM\theta}_\theta = -\frac{1}{8\pi A^2 B^2 r^2 \sin^2 \theta} \left[ \left( \frac{\partial A_\phi}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right)^2 \right], \quad (4.57)$$

$$S^{EM\phi}_\phi = \frac{1}{8\pi A^2 B^2 r^2 \sin^2 \theta} (\partial A_\phi)^2. \quad (4.58)$$

A equação de conservação  $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$  para o tensor momento-energia (2.15) pode ser trabalhada para a parte interna da estrela. Supondo que a condutividade elétrica seja infinita e assumindo que no referencial do fluido o campo elétrico medido seja nulo temos a condição

$$\frac{\partial A_t}{\partial x^i} = -\Omega \frac{\partial A_\phi}{\partial x^i}, \quad (4.59)$$

que pode ser integrada mediante a duas possibilidades, sendo  $\Omega = \text{constante}$  ou  $A_\phi \equiv A_\phi(\Omega)$ . A segunda implica em uma relação diferencial de  $A_\phi$ . Então apenas será utilizado da rotação rígida, e neste caso

$$A_t = -\Omega A_\phi + Q, \quad (4.60)$$

onde  $Q$  determina a carga total da estrela. Utilizar disto para inserir a força de Lorentz,  $f_i = F_{i\rho} j^\rho$ , na equação de Euler relativística (4.21), chegando em

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (H + v - \ln \Gamma) - \frac{1}{e + p} \left( j^\phi - \Omega j^t \right) \frac{\partial A_\phi}{\partial x^i} = 0. \quad (4.61)$$

Integrando esta equação temos então

$$H(r, \theta) + v(r, \theta) - \ln \Gamma(r, \theta) + M(r, \theta) = \text{constante}. \quad (4.62)$$

com

$$M(r, \theta) = - \int_0^{A_\phi(r, \theta)} f(x) dx. \quad (4.63)$$

Assim como na rotação diferencial precisamos de antemão da função  $f$  que relaciona  $A_\phi(r, \theta)$  com  $j^t$  e  $j^\phi$  através de

$$j^\phi - \Omega j^t = (\varepsilon + p)f(A_\phi). \quad (4.64)$$

As opções mais viáveis e conhecidas para  $f(A_\phi)$  são

$$f(x) = \alpha, \quad (4.65)$$

$$f(x) = \frac{\alpha}{1+x}, \quad (4.66)$$

$$f(x) = \alpha \left( 1 - \frac{1}{(\beta x)^2 + 1} \right). \quad (4.67)$$

### 4.3 Observáveis físicos

A conservação da quadricorrente bariônica

$$\nabla_\mu j_b^\mu = 0, \quad (4.68)$$

cuja definição é

$$\vec{j}_b = n_b \vec{u}, \quad (4.69)$$

pode ser integrada para fornecer o número total de bárions medido pelo observador Euleriano

$$\mathcal{N} = - \int_{\Sigma_t} \vec{j}_b \cdot \vec{n} \sqrt{\gamma} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (4.70)$$

Este possui velocidade angular nula, então  $\vec{u} = \Gamma \vec{n}$ , o que significa que  $\vec{j}_b \cdot \vec{n} = -\Gamma n_b$ , implicando em

$$\mathcal{N} = \int_{\Sigma_t} \Gamma n_b A^2 B r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi. \quad (4.71)$$

A massa bariônica é calculada então por

$$M_b = m_b \mathcal{N}. \quad (4.72)$$

Esta é a massa que a estrela teria se todas as suas partículas fossem separadas infinitamente, ou seja, a energia de ligação sendo nula.

Para calcularmos a massa total medida pelo observador Euleriano, a massa gravitacional pode ser obtida por

$$M_g = 2 \int_{\Sigma_t} \left[ T_{\mu\nu} n^\mu \xi^\nu - \frac{1}{2} T n^\mu \xi_\mu \right] \sqrt{\gamma} dr d\theta d\phi. \quad (4.73)$$

Sabendo que  $\xi^\mu = \Gamma n^\mu + \beta^\mu$ ,

$$T_{\mu\nu} n^\mu \xi^\nu = \Gamma T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu + T_{\mu\nu} n^\mu \beta^\nu, \quad (4.74)$$

$$T n^\mu \xi_\mu = -\Gamma T. \quad (4.75)$$

Usando das definições (2.66), (2.67) e (2.70)

$$M_g = \int_{\Sigma_t} [N(E + S) - 2p_i \beta^i] \sqrt{\gamma} dr d\theta d\phi. \quad (4.76)$$

Para as métricas axialmente simétricas  $\sqrt{\gamma} = A^2 B r^2 \sin \theta$  e  $\beta^\mu = (0, 0, 0, -\omega)$

$$M_g = \int_{\Sigma_t} [N(E + S) - 2\omega p_\phi] A^2 B r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi. \quad (4.77)$$

Assim, por exemplo, para o caso do fluido perfeito usamos (4.12)

$$M_g = \int_{\Sigma_t} [N(E + S) - 2\omega B(E + p) U r \sin \theta] A^2 B r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi, \quad (4.78)$$

e para o fluido perfeito junto aos campos elétricos e magnéticos

$$M_g = \int_{\Sigma_t} [N(E + S) - 2\omega(p_\phi^{FP} + p_\phi^{EM})] A^2 B r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi, \quad (4.79)$$

cujas expressões já são conhecidas em (4.12) e (4.55).

Analogamente o momento angular pode ser definido por

$$J = \int_{\Sigma_t} \vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\chi} \sqrt{\gamma} dr d\theta d\phi, \quad (4.80)$$

ou seja

$$J = \int_{\Sigma_t} p_\phi A^2 B r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi. \quad (4.81)$$

Então, para o fluido perfeito

$$J = \int_{\Sigma_t} (E + p) U A^2 B^2 r^3 \sin^2 \theta dr d\theta d\phi, \quad (4.82)$$

e para o fluido perfeito com campos elétricos e magnéticos

$$J = \int_{\Sigma_t} A^2 [B^2 (E + p) U r \sin \theta + B p_\phi^{EM}] r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi. \quad (4.83)$$

#### 4.4 Teoremas do Virial

A equação (3.54) revela uma importante informação quando vemos que a função de Green do operador  $\Delta_2$  é

$$G(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{r}}') = \frac{\ln |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}{2\pi}, \quad (4.84)$$

ou seja, a quantidade  $\zeta = \ln A + v$  vem da integral

$$\zeta(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{r'=0}^{r'=\infty} \int_0^{2\pi} \sigma_\zeta(r', \theta') \ln |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'| r' dr' d\theta, \quad (4.85)$$

sendo

$$\sigma_\zeta(r, \theta) = 8\pi A^2 S^\phi_\phi + \frac{3B^2 r^2 \sin^2 \theta}{4N^2} \partial\omega\partial\omega - \partial v\partial v. \quad (4.86)$$

Para distâncias muito grandes,  $r \mapsto \infty$  implica em

$$\ln |\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'| \simeq \ln |r|, \quad (4.87)$$

então, para este caso

$$\zeta(r \mapsto \infty, \theta) = \frac{\ln |r|}{2\pi} \int_{r'=0}^{r'=\infty} \int_0^{2\pi} \sigma_\zeta(r', \theta') r' dr' d\theta. \quad (4.88)$$

Ou seja, o comportamento assintótico

$$\zeta(r \mapsto \infty) \propto \ln r, \quad (4.89)$$

só pode ser impedido pela condição

$$\int_{r'=0}^{r'=\infty} \int_0^{2\pi} \left[ 8\pi A^2 S^\phi_\phi + \frac{3B^2 r^2 \sin^2 \theta}{4N^2} \partial\omega\partial\omega - \partial v\partial v \right] r' dr' d\theta = 0. \quad (4.90)$$

A equação (4.90) é o teorema do virial e é conhecido como GRV2<sup>1</sup> por conta de ser calculada uma integral bidimensional. Essa nomenclatura fica mais clara quando se traz ao conhecimento que também existe o teorema do virial GR3, que para nossos parâmetros tem a expressão

$$\int_{\Sigma_t} \left\{ 4\pi S - \frac{1}{A^2} \left( \partial v\partial v - \frac{1}{2AB} \partial A\partial B \right) + \frac{1}{2r} \left( \frac{1}{A^2} - \frac{1}{B^2} \right) \left[ \frac{1}{A} \left( \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r \tan \theta} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{2B} \left( \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{r \tan \theta} \frac{\partial B}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{3B^2 \sin^2 \theta}{8r^2 A^2 N^2} \partial\omega\partial\omega \right\} A^2 B r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = 0. \quad (4.91)$$

<sup>1</sup> Do inglês: General Relativity Virial 2

## 5 Configurações magnetizadas

As equações diferenciais (3.51)-(3.54), para os termos da métrica, e (4.47) - (4.48) para os potenciais eletromagnéticos  $A_t$  e  $A_\phi$  podem ser resolvidas acopladamente através do método numérico citado no apêndice A. A infraestrutura de software utilizada para isto vem do código aberto LORENE (<https://lorene.obspm.fr/>).

Neste capítulo será apresentada os perfis de equilíbrio de alguns modelos de estrelas de nêutrons. A começar com as configurações não magnetizadas e as diferenças entre o resultado das equações TOV e das equações gerais de equilíbrio hidroestático obtidas nos capítulos anteriores. Em seguida será apresentada alguma fenomenologia associada a distribuição magnética que se manifesta na estrela quando temos valores apreciáveis da constante de acoplamento de corrente. Também são feitas algumas análises sobre constâncias no comportamento da distribuição magnética em estrelas de nêutrons.

### 5.1 Considerações sobre configurações esféricas em 3+1

Veamos agora as diferenças em se calcular configurações esféricas segundo os dois formalismos apresentados. Neste caso, para as equações do formalismo 3+1 faremos rotação e campos magnéticos nulos, ou seja,  $\Omega = 0$ ,  $A_t = 0$  e  $A_\phi = 0$ .

No caso esféricamente simétrico também se faz  $A(r) = B(r)$ , pois analisando o elemento de métrica (3.21) vemos que essa imposição é importante para que não exista direção preferencial no sistema de coordenadas.

Temos então

$$U = -\frac{Ar \sin \theta}{N} \omega, \quad (5.1)$$

$$\Gamma = 1 \quad (5.2)$$

$$p_\phi = -\frac{A^2 r^2 \sin^2 \theta (E + p)}{N} \omega. \quad (5.3)$$

Utilizando destes na equação (3.52) somos levados a uma equação diferencial linear em  $\omega$  dos dois lados, que acata a solução

$$\omega = 0. \quad (5.4)$$

As equações (3.51), (3.54) e (3.53) agora tomam a forma simplificada

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dv}{dr} = 4\pi A^2 (\varepsilon + 3p) - \frac{dv}{dr} \frac{d}{dr} (\ln A), \quad (5.5)$$

$$\frac{d^2 (NA)}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d(NA)}{dr} = 16\pi NA^2 p, \quad (5.6)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} (\ln A + v) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\ln A + v) = 8\pi A^2 p - \left( \frac{dv}{dr} \right)^2, \quad (5.7)$$

que são bastante diferentes das equações TOV

$$\frac{dv}{d\bar{r}} = \frac{4\pi \bar{r}^3 p + m}{\bar{r}^2 (1 - \frac{2m}{\bar{r}})}, \quad (5.8)$$

$$\frac{dp}{d\bar{r}} = -(p + \varepsilon) \frac{dv}{d\bar{r}}, \quad (5.9)$$

$$\frac{dm}{d\bar{r}} = 4\pi \bar{r}^2 \varepsilon. \quad (5.10)$$

A razão desta grande discrepância está representada na notação utilizada no segundo conjunto de equações. O raio coordenada associado a métrica axial não é o mesmo da métrica esfericamente simétrica, chamado raio circunferencial, isto é, estamos comparando

$$ds^2 = -N(r)dt^2 + A^2(r)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (5.11)$$

com

$$ds^2 = -N(\bar{r})^2 dt^2 + \frac{d\bar{r}^2}{(1 - \frac{2m}{\bar{r}})} + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (5.12)$$



Quando tomamos a área do círculo nas duas métricas temos

$$\mathcal{A} = 4\pi A(r)r^2, \quad (5.13)$$

$$\mathcal{A} = 4\pi r^2, \quad (5.14)$$

o que delimita uma relação entre os raios coordenada e circunferencial.

### 5.1.1 Elementos de métrica e entalpia

Nesta seção falaremos acerca das propriedades dos elementos da métrica e como a entalpia responde a eles, fazendo a conexão entre a geometria do espaço e a distribuição material. Para isso é necessário utilizar de um modelo de equação de estado uniparamétrico,  $P(\varepsilon)$ , em específico. As tendências debatidas aqui entretanto são gerais e testadas em outros modelos de equação de estado.

Da equação de Bernouli (4.33) vemos que para o caso estático temos a relação simples

$$H(r) + v(r) = H(0) + v(0) \equiv C. \quad (5.15)$$

Isto significa que a entalpia é determinada pela diferença entre  $v(r)$  e  $C$ , não tendo relevância o formato de  $A(r)$ . Então, como a entalpia é uma função decrescente da densidade de matéria  $\varepsilon$  precisamos que  $H(r)$  comece de um valor positivo e decaia até o valor de entalpia associado a ausência de matéria (em geral  $H = 0$ ) para determinado raio  $R^*$ , o raio da superfície da estrela. Também sabemos da experiência com as equações TOV que o perfil de densidades é monotonamente decrescente nas configurações esféricas, o que implica que  $v(r)$  deverá ser monotonamente crescente. Somando o fato de que no infinito  $v \mapsto 0$  chegamos a conclusão de que  $v(0) < 0$ .

Na figura (8)(a) vemos uma ilustração deste comportamento para a equação de estado GLENDNH3 (GLENDENNING, 1985) para uma estrela de densidade central  $6 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$ . Evidentemente para outro valor de densidade central teríamos outro valor para a constante  $C$ . Conforme mostrado em (4.61), tomar derivadas das componentes da equação

generalizada de Bernouli invoca os análogos as forças em sistemas não relativísticos, então  $\partial h/\partial r$  representa a força associada a pressão termodinâmica e  $\partial v/\partial r$  representa a força gravitacional. Vemos então, a exemplo da figura 8(b) que ambas as forças presentes nesse sistema tem mesma magnitude e sentidos opostos, o que define um sistema em equilíbrio.

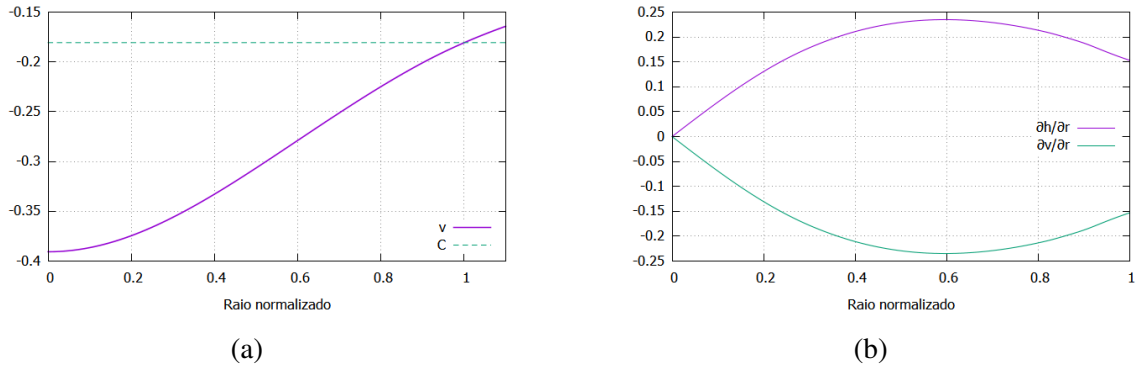


Figura 8 – Quantidades associadas a equação de Bernouli em (a). Em (b) são apresentadas as derivadas radiais dos termos da equação de Bernouli como a "forças" termodinâmica e gravitacional.

Ao se tomar valores diferentes para a pressão/entalpia central obtemos comportamentos já previstos pela TOV. Na figura 9 vemos que para densidades centrais maiores os valores de  $v(r)$  se tornam cada vez mais negativos e os de  $A(r)$  cada vez maiores, significando uma maior curvatura do espaço.

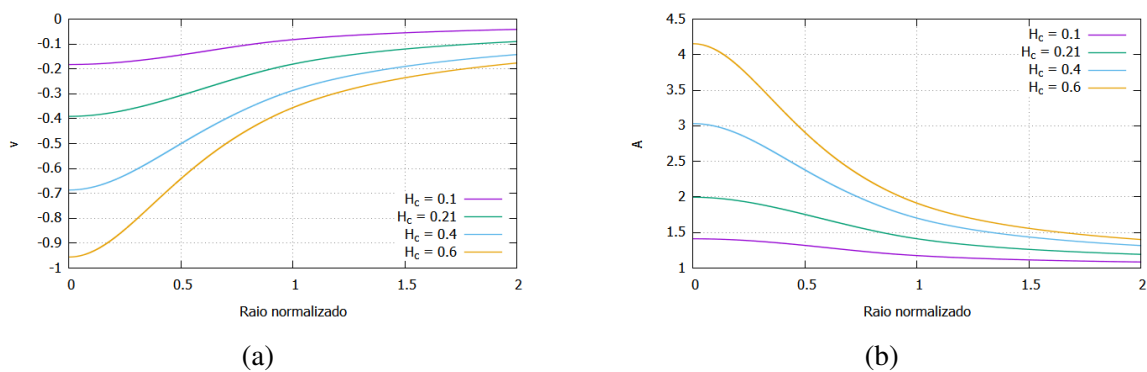


Figura 9 – Exemplos elementos de métrica para modelos esféricos de estrelas de nêutrons para diferentes entalpias centrais.

## 5.2 Configurações com campos magnéticos pouco intensos

Tomando agora a forma mais comumente usada para a corrente magnética

$$f(x) = \alpha, \quad (5.16)$$

$$M(x) = -\alpha x, \quad (5.17)$$

$$j^\phi - \Omega j^t = \alpha(\varepsilon + p). \quad (5.18)$$

Ficamos com a ambiguidade inicial sobre o valor da constante de amplitude de corrente  $\alpha$ . Toda solução agora deverá prover de início o valor central de entalpia  $H_c$  e o valor de  $\alpha$ . Como estamos nos retendo a configurações unicamente magnetizadas então  $\Omega = 0$ . O vínculo (4.60), para o caso estático e descarregado leva a

$$A_t = 0, \quad (5.19)$$

$$j_t = 0. \quad (5.20)$$

O que implica imediatamente na nulidade do campo elétrico e na ausência de cargas induzidas, segundo a equação (4.44).

### 5.2.1 Considerações iniciais

Uma vez definido as condições  $H_c$  e  $\alpha$  que determinam a estrela a ser calculada obtemos através da integração das equações (3.51) - (3.54) e (4.48) as funções métricas e os observáveis. No caso de campos magnéticos pouco intensos os observáveis eletromagnéticos se manifestam sem ainda afetar substancialmente a configuração estelar esférica.

A figura 10 mostra as propriedades magnéticas de uma estrela calculada para  $\alpha = 10^{11} A/m^2$  e  $H_c = 0.21$ . Em 10(a) é apresentado um exemplo da geometria da configuração magnetizada, que corresponde ao caso relativístico do problema da esfera carregada com momento angular em eletromagnetismo. Apesar deste tipo de apresentação ser artisticamente muito atraente, é mais quantitativamente instrutivo utilizar da curva de nível de  $A_\phi$  para  $\theta = \pi/2$  representada na figura 10(b). O máximo da curva do perfil de  $A_\phi(r, \pi/2)$  é associado com o local onde a componente  $\theta$  do campo

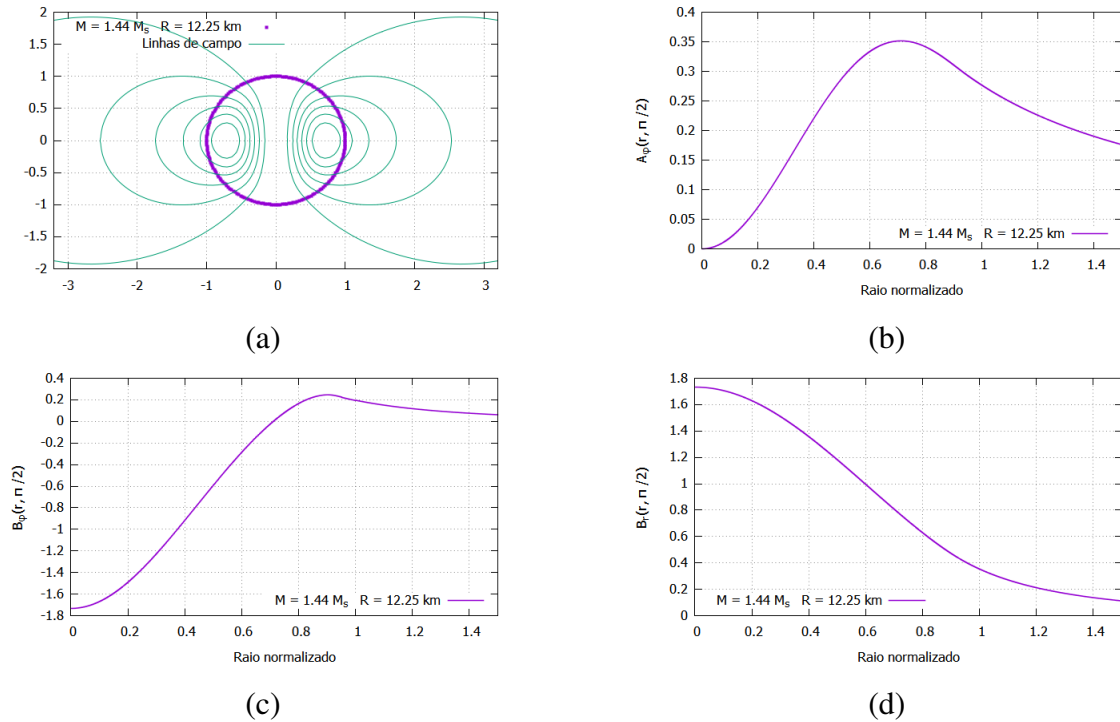


Figura 10 – Observáveis associados a estrelas calculadas para a equação de estado glendnh3 REFERENCIA em três casos diferentes: (a) e (b) representam as funções métricas  $N(r)$  e  $A(r)$ , (c) mostra o perfil de densidades e (d) e distribuição de entalpias.

magnético inverte seu sinal, ou seja, é a raiz da curva  $B_\theta(r, \theta)$ . Por fim, a figura 10(d) mostra a componente radial do campo magnético. Juntos,  $B_r$  e  $B_\theta$  mostram a queda de intensidade da interação magnética conforme tomamos distancia da estrela.

Conforme citado anteriormente, o campo magnético produzido pela configuração anterior é incapaz de produzir deformidades consideráveis nas Estrelas de Nêutrons, seria necessário aumentar sua intensidade em algumas ordens de grandeza para que a proporção entre o raio polar e o equatorial fosse menor que 0.99.

Isto acontece porque a pressão magnética ainda é pouco desenvolvida em

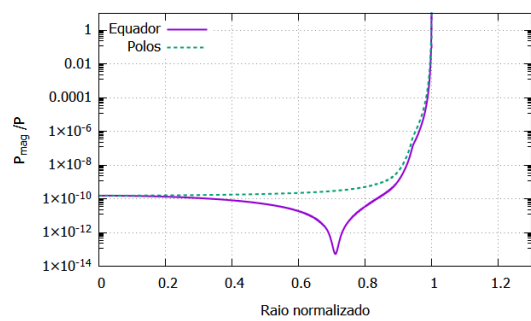


Figura 11 – Pressão magnética

comparação com a pressão termodinâmica, ou seja

$$\frac{P_{mag}}{P} = \frac{B^2}{2\mu_0 P} \ll 1 \quad (5.21)$$

em quase todos os locais da estrela. Na figura 11 vemos pelo perfil de proporção entre a pressão magnética e termodinâmica que esta só se aproxima da unidade quando estamos praticamente na superfície, mais especificamente em 0.999 do raio estelar. Na mesma figura é perceptível que a diferença de intensidade da pressão magnética nas curvas de nível equatorial e polar. Esta diferença de intensidades é parte da interpretação das razões pelas quais a estrela eventualmente (conforme a intensidade do campo magnético aumentar) se deforma a em uma configuração axialmente simétrica não esférica. Por fim, também associa-se a queda de intensidade da pressão magnética em  $\approx 0.7$  a queda de intensidade na componente  $B_\theta$  do campo magnético no mesmo local, como mostrado anteriormente na figura 10(c).

### 5.2.2 Novamente, elementos da métrica e entalpia

Conforme a análise anterior dos elementos da métrica e entalpia, vejamos novamente que a equação de Bernouli (4.33) para o caso estático magnetizado é dada por

$$H(r, \theta) + v(r, \theta) + M(r, \theta) = C. \quad (5.22)$$

Então, a distribuição material dentro da estrela de nêutrons, em forma de entalpia, é determinada por

$$H(r, \theta) = C - v(r, \theta) - M(r, \theta).$$

Na figura 12(a) vemos para o plano equatorial da estrela o potencial magnético  $M(r)$  e os já comentados  $v(r)$  e  $C$ . Dada que a distribuição típica de  $A_\phi(r)$  no plano equatorial tem o formato apresentado na figura 10(b), com valor  $A_\phi = 0$  no centro da estrela e um pico ainda na região interna, então  $M(r)$  começa de zero e tem um mínimo ainda dentro da estrela. Como anteriormente, a diferença entre  $C$  e a curva que é a composição  $v(r) + M(r)$

retorna o valor da entalpia, assim como em (5.2.2). Na mesma figura vemos que a curva  $v(r) + M(r)$  tem sua inclinação atenuada, em comparação com o caso não magnetizado. Isto implica que a estrela possui valores de entalpia mais altos do que o caso não magnetizado, e por consequência suporta mais massa. Como no eixo polar  $A_\phi = 0$ , temos então que os efei-

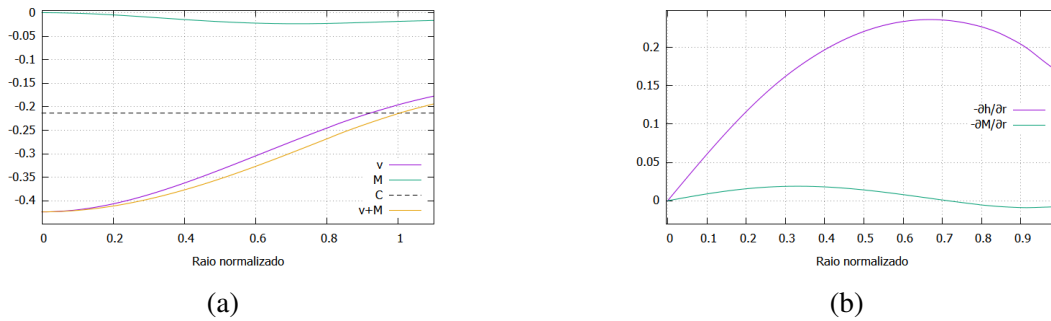


Figura 12 – (a) Potenciais na equação de Bernoulli para o caso magnetizado. (b) Exemplo de força termodinâmica e força magnética (força de Lorentz).

tos do potencial magnético  $M(r)$  são nulos neste eixo, ou seja, a entalpia nesta região é definida apenas por  $v(r)$ . Como consequência disto o perfil de entalpias é mais leve e o raio não é expandido nos polos como é no equador, o que dá origem ao achatamento da estrela. Além disto, temos na figura 12(b) o perfil das forças de pressão termodinâmica,  $\partial h/\partial r$  e força de Lorentz,  $\partial M/\partial r$ . A diferença de intensidade entre as duas é notória, e acontece pois estamos nos tratando de estrelas levemente magnetizadas. Evidentemente a força gravitacional,  $\partial v/\partial r$ , também está presente no sistema, embora não esteja na figura por motivos de ilustração. É interessante observar na figura 12(b) que ambas a força gravitacional e termodinâmica tem sempre o mesmo sentido, respectivamente para dentro e para fora, enquanto que a força de Lorentz inverte o seu sentido após o pico em  $A_\theta$ . A razão disto está ligada a mudança de sinal em  $B_\theta$  nestas duas regiões, como pode ser visto em 10(c).

Nos sistemas com rotação temos um limite bem definido para o valor máximo de frequência de rotação das estrelas compactas, chamado de frequência de Kepler. A frequência de Kepler é bem definida pois o potencial associado às rotações, o potencial centrífugo, é sempre decrescente em

$r$ , induzindo uma força que sempre aponta para fora da estrela. Da equação (4.34) sabemos que

$$H(r) = C - v(r) + \ln\Gamma(r). \quad (5.23)$$

Como  $\ln\Gamma$  é uma função monotonamente crescente de  $r$  o limite máximo de  $\Omega$  em uma estrela de raio  $R$  sempre existe e é igual ao valor para qual

$$\ln\Gamma(R) - v(R) = -C. \quad (5.24)$$

Para o caso estático magnetizado isto não acontece, pois o potencial magnético é crescente ao se aproximar da superfície estelar.

### 5.2.3 Deformidades

Dada uma estrela definida pela densidade/entalpia central calculamos a configuração esférica diretamente pela TOV. Agora, veremos como dada configuração fixa de entalpia se deforma em resposta a valores crescentes da constante de amplitude de corrente,  $\alpha$ . A tabela 1 contém os dados de uma estrela de densidade central  $\approx 6 \times 10^{14} g/cm^3$  e massa  $\approx 1.449M_{\odot}$ , a estrela canônica (aproximadamente) para a equação de estado que vem sido usada no debate.

CFA [ $10^{11}A/m^2$ ]	R(km)	m [ $M_{\odot}$ ]	$r_p/r_{eq}$	$B_c[GT]$	$B_{\theta}(R)[GT]$
1	14.1109	1.4496	1	1.7643	0.359433
100.9	14.1109	1.4496	1	178.018	36.2668
200.8	14.1109	1.44961	1	354.273	72.1739
400.6	14.111	1.44962	1	706.794	143.986
600.4	14.1112	1.44965	1	1059.34	215.794
800.2	14.1114	1.44969	1	1411.93	287.595
1000	14.1116	1.44973	1	1764.57	359.388
1900	14.1134	1.45008	0.999764	3354.02	682.611
2800	14.1164	1.45065	0.998841	4945.97	1005.42
3700	14.1204	1.45144	0.997565	6541.63	1327.61
4600	14.1256	1.45245	0.995934	8142.22	1649.03
5500	14.132	1.45369	0.993948	9749.01	1969.5
6400	14.1395	1.45517	0.991607	11363.2	2288.75
7300	14.1481	1.45689	0.988909	12986	2606.52
8200	14.1582	1.45885	0.985845	14619.8	2924.87
9100	14.1741	1.46071	0.982375	16270.6	3249.28
10000	14.181	1.46354	0.978651	17922.8	3552.08
11000	14.1961	1.46663	0.974031	19781.7	3898
12000	14.2125	1.47008	0.968966	21660.3	4241.9
13000	14.2307	1.47391	0.963437	23562.7	4587.18
14000	14.2526	1.47805	0.957381	25497.4	4942.35
15000	14.2712	1.48275	0.951073	27446.4	5273.71
16000	14.2939	1.48787	0.944218	29432.1	5619.07
17000	14.3199	1.49349	0.936843	31459	5976.2
18000	14.3441	1.49944	0.929218	33510.7	6314.43
19000	14.3722	1.50618	0.92102	35612.2	6672.92
20000	14.4059	1.51371	0.912218	37776.4	7054.99

Tabela 1 – Tabela contendo dados dos impactos causados pela presença de campos magnéticos cada vez mais intensos em uma estrela de nêutrons de densidade central  $\approx 6 \times 10^{14}g/cm^3$  e massa  $\approx 1.449M_{\odot}$ .



A principal tendência que manifesta se é o aumento da massa gravitacional, enquanto o máximo aumento no raio equatorial é de  $\approx 2\%$ , para o mesmo valor da constante de amplitude de corrente a massa varia em cerca de  $5\%$ . Até  $\alpha \approx 10^{14} A^2/m$  estrela não manifesta nenhuma diferença substancial entre o raio equatorial e polar, e para o valor máximo de  $\alpha$  calculado a diferença entre os dois é de cerca de  $9\%$ . Como vimos no debate na seção 5.2.2, não existe a princípio campo magnético máximo análogo a frequência de Kepler. O valor máximo da constante de amplitude de função usado aqui é o suficiente apenas para sair do regime de pequenas deformações nas estrelas de nêutrons magnetizadas. A estrela canônica só passa a apresentar deformação de razoável resolução numérica quando o campo magnético em seu centro é cerca de  $2 \times 10^{12} T$  e na superfície equatorial sendo cerca de  $4 \times 10^{11} T$ . Para que exista uma deformação de  $1\%$  já é necessário mais uma ordem de grandeza, em conformidade com o previsto em (RATHER et al., 2021). Como já foi debatido anteriormente o ligeiro aumento no raio aparece como resultado da distribuição das forças de Lorentz dentro da estrela. O suporte extra desta força de origem magnética ajuda as forças de origem termodinâmica a sustentar o peso da estrela. A nova configuração de equilíbrio terá, então, mais massa que a estrela não magnetizada (ou menos magnetizada).

Para uma estrela mais massiva a tabela 2 mostra que as mesmas características de deformação se manifestam, embora em diferente escala. Conforme tomamos estrelas com densidade central cada vez maiores o seu perfil de densidade e pressão se torna cada vez mais compacto, tornando a estrela mais resistente as deformações. A força de Lorentz interior, que aponta para fora da estrela está presente em uma região bem mais dura e precisa ser cada vez mais intensa para modificar a configuração de equilíbrio sem campos magnéticos.

Quando tomamos configurações com densidade central menor, isto é, com menor massa e perfis de densidade de pressão menos compactos temos a tendência de manifestar os efeitos da força de Lorentz com mais

CFA [ $10^{11}A/m^2$ ]	R(km)	m [ $M_{\odot}$ ]	$r_p/r_{eq}$	$B_c[GT]$	$B_{\theta}[GT]$
1	12.676	1.87242	1	2.83239	0.548854
400.6	12.676	1.87243	1	1134.67	219.867
600.4	12.6761	1.87244	1	1700.62	329.519
900.1	12.6762	1.87247	1	2549.62	493.98
1000	12.6763	1.87248	1	2832.64	548.794
2800	12.678	1.87291	0.999119	7936.13	1535.48
4600	12.6815	1.87376	0.997039	13053.1	2518.98
5500	12.6838	1.87435	0.995621	15619.5	3008.93
7300	12.6897	1.87585	0.992031	20773.2	3983.83
9100	12.7037	1.87641	0.987379	25978.3	4970.73
10000	12.7018	1.87896	0.984763	28575.4	5431.81
12000	12.713	1.88194	0.977939	34426.2	6491.91
14000	12.726	1.8856	0.969919	40352.5	7545.12
16000	12.7405	1.88979	0.960746	46373.8	8596.53
18000	12.7565	1.8948	0.950471	52504	9653.35
20000	12.7773	1.90034	0.938947	58793.9	10762

Tabela 2 – Deformação por magnetização da estrela de densidade central  $\rho_c = 1.4 \times 10^{15}g/cm^3$ , naturalmente mais densa e compacta que a estrela de nêutrons canônica esta também manifesta as mesmas características de deformação que a primeira.

facilidade. Entretanto, se a a estrela for suficientemente pouco massiva entramos numa região onde os raios aumentam bastante para valores cada vez menores de densidade central. Isto desloca o pico do potencial magnético para regiões mais centrais e reduz os valores de  $A_{\phi}$ , implicando numa substancial redução da intensidade da força magnética, o resultado disto é uma diminuição da eficiência da expansão do raio estelar que pode ser observado na tabela 3.

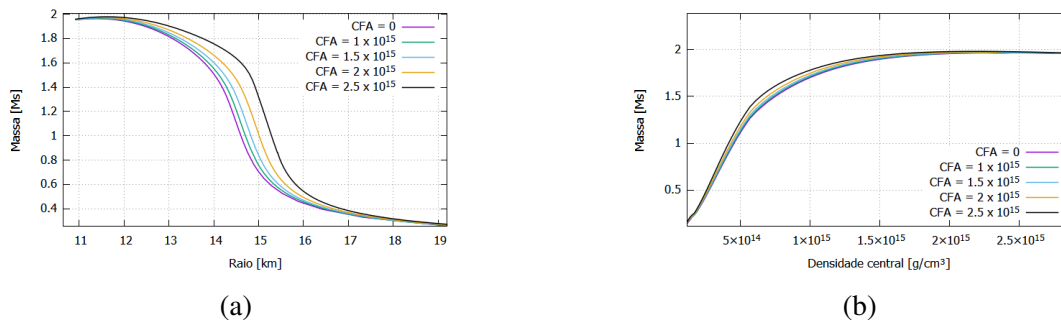


Figura 13 – (a) Curva massa raio ilustrando a região mais sucinta a deformações por variação na amplitude de corrente, em unidades  $A/m^2$ . (b) Curva de massa e densidades centrais com o mesmo objetivo.

CFA [ $10^{11}A/m^2$ ]	R(km)	m [ $M_{\odot}$ ]	$r_p/r_{eq}$	$B_c[GT]$	$B_{\theta}[GT]$
1	14.886	0.767986	1	0.896533	0.145144
100.9	14.886	0.767987	1	90.4603	14.645
300.7	14.886	0.767995	1	269.592	43.6447
500.5	14.8861	0.768012	1	448.736	72.6443
700.3	14.8863	0.768037	1	627.9	101.644
900.1	14.8865	0.76807	1	807.093	130.643
1000	14.8866	0.76809	1	896.703	145.142
1900	14.8883	0.768364	1	1704.58	275.761
3700	14.8948	0.769422	0.998288	3325.78	536.939
5500	14.9059	0.771159	0.994761	4959.11	797.95
7300	14.9217	0.773626	0.98982	6611.06	1058.81
9100	14.9421	0.776879	0.983445	8288.47	1319.54
10000	14.9542	0.778823	0.979712	9138.89	1449.73
12000	14.9852	0.783971	0.970018	11066.7	1740.42
14000	15.0233	0.790383	0.958478	13051.6	2031.68
16000	15.0686	0.798284	0.944952	15111.3	2325.58
18000	15.1229	0.807859	0.929366	17261.7	2624.07
20000	15.1871	0.819565	0.911636	19525.3	2932.26

Tabela 3 – Deformação por magnetização da estrela de densidade central  $\rho_c = 3.7 \times 10^{14} g/cm^3$ , menos densa e compacta que a estrela de nêutrons canônica esta manifesta deformações menos intensas que a primeira.

Sendo assim a curva de massas que apresenta as deformações de acordo com a constante  $\alpha$  devem se deformar com maior clareza nestas regiões intermediárias. As curvas de massa na figura 13 mostra visualmente este efeito. Diferentes equações de estado respondem em diferentes intensidades ao mesmo efeito.

Agora que vimos como evolui uma sequência de estrelas cuja densidade central é fixa e a constante de amplitude de corrente é aumentada vejamos como a mesma estrela de nêutrons reage ao aumento de seu campo magnético conforme é aumentada a amplitude de corrente. A princípio deixemos claro que o que define uma estrela de nêutrons unicamente é a sua massa bariônica, e não sua densidade central. Podemos pensar que uma estrela é definida pela quantidade de massa que ela tem antes de se compactar em sua forma final, sem a energia de ligação. Nesse sentido, como as tabelas até agora apresentadas além de variar a sua massa gravitacional também variam sua massa bariônica estamos nos tratando de estrelas di-

CFA	R(km)	m [ $M_{\odot}$ ]	$\rho_c$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$r_p/r_{eq}$	$B_c$ [GT]	$B_{\theta}$ [GT]
1	14.1186	1.44491	7.02525e+014	1	1.75666	0.357759
200.8	14.1187	1.44491	7.02522e+014	1	352.739	71.8374
400.6	14.1188	1.44492	7.02514e+014	1	703.727	143.313
600.4	14.1189	1.44492	7.02499e+014	1	1054.73	214.782
800.2	14.1191	1.44493	7.02478e+014	1	1405.75	286.239
1000	14.1194	1.44494	7.02452e+014	1	1756.79	357.682
2000	14.1219	1.44496	7.02158e+014	0.99968	3514.11	714.84
5000	14.1394	1.44513	7.00128e+014	0.995089	8794.87	1778.12
8000	14.1723	1.44547	6.9629e+014	0.98653	14100.6	2819.23
10000	14.2031	1.44573	6.9256e+014	0.978572	17662	3493.49
12000	14.2414	1.44615	6.88041e+014	0.968802	21248.5	4150.84
15000	14.3139	1.44692	6.79357e+014	0.950703	26688	5105.6
17500	14.3885	1.4477	6.70182e+014	0.932482	31281.9	5870.89
20000	14.4801	1.44845	6.58746e+014	0.911128	35963.2	6637.26

Tabela 4 – Tabela com dados acerca as deformidades em uma estrela de massa bariônica fixa em  $\approx 1.56M_{\odot}$  causadas pelo aumento da constante de amplitude de corrente.

ferentes. Para responder melhor a pergunta e saber como uma estrela de nêutrons responde a um aumento em seu campo gravitacional vejamos a tabela 4 para a sequência de estrelas de mesma massa bariônica e diferentes amplitudes de corrente. Nela é evidente que a variação de massa não é tão intensa quanto nos casos anteriores embora o raio aumente de maneira bastante semelhante. A interpretação atual é a de que conforme a amplitude de corrente aumenta, induzindo um campo magnético mais intenso, a força de Lorentz faz com que a estrela possa suportar mais massa. A nova configuração de equilíbrio então teria mais massa gravitacional e bariônica. Enquanto a variação no primeiro observável não é um problema a mudança na massa bariônica leva a análise para uma outra estrela. Para contornar esse empecilho toma-se a densidade central levemente menor, compensando o acréscimo a massa bariônica. Então fixar a massa bariônica de uma estrela cujo campo magnético aumenta de intensidade significa diminuir a densidade central em conformidade, o que está explicitado na tabela 4.

As análises acerca da deformação são ilustradas nas figuras 14. Inicialmente, na figura 14 (a) e (b) vemos as distribuições internas de alguns

dos resultados da tabela 1 onde é evidente que o núcleo estelar é maior, suportando mais massa por conta do suporte fornecido pela força magnética nessa região. Nas figuras 14 (c) e (d) a situação para as configurações de mesma massa bariônica é semelhante mas tem uma interpretação diferente. Ainda é possível notar que existe uma elevação da intensidade dos valores termodinâmicos mais próximos da superfície da estrela, causados pela força de Lorentz interna. Mas desta vez temos que levar em conta que a densidade central é diminuída toda vez que aumentamos o valor da constante de amplitude de corrente para que a massa bariônica total da estrela seja sempre a mesma. Neste segundo caso então a massa da estrela é **redistribuída** em uma configuração menos compacta.

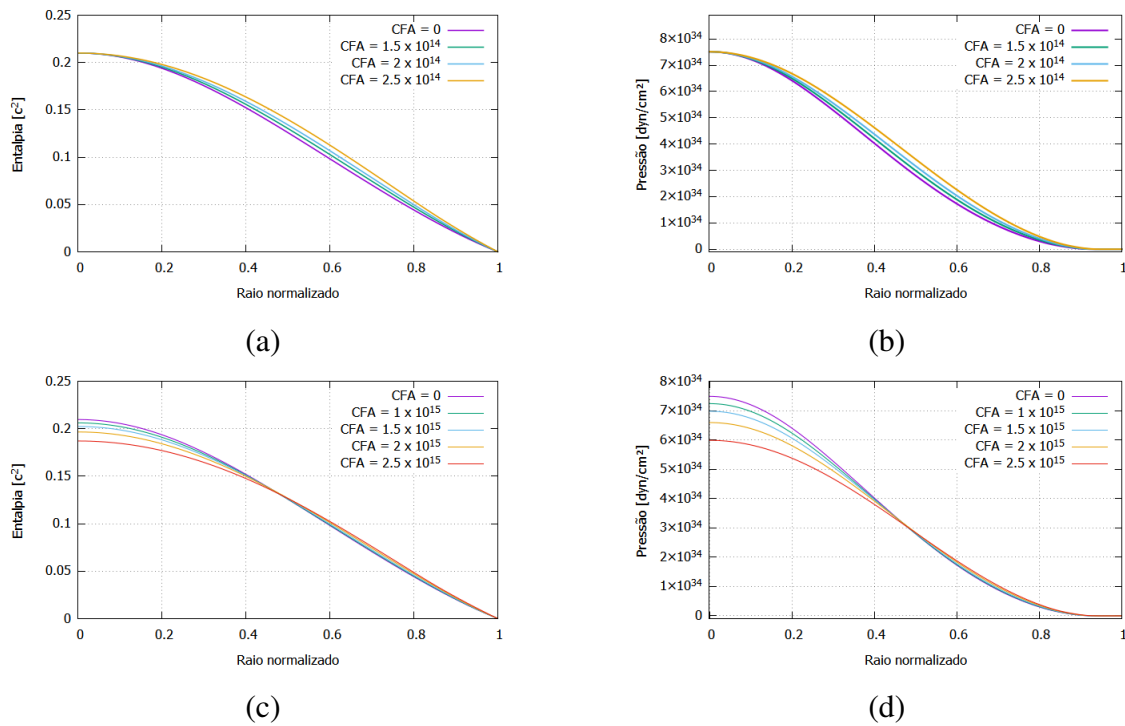


Figura 14 – (a) Perfil de entalpia para diferentes amplitudes de corrente  $\alpha[A/m^2]$  com densidade central fixa. (b) Perfil de pressões para diferentes amplitudes de corrente  $\alpha$  com densidade central fixa. (c) Perfil de entalpia para diferentes amplitudes de corrente  $\alpha$  com massa bariônica fixa. (d) Perfil de pressões para diferentes amplitudes de corrente  $\alpha$  com massa bariônica fixa.

#### 5.2.4 Análise espectral das propriedades magnéticas

Atualmente tem-se retomado o debate acerca da possibilidade da existência de uma equação TOV modificada que englobe os efeitos magnéticos. Alguns autores tem proposto e testado funções parametrizadas por elementos da estrutura interna das estrelas de nêutrons para a distribuição do campo magnético no interior destes objetos com o intuito de construir uma solução hidrostática que comporte o impacto do campo magnético na equação de estado, uma vez que já foi demonstrado que para campos suficientemente intensos as equações de estado tem variações dos valores para  $B = 0$ . Estes formatos parametrizados, embora sejam baseados em ajustes de funções em cima de dados de cálculos de magnetização de estrelas de nêutrons, não representam soluções da equação de Maxwell. Inicialmente temos a parametrização proposta por Bandyopadhyay em (BANDYOPADHYAY; CHAKRABARTY; PAL, 1997)

$$B\left(\frac{n_b}{n_0}\right) = B_s + B_c \left(1 - \exp\left[-\beta\left(\frac{n_b}{n_0}\right)^\gamma\right]\right), \quad (5.25)$$

que torna a distribuição  $B$  controlada pela densidade bariônica local. Mais recentemente L. Lopez e D. Menezes propuseram, em (LOPES; MENEZES, 2015), a distribuição

$$B\left(\frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_0}\right) = B_s + B_c \left(\frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_0}\right)^\gamma, \quad (5.26)$$

que reduz o número de parâmetros livres de dois para um e torna  $B$  uma função da densidade de energia, que é argumentado como um parâmetro mais natural, uma vez que aparece diretamente nas equações TOV.

Vejamos agora como D. Chatterjee e J. Novak, em (CHATTERJEE; NOVAK; OERTEL, 2019), levam o assunto. Tomemos o módulo do campo magnético da estrela como

$$B = \sqrt{g_{rr}(b_r)^2 + g_{\theta\theta}(b_\theta)^2}, \quad (5.27)$$

temos a partir do elemento de métrica (3.21)

$$B = A\sqrt{(b_r)^2 + (b_\theta)^2}. \quad (5.28)$$

Tomando o perfil equatorial e polar de  $B$  em proporção com o valor central para a intensidade do campo magnético,  $b_c$ , vemos na figura 15(a) que a diferença entre os dois impõe restrição demais para qualquer abordagem esférica. Ao mesmo tempo a figura 15(b) mostra que existe uma certa constância comportamental conforme tomamos valores diferentes de densidade central. Configurações mais leves do que as mostradas na figura constam na região intermediária entre a configuração mais e menos massiva apresentada.

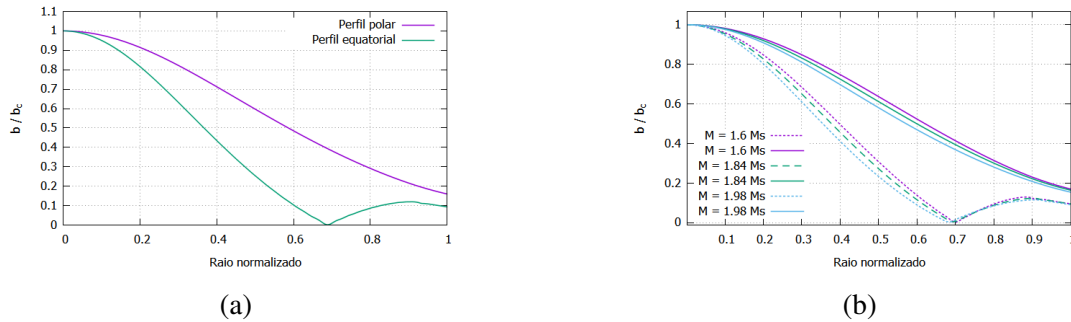


Figura 15 – (a) Perfil equatorial e polar da intensidade do campo magnético para uma estrela de massa central  $1.6M_{\odot}$ . (b) Perfis de campo magnético para estrelas diferentes.

A função  $B(r, \theta)$  também pode ser expandida em funções radiais associadas a harmônicos esféricos como

$$B(r, \theta) \approx \sum_{l=0}^{L-1} b_l(r) Y_l^0(\theta). \quad (5.29)$$

Devido a simetria de reflexão pelo plano equatorial as funções  $b_l(r)$  deverão ser nulas para todo  $l$  ímpar. Podemos então avaliar a expansão espectral do campo magnético através da figura 16 e reparar na constância das funções espectrais  $b_l(r)$ . Nestas figuras vemos que os resultados são claros no respeito a grande diminuição na intensidade dos termos espectrais de ordem superior. Podemos supor que exista um formato geral para a distribuição  $b_0(r)$  a qual os valores das distribuições reais tendam em média de modo razoável. Em (CHATTERJEE; NOVAK; OERTEL, 2019) é calculada que esta distribuição tem a forma

$$b_0(x) = b_c \times (1 - 1.6x^2 - x^4 + 4.2x^6 - 2.4x^8). \quad x \in [0, 1]. \quad (5.30)$$

Na mesma referência é sugerido que possa existir uma abordagem perturbativa das equações TOV (nos sentido da expansão espectral), onde a primeira ordem da perturbação seria utilizando equações TOV com termos magnéticos que dependam de  $b_0(r)$ , e as ordens superiores tem influência cada vez menores, uma vez que o perfil  $b_l(r, \theta)$  se torna cada vez menor. É proposta então, em primeira ordem na expansão espectral, as equações

$$\frac{dm}{d\bar{r}} = 4\pi\bar{r}^2 \left( \varepsilon + \frac{B^2}{\mu_0} \right), \quad (5.31)$$

$$\frac{d\Phi}{d\bar{r}} = \left( 1 - \frac{2m}{\bar{r}} \right)^{-1} \left( \frac{m}{\bar{r}^2} + 4\pi p \bar{r} \right), \quad (5.32)$$

$$\frac{dp}{d\bar{r}} = - \left( \varepsilon + \frac{B^2}{\mu_0} + p \right) \left( \frac{d\Phi}{d\bar{r}} - L(\bar{r}) \right). \quad (5.33)$$

Nesse sentido então, existiria outros conjuntos de equações para ordens superiores da expansão espectral, a serem investigados.

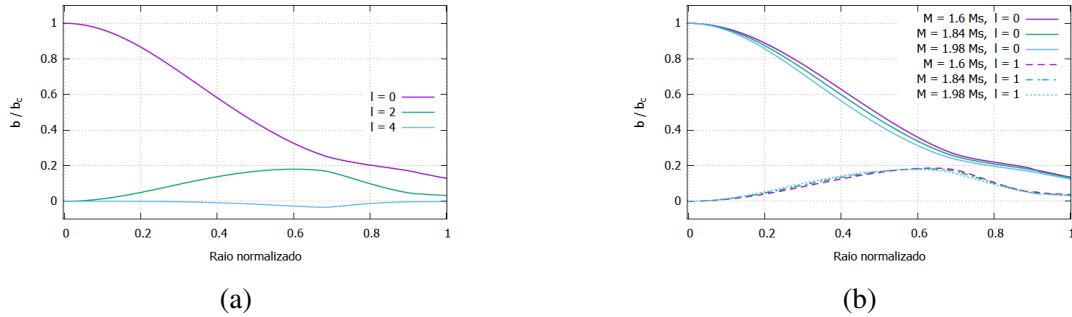


Figura 16 – (a) Curva massa raio ilustrando a região mais sucinta a deformações por variação na amplitude de corrente. (b) Curva de massa e densidades centrais com o mesmo objetivo.



### 5.3 Relações lineares no vetor potencial magnético

Com o intuito de entender o comportamento generalista do campo magnético apresentado acima vemos como o potencial vetor  $A_\phi$  se distribui dentro das estrelas de nêutrons.

A figura 17 (a) e (b) mostra o perfil equatorial de duas estrelas com massas de aproximadamente  $1.44M_\odot$  para duas equações de estado diferentes. Cada uma destas figuras mostra varias curvas para constantes de amplitude de corrente  $\alpha$  crescendo sempre proporcionalmente implicando em uma variação aparentemente sempre constante nos valores do potencial vetor. Exploraremos esta característica de maneira estatística, tomando configurações de estrelas para diferentes valores de amplitude de corrente e alguns pontos em  $A_\phi$ , em particular  $A_\phi(R)$  e  $A_\phi(MAX)$ , sendo estes respectivamente o valor do potencial vetor na superfície da estrela e em seu máximo, ambos no plano equatorial.

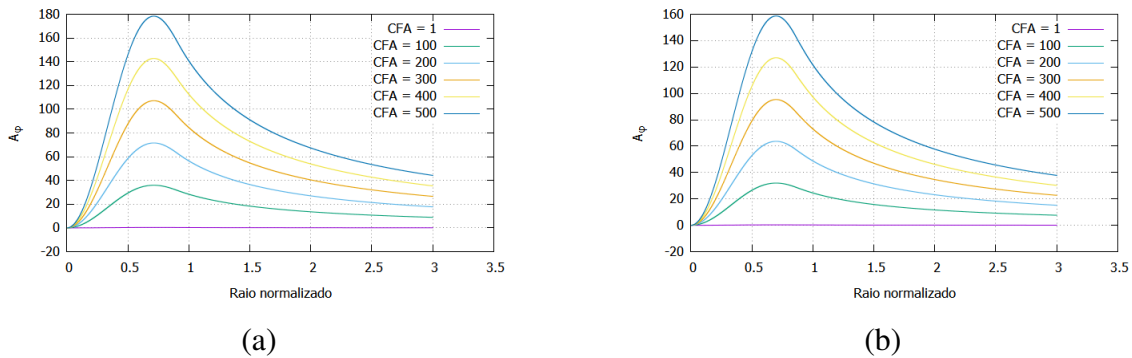


Figura 17 – (a) Perfil de  $A_\phi$  equatorial para diferentes amplitudes de corrente, em unidades  $A/m^2$  na estrela de massa  $\approx 1.44M_\odot$  na equação de estado glendnh3. (b) Perfil de  $A_\phi$  equatorial para diferentes amplitudes de corrente na estrela de massa  $\approx 1.44M_\odot$  na equação de estado Sly230a.

Como exemplo utilizamos os dados da tabela 5. Para baixos valores de  $\alpha$  existe uma dependência linear entre os valores de  $A_\phi$  e  $\alpha$ , ou seja, o perfil de  $A_\phi$  se mantém o mesmo a menos de uma constante multiplicativa.

Podemos então tomar estes dados e fazer o ajuste linear

$$A_\phi(R) = a\alpha + b, \quad (5.34)$$

$$A_\phi(MAX) = c\alpha + d. \quad (5.35)$$

CFA [ $\times 10^{11} A/m^2$ ]	$A_\phi(R)$	$A_\phi(max)$	CFA [ $\times 10^{11} A/m^2$ ]	$A_\phi(R)$	$A_\phi(max)$
1	0.068628	0.10177	5500	380.716	564.547
100	6.92458	10.2686	6400	444.205	658.7
200	13.7806	20.4357	7300	508.249	753.677
300	20.6369	30.603	8200	572.937	849.602
400	27.4934	40.7707	9100	638.362	946.604
500	34.3504	50.939	10000	704.097	1044.43
600	41.2078	61.108	11000	778.797	1155.18
700	48.0658	71.2779	12000	854.852	1267.89
800	54.9245	81.4488	13000	932.452	1382.81
900	61.784	91.6208	14000	1011.82	1500.23
1000	68.7233	101.901	16000	1171.13	1725.58
1900	130.658	193.736	17000	1255.84	1851.13
2800	192.748	285.805	18000	1343.39	1980.78
3700	255.069	378.219	19000	1434.02	2114.85
4600	317.698	471.094	20000	1527.8	2253.46

Tabela 5 – Tabela com dados pontuais das distribuições de  $A_\phi$  para diferentes valores da constante de amplitude de função dada uma densidade central fixa.

Na tabela 6 temos os resultados dos ajustes para diferentes valores de densidade central. O fato de que ambos os valores de  $A_\phi(R)$  e  $A_\phi(max)$  serem aproximadamente linearmente dependentes de  $\alpha$  indica que o formato da distribuição  $A_\phi(r)$  se mantém constante para valores não muito intensos de amplitude de corrente.

$\rho_c[\rho_{nuc}]$	$m_G[m_\odot]$	$m_B[M_\odot]$	R[km]	a	b	c	d
2.39443	0.359248	0.362166	16.0479	0.0367569	-1.80913	0.0579872	-2.95602
3.12879	0.574275	0.588399	13.447	0.0712745	-3.96518	0.105707	-5.90391
4.10159	0.916215	0.964025	12.568	0.138692	-7.70748	0.189906	-10.6799
4.94776	1.19826	1.28992	12.2951	0.200664	-10.5792	0.265851	-14.279
5.76177	1.4244	1.56386	12.1151	0.252587	-11.4769	0.329867	-15.7961
6.55965	1.60163	1.78783	11.9466	0.293763	-11.3088	0.381638	-15.9593
8.21206	1.84295	2.10735	11.6047	0.348989	-11.0468	0.454007	-15.7595

Tabela 6 – Resultados do ajuste linear dos dados da tabela 5. Todas as relações de linearidade tem coeficiente de correlação linear de Pearson de pelo menos 0.999.

A figura 18 indica visualmente alguns dos resultados da tabela 6. Na figura 18(a) vemos que relação de linearidade entre  $\alpha$  e  $A_\phi$  é razoável até pouco menos de  $\alpha \approx 1.5 \times 10^{15} A/m^2$ . A figura (b) é apresentada as diferentes retas para estrelas de diferentes valores de densidade central. Notoriamente conforme a densidade central aumenta a inclinação da reta

que ajusta os dados de potencial vetor aumenta. Então, é definido que as diferenças entre o perfil de distribuição do potencial vetor  $A_\phi$  é constante, variando apenas por uma constante multiplicativa.

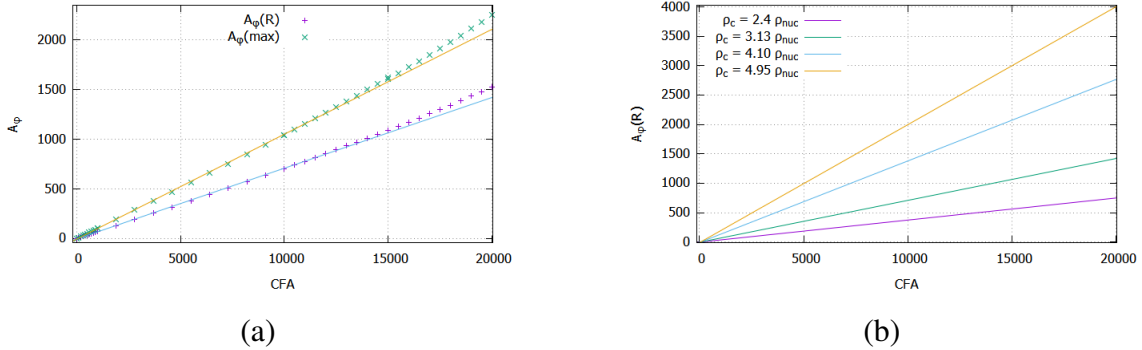


Figura 18 – Representação gráfica do ajuste linear dos dados da tabela 6.

Passando para a análise do formato da distribuição de  $A_\phi$  no plano equatorial podemos tomar estes perfis para diferentes valores de densidade central. As figuras 19 demonstram estas curvas para determinada equação de estado. Na (a) vemos que na região de densidades próximas ou inferiores a densidade nuclear a distribuição relativa de  $A_\phi$  varia consideravelmente conforme evoluímos pela família de estrelas, deslocando seu pico para regiões mais externas. Nas estrelas mais densas o perfil de  $A_\phi$  se estabiliza e em densidades muito elevadas volta a se deformar, desta vez com muito menos intensidade. A definição de baixa, media e alta densidade aqui é relativa a equação de estado.

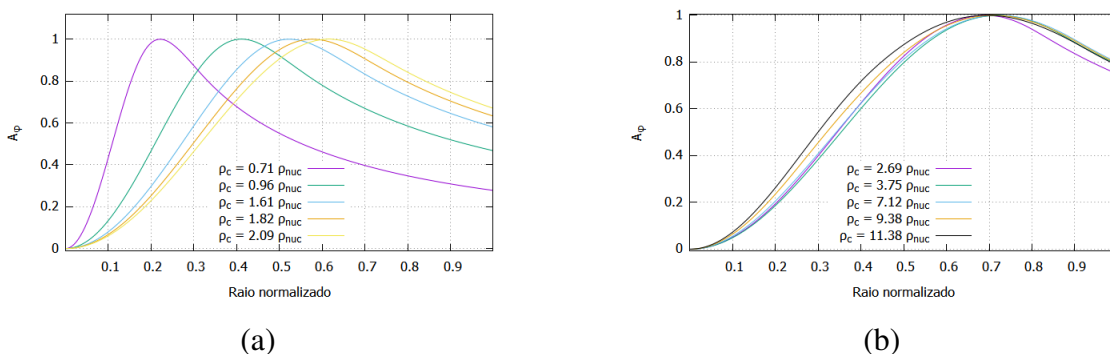


Figura 19 – Perfis de distribuição interna do potencial vetor  $A_\phi$  normalizado com respeito ao seu máximo : (a) e (b) representam perfis para estrelas de nêutrons de densidade central baixas e altas respectivamente.

A partir dos dados da figura 19(b) podemos calcular a curva parametri-

zada pelo raio normalizado. Para esta equação de estado em particular a curva ajustada tem o formato polinomial

$$A_\phi(x) = A_\phi(max) \times \sum_{i=0}^N a_i x^i. \quad (5.36)$$

Com coeficientes

$a_0$	-6.980e-05	$a_5$	2.084e+01
$a_1$	9.262e-03	$a_6$	4.129e+01
$a_2$	5.646e+00	$a_7$	-9.564e+01
$a_3$	2.541e+00	$a_8$	7.373e+01
$a_4$	-2.732e+01	$a_9$	-2.030e+01

A comparação entra a curva ajustada e dois perfis de  $A_\phi$  pode ser vista na figura 20(a), que apresenta o perfil do potencial vetor para uma configuração de estrelas de nêutrons de densidade central  $\rho_c = 2.69\rho_{nuc}$  e uma configuração mais compacta de densidade central  $\rho_c = 11.38\rho_{nuc}$ . Observando novamente a figura 19(b) vemos que conforme a densidade central aumenta o perfil de  $A_\phi$  na região mais interna se eleva, com moderada resistência até densidade de  $\approx 10\rho_{nuc}$ . Antes disto, o perfil de  $A_\phi$  na região mais próxima ao raio estelar, ou em outra interpretação, a região externa ao máximo em  $A_\phi$ , os valores se estabilizam rapidamente para aqueles de 1 a  $\approx 0.8$ . O leitor pode se questionar sobre a afinidade da curva ajustada na parte interna ao máximo em  $A_\phi$  com a curva da configuração mais compacta de densidade central  $\rho_c = 11,38\rho_{nuc}$ . A explicação para a diferença entre as duas está no fato de que nesta região o potencial vetor se modifica de maneira mais intensa apenas para altas densidades.

As considerações acima, apesar de terem sido ilustradas para uma equação de estado específica continuam válidas para outras. A figura 20(b) mostra o ajuste de curvas para cinco equações de estado diferentes. Os resultados das curvas são de fato bastante concordantes entre si, dentro de certa tolerância.

Sendo assim, também é possível determinar previamente a distribuição de forças na estrela. Uma vez que da equação (5.36) sabemos facilmente a

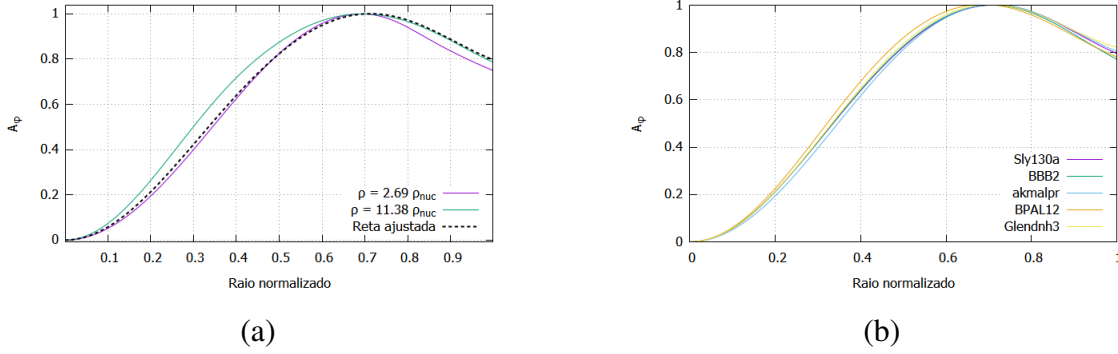


Figura 20 – Dados utilizados para calcular : (a) e (b) representam as funções métricas  $N(r)$  e  $A(r)$ , (c) mostra o perfil de densidades e (d) e distribuição de entalpias.

distribuição do potencial magnético como

$$M(x) = -\alpha A_\phi(x),$$

obtemos a força de Lorentz por derivação direta.

$$F(x) = -\frac{\partial M(x)}{\partial r} \quad (5.37)$$

$$= \alpha \frac{\partial A_\phi}{\partial r} \quad (5.38)$$

$$= \alpha \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial A_\phi(x)}{\partial x} \quad (5.39)$$

$$= \alpha R \sum_{n=0}^N a_n n x^{n-1}. \quad (5.40)$$

Sendo este termo presente nas equações diferenciais sugeridas em (CHATTERJEE; NOVAK; OERTEL, 2019), temos uma maneira diferente de produzir o perfil da força de Lorentz para os estudos de TOV magnetizadas.

Também fica implícito o potencial de outras relações paramétricas que podem aparecer nas estrelas de nêutrons levemente magnetizadas. Como por exemplo perfis parametrizados por potências de  $P$  e  $\varepsilon$ , poderiam dar uma explicação razoável para o deslocamento do pico no potencial vetor em baixas densidades centrais. Em parte, está análise foi feita para o potencial químico em (DEXHEIMER et al., 2017b) e (DEXHEIMER et al., 2017a).

Os resultados apresentados aqui podem indicar uma razão um pouco mais fundamental para a constância nos campos magnéticos observados

em (CHATTERJEE; NOVAK; OERTEL, 2019). Assim como uma adequação da ciência de objetos compactos magnetizados para análise de dados computadorizada. Atualmente tem se popularizado muito os algoritmos de machine learning que procuram automatizadamente por relações polinomiais, como as equações (5.34) e (5.36) por exemplo. Fica a sugestão para análises utilizando destas técnicas no futuro.

## 6 Conclusão

Foi apresentado o formalismo 3+1 da relatividade geral e as equações de equilíbrio hidroestático dos objetos com simetria axial. A estas equações também foram acrescentados os campos magnéticos (e elétricos) que correspondem a simetria do sistema juntamente com mais duas equações diferenciais para as componentes do potencial vetor. Mostrou-se alguns dos efeitos que se manifestam em estrelas magnetizadas, com foco nas configurações exclusivamente magnéticas, isto é, sem rotação ou cargas livres. Em seguida mostramos alguns perfis típicos dos observáveis magnéticos como o potencial vetor, o potencial magnético, a força de Lorentz e as relações entre eles.

É feita, logo após, uma apresentação de algumas das propostas de campos magnéticos pré-definidos, assim como uma apresentação sobre a expansão espectral típica dos campos magnéticos de estrelas de nêutrons, indicando que a maior parte da intensidade do campo está contida no primeiro espectro do setor angular dos harmônicos esféricos. O que sustenta a ideia de que este campo magnético pré-definido pode ser composto de um setor esférico somado a outras funções menos intensas que carregam as características angulares da distribuição.

Utilizando dados produzidos pelo software LORENE mostramos que para campos pouco intensos as deformações na estrela são bastante pequenas e o potencial vetor tem seu perfil de distribuição num formato constante, mantendo seu formato e diferindo apenas em magnitude quando comparados a outras configurações mais ou menos intensas, dentro do limite de campo fraco. Este fato torna-se uma justificativa um pouco mais fundamental para a constância nos campos magnéticos apontadas por outros autores e usada como argumento para que possa existir uma configuração genérica para campos não muito intensos das estrelas de nêutrons.

Passamos então a apresentar curvas que ajustam os dados das distribuições

magnéticas para algumas equações de estado, mostrando que as equações de estado tabeladas comumente utilizadas em cálculos de estrelas de nêutrons possuem distribuições bastante compatíveis entre si. Esta curva generalizada pode também ser utilizada ilustrar o comportamento tanto do potencial quanto da força de Lorentz atuante na estrela e poderia ser utilizada para construir análises aproximativas que não necessitem da solução plenas das complexas equações diferenciais associadas a configuração de equilíbrio de estrelas compactas com simetria axial. Entretanto, ainda é preferível utilizar de parâmetros que não o raio, uma vez que a diferença de sistema de coordenadas entre dois formalismos da relatividade geral usados na ciência de estrelas de nêutrons a conversão entre o raio coordenada e o raio circunferencial uma tarefa nada simples. Estudos utilizando regressões lineares nos parâmetros termodinâmicos tem aparecido na última década e são altamente recomendados por este trabalho.



# A Método dos campos autoconsistentes

## A.1 Algoritmo SCF

O método dos campos autoconsistentes (SCF) faz uso de um algoritmo iterativo. Começando de uma solução inicial, nos aproximamos da solução real para o sistema de equações a cada iteração. Se o método for aplicado corretamente o erro entre a solução real e a iterativa se torna cada vez menor até convergir para um erro mínimo associado ao precisão requerida.

Definindo inicialmente os parâmetros  $\Omega$  e  $H_c$ , a rotação e a entropia central da estrela, juntamente a uma solução inicial para os elementos da métrica (3.21)  $N_0$ ,  $\omega_0$ ,  $A_0$ ,  $B_0$ , e o campo magnético inicial através de  $A_{t0}$  e  $A_{\phi,0}$  podemos calcular as fontes das equações (3.51)-(3.53)

$$\Delta_3 v = S_v^0(r, \theta), \quad (\text{A.1})$$

$$\bar{\Delta}_3 (\omega r \sin \theta) = S_\omega^0(r, \theta), \quad (\text{A.2})$$

$$\Delta_2 [(NB - 1)r \sin \theta] = S_B^0(r, \theta), \quad (\text{A.3})$$

$$\Delta_2 (\ln A + v) = S_A^0(r, \theta). \quad (\text{A.4})$$

$$\Delta_3 A_t = S_{A_t}^0(r, \theta), \quad (\text{A.5})$$

$$\bar{\Delta}_3 \left( \frac{A_\phi}{r \sin \theta} \right) = S_{A_\phi}^0(r, \theta). \quad (\text{A.6})$$

Fazendo a solução deste sistema de equações diferenciais lineares encontramos novos valores para os termos da métrica, desta vez chamados  $N_1$ ,  $\omega_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_{t1}$  e  $A_{\phi1}$ . Podemos então calcular novos valores para as fontes, desta vez chamadas  $S_v^1$ ,  $S_\omega^1$ ,  $S_B^1$ ,  $S_A^1$ ,  $S_{A_t}^1$  e  $S_{A_\phi}^1$ . Iniciando um novo processo de iteração iremos resultar em  $N_2$ ,  $\omega_2$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $A_{t2}$  e  $A_{\phi2}$ . Tal processo pode ser expresso por

$$\Delta_3 v_{n+1} = \sigma_v^n(r, \theta), \quad (\text{A.7})$$

$$\bar{\Delta}_3 (\omega_{n+1} r \sin \theta) = \sigma_\omega^n(r, \theta), \quad (\text{A.8})$$

$$\Delta_2 [(N_{n+1} B_{n+1} - 1) r \sin \theta] = \sigma_B^n(r, \theta), \quad (\text{A.9})$$

$$\Delta_2 (\ln A_{n+1} + v_{n+1}) = \sigma_A^n(r, \theta), \quad (\text{A.10})$$

$$\Delta_3 A_{t(n+1)} = S_{A_t}^{n+1}(r, \theta), \quad (\text{A.11})$$

$$\bar{\Delta}_3 \left( \frac{A_{\phi(n+1)}}{r \sin \theta} \right) = S_{A_\phi}^{n+1}(r, \theta). \quad (\text{A.12})$$

Deste modo, em toda iteração  $n$  temos que resolver um sistema de equações diferenciais lineares, uma vez que estamos tratando de fontes previamente determinadas. Para a equação (A.10) precisamos levar em conta o teorema do virial GRV2. Se separarmos a fonte  $\sigma_A(r, \theta)$  como

$$S_A(r, \theta) = \sigma_A^F(r, \theta) + \lambda \sigma_A^q(r, \theta), \quad (\text{A.13})$$

onde

$$\sigma_A^F(r, \theta) = 8\pi A^2 S_\phi^\phi, \quad (\text{A.14})$$

$$\sigma_A^q(r, \theta) = \frac{3B^2 r^2 \sin^2 \theta}{4N^2} \partial \omega \partial \omega - \partial v \partial v, \quad (\text{A.15})$$

a equação GRV2 se torna

$$\int_{r'=0}^{r'=\infty} \int_0^{2\pi} (\sigma_A^F(r', \theta') + \lambda \sigma_A^q(r', \theta')) r' dr' d\theta = 0. \quad (\text{A.16})$$

Ou seja,

$$\lambda = - \frac{\int_{r'=0}^{r'=\infty} \int_0^{2\pi} \sigma_A^F(r', \theta') r' dr' d\theta}{\int_{r'=0}^{r'=\infty} \int_0^{2\pi} \sigma_A^q(r', \theta') r' dr' d\theta}. \quad (\text{A.17})$$

teremos em cada iteração uma solução que se adéqua as condições de contorno de Minkowsky. Ao se fazer as iterações o valor de  $\lambda$  deverá se aproximar cada vez mais de 1. Assim, uma interessante possibilidade de avaliação da qualidade da convergência numérica deste método é acompanhar a evolução de  $\log |1 - \lambda|$ .

## A.2 Métodos Pseudospectrais

Em [citação], Bonazzola, Gourgoulhon, Salgado & e Marck apresentam um modo de utilizar dos métodos pseudospectrais para realizar o algoritmo SCF. Isto se dá através da expansão dos objetos a serem calculados em bases completas do espaço de funções  $\{\Phi_n(x)\}$ , ou seja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \Phi_n(x), \quad x \in \mathcal{D}. \quad (\text{A.18})$$

O domínio  $\mathcal{D}$  é consequência da escolha das funções de base  $\{\Phi_n(x)\}$ . Estas devem ser escolhidas de acordo com a situação. Por exemplo, caso quisermos representar uma função no domínio  $x \in [0, 2\pi]$  iremos utilizar funções de base no mesmo domínio, e estaremos falando assim em termos de expansão em series de Fourier. Se em outro caso estivermos interessados em funções no intervalo  $[0, \pi]$  (ou  $[-\pi/2, \pi/2]$ ), cujos valores se repetem neste intervalo, estaremos nos tratando de uma expansão em base de senos ou cossenos, como  $\{\sin(n\theta)\}$  ou  $\{\cos(n\theta)\}$  respectivamente.

Ao determinarmos a função  $f(x)$  como em (A.18) temos a possibilidade de determinar as constantes  $a_n$  através de uma expressão matricial

$$a_n = M_{nk} f_k, \quad (\text{A.19})$$

onde

$$f_k = f(x_k), \quad (\text{A.20})$$

$$M_{nk} = \frac{\sum_l w_l \Phi_n(x_l) \Phi_n(x_k)}{\sum_l w_l \Phi_n(x_l) \Phi_n(x_l)}. \quad (\text{A.21})$$

As  $N - 1$  constantes  $w_k$  são conhecidas e tabeladas para diversas funções de base e os  $N - 1$  pontos  $x_k \in \mathcal{D}$  são determinados para estas bases de acordo com o método de integração por quadratura Gaussiana.

A solução de equações diferenciais através de métodos pseudoespectrais pode ser feita de alguns modos:

### A.2.1 Método de colocação

Supondo que estejamos interessados em resolver a equação diferencial determinada pelo operador diferencial linear  $L$  como

$$Lu(x) = J(x) \quad x \in [-1, 1]. \quad (\text{A.22})$$

Dado que a solução seja suficientemente suave podemos expandi-la em polinômios de Chebyshev

$$u(x) = \sum_{n=0}^{N-1} u_n T_n(x). \quad (\text{A.23})$$

Teremos então a equação diferencial

$$\sum_{n=0}^{N-1} LT_n(x)u_n = J(x). \quad (\text{A.24})$$

Os pontos de colocação dos polinômios de Chebyshev são conhecidos e dados por

$$x_k = \cos \frac{\pi(k+0.5)}{N-1}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (\text{A.25})$$

Podemos então calcular a equação (A.24) nestes pontos, ficando assim com  $N$  equações lineares

$$\sum_{n=0}^{N-1} LT_n(x)|_{x=x_k} u_n = J(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (\text{A.26})$$

Se estivermos nos tratando de um operador linear  $L$  de segunda ordem então teremos duas condições de contorno, que geral determinam o valor de  $u(x)$  nas extremidades do domínio. Assim, o sistema linear (A.26) deverá ter duas de suas equações substituídas por

$$\sum_{n=0}^{N-1} T_n(1) = \alpha, \quad k = 0 \quad (\text{A.27})$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} T_n(-1) = \beta, \quad k = N-1 \quad (\text{A.28})$$

sendo  $\alpha$  e  $\beta$  as condições de contorno. A solução deste sistema é computacionalmente bastante simples e retorna os valores dos coeficientes  $u_n$ , determinando completamente a solução numérica (A.23) com precisão associada ao número de coeficientes a serem determinados.

### A.2.2 Método pseudoespectral

Supondo novamente o mesmo problema da seção anterior, podemos obter a solução expandindo o termo de fonte  $J(x)$ , assim como  $u(x)$  em

$$J(x) = \sum_{n=0}^{N-1} j_n T_n(x). \quad (\text{A.29})$$

A equação (A.24) se torna então

$$\sum_{n=0}^{N-1} L T_n(x) u_n = \sum_{n=0}^{N-1} j_n T_n(x). \quad (\text{A.30})$$

Definindo o produto interno no espaço das funções como  $(\cdot, \cdot)$  podemos fazer

$$\sum_{m=0}^{N-1} (T_n(x), L T_m(x)) u_m = \sum_{m=0}^{N-1} j_m (T_n(x), T_m(x)). \quad (\text{A.31})$$

Então, a partir das propriedades de ortogonalidade dos polinômios de Chebyshev, que implicam em  $(T_n(x), T_m(x)) = N_{nm}$ , sendo  $N_{nm}$  constantes, somos levados ao sistema linear

$$\sum_{m=0}^{N-1} \frac{(T_n(x), L T_m(x))}{N_{nm}} u_m = j_n \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (\text{A.32})$$

A versão discreta dos produtos internos citados acima é dada por

$$(T_n(x), T_m(x)) = \sum_{k=0}^{N-1} w_k T_n(x_k) T_m(x_k), \quad (\text{A.33})$$

$$(T_n(x), L T_m(x)) = \sum_{k=0}^{N-1} w_k T_n(x_k) L T_m(x_k). \quad (\text{A.34})$$

O sistema linear (A.32) é sempre indeterminado. Para contornar isto troca-se a equação  $n = N - 1$  para a relação

$$u_0 = 0, \quad (\text{A.35})$$

que representa a indiferença da constante  $u_0$  frente a operadores diferenciáveis.

As condições de contorno vem da inserção da solução homogênea de

$$L u_H(x) = 0, \quad (\text{A.36})$$

em  $u(x)$  e determinar o valor de suas constantes para que a condição de contorno seja respeitada.

### A.3 Mapeamentos

As bases usadas em expansões espectrais tem domínio  $\mathcal{D}$  bem definido, que em geral não é suficientemente correspondente ao domínio  $\mathcal{D}_f$  interessante para os problemas físicos. Entretanto é possível que se faça um mapeamento

$$\mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}_f. \quad (\text{A.37})$$

Tomando em particular o caso dos polinômios de Chebyshev, onde  $\mathcal{D} \equiv [-1, 1]$ , é possível tomar os seguintes exemplos de mapeamentos,

- Algébrico finito:

$$x \in [-1, 1] \mapsto y \in [a, b], \quad (\text{A.38})$$

$$y = (b - a)x + b \quad (\text{A.39})$$

- Algébrico semi-infinito:

$$x \in [-1, 1] \mapsto r \in [0, \infty], \quad (\text{A.40})$$

$$r = L \frac{(1+x)}{(1-x)} \quad (\text{A.41})$$

- Logarítmico semi-infinito:

$$x \in [-1, 1] \mapsto r \in [0, \infty], \quad (\text{A.42})$$

$$r = -L \log(1 - x). \quad (\text{A.43})$$

Então, se desejarmos descrever um sistema físico com simetria axial e simetria reflexiva no equador em todo o espaço  $\mathcal{R}^3$ , então o domínio das coordenadas  $(r, \theta)$  é

$$r \in [0, \infty], \quad (\text{A.44})$$

$$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad (\text{A.45})$$

Então, se estamos interessados em utilizar dos polinômios de Chebyshev e de Fourier para expressar as quantidades desse sistema no formato

$$f(x) = \sum_n \sum_l f_{nl} T_n(x) \cos(l\theta), \quad (\text{A.46})$$

precisamos tomar algum mapeamento  $[-1, 1] \mapsto [0, \infty]$ .

O principal impacto do mapeamento na resolução de equações diferenciais está no fato de que as derivadas são tomadas quanto a coordenada mapeada, ou seja, temos a presença de termos como

$$\frac{d^{(m)}f(x)}{dr^{(m)}} = \sum_n f_{nl} T_n(x) \cos(l\theta). \quad (\text{A.47})$$

Então precisamos conhecer as relações  $\frac{d^{(m)}x}{dr^m}$ , que são facilmente construídas a partir do mapeamento escolhido.

#### A.4 Decomposição de domínios

Dependendo das características de determinadas partes de um sistema físico pode ser necessário escolher diferentes mapeamentos para diferentes regiões. Se, em um exemplo pertinente, quisermos descrever uma esfera rígida tomamos dois domínios naturais, a parte interna e externa da esfera. Teremos então para o domínio interno

$$r \in [0, R], \quad (\text{A.48})$$

e para o domínio externo

$$r \in [R, \infty]. \quad (\text{A.49})$$

Poderíamos então, optar por um mapeamento algébrico finito e um mapeamento qualquer semi-infinito. No problema físico estudado neste trabalho é muito comum utilizar do mapeamento externo

$$r = 1/x. \quad (\text{A.50})$$

Em particular, a decomposição de domínios é particularmente útil em sistemas com descontinuidades. No exemplo da esfera rígida temos uma descontinuidade de densidade ao chegarmos no raio  $R$  da esfera. Como a expansão pseudo-espectral requer que a função seja suficientemente suave, se tentássemos calcular a densidade em apenas um domínio  $r \in [0, \infty]$  estaríamos sujeitos a fenômeno de Gibbs.

Além disso, os métodos espectrais tem limitações em reproduzir zeros ao redor de  $\approx 10^{-6}$ . Então, se a esfera possui uma região externa muito pouco densa em comparação com as regiões internas será necessário utilizar três domínios  $\mathcal{D}_{int}$ ,  $\mathcal{D}_{ext}$  e  $\mathcal{D}_{\infty}$ , respectivamente para a região mais interna, mais externa e região exterior a esfera.

Se desejarmos decompor as funções que caracterizam o sistema físico de uma esfera rígida no  $\mathcal{R}^3$  então precisamos dos mapeamentos adequados. O que, dados a simetria do problema, significa fazer mapeamentos apenas no raio. Se quisermos, embora, descrever um objeto elíptico a simetria esférica pode não ser suficiente. Seria necessário construir um mapeamento do tipo  $r(\theta) \in [0, R(\theta)]$  para a parte interior e  $r(\theta) \in [R(\theta), \infty]$  para a parte exterior.



## Referências

- BAADE, W.; ZWICKY, F. Remarks of super-novae and cosmic rays.
- BANDYOPADHYAY, D.; CHAKRABARTY, S.; PAL, S. Quantizing magnetic field and quark-hadron phase transition in a neutron star. *Physical Review Letters*, APS, v. 79, n. 12, p. 2176, 1997.
- BAYM, G.; BETHE, H. A.; PETHICK, C. J. Neutron star matter. *Nuclear Physics A*, Elsevier, v. 175, n. 2, p. 225–271, 1971.
- BAYM, G.; PETHICK, C.; SUTHERLAND, P. The ground state of matter at high densities: equation of state and stellar models. *The Astrophysical Journal*, v. 170, p. 299, 1971.
- BONAZZOLA, S. et al. Axisymmetric rotating relativistic bodies: A new numerical approach for 'exact' solutions. *Astronomy and Astrophysics*, v. 278, p. 421–443, 1993.
- BONAZZOLA, S.; MASCHIO, G. Models of rotating neutron stars in general relativity. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *Symposium-International Astronomical Union*. [S.l.], 1971. v. 46, p. 346–351.
- CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019.
- CHATTERJEE, D.; NOVAK, J.; OERTEL, M. Magnetic field distribution in magnetars. *Physical Review C*, APS, v. 99, n. 5, p. 055811, 2019.
- DEXHEIMER, V. et al. Magnetic field distribution in strongly magnetized neutron stars. *Astronomische Nachrichten*, Wiley Online Library, v. 338, n. 9-10, p. 1052–1055, 2017.
- DEXHEIMER, V. et al. What is the magnetic field distribution for the equation of state of magnetized neutron stars? *Physics Letters B*, Elsevier, v. 773, p. 487–491, 2017.
- GLENDENNING, N. K. Neutron stars are giant hypernuclei? *The Astrophysical Journal*, v. 293, p. 470–493, 1985.
- GLENDENNING, N. K. *Compact stars: Nuclear physics, particle physics and general relativity*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

- GOURGOULHON, E. 3+ 1 formalism and bases of numerical relativity. *arXiv preprint gr-qc/0703035*, 2007.
- HARTLE, J. B. Slowly rotating relativistic stars. i. equations of structure. *The Astrophysical Journal*, v. 150, p. 1005, 1967.
- HARTLE, J. B.; THORNE, K. S. Slowly rotating relativistic stars. ii. models for neutron stars and supermassive stars. *The Astrophysical Journal*, v. 153, p. 807, 1968.
- KOMATSU, H.; ERIGUCHI, Y.; HACHISU, I. Rapidly rotating general relativistic stars—i. numerical method and its application to uniformly rotating polytropes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press Oxford, UK, v. 237, n. 2, p. 355–379, 1989.
- LATTIMER, J. M.; PRAKASH, M. Ultimate energy density of observable cold baryonic matter. *Physical Review Letters*, APS, v. 94, n. 11, p. 111101, 2005.
- LOPES, L.; MENEZES, D. On magnetized neutron stars. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2015, n. 08, p. 002, 2015.
- OPPENHEIMER, J. R.; VOLKOFF, G. M. On massive neutron cores.
- PACINI, F. Energy emission from a neutron star. v. 216, p. 567.
- PAPAPETROU, A. Champs gravitationnels stationnaires à symétrie axiale. In: *Annales de l'IHP Physique théorique*. [S.l.: s.n.], 1966. v. 4, n. 2, p. 83–105.
- RATHER, I. A. et al. Heavy magnetic neutron stars. *arXiv preprint arXiv:2104.05950*, 2021.
- TOLMAN, R. C. Static solutions of einstein's field equations for spheres of fluid.
- WALD, R. M. *General relativity*. [S.l.]: University of Chicago press, 2010.