



INSTITUTO DE FÍSICA  
Universidade Federal Fluminense

**Universidade Federal Fluminense**

Instituto de Física

Mestrado em Física

# **Simulações Numéricas de Ondas de Choque Ultrarrelativísticas**

Trabalho de Conclusão de Curso de Pós Graduação

por

Davi Dionísio de Oliveira

Orientador: Gabriel Silveira Denicol

Niterói, Maio / 2022

Davi Dionísio de Oliveira

## **Simulações Numéricas de Ondas de Choque Ultrarrelativísticas**

Dissertação apresentada ao Mestrado em Física, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestrado em Física, Universidade Federal Fluminense.

Orientador: Gabriel Silveira Denicol

Niterói

2022

Ficha catalográfica automática - SDC/BIF  
Gerada com informações fornecidas pelo autor

O48s Oliveira, Davi Dionísio de  
Simulações Numéricas de Ondas de Choque  
Ultrarrelativísticas / Davi Dionísio de Oliveira ; Gabriel  
Silveira Denicol, orientador. Niterói, 2022.  
93 f. : il.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,  
Niterói, 2022.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22409/PPGF.2022.m.15532325774>

1. Hidrodinâmica. 2. Relatividade. 3. SPH. 4. Ondas de  
Choque. 5. Produção intelectual. I. Denicol, Gabriel  
Silveira, orientador. II. Universidade Federal Fluminense.  
Instituto de Física. III. Título.

CDD -

## Agradecimentos

*Primeiramente, gostaria de agradecer à minha mãe, Cristina Tavares Dionisio de Oliveira, que me guia de um lugar cuja a física é desconhecida.*

*Agradeço ao meu pai, José Carlos Cruz de Oliveira, por sempre dar seu melhor como pai e ser o melhor professor de física que eu já tive. Agradeço a minha irmã, Danielle*

*Dionisio de Oliveira, por sempre cuidar de mim, independente da distância ou da situação. Agradeço ao*

*meu orientador, Gabriel Silveira Denicol, por todo suporte e paciência na elaboração deste trabalho.*

*Por fim, agradeço à minha companheira, Thayná Cabral Teixeira, que sempre me apoiou e me motiva a ser uma pessoa melhor.*

*Se eu vi mais longe,  
foi por estar sobre ombros de gigantes.*

Isaac Newton

## RESUMO

Ao procurarmos soluções das equações hidrodinâmicas que se propagam como ondas encontramos as ondas de choque, que são descontinuidades se propagando, no caso ideal. Como as ondas de choque não se restringem à aproximação de pequenas oscilações, elas são uteis em diversas áreas da física. Quando feita a generalização relativística das equações da hidrodinâmica é encontrada uma velocidade máxima de propagação, por conta do princípio da causalidade. O objetivo deste trabalho é verificar o fenômeno que ocorre quando a velocidade do choque é superior à essa velocidade máxima, já que este limite não foi tão amplamente estudado quanto o caso clássico. Todavia, como não há solução analítica para as equações hidrodinâmicas relativísticas dissipativas, teremos de utilizar um método numérico para resolver o problema. O método numérico utilizado é o *Smoothed particle hydrodynamics*(SPH). E, a partir de simulações numéricas, encontramos que, neste regime, há o surgimento de um segundo choque no final do choque inicial, por conta de um acúmulo de matéria. Todavia, ainda não há confirmações que este segundo choque é físico ou não.

Palavras-chave: Hidrodinâmica, Hidrodinâmica Dissipativa, Relatividade, Onda de Choque, Choque Duplo , SPH.

## ABSTRACT

We found the shock waves equations when we search for hydrodynamics equations solutions that propagate like waves, and in the ideal case they're a propagation of a discontinuity. As a result of the fact that shock waves doesn't restrict to the small perturbation limit they're very useful in several areas of physics. When it's made the relativistic generalization of the hydrodynamics equations it's found a maximum propagation speed, due the causality principle. The main goal of this dissertation is verify the phenomenon that happen when the shock speed is higher than the maximum propagation speed, since this case wasn't so studied as the classic case. Although, there aren't analytical solutions for the dissipative hydrodynamics relativistic equations so we need to use a numerical method to solve the problem. The numerical method chosen was the Smoothed particle hydrodynamics (SPH). And, after the numerical simulations we found that, in this case, has a formation of a second shock in the final part of the first one, due an accumulation of matter. However, there aren't proofs that the second shock is a physical phenomenon or not.

Keywords: Hydrodynamics, Dissipative Hydrodynamics, Relativity, Shock wave, Double Shock Wave, SPH.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Diagrama de um Volume de controle de formato genérico [12].....	13
Figura 2	Forças externas atuando sobre um elemento de fluido infinitesimal de forma cúbica [13]. .....	15
Figura 3	Posição do elemento de fluido ao longo do tempo [14].....	16
Figura 4	Esquema ilustrando a transformada de Galileu .....	22
Figura 5	Diagrama ilustrando a contração de Lorentz [16]. .....	26
Figura 6	Exemplo Onda de Choque [23]. .....	53
Figura 7	Propagação de uma onda de som de formato triangular.Com as plotagens sendo feitas com um intervalo de tempo de 1fm. ....	77
Figura 8	Evolução temporal do Modelo do Landau, com um intervalo de tempo de 0.2fm.....	77
Figura 9	Comparação para $t = 0.2$ fm.....	78
Figura 10	Comparação para $t = 0.6$ fm.....	78
Figura 11	Comparação para $t = 1.0$ fm.....	78
Figura 12	Condição inicial para o problema de Riemann para $s_1/s_2 = 2$ .....	79
Figura 13	Onda de choque se propagando para a condição inicial do problema de Riemann para $s_1/s_2 = 2$ , com intervalos de tempo de 0.2fm.....	80
Figura 14	Problema de Riemann para $s_1/s_2=2$ e $t=1$ fm.....	80
Figura 15	Problema de Riemann para $s_1/s_2 = 2$ e $t=1$ fm.....	81
Figura 16	Propagação de uma onda de choque com $\alpha = 0.1$ , $b = 5$ e $s_1/s_2 = 2$ . Com intervalo de tempo de 10 fm.....	81
Figura 17	Energia para $\alpha = 0.1$ e $b = 5$ $t=36$ fm.....	82
Figura 18	Velocidade para $\alpha = 0.1$ e $b = 5$ $t=36$ fm .....	82
Figura 19	$\Pi/p$ como função da distância para $\alpha = 0.1$ e $b = 5$ $t = 36$ fm .....	83
Figura 20	Energia para $\alpha = 0.1$ e $s_1/s_2 = 2$ $t=36$ fm .....	83
Figura 21	Velocidade para $\alpha = 0.1$ e $s_1/s_2 = 2$ $t=36$ fm .....	84
Figura 22	Viscosidade para $\alpha = 0.1$ e $s_1/s_2 = 2$ $t=36$ fm .....	84
Figura 23	Energia para $\alpha = 0.5$ e $b = 5$ $t=56$ fm.....	84
Figura 24	Velocidade para $\alpha = 0.5$ e $b = 5$ $t=56$ fm .....	85

Figura 25	Viscosidade para $\alpha = 0.5$ e $b = 5$ t=56fm .....	85
Figura 26	Energia para $\alpha = 0.5$ e $s_1/s_2 = 2$ t=56fm .....	85
Figura 27	Velocidade para $\alpha = 0.5$ e $s_1/s_2 = 2$ t=56fm .....	86
Figura 28	Viscosidade para $\alpha = 0.5$ e $s_1/s_2 = 2$ t=56fm .....	86
Figura 29	Energia para $\alpha = 1.0$ e $b = 5$ t=56fm.....	86
Figura 30	Velocidade para $\alpha = 1.0$ e $b = 5$ t=56fm .....	87
Figura 31	Viscosidade para $\alpha = 1.0$ e $b = 5$ t=56fm .....	87
Figura 32	Energia para $\alpha = 1.0$ e $s_1/s_2 = 2$ t=56fm .....	87
Figura 33	Velocidade para $\alpha = 1.0$ e $s_1/s_2 = 2$ t=56fm .....	88
Figura 34	Viscosidade para $\alpha = 1.0$ e $s_1/s_2 = 2$ t=56fm .....	88

## SUMÁRIO

1	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	10
2	<b>MECÂNICA DOS FLUIDOS</b> .....	12
2.1	Fluidos ideais .....	12
2.1.1	Equação da Continuidade .....	12
2.1.2	Equação de Euler .....	14
2.1.3	Notação Tensorial .....	17
2.2	Fluidos viscosos .....	18
2.3	Mecânica dos Fluidos Relativística .....	21
2.3.1	Leis de Conservação .....	27
2.3.2	Mecânica dos Fluidos Relativística Dissipativa .....	34
2.3.2.1	Equações de Navier-Stokes Relativística .....	34
2.3.2.2	Princípio da Causalidade e lei de Fick.....	42
2.3.2.3	Equações da Mecânica dos Fluidos Relativística Dissipativa Causal .....	44
3	<b>ONDAS DE SOM E DE CHOQUE</b> .....	47
3.1	Ondas de Som .....	47
3.1.1	Ondas sonoras no regime Não-relativístico .....	47
3.1.2	Onda de Som Relativística .....	48
3.1.3	Propagação de ondas de som .....	50
3.2	Ondas de Choque .....	52
3.2.1	Ondas de Choque Não-Relativística Ideal .....	53
3.2.2	Ondas de Choque Relativística .....	59
4	<b>MÉTODO SPH</b> .....	67
4.1	Equações Básicas do SPH .....	67
4.2	Equações de Movimento Para o SPH.....	69
4.3	Formulação do Programa.....	74
4.3.1	Viscosidade Numérica .....	75
4.3.2	Exemplos .....	76
4.3.2.1	Onda de Som .....	76

4.3.2.2	Modelo do Landau para colisões de núcleos.....	77
5	<b>ANÁLISES E DISCUSSÕES</b> .....	79
5.1	Problema de Riemann .....	79
5.2	Ondas de Choque com Viscosidade .....	80
5.2.1	Choque Duplo .....	82
6	<b>CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS</b> .....	89

## 1 INTRODUÇÃO

Temos que a única forma de solução das equações hidrodinâmicas que se propagam na forma onda, excluindo o caso de pequenas perturbações, são as ondas de choque. Estas são de suma importância em diversas áreas da física e já foram amplamente estudadas no limite clássico [1–3]. Porém, o caso relativístico, o ultrarrelativístico para ser mais exato, ainda carece de estudos. Na formulação relativística das equações da hidrodinâmica, temos a adição do princípio da causalidade, que implica em uma velocidade máxima de grupo na propagação da teoria. Logo, o objetivo deste trabalho é verificar o fenômeno que ocorre no limite onde a velocidade do choque é superior à essa velocidade máxima teórica. Como não existem soluções analíticas para as equações hidrodinâmicas relativísticas com dissipação, será utilizado um método numérico para poder simular as ondas de choque.

Começaremos com a dedução das equações básicas para a Hidrodinâmica Newtoniana utilizando os métodos propostos por Landau [4]. Para o caso ideal, um fluido com viscosidade desprezível, partiremos da conservação e da aplicação da segunda lei de Newton para um elemento de fluido para encontrar tais equações. Já para um fluido real, será feita a generalização das equações obtidas utilizando um termo de correção, referente à viscosidade.

Logo mais, introduziremos os conceitos da relatividade restrita. Neste regime, energia e momento se tornam grandezas correlacionadas que compõem o tensor de Energia-Momento. Em seguida, será feita a generalização relativística para a mecânica dos fluidos ideal a partir da equação de conservação do tensor de Energia-Momento. Em seguida, será apresentada a generalização relativística das equações de Navier-Stokes, a partir de correções nas equações de conservação do tensor de Energia-Momento e densidade de partículas.

Todavia, a versão relativística de Navier-Stokes viola o princípio da causalidade [5]. Sendo assim, iremos corrigir este problema com a adição de uma função memória, obtendo então equações equivalentes à teoria de Israel-Stewart para o caso unidimensional [6]. Temos que, a adição dessa função memória implica numa velocidade máxima de propagação da teoria, que é definida pelos parâmetros relacionados à viscosidade e ao tempo de relaxação do fluido [7].

Logo mais, procuraremos soluções das equações da hidrodinâmica que satisfaçam à

equação de onda. Encontraremos dois casos em que ela é satisfeita. O primeiro é referente à onda de som, todavia este caso é uma aproximação que só vale no regime de pequenas oscilações. Já o segundo caso é referente às de choque, que são causadas por conta de descontinuidades de grandezas termodinâmicas (como pressão, densidade de energia, entre outras) no sistema. Temos que, o segundo caso é de maior interesse, pois suas soluções são exatas e valem em qualquer regime. Um dos exemplos de sua aplicação é na descrição da formação de estrelas de Nêutrons, que emitem ondas de choque nos processos explosivos que levam à sua formação.

Além do mais, como as equações da hidrodinâmica não são lineares em geral não terão solução analítica, por conta disso buscamos soluções numéricas. Então, será introduzido um método numérico que permite a solução destas equações, conhecido como *Smoothed particle hydrodynamics* (SPH) [9] que é muito utilizado na área de astrofísica. Tal modelo consiste em descrever as interações entre as partículas do sistema e formas de interpolação para transformar as equações não lineares em equações ordinárias. E então, faremos simulações computacionais das ondas de som e do modelo de Landau para colisões de núcleos [10], com o intuito de fazer um teste de consistência do código.

Em seguida, serão apresentadas as simulações de ondas de choque, utilizando o problema de Riemann como condição inicial [11]. E então, será analisado como a variação dos parâmetros numéricos das equações da hidrodinâmica dissipativa afetam o choque. E por fim, discutiremos os fenômenos que ocorrem no limite em que a velocidade do choque é maior que a velocidade máxima encontrada na teoria. Pois, essa situação ainda não foi tão amplamente estudada. Nesse caso, há o surgimento de uma segunda onda de choque no final da primeira. Contudo, ainda não há estudos confirmando se este segundo choque é físico ou não. Seria necessário a utilização de uma simulação mais fundamental, como a equação de Boltzman para um gás, e caso este segundo choque não seja físico é necessária uma correção na teoria.

## 2 MECÂNICA DOS FLUIDOS

Neste capítulo, serão apresentados os conceitos básicos referentes à mecânica dos fluidos, que são imprescindíveis para a compreensão e modelagem de ondas de choque [4].

Para esta tese, é suficiente considerar um fluido como um conjunto de muitas partículas (em princípio, o número de partículas é considerado como infinito, de tal modo que podemos supor que o limite termodinâmico é satisfeito) que, observado sob escalas macroscópicas, pode ser efetivamente descrito como um sistema contínuo e usando poucos graus de liberdade. Nas seções abaixo, descreveremos como obter as equações de movimento para tais fluidos.

### 2.1 Fluidos ideais

Fluidos ideais correspondem a uma simplificação na qual cada elemento de fluido pode ser considerado como sempre estando em equilíbrio termodinâmico, de tal modo que trocas de calor e outros fenômenos fora do equilíbrio podem ser sempre desprezados. Além disso, um conceito importante para os fluidos é o de viscosidade, que quantifica o atrito interno que um elemento de fluido exerce sobre outro (ela é responsável pelas forças de cisalhamento quando estes estão em movimento. Quando consideramos um fluido como ideal) estas forças de cisalhamento são efetivamente ignoradas. Na prática, isto é equivalente a considerar o limite de viscosidade nula.

#### 2.1.1 Equação da Continuidade

Na descrição de sistemas macroscópicos, quantidades conservadas exercem um papel fundamental. Quando uma quantidade é conservada, podemos estabelecer uma relação entre a variação no tempo de uma determinada grandeza conservada em um volume fechado com o fluxo associado à densidade de corrente associada à quantidade conservada passando pelo mesmo volume.

Abaixo, vamos considerar a quantidade conservada como sendo a massa, pois é a quantidade mais útil para usar em uma descrição hidrodinâmica não-relativística. Ainda assim, enfatizamos que as demonstrações abaixo valem para qualquer quantidade conservada.

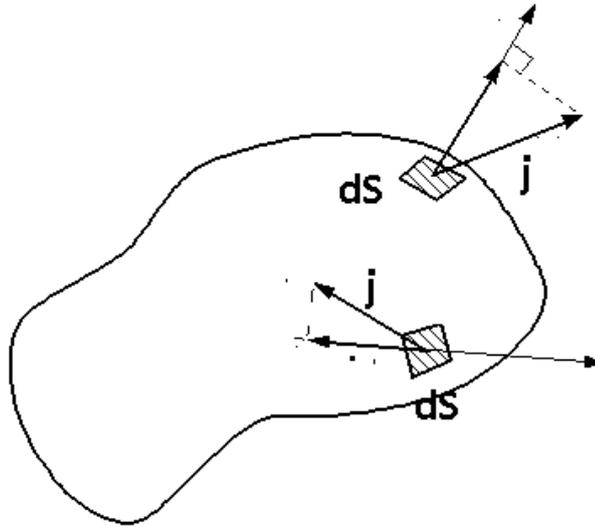


Figura 1: Diagrama de um Volume de controle de formato genérico [12].

Consideramos que a massa de um elemento de fluido em um determinado volume  $V$  delimitado por uma superfície  $\partial V$  é,

$$m = \int_V \rho dV, \quad (2.1)$$

onde  $\rho$  é a densidade de massa do fluido. A variação de massa com o tempo no volume de controle é a derivada temporal da massa total,

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, \quad (2.2)$$

A quantidade  $\frac{dm}{dt}$  é análoga à corrente elétrica, quando a quantidade conservada é a carga elétrica. Naturalmente, a corrente de massa pode ser descrita em termos do fluxo de uma densidade de corrente de massa, que aqui chamaremos de  $\mathbf{j}$ . Considerando fluidos ideais, podemos expressar a densidade de corrente como,

$$\mathbf{j} = \mathbf{v}\rho. \quad (2.3)$$

onde  $\mathbf{v}$  é a velocidade do elemento de fluido. E, temos que o fluxo de  $\mathbf{j}$  atravessando a superfície  $\partial V$  é dada pela seguinte integral,

$$- \oint_{\partial V} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.4)$$

onde o sinal de menos reflete a convenção na qual os vetores  $d\mathbf{S}$  apontam para fora da

superfície, de tal modo que o produto escalar  $\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$  é negativo se a densidade de corrente de massa estiver entrando no volume e positivo se estiver saindo. Tal esquema está representado na Figura 1.

Utilizando o teorema de Gauss, podemos escrever o fluxo de um campo atravessando um superfície fechada como a integral da divergência do campo no volume inteiro, isto é,

$$\oint_{\delta V} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV. \quad (2.5)$$

Finalmente, igualando as duas expressões obtidas para vazão mássica,

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int \nabla \cdot \mathbf{j} dV, \quad (2.6)$$

Como a expressão acima foi obtida para um elemento de volume arbitrário, para que a igualdade seja sempre verdadeira, os integrandos têm de ser iguais. Com isso, obtemos uma equação diferencial parcial, que relaciona as densidades de massa e de corrente de massa,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (2.7)$$

A equação acima é chamada de equação da continuidade e é uma representação diferencial de uma lei de conservação [4].

Na física há diversos exemplos de equações da continuidade, como para carga ou momento linear. Notamos que a demonstração acima foi desenvolvida para uma grandeza conservada escalar. Se a grandeza conservada for um tensor de ranque  $n$ , a única modificação é que seu fluxo não será mais um tensor de ranque (um vetor) e sim um tensor de ranque  $n+1$ .

### 2.1.2 Equação de Euler

O próximo passo é encontrar as equações dinâmicas para um elemento de fluido. Elementos de fluidos também satisfazem as leis de Newton, de tal modo que, se desejamos encontrar a aceleração de um elemento de fluido, devemos primeiro calcular a força resultante que atua sobre ele. No nosso caso, tais forças podem ser forças externas, como

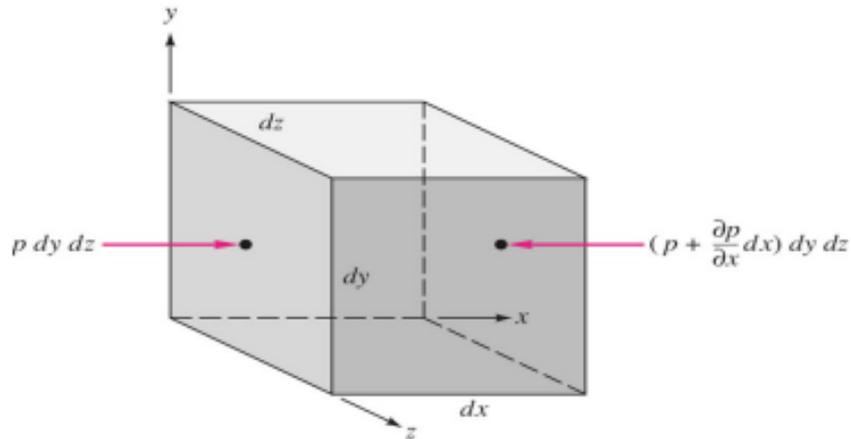


Figura 2: Forças externas atuando sobre um elemento de fluido infinitesimal de forma cúbica [13].

a gravidade ou a força eletromagnética, ou as próprias forças que os elementos de fluido exercem um no outro. Abaixo, vamos desprezar as forças externas e considerar somente as forças internas exercidas pelos elementos de fluidos.

Inicialmente, consideraremos apenas fluidos ideais, nos quais podemos desprezar as forças tangenciais (forças de atrito) entre elementos de fluido. Nesse caso, apenas forças normais são exercidas, que podem ser descritas pela pressão. Sem perder a generalidade, podemos considerar elementos de fluido infinitesimais de forma cúbica. Nesse caso, a força externa resultante atuando sobre o elemento de fluido na direção  $x$  é,

$$dF_x = p(x, y, z) dydz - p(x + dx, y, z) dydz, \quad (2.8)$$

conforme ilustrado na Figura 2. Expandindo o segundo termo em Serie de Taylor obtemos,

$$dF_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz. \quad (2.9)$$

O mesmo raciocínio pode ser aplicado para as demais direções, isto é, as direções  $y$  e  $z$ . Deste modo, usando a segunda lei de Newton leva à seguinte equação,

$$dm \mathbf{a} = d\mathbf{F}_{\text{result}} = -\nabla p dV, \quad (2.10)$$

onde  $dm$  é a massa infinitesimal do elemento de fluido em questão e  $dV = dx dy dz$  seu volume infinitesimal. Usando que a densidade de massa é dada pela razão  $\rho = dm/dV$ , obtemos a conhecida equação de Euler,

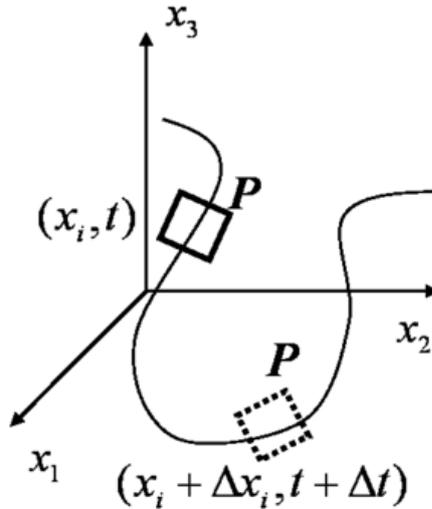


Figura 3: Posição do elemento de fluido ao longo do tempo [14]

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p. \quad (2.11)$$

É comum substituir a derivada total da velocidade utilizando a regra da cadeia, pois a posição do elemento do fluido também varia com o tempo (como ilustrado na Figura 3),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t, \mathbf{r}(t)) &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla \right) \mathbf{v}, \\ \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t, \mathbf{r}(t)) &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Onde a equação acima é conhecida como derivada material. Em seguida, expressamos a equação de Euler na sua forma mais tradicional,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (2.13)$$

A equação de Euler é uma equação não linear e com raras soluções analíticas. Desta forma, ela é comumente resolvida utilizando técnicas computacionais, como demonstraremos mais tarde nesta tese. Note que a equação de Euler somente pode ser resolvida, se a pressão puder ser especificada em termos da densidade de massa,  $p = p(\rho)$ . Nesse caso, ela pode ser resolvida acoplada à equação de continuidade para a massa, Eq. (2.7). Naturalmente, para resolver estas equações acopladas é necessário fornecer uma condição

inicial para a densidade de massa e para o campo de velocidades.

### 2.1.3 Notação Tensorial

Nesta subsecção definiremos a notação para tensores que será utilizada neste trabalho e iremos reescrever as equações anteriores. Temos então as seguintes notações,

$$\begin{aligned}\partial_t &= \frac{\partial}{\partial t} \\ \partial_i &= \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \partial_i F^i &= \nabla \cdot \mathbf{F} \\ \partial_i A &= (\nabla A)_i.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Além disso, utilizamos a notação de Einstein, na qual índices repetidos estão sempre sendo somados,

$$\sum_{i=1}^N a_i b_i \equiv a_i b_i,\tag{2.15}$$

onde os índices romanos correm de 1 a 3 e os gregos de 0 a 4. Nesta notação, temos que as equações de continuidade(2.7) e a de Euler(2.13) tornam-se, respectivamente,

$$\partial_t \rho = -\partial_k j_k.\tag{2.16}$$

$$\partial_t v_i = -v_k \partial_k v_i - \frac{1}{\rho} \partial_i p.\tag{2.17}$$

A seguir, demonstraremos que a equação de Euler pode ser reescrita na forma de uma equação de continuidade. Neste caso, veremos que a equação de Euler nada mais é do que uma equação de continuidade relacionada à conservação de momento linear. Aplicando a regra do produto da derivada temos,

$$\rho \partial_t v_i = \partial_t(\rho v_i) - v_i \partial_t \rho = \partial_t(\rho v_i) + v_i \partial_j(\rho v_j),\tag{2.18}$$

onde utilizamos a equação de continuidade para a densidade de massa e a expressão para a densidade de corrente,  $j_i = \rho v_i$ . Nesse sentido, podemos provar que a derivada total da velocidade (multiplicada pela densidade de massa) pode ser expressa como,

$$\rho \partial_t v_i + \rho v_j \partial_j v_i = \partial_t(\rho v_i) + \partial_j(\rho v_j v_i).\tag{2.19}$$

Note que a expressão acima já possui uma forma bem semelhante à de uma equação de continuidade. Expressando a  $i$ -ésima componente do gradiente de pressão como

$$\partial_i p = \partial_j (p \delta_{ij}), \quad (2.20)$$

onde  $\delta_{ij}$  é a delta de Kroenecker, que satisfaz as seguintes propriedades,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j; \\ 1, & \text{se } i = j; \end{cases}$$

Finalmente, expressamos a equação de Euler como,

$$\partial_t(\rho v_i) + \partial_j(\rho v_j v_i + p \delta_{ij}) = 0, \quad (2.21)$$

E, definindo o tensor  $\Pi_{ij}$  como,

$$\Pi_{ij} = p \delta_{ij} + \rho v_i v_j, \quad (2.22)$$

temos que a equação de Euler pode ser escrita explicitamente na forma de uma equação de continuidade,

$$\partial_t(\rho v_i) + \partial_j(\Pi_{ij}) = 0. \quad (2.23)$$

Portanto, identificamos  $\rho v_i$  como a densidade associada à quantidade conservada (nesse caso, é a  $i$ -ésima componente da densidade de momento do fluido) e  $\Pi_{ij}$  é a densidade de corrente de momento. Como o momento é um vetor, a densidade de corrente de momento tem de ser um tensor de ranque 2. Em particular, interpretamos  $\Pi_{ij}$  como a  $j$ -ésima componente da densidade de corrente da componente  $i$  de momento. Esse tensor é conhecido como tensor das tensões.

## 2.2 Fluidos viscosos

Contudo, o conceito de fluidos ideais não tem muita aplicação prática. Então, para uma abordagem mais condizente com a realidade, é necessário levar em consideração as forças de cisalhamento entre os elementos de fluido no sistema.

Para obter as equações de movimento para este caso precisamos generalizar o tensor

$\Pi_{ij}$  das tensões, incluindo na densidade de corrente de momento os termos associadas à dissipação. Vamos supor que, para um fluido não ideal, seu tensor  $\Pi_{ij}$  seja o tensor do caso ideal, mas corrigido por um termo  $\sigma'_{ij}$  que está relacionado às tensões de cisalhamento, que é a força que um elemento de fluido realiza em outro quando ocorre o movimento,

$$\begin{aligned}\Pi_{ij} &= p\delta_{ij} + \rho v_i v_j - \sigma'_{ik}, \\ \Pi_{ij} &= -\sigma_{ij} + \rho v_i v_j.\end{aligned}\tag{2.24}$$

No qual

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ik}.\tag{2.25}$$

O tensor  $\sigma'$  é o tensor das tensões do fluido, que está relacionado à transferência de momento sem a transferência de massa. Como este tensor está relacionado ao atrito entre os elementos de fluido podemos supor que ele é uma função da velocidade relativa entre os elementos de fluido. Nesse caso, este tensor deve depender de gradientes da velocidade, que quantificam a variação de velocidade entre elementos de fluidos. Em uma primeira aproximação, será feita a suposição de uma dependência linear com gradientes de velocidade. Esta aproximação será boa no limite em que as derivadas espaciais da velocidade não são muito grandes. Tal suposição, que também pode ser chamada de ansatz, pelo menos garante que os termos relacionados a  $\sigma'$  se anulam para os casos de velocidade constante ou de movimento circular uniforme. Assim, o tensor mais geral que é compatível com essas características é,

$$\sigma'_{ij} = \eta(\partial_j v_i + \partial_i v_j - \frac{2}{3}\delta_{ij}\partial_k v_k) + \zeta\delta_{ij}\partial_k v_k,\tag{2.26}$$

que é expresso desta forma para separar em uma parte com traço, e uma parte sem traço e têm como derivada,

$$\partial_i \sigma'_{ij} = -\partial_i p + \partial_k \eta(\partial_k v_i + \partial_i v_k - \frac{2}{3}\delta_{ik}\partial_l v_l) + \partial_i(\zeta\partial_l v_l),\tag{2.27}$$

onde as variáveis  $\eta$  e  $\zeta$ , introduzidas na equação acima, são constantes positivas independentes da velocidade e relacionadas à viscosidade do fluido. Para obter as equações de movimento basta acrescentar o termo de viscosidade na equação de Euler

$$\rho(\partial_t v_i + v_k \partial_k v_i) = -\partial_i p + \partial_k \eta (\partial_k v_i + \partial_i v_k - \frac{2}{3} \delta_{ik} \partial_l v_l) + \partial_i (\zeta \partial_l v_l), \quad (2.28)$$

sendo esta a forma mais geral da equação de movimento para um fluido viscoso, mas é possível fazer aproximações que simplifiquem essa fórmula. Assumindo que esses coeficientes de viscosidade são constantes obtemos a equação de Navier-Stokes

$$\rho(\partial_t v_i + v_k \partial_k v_i) = -\partial_i p + \eta \partial_k \left( \partial_k v_i + \partial_i v_k - \frac{2}{3} \delta_{ik} \partial_l v_l \right) + \zeta \partial_i (\partial_l v_l). \quad (2.29)$$

Todavia, é comum adotar a hipótese de fluido incompressível para simplificar ainda mais esta equação. Esta hipótese consiste em acompanhar um elemento de fluido em movimento, de forma que sua densidade seja constante,

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \quad (2.30)$$

utilizando a definição de derivada material,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v^i \partial_i \rho = 0 \quad (2.31)$$

além disso, a equação da continuidade nos dá,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_i (v^i \rho) = 0, \quad (2.32)$$

juntando as equações acima obtemos,

$$\partial_i v^i \rho - v^i \partial_i \rho = \rho \partial_i v^i = 0, \quad (2.33)$$

descartando a solução trivial em que  $\rho = 0$ , obtemos a consequência dessa hipótese,

$$\partial_i v^i = 0, \quad (2.34)$$

que será útil quando entrarmos na parte de relatividade e pode ser utilizada para simplificar a Eq. (2.29),

$$\rho(\partial_t v_i + v_k \partial_k v_i) = -\partial_i p + \eta \nabla^2 v_i, \quad (2.35)$$

que é a versão da equação de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis.

Apesar da equação de Navier-Stokes ser útil no regime Newtoniano ela apresenta alguns problemas. O primeiro é que ela não é linear. Logo temos poucas soluções analíticas. Outro problema é que sua generalização relativística é acausal, questão que será debatida ainda neste capítulo.

### 2.3 Mecânica dos Fluidos Relativística

Nesta parte do trabalho será abordada a formulação relativística da mecânica dos fluidos. Para esta tese não serão utilizados conceitos de relatividade geral. Assim, apenas serão apresentados conceitos de relatividade especial.

Os dois postulados que Einstein propôs que servem de base para esta teoria são:

1 – As leis da Física são as mesmas em todos os referenciais Inerciais.

2 – Constância da Velocidade da Luz.

O principal objetivo deste capítulo é escrever as leis de conservação e as equações de movimento no formato tensorial. Pois, assim elas serão invariantes à troca de referencial.

Na mecânica Newtoniana, a troca de referenciais inerciais é mediada pela transformação de Galileu, como ilustrado na Figura 4, onde adotamos a convenção de que termos com ' estão se referindo ao referencial em movimento e os termos sem ' estão se referindo ao referencial em repouso,

$$t' = t \quad (2.36)$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}t. \quad (2.37)$$

onde  $\mathbf{v}$  é a velocidade relativa entre os referenciais.

Todavia, esta transformação confronta o segundo postulado de Einstein, já que o módulo da velocidade da luz seria afetado pelo referencial. No referencial em repouso, a

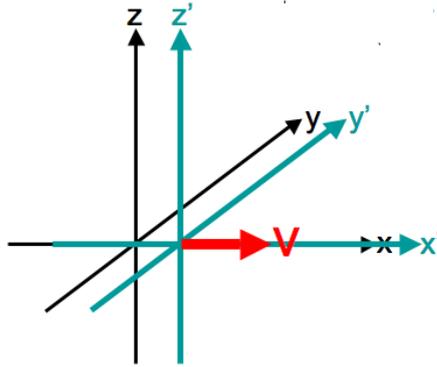


Figura 4: Esquema ilustrando a transformada de Galileu

velocidade da luz teria módulo  $c$  e no referencial em movimento seu módulo seria  $c + V$ . A nova transformação que será responsável pela troca de referenciais e da constância da velocidade da luz é conhecida como transformação de Lorentz  $\Lambda_{\nu}^{\mu}$  [16],

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} \equiv \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_1\gamma & -\beta_2\gamma & -\beta_3\gamma \\ -\beta_1\gamma & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_1^2}{\beta^2}\gamma & (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ -\beta_2\gamma & (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2}\gamma & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_2^2}{\beta^2}\gamma & (\gamma - 1)\frac{\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ -\beta_3\gamma & (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_3}{\beta^2} & (\gamma - 1)\frac{\beta_2\beta_3}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{\beta_3^2}{\beta^2}\gamma \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Sendo que, os índices 1, 2, 3 se referem, respectivamente, à coordenadas espaciais  $x, y, z$ . Além disso, o fator  $\gamma$  é definido como,

$$\gamma \equiv \frac{1}{[1 - \beta^2]^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.39)$$

e  $\beta$  é definido por,

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \quad (2.40)$$

$$\beta_i = \frac{v_i}{c}, \quad (2.41)$$

sendo que  $v$  continua sendo a velocidade relativa entre os referenciais.

É comum orientar os eixos das coordenadas do sistema de forma que a velocidade associada à transformação fique alinhada com um dos eixos (no exemplo abaixo, o eixo- $x$ ),

assim simplificando a transformação de Lorentz para,

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Uma consequência desta transformada é que o tempo também é afetado pela mudança de referencial. Assim, espaço e tempo estão relacionados e é conveniente definir um novo objeto matemático chamado de 4-vetor, ou quadrivetor. O 4-vetor posição é dado por  $x^{\mu} = (ct, \mathbf{r})$ , sendo  $c$  a magnitude da velocidade da luz no vácuo. Deste modo, a transformação de coordenadas entre dois referenciais inerciais (que se movem com velocidade relativa  $v$ ) pode ser expressa pela seguinte relação,

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu}. \quad (2.43)$$

Toda quantidade que se transforma do mesmo modo que  $x^{\mu}$  em uma mudança de referencial é chamada de 4-vetor. De maneira similar, quantidades  $A^{\alpha}\beta$  que se transformam [15],

$$A'^{\mu\nu} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\beta}^{\nu} A^{\alpha\beta}, \quad (2.44)$$

são tensores de ranque 2. De maneira análoga, podemos definir tensores de ranque 3 ou mais.

Existem 2 tipos de 4-vetores: (i) contravariantes, que acabamos de definir,  $A^{\mu}$ , e (ii) covariantes, definidos pela relação  $A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu}$ . Na definição ao lado, introduzimos a métrica  $g_{\mu\nu}$  que, na nossa convenção, é dada por  $g_{\mu\nu} \equiv \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Como definimos, 4-vetores contravariantes são expressos com índice em cima enquanto 4-vetores covariantes são expressos com índice em baixo. Um exemplo notório de 4-vetor covariante é formado pelas derivadas temporais e espaciais da seguinte forma,

$$\partial_{\mu} \equiv \left( \frac{1}{c} \partial_t, \nabla \right). \quad (2.45)$$

Note que, quando o índice é colocado em cima (4-vetor contravariante), o 4-vetor se transforma utilizando a matriz de Lorentz direta. Caso o índice seja colocado em baixo

(4-vetor covariante) ele se transformará mediado pela matriz de Lorentz inversa.

Além disso, um 4-vetor contravariante pode ser relacionado à sua contraparte covariante utilizando o tensor métrico  $g^{\mu\nu}$ ,

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu, \quad (2.46)$$

onde o contrário também vale,

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \quad (2.47)$$

As métricas carregam as informações referentes à geometria do espaço em que estamos trabalhando, e com elas é possível definir o produto escalar entre 4-vetores,

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} \equiv g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^\mu y_\mu, \quad (2.48)$$

e o traço de um tensor  $A^{\mu\nu}$ ,

$$Tr(A) \equiv g_{\mu\nu} A^{\mu\nu}. \quad (2.49)$$

Cada espaço-tempo têm um métrica própria mas para este trabalho estaremos nos limitando ao espaço de Minkowski, que é utilizado para descrever um espaço plano. Nessa dissertação, usaremos a seguinte convenção,

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

que têm as propriedades,

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \quad (2.51)$$

e,

$$\eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} = \delta_\nu^\mu. \quad (2.52)$$

Um 4-vetor muito importante para a descrição hidrodinâmica relativística é a 4-velocidade, ou quadrivelocidade, usualmente representada pela letra  $u$ ,

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (2.53)$$

onde  $\tau$  é o tempo próprio. A 4-velocidade apresenta as seguintes propriedades,

$$u^i = \gamma \frac{dx^i}{dt} = \gamma v^i, \quad (2.54)$$

$$u^0 = \gamma c, \quad (2.55)$$

ou seja, as componentes espaciais da 4-velocidade não são representadas pela velocidade em si, mas pelo produto da velocidade com o fator  $\gamma$ . A componente zero deste 4-vetor é o próprio fator  $\gamma$  multiplicado pelo módulo da velocidade da luz. Além disso, podemos reescrever  $\gamma$  como função da 4-velocidade,

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}} \quad (2.56)$$

com  $\mathbf{u} = \gamma \mathbf{v}$ ,

$$\gamma^2 = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}, \quad (2.57)$$

logo,

$$\gamma^2 = 1 + \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}. \quad (2.58)$$

Note que a 4-velocidade é normalizada, no sentido que,

$$u^\mu u_\mu = \gamma^2 - \mathbf{u}^2 = 1, \quad (2.59)$$

e satisfaz a seguinte relação de ortogonalidade,

$$u_\nu \partial_\mu u^\nu = \partial_\mu (u^\nu u_\nu) - u^\nu \partial_\mu u_\nu, \quad (2.60)$$

utilizando o fato de que a métrica de Minkowski comuta com a derivada,

$$u_\nu \partial_\mu u^\nu = u^\nu \partial_\mu u_\nu, \quad (2.61)$$

logo,

$$u_\nu \partial_\mu u^\nu = 0. \quad (2.62)$$

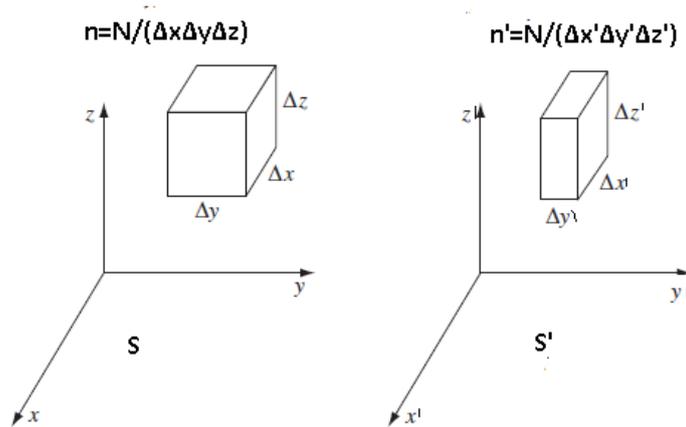


Figura 5: Diagrama ilustrando a contração de Lorentz [16].

É também útil definir a derivada total relativística

$$u^\mu \partial_\mu \equiv \frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}, \quad (2.63)$$

que difere da derivada total usual por um fator  $\gamma$  (fenômeno da dilatação temporal).

Além da 4-velocidade outro 4-vetor de grande importância para este trabalho é o 4-momento, que tem a seguinte forma:

$$P^\mu = \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p} \right), \quad (2.64)$$

Onde  $E$  se refere à energia e  $\mathbf{p}$  ao momento. Assim, energia e momento estão relacionados de forma semelhante à forma que espaço e tempo, pois, agora não são mais grandezas independentes e sim componentes de um 4-vetor.

É conhecido que a troca de referencial causa uma dilatação temporal e uma contração espacial, conhecida como contração de Lorentz. Por conta disto temos que a densidade de partículas não pode ser um invariante sob transformações de Lorentz, como ilustrado na Figura 5.

Na verdade, a densidade de uma quantidade conservada e a sua respectiva densidade de corrente devem formar um 4-vetor. Um ansatz simples que pode ser usado é o do produto da densidade da quantidade conservada,  $n$ , multiplicado pela 4-velocidade,  $u^\mu$ ,

$$j^\mu = n u^\mu. \quad (2.65)$$

Nesse caso, a densidade da quantidade conservada em um referencial arbitrário é  $\gamma n$ , evidenciando os efeitos da contração de Lorentz na densidade, enquanto a densidade de corrente é dada por  $\gamma n \mathbf{v}$ .

Temos que, na relatividade, o cálculo para soma de velocidades muda, pois a versão Newtoniana  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{W}$  pode violar o segundo postulado da relatividade geral. Onde  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}'$  são as velocidades de dois referenciais vistas de um de um terceiro referencial e  $\mathbf{W}$  é a velocidade relativa entre os 2 referenciais observados.

Para deduzir a soma de velocidades relativística vamos partir da transformação de Lorentz para calcular a variação de tempo e espaço, para o caso de velocidade em apenas uma direção, como :

$$dx' = \gamma(dx - W dt) \quad (2.66)$$

$$dt' = \gamma \left( dt - \frac{W}{c^2} dx \right), \quad (2.67)$$

então, dividindo uma equação pela outra,

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - W dt}{dt - \frac{W}{c^2} dx}. \quad (2.68)$$

Como  $v' = \frac{dx'}{dt'}$  e  $v = \frac{dx}{dt}$ , podemos reescrever a soma de velocidades relativística como, [16]

$$v' = \frac{v - W}{1 - \frac{Wv}{c^2}}. \quad (2.69)$$

Neste trabalho estaremos utilizando a convenção de  $c = 1$ . Por conta disso ele será omitido a partir de agora.

### 2.3.1 Leis de Conservação

Vimos, nas seções passadas, que as equações da hidrodinâmica ideal são essencialmente compostas por equações de continuidade. Equações de continuidade são consistentes com a relatividade, pois o conceito de quantidade conservada é universal e não é afetado pelas mudanças impostas por Einstein à mecânica Newtoniana. Deste modo, deveria ser possível expressar a equação de continuidade para uma quantidade conservada escalar em uma forma explicitamente covariante, i.e. em termos de 4-vetores. De fato, a

equação de continuidade pode ser expressa como,

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (2.70)$$

onde  $j^\mu$  é um 4-vetor composto pela densidade da quantidade conservada,  $n$ , e sua respectiva densidade de corrente,  $\mathbf{j}$ , como discutido na seção anterior. Isto é,

$$j^\mu = (n, \mathbf{j}). \quad (2.71)$$

A principal diferença é que, em sistemas relativísticos, a massa não pode ser utilizada como quantidade conservada, pois ela pode ser convertida em energia. O próprio número de partícula não é conservado, dado que é permitido produzir partículas do vácuo, pela energia do campo. Nesse sentido, as quantidades escalares realmente conservadas na Física são as cargas elétrica, bariônica, dentre outras.

A equação de movimento para fluidos, dada pela equação de Euler, nada mais é do que uma manifestação da lei de conservação de momento linear. Esta lei de conservação não está expressa em termos de uma igualdade entre 4-vetores (ou entre tensores, no sentido da transformação de Lorentz) e tem de ser generalizada. Da mesma forma que no caso Newtoniano temos o tensor  $\Pi_{ij}$ , que representa a densidade de corrente de momento linear, será definido um tensor que têm o mesmo papel e que se transforme como um tensor por transformações de Lorentz.

Sabemos que energia e momento não são quantidades independentes na relatividade, de tal modo que se transformam conjuntamente sob transformações de Lorentz (formando um 4-vetor). De maneira similar, esperamos que as leis de conservação de energia e momento, na relatividade, não apareçam como equações de continuidade distintas, como no caso não relativístico, mas componham uma mesma equação. Para isso, definimos um tensor de ranque 2, chamado de tensor de Energia-Momento,  $T^{\mu\nu}$ , tal que a lei de conservação de energia e de momento possam ser expressas unicamente pela seguinte equação de continuidade,

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.72)$$

Nesse caso, a componente  $\nu = 0$  representa a conservação de energia e as componentes espaciais,  $\nu = 1, 2, 3$  representam a conservação de momento. Desse modo, interpretamos

as componentes deste tensor da seguinte forma:

- $T^{00}$  como a densidade de energia,
- $T^{i0}$  como a  $i$ -ésima componente da densidade de corrente de energia,
- $T^{0i}$  como a  $i$ -ésima componente da densidade de momento,
- $T^{ji}$  como a  $j$ -ésima componente da densidade de corrente da  $i$ -ésima componente do momento.

Usando que  $T^{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$ , podemos escrever a força que atua em um elemento de área  $ds^i$  do fluido como,

$$dF^i = T^{ji} ds_j, \quad (2.73)$$

sendo  $F^i$  a componente  $i$  da força aplicada na superfície do elemento. Consideramos o caso de um fluido ideal, onde o princípio de Pascal é válido. Nesse caso, no referencial de repouso de um elemento de fluido, tal força deve ser perpendicular à superfície e igual a pressão,

$$dF^i = p ds_i. \quad (2.74)$$

Comparando as duas expressões anteriores, concluímos que, no referencial de repouso do fluido,

$$T^{ji} = p \delta_j^i. \quad (2.75)$$

Ao mesmo tempo, no referencial de repouso do fluido,  $T^{00}$  pode ser identificado como a densidade de energia interna e  $T^{0i} = 0$ , pois a densidade de momento é nula. Finalmente, podemos escrever o tensor de energia e momento no referencial de repouso do fluido como,

$$T_{RR}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad (2.76)$$

onde  $\epsilon$  é a densidade de energia interna do fluido e  $p$  é a pressão termodinâmica. De modo geral  $p$  é dado por uma equação de estado do tipo  $p = p(n, \epsilon)$ . A sigla RR indica que o tensor de energia e momento está no referencial de repouso.

Partindo desta expressão, podemos encontrar a forma do tensor de energia e momento no referencial do laboratório aplicando um *boost de Lorentz*. Considerando que

4-velocidade no referencial de repouso local seja  $u = (1, 0, 0, 0)$ , a equação mais geral que descreve o tensor da Eq. (2.76) é,

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu - \eta^{\mu\nu} p, \quad (2.77)$$

com  $\eta^{\mu\nu}$  sendo a métrica de Minkowski.

É conveniente definir um operador de projeção ao subespaço ortogonal à 4-velocidade,  $\Delta^{\mu\nu}$ , como,

$$\Delta^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu. \quad (2.78)$$

Também é conveniente expressar este operador da seguinte forma,

$$\Delta_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu - u^\mu u_\nu. \quad (2.79)$$

É fácil demonstrar que,

$$\Delta^{\mu\alpha} \Delta_\alpha^\nu = \Delta^{\mu\nu}, \quad (2.80)$$

e

$$\Delta^{\mu\nu} \Delta_{\mu\nu} = 3, \quad (2.81)$$

Como este operador retorna apenas a parte ortogonal à 4-velocidade, ao aplicarmos ele na própria 4-velocidade ele retorna 0,

$$\Delta^{\mu\nu} u_\nu = 0. \quad (2.82)$$

Assim, podemos reescrever o Tensor energia momento em função deste operador

$$T^{\mu\nu} = \epsilon u^\mu u^\nu - \Delta^{\mu\nu} p. \quad (2.83)$$

É conveniente decompor a equação de continuidade associada à conservação de energia e momento, 2.72, em uma componente paralela e outra ortogonal à 4-velocidade. A componente paralela é obtida da seguinte forma,

$$u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.84)$$

sendo que,

$$\partial_\mu(u_\nu T^{\mu\nu}) = u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} + T^{\mu\nu} \partial_\mu u_\nu, \quad (2.85)$$

agora, substituindo pela expressão do tensor de Energia-Momento , dado pela Eq. (2.83):

$$u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu [\epsilon u^\mu u^\nu u_\nu - \Delta^{\mu\nu} u_\nu p] - [\epsilon u^\mu u^\nu - \Delta^{\mu\nu} p] \partial_\mu u_\nu \quad (2.86)$$

em seguida, utilizando as Eqs.(2.59),(2.62)e(2.82),

$$u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu (\epsilon u^\mu) - p \Delta^{\mu\nu} \partial_\mu u_\nu \quad (2.87)$$

com,

$$\partial_\mu \epsilon u^\mu = \frac{d\epsilon}{d\tau} + \epsilon \partial_\mu u^\mu, \quad (2.88)$$

e,

$$\Delta^{\mu\nu} \partial_\mu u_\nu = [\eta^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu] \partial_\mu u_\nu = \partial_\mu u^\mu, \quad (2.89)$$

juntando as equações acima obtemos

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} + (\epsilon + p) \partial_\mu u^\mu = 0, \quad (2.90)$$

onde a expressão acima é referente à equação de movimento para a densidade de energia.

Agora, tomando a parte da equação que é ortogonal à 4-velocidade,

$$\Delta_\nu^\lambda \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.91)$$

de forma análoga ao que fizemos anteriormente para a parte paralela, podemos reescrever a relação acima como,

$$\partial_\mu \Delta_\nu^\lambda T^{\mu\nu} - T^{\mu\nu} \partial_\mu \Delta_\nu^\lambda = 0. \quad (2.92)$$

Sendo a derivada do projetor,

$$\partial_\mu \Delta_\nu^\lambda = -\partial_\mu u^\lambda u_\nu. \quad (2.93)$$

e,

$$\begin{aligned}\partial_\mu \Delta_\nu^\lambda T^{\mu\nu} &= \partial_\mu (\delta_\nu^\lambda - u^\lambda u_\nu) [\epsilon u^\nu u^\mu - \Delta^{\mu\nu} p] \\ \partial_\mu \Delta_\nu^\lambda T^{\mu\nu} &= -\partial_\mu \Delta^{\lambda\mu} p.\end{aligned}\tag{2.94}$$

Assim, podemos reescrever a Eq. (2.92) como,

$$-\partial_\mu \Delta^{\lambda\mu} p + [\epsilon u^\nu u^\mu - \Delta^{\mu\nu} p] \partial_\mu u^\lambda u_\nu = 0\tag{2.95}$$

utilizando que,

$$\begin{aligned}u^\nu u^\mu \partial_\mu (u^\lambda u_\nu) &= u^\mu u^\nu u_\nu \partial_\mu u^\lambda + u^\mu u^\lambda u^\nu \partial_\mu u_\nu, \\ u^\nu u^\mu \partial_\mu (u^\lambda u_\nu) &= u^\mu \partial_\mu u^\lambda.\end{aligned}\tag{2.96}$$

obtemos a seguinte equação de movimento,

$$(\epsilon + p) u^\mu \partial_\mu u^\lambda - \Delta^{\lambda\mu} \partial_\mu p = 0,\tag{2.97}$$

que é a generalização relativística para a equação de Euler.

Também é importante definir a equação relativística para o fluxo de cargas. Definimos o 4-fluxo de partículas  $n^\mu$  de forma que no referencial de repouso a componente 0 seja igual a densidade de partículas  $n$  e as demais componentes sejam nulas.

$$\begin{aligned}n_{RR}^0 &= n, \\ n_{RR}^i &= 0.\end{aligned}\tag{2.98}$$

A partir desta condição, podemos generalizar para qualquer referencial utilizando um boost de Lorentz

$$n^\mu = n u^\mu,\tag{2.99}$$

sendo  $n$  um escalar. E, tal qual para o tensor de Energia-Momento, vamos ter uma lei de conservação associada ao 4-fluxo de partículas,

$$\partial_\mu n^\mu = 0,\tag{2.100}$$

que também pode ser escrita como,

$$\partial_\mu n^\mu = n\partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\nu n, \quad (2.101)$$

e, utilizando a Eq. (2.63),

$$\frac{dn}{d\tau} + n\partial_\mu u^\mu = 0, \quad (2.102)$$

que é a equação da continuidade para o fluxo de cargas.

Por fim, podemos encontrar uma equação para a entropia. Utilizando a relação termodinâmica,

$$d\epsilon = Tds + \mu dn, \quad (2.103)$$

sendo  $s$  a densidade de entropia,  $T$  a temperatura e  $\mu$  o potencial químico. Obtemos então,

$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{1}{T} \frac{d\epsilon}{d\tau} - \frac{\mu}{T} \frac{dn}{d\tau}, \quad (2.104)$$

agora, aplicando as Eqs. (2.90) e (2.102),

$$\frac{ds}{d\tau} = -\frac{\epsilon + p}{T} \partial_\mu u^\mu + \frac{\mu n}{T} \partial_\mu u^\mu, \quad (2.105)$$

e, utilizando a relação Euler,

$$\epsilon + p = Ts + \mu n, \quad (2.106)$$

podemos reescrever a expressão anterior como,

$$\frac{ds}{d\tau} + s\partial_\mu u^\mu = 0, \quad (2.107)$$

por fim, escrevemos,

$$\partial_\mu (su^\mu) = 0. \quad (2.108)$$

Identificamos  $su^\mu$  como sendo a 4-corrente de entropia  $S^\mu$ ,

$$S^\mu = su^\mu, \quad (2.109)$$

logo,

$$\partial_\mu S^\mu = 0. \quad (2.110)$$

Ou seja, para fluidos ideais a entropia é conservada.

### 2.3.2 Mecânica dos Fluidos Relativística Dissipativa

Nessa seção será abordada uma descrição mais realista para os fluidos relativísticos, e também mostraremos o motivo da generalização relativística das equações Navier-Stokes não funcionarem.

#### 2.3.2.1 Equações de Navier-Stokes Relativística

Nesta subseção iremos encontrar as equações para fluidos com dissipação, devida à viscosidade e à condutividade térmica, a partir da generalização relativística da teoria de Navier-Stokes e comentar sobre alguns de seus problemas fundamentais.

Primeiramente, quando consideramos um fluido no regime dissipativo, não podemos mais assumir a forma (2.77) para o tensor de energia e momento. Isso ocorre pois o princípio de Pascal não é mais aplicável e novas forças tangenciais (de fricção) atuam entre elementos de fluido. Além disso, trocas de calor podem ocorrer entre elementos de fluidos adjacentes. Descrever todas essas forças quantitativamente é um trabalho não trivial. Nessa seção, seguiremos a descrição feita por Landau [4] e incluiremos efeitos dissipativos na forma de correções ao tensor de Energia-Momento no equilíbrio.

Portanto, escrevemos o tensor de Energia-Momento Eq. (2.77) e a 4-corrente de carga com as seguintes correções, devido a dissipação,  $\tau^{\alpha\beta}$  e  $\nu^\alpha$ , respectivamente, de tal modo que

$$T^{\mu\nu} = \epsilon w^\mu u^\nu - \Delta^{\mu\nu} p + \tau^{\mu\nu}, \quad (2.111)$$

e,

$$n^\alpha = n u^\alpha + \nu^\alpha \quad (2.112)$$

sendo  $\tau^{\mu\nu}$  a correção relacionada à dissipação por conta das forças de fricção e efeitos de condutividade térmica e a correção  $\nu^\alpha$  relacionada à dissipação devido a efeitos de difusão de partículas. Naturalmente, as equações de continuidade associadas à conservação de energia, momento e carga continuam válidas, de tal modo que temos

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.113)$$

e,

$$\partial_\alpha n^\alpha = 0. \quad (2.114)$$

Antes de prosseguirmos com os cálculos, é importante fazer uma discussão sobre os valores das grandezas termodinâmicas fora do equilíbrio. Em um estado de equilíbrio, é possível determinar  $\epsilon(T, \mu)$  e  $n(T, \mu)$  como funções da temperatura e do potencial químico. Todavia, fora do equilíbrio, essas definições não são mais válidas e somos obrigados a encontrar novas definições para essas grandezas. Como passo inicial, mantemos a interpretação das variáveis  $\epsilon$  e  $n$  como as densidades de energia e partícula, respectivamente, no referencial de repouso. Além disso, impomos que essas quantidades são funções da temperatura e potencial químico como se o sistema estivesse em equilíbrio. Isto é,

$$\epsilon(T, \mu) \equiv T_{RR}^{00} \quad (2.115)$$

e,

$$n(T, \mu) \equiv n_{RR}^0. \quad (2.116)$$

Estas condições impõem que as correções fora do equilíbrio devem satisfazer as seguintes condições, no referencial de repouso,

$$\tau_{RR}^{00} = 0 \quad (2.117)$$

e,

$$\nu_{RR}^0 = 0. \quad (2.118)$$

Em um referencial arbitrário, estas condições levam a

$$u_\mu u_\nu \tau^{\mu\nu} = 0, \quad (2.119)$$

e,

$$u_\mu \nu^\mu = 0. \quad (2.120)$$

Agora que definimos a densidade de energia e de partículas, precisamos definir a velocidade do fluido. Em equilíbrio, a velocidade pode ser determinada encontrando o referencial onde o fluido está localmente em equilíbrio estático. Este referencial corresponde ao referencial onde não há fluxo de energia nem de partículas. Em um sistema dissipativo,

tal referencial não existe de modo geral. Este problema geralmente é resolvido, definindo a velocidade ou pelo referencial onde não há fluxo de energia (referencial de Landau) ou pelo referencial onde não há fluxo de partículas ou carga (referencial de Eckart). Nesta dissertação, usaremos a prescrição de Landau, que explicaremos a seguir.

Landau definiu a 4-velocidade como um auto-vetor do tensor de energia e momento (com auto-valor igual a densidade de energia)

$$T^{\mu\nu}u_\nu \equiv \varepsilon u^\mu. \quad (2.121)$$

Esta definição garante que  $T_{RR}^{0i} = 0$ , ou seja, que não há fluxo de momento ou de energia no referencial de repouso. A prescrição de Landau para a 4-velocidade impõe algumas restrições adicionais à correção  $\tau^{\mu\nu}$ . É fácil verificar que este tensor deve ser ortogonal à 4-velocidade,

$$\tau^{\mu\nu}u_\nu = 0. \quad (2.122)$$

Agora, podemos retornar para as leis de conservação. É fácil encontrar as correções nas Eqs. (2.90),(2.97),(2.102) respectivamente ,

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} + (\varepsilon + p)\partial_\mu u^\mu + u_\nu\partial_\mu\tau^{\mu\nu} = 0, \quad (2.123)$$

$$(\varepsilon + p)u^\mu\partial_\mu u^\lambda - \Delta^{\lambda\mu}\partial_\mu p + \Delta^\lambda_\nu\partial_\mu\tau^{\mu\nu} = 0, \quad (2.124)$$

$$\frac{dn}{d\tau} + n\partial_\mu u^\mu + \partial_\mu\nu^\mu = 0, \quad (2.125)$$

Podemos encontrar uma equação para o fluxo de entropia de forma análoga ao que fizemos no caso ideal. Utilizando a relação (2.103),

$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{1}{T}\frac{d\varepsilon}{d\tau} - \frac{\mu}{T}\frac{dn}{d\tau}, \quad (2.126)$$

aplicando as Eqs. (2.123) e (2.125),

$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{1}{T}(\mu n - \varepsilon - p)\partial_\mu u^\mu - \frac{1}{T}u_\nu\partial_\mu\tau^{\mu\nu} + \frac{\mu}{T}\partial_\mu\nu^\mu \quad (2.127)$$

agora, com a relação (2.106),

$$\frac{ds}{d\tau} + s\partial_\mu u^\mu + \frac{1}{T}u_\nu\partial_\mu\tau^{\mu\nu} - \frac{1}{T}\partial_\mu\nu^\mu = 0. \quad (2.128)$$

Além disso, é fácil obter as seguintes relações matemáticas,

$$\partial_\mu s = \frac{ds}{d\tau} + s\partial_\mu, \quad (2.129)$$

$$\partial_\mu \left( \frac{1}{T}u_\nu\tau^{\mu\nu} \right) = \frac{1}{T}u_\nu\partial_\mu\tau^{\mu\nu} + \frac{1}{T}\tau^{\mu\nu}\partial_\mu u_\nu - u_\nu\tau^{\mu\nu}\frac{1}{T^2}\partial_\mu T, \quad (2.130)$$

$$\partial_\mu \left( \frac{\mu}{T}\nu^\mu \right) = \frac{\mu}{T}\partial_\mu\nu^\mu + \nu^\mu\partial_\mu \left( \frac{\mu}{T} \right), \quad (2.131)$$

por fim, encontramos,

$$\partial_\mu \left( su^\mu + \frac{1}{T}u_\nu\tau^{\mu\nu} - \frac{\mu}{T}\nu^\mu \right) = \frac{1}{T}\tau^{\mu\nu}\partial_\mu u_\nu - u_\nu\tau^{\mu\nu}\frac{1}{T^2}\partial_\mu T - \nu^\mu\partial_\mu \left( \frac{\mu}{T} \right). \quad (2.132)$$

mais uma vez podemos interpretar o termo à esquerda da equação como sendo a 4-corrente de entropia  $S^\mu$ , só que agora fora do equilíbrio,

$$S^\mu = su^\mu + \frac{1}{T}u_\nu\tau^{\mu\nu} - \frac{\mu}{T}\nu^\mu, \quad (2.133)$$

para finalizar

$$\partial_\mu S^\mu = \frac{1}{T}\tau^{\mu\nu}\partial_\mu u_\nu - u_\nu\tau^{\mu\nu}\frac{1}{T^2}\partial_\mu T - \nu^\mu\partial_\mu \left( \frac{\mu}{T} \right). \quad (2.134)$$

Sendo esta a expressão para a variação de entropia.

Agora, para prosseguirmos é necessário reescrever o tensor de Energia-Momento (2.111) na sua forma decomposta em relação à 4-velocidade. Para isso, vamos decompor um tensor simétrico genérico  $A^{\mu\nu}$  e depois fazemos as trocas de variáveis. Definindo as grandezas,

$$\alpha \equiv u_\mu u_\nu A^{\mu\nu}, \quad (2.135)$$

$$\beta \equiv -\frac{1}{3}\Delta_{\mu\nu}A^{\mu\nu}, \quad (2.136)$$

$$\alpha^\lambda \equiv \Delta_\mu^\lambda A^{\mu\nu}, \quad (2.137)$$

$$\alpha^{\mu\nu} \equiv \Delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} A^{\alpha\beta}, \quad (2.138)$$

sendo  $\Delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$  um operador projetor que nos dá uma projeção simétrica e sem traço, que é definido por,

$$\Delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\Delta_{\alpha}^{\mu}\Delta_{\beta}^{\nu} + \frac{1}{2}\Delta_{\beta}^{\mu}\Delta_{\alpha}^{\nu} - \frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu}\Delta_{\alpha\beta}. \quad (2.139)$$

É fácil mostrar que,

$$u_{\mu}\Delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\Delta_{\alpha}^{\mu}u_{\mu}\Delta_{\beta}^{\nu} + \frac{1}{2}\Delta_{\beta}^{\mu}u_{\mu}\Delta_{\alpha}^{\nu} - \frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu}u_{\mu}\Delta_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.140)$$

Também é simples mostrar que  $\alpha^{\lambda}$  e  $\alpha^{\mu\nu}$  são ortogonais à  $u^{\mu}$ ,

$$u^{\mu}\alpha^{\lambda} = \Delta_{\mu}^{\lambda}u^{\mu}A^{\mu\nu} = 0, \quad (2.141)$$

$$u^{\mu}\alpha^{\mu\nu} = u^{\mu}\Delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu}A^{\alpha\beta} = 0. \quad (2.142)$$

Dada a definição do operador projetor (2.78) podemos reescrever a métrica como,

$$\eta^{\mu\nu} = \Delta^{\mu\nu} + u^{\mu}u^{\nu}. \quad (2.143)$$

Assim, a relação,

$$A^{\mu\nu} = \eta_{\alpha}^{\mu}\eta_{\beta}^{\nu}A^{\alpha\beta}, \quad (2.144)$$

pode ser reescrita como,

$$A^{\mu\nu} = (\Delta_{\alpha}^{\mu} + u^{\mu}u_{\alpha})(\Delta_{\beta}^{\nu} + u^{\nu}u_{\beta})A^{\alpha\beta}, \quad (2.145)$$

que resulta em,

$$A^{\mu\nu} = u^{\mu}u^{\nu}\alpha + u^{\nu}\alpha + u^{\mu}\beta^{\mu} + \Delta_{\alpha}^{\mu}\Delta_{\beta}^{\nu}A^{\alpha\beta}. \quad (2.146)$$

Podemos então, utilizar o fato do tensor  $A^{\mu\nu}$  ser simétrico para reescrever o ultimo termo da equação acima como,

$$\Delta_{\alpha}^{\mu}\Delta_{\beta}^{\nu}A^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\Delta_{\alpha}^{\mu}\Delta_{\beta}^{\nu} + \Delta_{\beta}^{\mu}\Delta_{\alpha}^{\nu})A^{\alpha\beta}. \quad (2.147)$$

É conveniente ainda somar e subtrair o termo  $\frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu}\Delta_{\alpha\beta}$  de tal modo que,

$$\Delta_{\alpha}^{\mu}\Delta_{\beta}^{\nu}A^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\Delta_{\alpha}^{\mu}\Delta_{\beta}^{\nu} + \Delta_{\beta}^{\mu}\Delta_{\alpha}^{\nu} - \frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu}\Delta_{\alpha\beta}\right)A^{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu}\Delta_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta}, \quad (2.148)$$

assim, encontramos a relação,

$$\Delta_{\alpha}^{\mu}\Delta_{\beta}^{\nu}A^{\alpha\beta} = \alpha^{\mu\nu} - \beta\Delta^{\mu\nu}, \quad (2.149)$$

finalmente, podemos escrever o tensor  $A^{\mu\nu}$  como,

$$A^{\mu\nu} = u^{\mu}u^{\nu}\alpha - \beta\Delta^{\mu\nu} + u^{\nu}\alpha + u^{\mu}\beta^{\mu} + \alpha^{\mu\nu}. \quad (2.150)$$

Para encerrar esta discussão, vamos mostrar que o traço de  $\alpha^{\mu\nu}$  é nulo,

$$\eta_{\mu\nu}\alpha^{\mu\nu} = (\Delta_{\mu\nu} + u_{\mu}u_{\nu}) \left( \frac{1}{2}\Delta_{\alpha}^{\mu}\Delta_{\beta}^{\nu} + \frac{1}{2}\Delta_{\beta}^{\mu}\Delta_{\alpha}^{\nu} - \frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu}\Delta_{\alpha\beta} \right) \quad (2.151)$$

temos que o produto da 4 velocidade pelo projetor é sempre 0,

$$\eta_{\mu\nu}\alpha^{\mu\nu} = \Delta_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2}\Delta_{\alpha}^{\mu}\Delta_{\beta}^{\nu} + \frac{1}{2}\Delta_{\beta}^{\mu}\Delta_{\alpha}^{\nu} - \frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu}\Delta_{\alpha\beta} \right) \quad (2.152)$$

utilizando as propriedades do Projetor (2.80) e (2.81),

$$\eta_{\mu\nu}\alpha^{\mu\nu} = \left( \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\Delta_{\alpha\beta} - \frac{3}{3}\Delta_{\alpha\beta} \right) = 0. \quad (2.153)$$

Agora, vamos aplicar a relação (2.150) no tensor de Energia-Momento (2.111).

$$\alpha = u_{\mu}u_{\nu}T^{\mu\nu} = \epsilon. \quad (2.154)$$

$$\beta = -\frac{1}{3}\Delta_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = P + \Pi, \quad (2.155)$$

com,

$$\Pi \equiv -\frac{1}{3}\Delta\tau^{\mu\nu}. \quad (2.156)$$

$$\alpha^{\mu} = \Delta_{\alpha}^{\mu}T_{\nu}^{\alpha} = q^{\mu}, \quad (2.157)$$

sendo,

$$q^{\mu} \equiv u_{\mu}\tau^{\mu\nu}. \quad (2.158)$$

$$\alpha^{\mu\nu} = \Delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu}T^{\mu\nu} = \pi^{\mu\nu}, \quad (2.159)$$

com,

$$\pi^{\mu\nu} \equiv \Delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \tau^{\alpha\beta}. \quad (2.160)$$

Assim, o tensor de Energia-Momento pode ser reescrito como,

$$T^{\mu\nu} = \epsilon u^\mu u^\nu - (p + \Pi) \Delta^{\mu\nu} + q^\mu u^\nu + q^\nu u^\mu + \pi^{\mu\nu}. \quad (2.161)$$

Utilizando a Eq. (2.160) podemos escrever a relação,

$$\tau^{\mu\nu} = \pi^{\mu\nu} - \Delta^{\mu\nu} \Pi + q^\mu u^\nu + q^\nu u^\mu. \quad (2.162)$$

Aplicando a equação acima na equação para o fluxo de entropia (2.132) obtemos,

$$\partial_\mu \left( s u^\mu + \frac{1}{T} u_\nu \tau^{\mu\nu} - \frac{\mu}{T} \nu^\mu \right) = \frac{1}{T} \pi^{\mu\nu} \partial_\mu u_\nu - \frac{1}{T} \Pi \partial_\mu u^\mu + \frac{1}{T} q^\mu \left( \frac{d u_\mu}{d\tau} - \frac{1}{T} \partial_\mu T \right) - \nu^\mu \partial_\mu \left( \frac{\mu}{T} \right). \quad (2.163)$$

Sendo que, o lado direito da equação deve ser sempre positivo para estar de acordo com a segunda lei da termodinâmica.

É conveniente definir a componente da derivada ortogonal à 4-velocidade,

$$\nabla_\mu \equiv \Delta_\nu^\mu \partial_\nu. \quad (2.164)$$

Assim, podemos obter as seguintes relações

$$q^\mu \nabla_\mu T = q^\mu (\delta_\mu^\nu - u^\nu u_\mu) \partial_\nu T, \quad (2.165)$$

como  $q^\mu$  é ortogonal à 4-velocidade temos,

$$q^\mu \nabla_\mu T = q^\mu \partial_\mu T. \quad (2.166)$$

Como  $u_\mu \nu^\mu = 0$ ,

$$\nu^\mu \nabla_\mu \left( \frac{\mu}{T} \right) = \nu^\mu \partial_\mu \left( \frac{\mu}{T} \right). \quad (2.167)$$

Por construção, o tensor  $\pi^{\mu\nu}$  é ortogonal à 4-velocidade, logo,

$$\pi^{\mu\nu} \partial_\mu u_\nu = \pi^{\mu\nu} \nabla_\mu u_\nu, \quad (2.168)$$

utilizando o fato de  $\pi^{\mu\nu}$  ser simétrico,

$$\pi^{\mu\nu}\nabla_{\mu}u_{\nu} = \pi^{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}\nabla_{\mu}u_{\nu} + \frac{1}{2}\nabla_{\nu}u_{\mu}\right]. \quad (2.169)$$

Como ele é sem traço, podemos então subtrair o termo  $\frac{1}{3}\Delta_{\mu\nu}\partial_{\alpha}u^{\alpha}$  com o intuito de deixar o termo contraído também sem traço,

$$\pi^{\mu\nu}\partial_{\mu}u_{\nu} = \pi^{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}\nabla_{\mu}u_{\nu} + \frac{1}{2}\nabla_{\nu}u_{\mu} - \frac{1}{3}\Delta_{\mu\nu}\partial_{\alpha}u^{\alpha}\right]. \quad (2.170)$$

É conveniente definir a seguinte projeção da derivada da 4-velocidade, chamado tensor de cisalhamento,

$$\sigma_{\mu\nu} \equiv \Delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}u_{\beta}, \quad (2.171)$$

que corresponde à uma projeção dupla, simetrizada, sem traço e ortogonal à 4-velocidade. Note que podemos escrever  $\sigma_{\mu\nu}$  como,

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla_{\mu}u_{\nu} + \frac{1}{2}\nabla_{\nu}u_{\mu} - \frac{1}{3}\Delta_{\mu\nu}\partial_{\alpha}u^{\alpha}. \quad (2.172)$$

Deste modo,

$$\pi^{\mu\nu}\partial_{\mu}u_{\nu} = \pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}. \quad (2.173)$$

Para finalizar, precisamos garantir que a segunda lei da termodinâmica seja válida. Usando os resultados acima, podemos reescrever a produção de entropia como,

$$\partial_{\mu}\left(su^{\mu} + \frac{1}{T}u_{\nu}\tau^{\mu\nu} - \frac{\mu}{T}\nu^{\mu}\right) = \frac{1}{T}\pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} - \frac{1}{T}\Pi\partial_{\mu}u^{\mu} + \frac{1}{T}q^{\mu}\left(\frac{du_{\mu}}{d\tau} - \frac{1}{T}\nabla_{\mu}T\right) - \nu^{\mu}\nabla_{\mu}\left(\frac{\mu}{T}\right). \quad (2.174)$$

Um ansatz que garante a positividade da produção de entropia e mantém as simetrias das correntes dissipativas é dado por,

$$\pi^{\mu\nu} = 2\eta\sigma^{\mu\nu}, \quad (2.175)$$

$$\Pi = -\zeta\partial_{\mu}u^{\mu}, \quad (2.176)$$

$$q^{\mu} = -\kappa_q\left(\frac{du^{\mu}}{d\tau} - \frac{1}{T}\nabla_{\mu}T\right), \quad (2.177)$$

$$\nu^{\mu} = \kappa_n\nabla^{\mu}\left(\frac{\mu}{T}\right). \quad (2.178)$$

Com  $\eta$  e  $\zeta$  sendo constantes positivas relacionadas à viscosidade e  $\kappa_q, \kappa_n$  sendo constantes positivas relacionadas à difusão de carga e transferência de calor. É fácil confirmar a validade deste ansatz, pois o lado direito da Eq.(2.163) será a soma de termos quadráticos. Todavia, estas equações violam o princípio da causalidade, que será discutido na próxima seção, e por conta disso precisaremos realizar mais uma correção. Várias teorias foram criadas para tentar corrigir a acausalidade das equações relativísticas de Navier-Stokes [17,21]. O método utilizado nesta dissertação envolve a utilização de uma função memória [22] e será abordado na subseção seguinte.

### 2.3.2.2 Princípio da Causalidade e lei de Fick

O conceito de causalidade é de suma importância na relatividade. Tal princípio diz que um efeito nunca pode anteceder sua causa, independentemente do referencial. Uma consequência deste princípio é que a velocidade de propagação da informação deve ser sempre menor que a da luz.

Antes de darmos prosseguimento à mecânica dos fluidos relativística é interessante fazer um paralelo com a lei de Fick. Esta lei descreve o processo de difusão e pode ser obtida a partir da equação continuidade. Para isso, vamos assumir que a corrente  $\mathbf{j}$  seja proporcional à uma força termodinâmica  $\mathbf{F}$ , e esta força será igual gradiente da quantidade conservada  $n$ ,

$$\mathbf{j} = -\zeta\mathbf{F} = -\zeta\nabla n, \quad (2.179)$$

onde  $\zeta$  é conhecido como coeficiente de Onsager. Substituindo a expressão acima na equação da continuidade obtemos a lei de Fick,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \zeta\nabla^2 n. \quad (2.180)$$

Além do fato desta equação diferencial ser Parabólica, situação que permite propagações de velocidade infinita, o que fere o princípio de causalidade. A origem da acausalidade pode ser compreendida a partir da Eq. (2.179) onde vemos que gradientes de densidade produzem instantaneamente uma mudança na corrente  $j$ . Para contornar este problema será introduzida uma inércia na produção de corrente à partir de inomogenei-

dades na densidade usando uma função memória  $G$  [5],

$$\mathbf{j} = - \int_{-\infty}^t G(t, t') \zeta \mathbf{F} dt', \quad (2.181)$$

onde  $\tau_R$  é um tempo de relaxação e está relacionado ao tempo em que a memória do estado  $t'$ . Na expressão acima, podemos utilizar a seguinte função de memória [22].

$$\begin{aligned} G(t, t') &= \frac{1}{\tau_r} e^{-\frac{(t-t')}{\tau_r}}, t \geq t' \\ &= 0, t < t', \end{aligned} \quad (2.182)$$

Analisando o caso limite  $\tau_R \rightarrow 0$  a função memória se torna uma delta de Dirac, e utilizando a propriedade de filtragem da delta obtemos novamente a Eq. (2.179). Agora, substituindo esta nova corrente na equação da continuidade obtemos a seguinte equação para densidade,

$$\tau_r \frac{\partial^2 n}{\partial t^2} = - \frac{\partial n}{\partial t} + \zeta \nabla^2 n, \quad (2.183)$$

que é conhecida como Equação causal da difusão. Além de solucionar o problema da acausalidade, esta nova equação é hiperbólica.

Além do mais, podemos encontrar a velocidade máxima de propagação da teoria. A Eq. (2.183) é linear e, escrevendo-a no espaço de Fourier, obtemos,

$$(-\tau_r^2 - iw + \zeta k^2) N = 0, \quad (2.184)$$

sendo  $N$  a transformada de Fourier da densidade. Resolvendo a equação encontramos a seguinte relação de dispersão,

$$\omega = \frac{-i \pm \sqrt{-1 + 4\tau_r \zeta k^2}}{2\tau_r}. \quad (2.185)$$

Note que, no limite onde  $k \rightarrow \infty$ ,  $\omega$  adquire uma parte real relacionada à propagação. A velocidade de propagação máxima pode ser obtida tomando o seguinte limite da velocidade de grupo,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d\omega}{dk} = \mathbf{v}_{max} = \sqrt{\frac{\zeta}{\tau_r}} \quad (2.186)$$

onde  $\mathbf{v}_{max} < 1$  para ser consistente com a causalidade. Vale reparar que no limite  $\tau_r \rightarrow 0$  nós voltamos a ter uma teoria com velocidade de propagação máxima infinita. A condição

acima implica em uma relação entre  $\tau_r$  e  $\zeta$ ,

$$\tau_r < \zeta. \quad (2.187)$$

Toda metodologia utilizada nesta subseção será utilizada de forma análoga na próxima.

### 2.3.2.3 Equações da Mecânica dos Fluidos Relativística Dissipativa Causal

Nesta seção utilizaremos os métodos vistos anteriormente para consertar o problema de acausalidade nas equações de Navier-Stokes. Por simplicidade, nesta dissertação estaremos considerando apenas os efeitos causados pela viscosidade volumétrica  $\Pi$ , também conhecida como *bulk viscosity*. Assim, o tensor de Energia-Momento pode ser escrito como,

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p + \Pi)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}(p + \Pi). \quad (2.188)$$

Assim, podemos reescrever as Eqs. (2.90) e (2.97) como,

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} + (\epsilon + p + \Pi)\partial_\mu u^\mu = 0, \quad (2.189)$$

e,

$$(\epsilon + p + \Pi)u^\mu \partial_\mu u^\lambda - \Delta^{\lambda\mu} \partial_\mu (p + \Pi) = 0. \quad (2.190)$$

Nestas condições, a equação para o fluxo de entropia é,

$$\partial_\mu S^\mu = -\frac{1}{T}\Pi\partial_\mu u^\mu, \quad (2.191)$$

onde definimos  $S^\mu = su^\mu$ . Neste caso identificamos a força termodinâmica como,

$$\mathbf{F} = \partial_\mu u^\mu, \quad (2.192)$$

sendo assim, a produção de entropia pode ser interpretada como a soma do produto entre as forças termodinâmicas e as correntes irreversíveis, que são dadas pela viscosidade  $\Pi$ . Como já foi discutido, Landau propôs uma equação para descrever esta corrente de forma que a segunda lei da termodinâmica seja satisfeita localmente. Para isto,  $\Pi$  deve ser

proporcional à força termodinâmica,

$$\Pi = -\zeta \mathbf{F} = -\zeta \partial_\mu u^\mu, \quad (2.193)$$

com  $\zeta$  sendo o coeficiente da viscosidade. Entretanto, esta expressão gera um problema de acausalidade semelhante ao caso da lei de Fick. Resolveremos este problema de maneira análoga ao caso da equação de difusão, introduzindo uma função de memória na produção de corrente dissipativa pelos gradientes de velocidade. A função escolhida para esta dissertação é dada por [5],

$$G(\tau, \tau') = \frac{1}{\tau_r(\tau')} e^{-\int_{\tau'}^{\tau} \frac{1}{\tau_r(\tau'')} d\tau''}, \quad (2.194)$$

que é uma das funções de mais simples. Logo,

$$\Pi(\tau) = - \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \frac{\zeta(\tau')}{\tau_r(\tau')} e^{-\int_{\tau'}^{\tau} \frac{1}{\tau_r(\tau'')} d\tau''} \partial_\mu u^\mu(\tau'), \quad (2.195)$$

cuja solução é dada por,

$$\frac{d\Pi}{d\tau} = \frac{\Pi}{\tau_r} - \frac{\zeta \partial_\mu u^\mu}{\tau_r]r} \quad (2.196)$$

Esta equação no caso unidimensional, que será o caso abordado neste trabalho, é equivalente à teoria de Israel-Stewart [6].

Para finalizar, as parametrizações adotadas para  $\zeta$  e  $\tau_r$  são [7],

$$\zeta \equiv \alpha s, \quad (2.197)$$

e

$$\tau_r \equiv \frac{\zeta}{\epsilon + p} b, \quad (2.198)$$

com  $\alpha$  sendo um parâmetro numérico relacionado à viscosidade do fluido e  $b$  relacionado com o tempo que a memória do fluido permanece, como se fosse um tempo de relaxamento

E, por fim, podemos encontrar a velocidade máxima de propagação da informação no fluido de forma análoga ao realizado na seção da lei de Fick [5]

$$\mathbf{v}_{max} = \sqrt{\frac{1}{b} + c_S^2}, \quad (2.199)$$

com  $c_S^2$  sendo a velocidade do som no meio. Sendo essas as equações que utilizaremos

para realizar as simulações numéricas no capítulo final. Nesta seção nos restringimos apenas ao caso de uma viscosidade do tipo *bulk*, mas o processo análogo pode ser feito para uma viscosidade do tipo *shear* [8].

### 3 ONDAS DE SOM E DE CHOQUE

Neste capítulo serão abordados as formas com que as oscilações se comportam dentro de um fluido. Há duas formas de expressar matematicamente estes fenômenos. A primeira é através da abordagem de onda de som, que é uma solução aproximada que funciona para casos de pequenas oscilações. A outra forma é a onda de choque. Diferentemente da onda de som, esta apresenta uma solução exata e funciona para grandes oscilações, além de se propagar mais rápido que o caso anterior.

#### 3.1 Ondas de Som

Estudaremos primeiramente as ondas de som. Segundo Landau : "Um movimento oscilatório de amplitude pequena em um fluido compressível é chamado de **Onda de som**" [4]. As oscilações precisam ter pequena amplitude para que sejam desprezados os fenômenos de compressão no fluido, assim podemos considerar as variações que ocorrem dentro do elemento de fluido como perturbações. Ao longo desta seção, serão abordadas as formas de se obter as equações de onda sonora para os regimes relativísticos e Newtoniano para fluidos ideais.

##### 3.1.1 Ondas sonoras no regime Não-relativístico

Primeiramente iremos resolver para o caso não-relativístico ideal. Iremos supor uma pequena perturbação que se propaga no fluido que está inicialmente em repouso, de tal forma que podemos reescrever a pressão , a densidade de massa e a velocidade de cada elemento do sistema da seguinte forma.

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho \quad (3.1)$$

$$\mathbf{v} = \delta\mathbf{v} \quad (3.2)$$

$$p = p(\rho_0 + \delta\rho) \equiv p_0 + \delta p. \quad (3.3)$$

onde, os termos  $p_0 \equiv p(\rho_0)$  e  $\rho_0$  são constantes referentes aos valores da pressão e da densidade no equilíbrio e  $\delta\mathbf{v}$   $\delta p$  e  $\delta\rho$  são os valores da perturbação. Vamos considerar uma perturbação pequena de tal forma que possamos desprezar termos de segunda ordem.

Nesse caso, podemos aproximar a correção à pressão como,

$$\delta p \approx \frac{\partial p_0}{\partial \rho_0} \delta \rho. \quad (3.4)$$

Desprezando termos quadráticos ou de ordem superior nas perturbações, as equações de Euler (2.21) , e de continuidade(2.7), simplificam do seguinte modo,

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \delta \mathbf{v} = \mathcal{O}(2) \quad (3.5)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial p_0}{\partial \rho_0} \nabla \delta \rho = \mathcal{O}(2). \quad (3.6)$$

Onde  $\mathcal{O}(2)$  denota os termos de ordem 2 ou maior nas perturbações. Como mencionado acima, tais termos serão omitidos na nossa análise.

Derivando a primeira equação no tempo

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right) = -\nabla \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t}, \quad (3.7)$$

e, substituindo a derivada temporal da velocidade, dada pela equação de Euler,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right) &= \nabla \cdot \left( \frac{\partial p_0}{\partial \rho_0} \nabla \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\delta \rho}{\rho_0} &= \frac{\partial p_0}{\partial \rho_0} \nabla^2 \frac{\delta \rho}{\rho_0}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Esta ultima expressão é uma equação de onda e, portanto, podemos interpretar o termo  $\frac{\partial p_0}{\partial \rho_0}$  como sendo o quadrado da velocidade do som(  $C_s^2$ ). Note que essa expressão obtida é uma aproximação que só vale para pequenas oscilações, isto é, as soluções para a equação de onda acima não são soluções exata das equações hidrodinâmicas.

### 3.1.2 Onda de Som Relativística

Esta subseção tem como objetivo encontrar a generalização relativística para a equação da onda de som. Como foi anteriormente dito, o processo realizado aqui será o mesmo da seção anterior, porém aplicado nas equações para fluidos relativísticos ideais, mas o mesmo pode ser feito para os fluidos relativísticos viscosos. Vamos considerar

perturbações na densidade de energia de um fluido inicialmente em repouso, sem carga,

$$\epsilon = \epsilon_0 + \delta\epsilon \quad (3.9)$$

$$u^i = \delta u^i. \quad (3.10)$$

Onde  $\epsilon_0$  é a densidade de energia não perturbada e  $\delta\epsilon, \delta u^i$  são referentes à pequena variação na densidade de energia e na quadrivelocidade. Não consideraremos perturbações da densidade de carga.

Desprezando termos de segunda ordem nas perturbações, o fator de Lorentz pode ser simplificado da seguinte forma,

$$\gamma = \sqrt{1 + \delta u^2} \approx 1 + \frac{1}{2}\delta u^2 \approx 1. \quad (3.11)$$

Além disso, temos que a pressão  $p$  é uma função da densidade de energia,  $p = p(\epsilon)$ . Semelhante ao caso Newtoniano, podemos expandir a pressão em série de Taylor para encontrar a perturbação na pressão,

$$\delta p = \frac{\partial p_0}{\partial \epsilon_0} \delta\epsilon + \mathcal{O}(2), \quad (3.12)$$

Podemos escrever o tensor de energia e momento (Eq.2.77) como,

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon_0 + \delta\epsilon + p_0 + \delta p)\delta u^\mu \delta u^\nu - (p_0 + \delta p)\eta^{\mu\nu}. \quad (3.13)$$

Desprezando os termos quadráticos nas perturbações e os termos constantes, temos

$$T^{00} = \delta\epsilon + \mathcal{O}(2) \quad (3.14)$$

$$T^{0i} = (\epsilon_0 + p_0)\delta u^i + \mathcal{O}(2) \quad (3.15)$$

$$T^{ij} = \frac{\partial p_0}{\partial \epsilon_0} \delta\epsilon \delta^{ij} + \mathcal{O}(2). \quad (3.16)$$

Utilizando a equação da continuidade para o tensor de Energia-Momento, Eq. (2.72), obtemos as seguintes equações de movimento linearizadas. Para  $\nu = 0$ , obtemos uma

equação para as flutuações de densidade de energia

$$\partial_t \left( \frac{\delta\epsilon}{\epsilon_0 + p_0} \right) + \partial_j \delta u^j = \mathcal{O}(2), \quad (3.17)$$

enquanto, para  $\nu = i$ , obtemos uma equação para a velocidade,

$$\partial_t \delta u^i + \frac{\partial p_0}{\partial \epsilon_0} \partial_i \left( \frac{\delta\epsilon}{\epsilon_0 + p_0} \right) = \mathcal{O}(2). \quad (3.18)$$

Para não sobrecarregar as equações, vamos adotar a seguinte notação,

$$\frac{\delta\epsilon}{\epsilon_0 + p_0} = \delta\epsilon^*. \quad (3.19)$$

Assim, ficamos com as seguintes equações para resolver:

$$\partial_t \delta\epsilon^* + \partial_j \delta u^j = 0 \quad (3.20)$$

$$\partial_t \delta u^i + \frac{\partial p_0}{\partial \epsilon_0} \partial_i \delta\epsilon^* = 0. \quad (3.21)$$

Derivando a primeira equação no tempo e substituindo a segunda equação, obtemos uma equação somente para as perturbações de energia,

$$\partial_t^2 \delta\epsilon^* - \frac{\partial p_0}{\partial \epsilon_0} \partial_j \partial_j \delta\epsilon^* = 0, \quad (3.22)$$

que pode ser expressa na notação mais usual como,

$$\partial_t^2 \delta\epsilon^* - \frac{\partial p_0}{\partial \epsilon_0} \nabla^2 \delta\epsilon^* = 0. \quad (3.23)$$

Que é a equação de ondas de som relativística. A partir desta equação podemos interpretar o termo  $\frac{\partial p_0}{\partial \epsilon_0}$  como sendo o quadrado da velocidade do som ( $C_s$ ),

$$\frac{\partial p_0}{\partial \epsilon_0} = C_s^2. \quad (3.24)$$

### 3.1.3 Propagação de ondas de som

Para estudar a propagação da onda de som a partir de uma determinada condição inicial iremos supor que a solução para a equação de onda seja do tipo onda plana. Para

o caso unidimensional a solução pode ser escrita como:

$$\psi = e^{i\omega t - ikx}. \quad (3.25)$$

Substituindo a equação acima na equação de onda, obtemos uma relação entre a frequência e o número de onda, chamada de relação de dispersão,

$$-\omega^2\psi + C_s^2 k^2\psi = 0. \quad (3.26)$$

A partir desta equação encontramos dois valores possíveis para  $\omega$  que satisfazem esta equação,

$$\omega^2 = C_s^2 k^2 \quad (3.27)$$

$$\omega_+ = C_s k \quad (3.28)$$

$$\omega_- = -C_s k. \quad (3.29)$$

Temos então 2 classes de solução,

$$\psi_+ = e^{-ik(x - C_s t)} \quad (3.30)$$

$$\psi_- = e^{-ik(x + C_s t)}. \quad (3.31)$$

Temos que  $\psi_+$  representa soluções que propagam no sentido positivo do eixo  $x$  e  $\psi_-$  representa soluções que propagam no sentido negativo. A solução mais geral é uma combinação linear destes 2 casos, para todos os possíveis  $k$ ,

$$\begin{aligned} \psi(t, x) &= \int \frac{dk}{2\pi} [A_+(k)\psi_+ + A_-(k)\psi_-] \\ &= \int \frac{dk}{2\pi} [A_+(k)e^{-ik(x - C_s t)} + A_-(k)e^{-ik(x + C_s t)}]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Como a equação de onda é de ordem 2, a condição inicial pode ser expressa em termos do valor do campo e da sua derivada em  $t = 0$ ,

$$\psi(0, x) = \int \frac{dk}{2\pi} [A_+(k) + A_-(k)]e^{-ikx} \quad (3.33)$$

$$\frac{d\psi(0, x)}{dt} = \int \frac{dk}{2\pi} iw(k)[A_+(k) - A_-(k)]e^{-ikx}, \quad (3.34)$$

Considerando soluções onde a derivada temporal é inicialmente nula, isto é,

$$\frac{d\psi(0, x)}{dt} = \int \frac{dk}{2\pi} i\omega(k)[A_+(k) - A_-(k)]e^{-ikx} = 0. \quad (3.35)$$

Utilizando a transformada de Fourier inversa, podemos mostrar que a condição acima implica em,

$$[A_+(k) - A_-(k)]ikC_s = 0, \quad (3.36)$$

onde já utilizamos a relação de dispersão da equação de onda. Portanto, concluímos que

$$A_+(k) = A_-(k) \equiv A(k). \quad (3.37)$$

Assim, podemos reescrever a Eq. (3.32) como,

$$\psi(t, x) = \int \frac{dK}{2\pi} A(k)(e^{-ik(x-C_s t)} + e^{-ik(x+C_s t)}), \quad (3.38)$$

e a sua respectiva condição inicial, dada pela Eq. (3.33), como

$$\frac{1}{2}\psi(0, x) = \int \frac{dK}{2\pi} A(k)e^{-ikx}. \quad (3.39)$$

Vemos que a solução geral tem a mesma forma da condição inicial, com a posição sendo apenas transladada por  $vt$ . Podemos expressá-la da seguinte forma,

$$\psi(t, x) = \frac{1}{2}\psi(0, x - C_s t) + \frac{1}{2}\psi(0, x + C_s t). \quad (3.40)$$

A partir da equação acima se conclui que dado uma perturbação de pequena amplitude, a mesma se propagará com a velocidade do som, sem se deformar, porém com a metade da amplitude. Depois, verificaremos estas propriedades de ondas de som numericamente, resolvendo as equações de continuidade e de Euler para pequenas perturbações iniciais.

### 3.2 Ondas de Choque

Nesta seção, consideraremos outras soluções de onda no regime hidrodinâmico, que não estão restritas ao regime linear. Estas soluções são chamadas de ondas de choque.

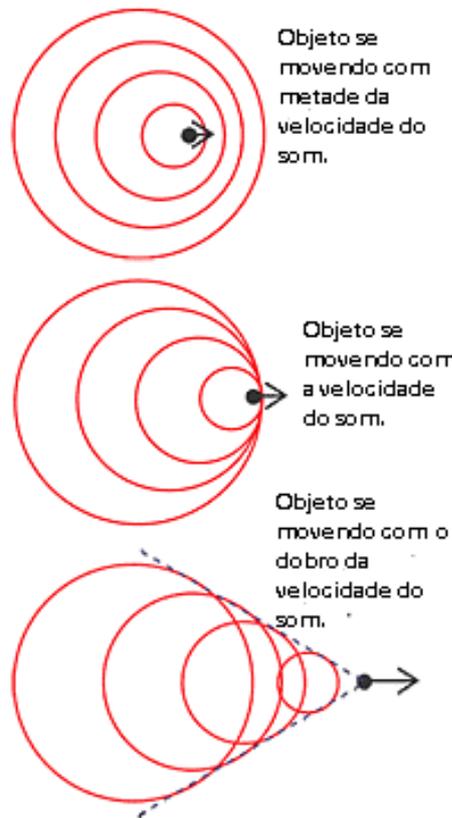


Figura 6: Exemplo Onda de Choque [23].

Veremos que tais ondas se propagam mais rápido que o som. Quando a velocidade de movimento do fluido é próxima ou superior à velocidade do som, temos que levar em consideração os efeitos da compressibilidade na descrição física do sistema. As ondas de choque são fenômenos que ocorrem nesse regime. Um exemplo dela está ilustrado na Figura 6.

### 3.2.1 Ondas de Choque Não-Relativística Ideal

Nesta seção será abordado o caso de uma onda de choque unidimensional cuja forma não muda ao longo da trajetória e se propaga em um fluido ideal e clássico. Esse tipo de onda de choque é conhecido como *Steady Shock Wave*. Vamos checar se é possível escrever uma função contínua para descrever esta onda, além de calcular analiticamente a velocidade do choque.

Vamos começar escrevendo as equações da hidrodinâmica para o caso unidimensional, porém com um termo  $q$  adicional que está ligado aos efeitos da compressibilidade. Como estamos no regime ideal  $q$  é uma pseudo viscosidade que tem como função permitir

que as ondas de choque sejam calculadas numericamente. Vamos assumir que este termo pode depender de qualquer variável termodinâmica e de suas respectivas derivadas espaciais e esta ligado aos efeitos de compressibilidade no fluido. Nesse caso, as equações de continuidade e de Euler podem ser expressas (em uma dimensão) como ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho v), \quad (3.41)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right] = -\frac{\partial}{\partial x}(p + q), \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \rho v^2 + \epsilon \right] = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho v \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{\epsilon + p + q}{\rho} \right) \right]. \quad (3.43)$$

A última é a equação de continuidade relacionada à conservação de energia.

O objetivo desta seção é procurar soluções de ondas na hidrodinâmica sem supor o regime de pequenas perturbações. Ou seja, procuramos soluções para a densidade de massa e para a velocidade que satisfaçam as condições,  $w = \omega$

$$\rho = \rho(x - st), \quad v = v(x - st). \quad (3.44)$$

A variável  $s$ , definida acima, é a velocidade de propagação da onda.

Fazendo a troca de variáveis para  $\omega = x - st$ , reescrevemos as equações de movimento como,

$$\frac{d}{d\omega} [\rho(v - s)] = 0 \quad (3.45)$$

$$\rho(v - s) \frac{dv}{d\omega} = -\frac{d}{d\omega}(p + q) \quad (3.46)$$

$$-s \frac{d}{d\omega} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \epsilon \right) = -\frac{d}{d\omega} \left[ \rho v \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{\epsilon + p + q}{\rho} \right) \right]. \quad (3.47)$$

A Eq. (3.46) pode ser simplificada usando a Eq.(3.45),

$$\frac{d}{d\omega} [\rho(v - s)^2] = -\frac{d}{d\omega}(p + q). \quad (3.48)$$

Além disso, podemos reescrever a Eq. (3.47) como,

$$\frac{d}{d\omega} \left[ \frac{1}{2} (v - s)^2 + \frac{\epsilon + p + q}{\rho} \right] = 0. \quad (3.49)$$

A partir das Eqs. 3.45, 3.48 e 3.49 obtemos as condições,

$$\rho(v - s) = C_1 \quad (3.50)$$

$$\rho(v - s)^2 + (p + q) = C_2 \quad (3.51)$$

$$\frac{1}{2}(v - s)^2 + \frac{\epsilon + p + q}{\rho} = C_3, \quad (3.52)$$

onde  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são constantes.

Separando as regiões do choque como  $i$  e  $f$  podemos encontrar a solução. Como a velocidade do choque é  $s$ , a região que ainda não foi afetada pelo choque corresponde à  $x > st$ . Em outras palavras, são as regiões de  $\omega$  positivo e negativo. Agora, vamos analisar os dois casos limites, o primeiro é  $\omega \rightarrow -\infty$  que corresponde à  $x \gg st$ , que representa a região que nunca será afetada pelo choque. Impondo a restrição de que  $q = 0$ , pois na regiões suficientemente distante do choque não há o efeito de compressibilidade. Assim, podemos determinar as constantes de integração,

$$\rho_f(v - s) = C_1 \quad (3.53)$$

$$\rho_f(v_i - s)^2 + (p_i) = C_2 \quad (3.54)$$

$$\frac{1}{2}(v_f - s)^2 + \frac{\epsilon_f + p_f}{\rho_f} = C_3, \quad (3.55)$$

O outro caso limite é o exato oposto, se refere a região já afetada pelo choque, que pode ser expresso como  $w \rightarrow -\infty$  que corresponde à  $st \gg x$ . Vamos exigir a mesma condição para o  $q$ , pelo mesmo motivo anterior. Neste caso obtemos,

$$\rho_i(v_i - s) = C_1 \quad (3.56)$$

$$\rho_i(v_i - s)^2 + p_i = C_2 \quad (3.57)$$

$$\frac{1}{2}(v_i - s)^2 + \frac{\epsilon_i + p_i}{\rho_i} = C_3. \quad (3.58)$$

Igualando as equações obtemos,

$$\rho_i(v - s) = \rho_f(v - s) \quad (3.59)$$

$$\rho_i(v_i - s)^2 + (p_i) = \rho_f(v_i - s)^2 + (p_i) \quad (3.60)$$

$$\frac{1}{2}(v_i - s)^2 + \frac{\epsilon_i + p_i}{\rho_i} = \frac{1}{2}(v_f - s)^2 + \frac{\epsilon_f + p_f}{\rho_f}, \quad (3.61)$$

Onde esse sistema representa as condições de continuidade na interface de descontinuidade, no referencial onde a onda está em repouso. Além disso, com o ansatz de que  $q$  se anula nos casos limites, não é necessário saber sua forma.

Definindo uma nova variável,  $A \equiv v - s$ , temos

$$\rho A = C_1 \quad (3.62)$$

$$\rho A^2 + p + q = C_2 \quad (3.63)$$

$$\frac{1}{2}A^2 + \frac{\epsilon + p + q}{\rho} = C_3, \quad (3.64)$$

É necessária uma equação de estado para solucionar o sistema, para fim de exemplificar será utilizada a equação de estado para um gás ideal não-relativístico.

$$p = nT, \quad (3.65)$$

$$\epsilon = \frac{3}{2}nT. \quad (3.66)$$

Onde colocamos a constante de Boltzmann como sendo igual a 1 e  $T$  é a temperatura. Assim,

$$\epsilon = \frac{3}{2}p. \quad (3.67)$$

e, isolando a variável  $A$ ,

$$-\frac{4}{3}A^2 - \frac{2}{3}C_3 + \frac{5C_2}{3C_1}A = \frac{1}{\rho}q. \quad (3.68)$$

Ao invés de obtermos uma equação diferencial para a função  $A$ , encontramos uma equação algébrica de segundo grau. Portanto, não encontramos como solução nenhuma função contínua e sim, dois valores constantes. A única função que pode satisfazer esta condição é uma função descontínua que vai de um valor para outro. Esse fato implica que a onda de choque só ocorre quando temos uma descontinuidade, o sistema varia abruptamente entre os dois valores de  $A$ . Temos que, pela condição que  $q = 0$  nos casos limites, ou seja se  $A = A_i$  ou  $A = A_f$ . Logo  $A_i$  e  $A_f$  são raízes da equação,

$$\frac{q}{\rho} = -\frac{4}{3}(A - A_f)(A_i - A). \quad (3.69)$$

Impondo o ansatz de que a viscosidade  $q$  têm a mesma forma da viscosidade volumétrica

(tipo *Bulk*),

$$q = -\alpha\rho\frac{\partial v}{\partial x} = -\alpha\rho\frac{\partial A}{\partial x}, \quad (3.70)$$

onde o coeficiente  $\alpha$  pode ser encontrado através de teorias mais fundamentais sobre o estudo da viscosidade. Além disso, temos que  $\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial w}$ , logo podemos reescrever a equação do segundo grau como uma equação diferencial ordinária,

$$\alpha\frac{dA}{d\omega} = \frac{4}{3}(A - A_f)(A_i - A). \quad (3.71)$$

Com o uso desse ansatz é possível encontrar uma função contínua para  $A$ . A viscosidade  $q$  também é conhecida como viscosidade numérica ou Pseudo-Viscosidade. A vantagem de utilizá-la é que remove a descontinuidade da solução de onda e torna cálculos numéricos factíveis.

A EDO encontrada têm solução analítica. Fazendo as seguinte troca de variáveis é possível encontrar sua solução,

$$\Psi = A - \frac{A_f + A_i}{2} \quad (3.72)$$

$$\psi_0 = \frac{A_f - A_i}{2} \quad (3.73)$$

$$\psi = \frac{\Psi}{\psi_0}. \quad (3.74)$$

A EDO pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{d\omega} &= \frac{4}{3\alpha}(\Psi^2 - \Psi_0^2) \\ \frac{1}{\Psi_0} \frac{d\psi}{d\omega} &= \frac{4}{3\alpha}(\psi^2 - 1). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Onde está ultima equação pode ser resolvida integrando ambos os lados,

$$\int \frac{d\psi}{\psi^2 - 1} = \frac{4\Psi_0}{3\alpha}w, \quad (3.76)$$

temos que esta integral pode ser resolvida através de uma substituição trigonométrica.

Sua solução é,

$$\psi = -\tanh\left(\frac{4\Psi_0 w}{3\alpha}\right), \quad (3.77)$$

retornando para a variável  $A$  temos,

$$A = \frac{A_f + A_i}{2} - \frac{A_f - A_i}{2} \tanh\left(2\frac{A_f - A_i}{3\alpha}w\right). \quad (3.78)$$

Vamos checar se esta função satisfaz as condições para os casos limite. Assumindo que o choque se propaga para a direita, temos que  $A_f - A_i < 0$ . Assim, no limite  $w \rightarrow \infty$  temos que  $\tanh\left(2\frac{A_f - A_i}{3\alpha}w\right) = -1$ . Desta forma  $A = A_f$  para este caso. Enquanto, no limite  $w \rightarrow -\infty$ , temos que  $\tanh\left(2\frac{A_f - A_i}{3\alpha}w\right) = 1$ . Como esperado obtemos  $A = A_i$ .

Vemos que ambos os casos limites estão condizentes com o esperado. Portanto, a introdução de uma viscosidade numérica remove a singularidade da onda choque, introduzindo um tamanho para o choque relacionado ao parâmetro  $\alpha$ . A utilização desta viscosidade numérica é de suma importância na hora de fazer as simulações computacionais, situação que é o foco deste trabalho.

Agora, iremos buscar uma equação para a velocidade do choque. Temos que sua velocidade será a velocidade relativa entre as duas interfaces no referencial onde o choque está em repouso. Pelas condições de continuidade, do fluxo de massa e momento, na interface do choque

$$\rho_i v_i = \rho_f v_f \equiv j \quad (3.79)$$

$$p_i + \rho_i v_i^2 = p_f + \rho_f v_f^2, \quad (3.80)$$

Podemos reescrever a primeira equação em função do Volume específico, definindo  $V = \frac{1}{\rho}$ . E assim, encontrar as velocidades,

$$v_i = jV_i, \quad v_f = jV_f, \quad (3.81)$$

Onde o  $j$  pode ser encontrado a partir do sistema acima,

$$j = \sqrt{\frac{p_f - p_i}{V_i - V_f}}, \quad (3.82)$$

Como foi dito no início do capítulo, a velocidade do choque é dada pela velocidade relativa

entre as duas interfaces,  $S \equiv v_f - v_i$ , assim obtemos a expressão

$$S = \sqrt{(p_f - p_i)(V_i - V_f)}. \quad (3.83)$$

Note que esta equação prevê uma velocidade que cresce infinitamente, logo viola o postulado de que nenhuma velocidade pode ser superior à velocidade da luz no vácuo. Na generalização relativista esse problema desaparece, por conta da nova forma de somar velocidades que a relatividade propõe.

### 3.2.2 Ondas de Choque Relativística

Nesta subseção será feita a generalização relativística para as ondas de choque usando uma metodologia análoga ao caso anterior. Estaremos considerando os efeitos dissipativos apenas da viscosidade volumétrica.

Assim como no caso não-relativístico, buscamos soluções que se propagam como onda a partir das equações hidrodinâmicas. Ou seja, soluções do tipo  $\omega = x - st$ , onde  $s$  é a velocidade do choque. Temos que o tensor energia momento acrescido de uma viscosidade tipo *bulk* é,

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p + \Pi)u^\mu u^\nu - \eta^{\mu\nu}(p + \Pi), \quad (3.84)$$

fazendo a seguinte troca de variáveis:  $\beta = p + \Pi$  e  $\rho = \epsilon + p + \Pi$ , e, nos restringindo ao caso unidimensional, a equação de conservação para o tensor de Energia-Momento  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$  pode ser separada em ,

$$\partial_t(\rho\gamma^2 - \beta) + \partial_x(\rho\gamma^2 v) = 0, \quad (3.85)$$

e, para  $\nu = 0$ ,

$$\partial_t(\rho\gamma^2 v) + \partial_x(\rho\gamma^2 v^2 + \beta) = 0, \quad (3.86)$$

para  $\nu = i$ . Agora, vamos verificar a consistência desta nova equação. Utilizando que,

$$\frac{\partial}{\partial\omega} = \frac{\partial}{\partial x} - s \frac{\partial}{\partial t}, \quad (3.87)$$

podemos reescrever as equações como,

$$\frac{\partial}{\partial w} [-(\rho\gamma^2 - \beta)s + \rho\gamma^2 v] = 0 \quad (3.88)$$

$$\frac{\partial}{\partial w} [-\rho\gamma^2 v s + \rho\gamma^2 v^2 + \beta] = 0, \quad (3.89)$$

que está de acordo com a teoria.

A velocidade relativa do choque ( $v_r$ ), no referencial onde ele esta parado, é dado pela soma de velocidades relativística,

$$v_r = \frac{v - s}{1 - vs}, \quad (3.90)$$

e, temos que o  $\gamma_r$  é dado por,

$$\gamma_r = \frac{1}{\sqrt{1 - v_r^2}}. \quad (3.91)$$

Além disso, podemos relacionar  $\gamma$  com  $\gamma_r$ ,

$$\gamma = \frac{1 + v_r}{\sqrt{1 - s^2}} \gamma_r. \quad (3.92)$$

Com um algebrismo podemos reescrever as Eqs.(3.88) e (3.89) em função de  $v_r$ ,

$$\begin{aligned} \partial_\omega [\rho\gamma_r v_r + \rho\gamma_r^2 v_r^2 s + \beta s] &= 0, \\ \partial_\omega [\rho\gamma_r^2 v_r^2 + \rho\gamma_r^2 v_r s + \beta] &= 0, \end{aligned} \quad (3.93)$$

em seguida, resolvendo este sistema obtemos as seguintes equações,

$$\begin{aligned} \partial_\omega [\rho\gamma_r^2 v_r (s^2 - 1)] &= 0, \\ \partial_\omega [\rho\gamma_r^2 v_r^2 (\frac{1}{s} - s) + \beta (\frac{1}{s} - s)] &= 0. \end{aligned} \quad (3.94)$$

como os termos  $(s^2 - 1)$  e  $(\frac{1}{s} - s)$  são constantes eles não são relevantes para a derivada, logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega} [\rho\gamma_r^2 v_r] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \omega} [\rho\gamma_r^2 v_r^2 + \beta] &= 0. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Sabendo que uma derivada só é zero quando estamos derivando uma constante, podemos concluir que,

$$\rho\gamma_r^2 v_r = C_1 \quad (3.96)$$

$$\rho\gamma_r^2 v_r^2 + \beta = C_2, \quad (3.97)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes independentes da variável  $w$ .

Vamos procurar soluções deste sistema para um gás ultrarrelativístico, cuja equação de estado para densidade de energia é dada por  $\epsilon = 3p$ . Assim, reescrevendo a Eq (3.96),

$$\begin{aligned} (4p + \Pi)\gamma_r u_r &= C_1 \\ p &= \frac{C_1}{4\gamma_r u_r} - \frac{\Pi}{4}, \end{aligned} \quad (3.98)$$

agora, fazendo o mesmo para a Eq. (3.97),

$$\begin{aligned} v_r C_1 + p + \Pi &= C_2, \\ v_r C_1 + \frac{C_1}{4\gamma_r u_r} - \frac{\Pi}{4} + \Pi &= C_2, \\ -\frac{3}{4}C_1 v_r^2 + C_2 v_r - \frac{C_1}{4} &= \frac{3}{4}\Pi v_r, \end{aligned} \quad (3.99)$$

Antes de prosseguir, vamos fazer o caso onde viscosidade é nula. Consequentemente, o sistema acima pode ser reescrito como uma equação do segundo grau para  $v_r$ ,

$$\frac{C_1}{C_2}(3v_r^2 + 1) - 4v_r = 0. \quad (3.100)$$

Cujas soluções são,

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{2C_2}{3C_1} + \sqrt{\frac{4C_2^2}{9C_1^2} - \frac{1}{3}}, \\ v_f &= \frac{2C_2}{3C_1} - \sqrt{\frac{4C_2^2}{9C_1^2} - \frac{1}{3}}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

No final da seção será apresentado uma forma de calcular os valores dessas velocidades. Similar ao caso Newtoniano, não encontramos uma função para  $v_r$  e sim dois possíveis valores. Isso implica que, para que haja uma propagação de onda em um fluido, torna-se

necessário que exista alguma descontinuidade na forma da onda.

Voltando então para a Eq (3.99) e reescrevendo em função de  $v_i$  e  $v_f$  obtemos,

$$C_1(v_r - v_i)(v_r - v_f) = -\Pi v_r, \quad (3.102)$$

que é nossa equação a ser resolvida. Agora, reescrevendo a Eq. (2.196) em função  $\omega$  obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{d\tau} + \frac{\Pi}{\tau_r} &= -\frac{\zeta}{\tau_r} \partial_\mu u^\mu, \\ \gamma(\partial_t \Pi + v \partial_x \Pi) + \frac{\Pi}{\tau_r} &= -\frac{\zeta}{\tau_r} \partial_\mu u^\mu, \\ \gamma(v - s) \partial_\omega \Pi + \frac{\Pi}{\tau_r} &= -\frac{\zeta}{\tau_r} [\partial_t \gamma + \partial_x \gamma v], \\ \gamma(v - s) \partial_\omega \Pi + \frac{\Pi}{\tau_r} &= -\frac{\zeta}{\tau_r} \partial_\omega [\gamma v - \gamma s]. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Em seguida, vamos reescrever a equação acima em função de  $v_r$ ,

$$\begin{aligned} \gamma(v - s) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_r + s}{1 + v_r s}\right)^2}} \left( \frac{v_r + s}{1 + v_r s} - s \right), \\ \gamma[v - s] &= \frac{v_r(1 - s^2)}{\sqrt{1 - v_r^2} \sqrt{(1 - s^2)}}, \\ \gamma[v - s] &= \sqrt{(1 - s^2)} \gamma_r v_r. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Assim, a Eq. (3.103) é reescrita como,

$$\sqrt{(1 - s^2)} \gamma_r v_r \partial_\omega \Pi + \frac{\Pi}{\tau_r} = -\sqrt{(1 - s^2)} \frac{\zeta}{\tau_r} \partial_\omega \gamma_r v_r. \quad (3.105)$$

Sabendo que  $u_r = \gamma_r v_r$ , podemos encontrar a seguinte relação,

$$\partial_\omega u_r = \gamma_r^3 \partial_\omega v_r, \quad (3.106)$$

sendo que esta relação também vale para as derivadas temporais e espaciais. Assim, podemos reescrever a equação anterior como,

$$\frac{\zeta}{\tau_r \gamma_r} \gamma_r^3 \partial_\omega v_r + \frac{1}{\gamma_r \sqrt{(1 - s^2)}} \frac{\Pi}{\tau_r} = -v_r \partial_\omega \Pi. \quad (3.107)$$

Então, derivando a Eq.(3.102) em relação à  $\omega$  obtemos,

$$C_1 \left( 2v_r - v_i - v_f + \frac{\Pi}{C_1} \right) \partial_\omega v_r = -\partial_\omega \Pi v_r. \quad (3.108)$$

Em seguida, aplicando a Eq. (3.107) na equação acima obtemos,

$$C_1 \left( 2v_r - v_i - v_f + \frac{\Pi}{C_1} \right) \partial_\omega v_r = \frac{\zeta}{\tau_r \gamma_r} \gamma_r^3 \partial_\omega v_r + \frac{1}{\gamma_r \sqrt{(1-s^2)}} \frac{\Pi}{\tau_r}, \quad (3.109)$$

agora, aplicando a Eq. (3.98) encontramos,

$$\left[ C_1(2v_r - v_i - v_f) - \frac{\zeta}{\tau_r} \gamma_r^2 + \Pi \right] \partial_\omega v_r = \frac{1}{\gamma_r \sqrt{(1-s^2)}} \frac{\Pi}{\tau_r}, \quad (3.110)$$

e por fim, aplicamos a Eq. (3.102) para obtermos,

$$\left[ C_1 \left( v_r - \frac{v_i v_f}{v_r} \right) - \frac{\zeta}{\tau_r} \gamma_r^2 \right] \partial_\omega v_r = \frac{1}{\gamma_r \sqrt{(1-s^2)}} \frac{\Pi}{\tau_r}. \quad (3.111)$$

Para finalizar, vamos considerar o caso limite com  $\tau_r$  indo ao infinito mas de forma que a razão  $\frac{\zeta}{\tau_r}$  permaneça constante. Assim, o lado direito da equação acima zera,

$$\left[ C_1 \left( v_r - \frac{f}{v_r} \right) - \frac{\zeta}{\tau_r} \gamma_r^2 \right] \partial_\omega v_r = 0, \quad (3.112)$$

de forma que temos duas possibilidades,

$$\partial_\omega v_r = 0, \quad (3.113)$$

que é uma solução trivial, e por conta disto será desconsiderada. Entretanto a segunda possibilidade,

$$C_1 \left( v_r - \frac{v_i v_f}{v_r} \right) - \frac{\zeta}{\tau_r} \gamma_r^2 = 0, \quad (3.114)$$

nos leva a esta equação que pode ser resolvida utilizando a equivalência,

$$\frac{\zeta}{\tau_r} = \frac{\epsilon + p}{b} = \frac{4p}{b}, \quad (3.115)$$

que é obtida juntando as Eqs. (2.197) e (2.198). Assim, após uma série de algebrismos é

possível encontrar,

$$v_r^4 - \frac{4}{3}v_r^2 - \frac{(3v_i^2 + 1)}{3v_i b}v_r + \left(\frac{4}{3b} + \frac{1}{3}\right) = 0. \quad (3.116)$$

Vamos, agora, encontrar os valores para as velocidades em função da pressão e densidade de energia. O processo é semelhante ao caso clássico e segue a metodologia utilizada no livro de Landau [4].

Começaremos escrevendo um sistema similar ao caso anterior, porém envolvendo as equações da relatividade. Para simplificar as equações faremos a seguinte substituição de variáveis,  $\rho \equiv \epsilon + p$ . Utilizando as expressões para fluxos vistas no capítulo 2 podemos escrever a seguinte condição de continuidade para os fluxos na superfície do choque (em uma dimensão),

$$n_i u_i = n_f u_i \quad (3.117)$$

$$T_i^{xx} = T_f^{xx} \quad (3.118)$$

$$T_i^{0x} = T_f^{0x}. \quad (3.119)$$

Esse sistema é análogo ao encontrado no caso Newtoniano

$$v_i \gamma_i \frac{1}{V_i} = v_f \gamma_f \frac{1}{V_f}. \quad (3.120)$$

$$\rho_i v_i^2 \gamma_i^2 + p_i = \rho_f v_f^2 \gamma_f^2 + p_f. \quad (3.121)$$

$$\rho_i v_i \gamma_i^2 = \rho_f v_f \gamma_f^2. \quad (3.122)$$

onde  $V$  se refere ao volume específico, de forma que  $V \equiv \frac{1}{n}$ , . Além disso, teremos diferentes  $\gamma$  para cada região,

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 - v_i^2}}, \quad (3.123)$$

$$\gamma_f = \frac{1}{\sqrt{1 - v_f^2}}. \quad (3.124)$$

$$(3.125)$$

Agora, combinando as Eqs. (3.122) e (3.121), podemos encontrar uma expressão para a

velocidade, em cada região, como função da energia e pressão,

$$v_i = \sqrt{\frac{(p_i - p_f)(\epsilon_f + p_i)}{(\epsilon_i - \epsilon_f)(\epsilon_i + p_f)}}, \quad (3.126)$$

$$v_f = \sqrt{\frac{(p_i - p_f)(\epsilon_i + p_f)}{(\epsilon_i - \epsilon_f)(\epsilon_f + p_i)}}, \quad (3.127)$$

A velocidade de propagação do choque é a velocidade relativa entre as duas regiões do fluido, no referencial onde a onda de choque está em repouso. Para isso, fazemos uso da soma de velocidades relativísticas, dada pela Eq.(2.69). Assim, a velocidade relativa entre as interfaces se torna:

$$v_{if} = \sqrt{\frac{(p_f - p_i)(\epsilon_f - \epsilon_i)}{(\epsilon_i + p_f)(\epsilon_f + p_i)}}. \quad (3.128)$$

Como exemplo, vamos calcular essa velocidade para um gás de fótons ultrarrelativística cuja equação de estado é dada,  $p = \frac{\epsilon}{3}$ . Nesse caso, podemos simplificar as soluções acima na seguinte forma,

$$v_i = \sqrt{\frac{3\epsilon_f + \epsilon_i}{3(\epsilon_i + \epsilon_f)}}, \quad (3.129)$$

$$v_f = \sqrt{\frac{3\epsilon_i + \epsilon_f}{3(\epsilon_f + \epsilon_i)}}, \quad (3.130)$$

$$v_{if} = \sqrt{\frac{3(\epsilon_f - \epsilon_i)^2}{(\epsilon_i + 3\epsilon_f)(\epsilon_f + 3\epsilon_i)}}. \quad (3.131)$$

Vamos reescrever a equação anterior em função da razão  $\epsilon_i/\epsilon_f$  para fazer uma relação entre o tamanho da descontinuidade e da velocidade do choque,

$$v_i = \sqrt{\frac{3 + \frac{\epsilon_i}{\epsilon_f}}{3(3\frac{\epsilon_i}{\epsilon_f} + 1)}}, \quad (3.132)$$

$$v_f = \sqrt{\frac{3\frac{\epsilon_i}{\epsilon_f} + 1}{3(3 + \frac{\epsilon_i}{\epsilon_f})}}, \quad (3.133)$$

Temos que no limite de um choque muito forte  $\epsilon_i/\epsilon_f \rightarrow 0$ ,  $v_f \rightarrow 1$  e  $v_i \rightarrow \frac{1}{3}$ , que está de

acordo com os postulados da relatividade, diferente do caso Newtoniano. Vale ressaltar que  $v_f$  equivale à velocidade do choque.

## 4 MÉTODO SPH

Neste capítulo será introduzido o método numérico que foi utilizado para realizar as simulações computacionais. Além de explicar como utilizar o método, serão apresentados exemplos de simulações e os dados obtidos serão comparados com teoria a elaborada nos capítulos anteriores.

O método *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) é um método numérico criado por Monaghan (1977) [9] com o objetivo de solucionar problemas relacionados à astrofísica, mas também têm aplicações em outras áreas, como colisão de ions pesados [24]. Neste método, o cálculo das derivadas parciais, diferente do método usual, é feito a partir da derivada de uma função que interpola as partículas. Este fator, junto das interações entre as partículas, nos permite escrever as equações hidrodinâmicas como equações diferenciais ordinárias.

### 4.1 Equações Básicas do SPH

O princípio fundamental por trás do método é aproximar as variáveis hidrodinâmicas através de um kernel. Dado um kernel de interpolação  $\mathbf{W}$ , temos que o valor de qualquer função dependente da posição,  $A(\mathbf{r})$ , é aproximado pela integral,

$$A(\mathbf{r}) = \int A(\mathbf{r}')W(\mathbf{r}-\mathbf{r}',h)d\mathbf{r}'; \quad (4.1)$$

Este é um processo de suavização onde o parâmetro  $h$  está relacionado à escala mínima que será descrita numericamente. Existem diversos Kernels, funções que interpolam pontos, que podem ser utilizados neste método, mas todos devem obedecer as seguintes propriedades:

$$\int W(\mathbf{r}-\mathbf{r}',h)d\mathbf{r}' = 1, \quad (4.2)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\mathbf{r}-\mathbf{r}',h) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (4.3)$$

Além disso, esses Kernels devem ser escolhidos de forma que caiam rapidamente para 0, facilitando o custo computacional da simulação. O Kernel utilizado nesta tese é [9],

$$W(\mathbf{r}, h) = \frac{2}{3h} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{r}{h}\right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{r}{h}\right)^3, & \text{se } 0 \leq \frac{r}{h} \leq 1; \\ \frac{1}{4} [2 - \left(\frac{r}{h}\right)]^3, & \text{se } 1 \leq \frac{r}{h} \leq 2; \\ 0, & \text{Qualquer outro caso;} \end{cases} \quad (4.4)$$

Em seguida, precisamos definir uma densidade de referência  $\sigma$  que é conservada, de forma que satisfaça a equação da continuidade.

$$\frac{\partial \sigma^*}{\partial t} + \partial_i \mathbf{j}^i = 0, \quad (4.5)$$

com  $\mathbf{j}$  sendo a corrente associada a essa variável. Então, podemos fazer o seguinte Ansatz, [6]

$$\sigma_{SPH}^*(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha=1}^N \nu_{\alpha} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)|), \quad (4.6)$$

$$\mathbf{j}_{SPH}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha=1}^N \nu_{\alpha} \frac{d\mathbf{r}_{\alpha}(t)}{dt} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)|), \quad (4.7)$$

que satisfaz a equação da continuidade,

$$\frac{\partial \sigma_{SPH}^*}{\partial t} + \partial_i \mathbf{j}_{SPH}^i = 0, \quad (4.8)$$

com os  $\nu_{\alpha}$  sendo constantes arbitrárias. Além disso, utilizando a propriedade de normalização de  $W$  Eq. (4.2),

$$\int_{SPH} \sigma^*(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} = \sum_{\alpha}^N \nu_{\alpha}. \quad (4.9)$$

Podemos interpretar que  $\sigma^*(\mathbf{r}, t)$  é uma distribuição cujo valor é a soma de distribuições menores, divididas ao longo do espaço. Podemos interpretar essas distribuições menores "como partículas do SPH".

Então, podemos calcular o valor de uma variável arbitrária  $A_a$  utilizando nossa densidade de referência da seguinte forma,

$$A_a(\mathbf{r}_a) = \sum_b \nu_a \frac{A(\mathbf{r}_b)}{\sigma_b} W(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b, h), \quad (4.10)$$

onde os termos com índice  $a$  indicam os valores referentes a partícula que estamos ob-

servando e os termos com índices  $b$  são referentes a todas as demais partículas. Para simplificar, será introduzida a seguinte notação: seja  $H$  uma grandeza qualquer. Temos que,

$$H_{ab} = H_a - H_b. \quad (4.11)$$

Finalmente, a grande vantagem deste método é que as derivadas espaciais podem ser expressas e calculadas por meio de somatórios:

$$\nabla A_a(\mathbf{r}_a) = \sum_b \nu_b \frac{A(\mathbf{r}_b)}{\sigma_b} \nabla W(\mathbf{r}_{ab}, h). \quad (4.12)$$

Todavia, como dito no artigo de Monaghan [9] é melhor utilizar a seguinte relação para se obter melhor precisão,

$$\nabla A_a = \frac{1}{\sigma_a} [\nabla(\sigma_a A_a) - A_a \nabla(\sigma_a)]. \quad (4.13)$$

## 4.2 Equações de Movimento Para o SPH

Agora, vamos converter as equações para fluidos relativísticos, com uma viscosidade do tipo *bulk*, para a linguagem do SPH. Primeiramente vamos definir a densidade que será utilizada como referência. Será utilizada uma densidade arbitrária, pois as demais variáveis(entropia,energia,etc) não são conservadas, por conta da dissipação. A densidade deve satisfazer a seguinte relação,

$$\partial_\mu(\sigma u^\mu) = 0, \quad (4.14)$$

na linguagem do SPH, essa densidade é expressa como,

$$\sigma_a^*(\mathbf{r}_a, t) = \sum_{b=1}^N \nu_b W(\mathbf{r}_{ab}), \quad (4.15)$$

sendo que o valor de  $\nu_b$  não altera os resultados finais das simulações. Por conta disso é aconselhável fixar seu valor  $\nu_b = 1$  para simplificação ??.

Além disso, será adotada a seguinte convenção: Variáveis com \* serão referentes ao seu valor medido com relação ao referencial do laboratório e as variáveis sem \* são

referentes ao referencial de repouso do elemento de fluido, onde a relação entre o referencial do laboratório e da partícula é encontrada a partir da contração de Lorentz:

$$\sigma^* = \sigma\gamma \quad (4.16)$$

$$v^j = \frac{u^j}{\gamma}. \quad (4.17)$$

Podemos utilizar a Eq. (4.13) para calcular o valor da derivada da velocidade com maior precisão

$$\sigma^*\nabla \cdot (\mathbf{v}) = \nabla \cdot (\sigma^*\mathbf{v}) - \mathbf{v}\nabla(\sigma^*), \quad (4.18)$$

O primeiro termo pode ser calculado da forma:

$$\nabla \cdot (\sigma_a^*\mathbf{v}_a) = \sum_b \nu_b \mathbf{v}_b \nabla W(\mathbf{r}_{ab}, h), \quad (4.19)$$

enquanto o segundo termo é,

$$\mathbf{v}_a \nabla \cdot (\sigma_a^*) = \sum_b \mathbf{v}_a \nu_b \nabla W(\mathbf{r}_{ab}, h). \quad (4.20)$$

Somando as duas equações acima obtemos a expressão para o cálculo numérico da velocidade,

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}_a) = \frac{1}{\sigma_a^*} \sum_b \nu_b \mathbf{v}_{ba} \nabla W(\mathbf{r}_{ab}, h). \quad (4.21)$$

Já para o cálculo da derivada da pressão temos um problema. Se utilizarmos o mesmo procedimento acima seria obtida a seguinte expressão,

$$\sigma_a^* \nabla p_a = \sum_b \nu_b p_{ba} \nabla W(\mathbf{r}_{ab}, h), \quad (4.22)$$

Lembrando que o  $\mathbf{F} = -\nabla p$ , logo para o caso onde a pressão é constante a força é igual à zero. Todavia, os momentos linear e angular deixam de ser conservados exatamente, com possíveis erros numéricos. A forma mais vantajosa de escrever o gradiente da pressão é em função de  $\nabla \frac{p}{\sigma^*}$ , tal conclusão foi feita por Monaghan. Existem inúmeras formas de escrever derivadas numéricas e cada uma delas acarreta em uma precisão diferente. Após

várias tentativas com diferentes expressões para a derivada numérica da pressão, esta foi a que apresentava menor erro percentual [9],

$$\frac{1}{\sigma^*} \nabla p = \nabla \frac{p}{\sigma^*} + \frac{p}{\sigma^{*2}} \nabla \sigma^*. \quad (4.23)$$

O segundo termo da equação acima é calculado da seguinte forma:

$$\frac{p_a}{\sigma_a^{*2}} \nabla(\sigma_a^*) = \frac{p_a}{\sigma_a^{*2}} \sum_b \nu_b \nabla W(\mathbf{r}_{ab}, h), \quad (4.24)$$

enquanto o primeiro é,

$$\nabla \left( \frac{p_a}{\sigma_a^*} \right) = \sum_b \frac{p_b}{\sigma_b^*} \frac{\nu_b}{\sigma_b^*} \nabla W(\mathbf{r}_{ab}, h). \quad (4.25)$$

Somando as equações acima obtemos,

$$\nabla p_a = \sigma_a^* \sum_b \nu_b \left( \frac{p_a}{\sigma_a^{*2}} + \frac{p_b}{\sigma_b^{*2}} \right) \nabla W(\mathbf{r}_{ab}, h). \quad (4.26)$$

E, por fim, a expressão para o valor da entropia densidade de entropia  $s$  é dada por,

$$s_a^* = \sum_b^N \nu_b \left( \frac{s}{\sigma} \right)_b W(\mathbf{r}_{ab}, h), \quad (4.27)$$

agora, para o cálculo de  $s/\sigma$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{s}{\sigma} \right) = \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dt} s - \frac{s}{\sigma^2} \frac{d}{dt} \sigma, \quad (4.28)$$

vamos precisar abrir a equação para 4-fluxo de entropia,

$$\partial_\mu S^\mu = \partial_t(s\gamma) + \partial_i(s\gamma v^i), \quad (4.29)$$

ou seja,

$$\partial_\mu S^\mu = s\partial_t\gamma + s\partial_i\gamma v^i + \gamma\partial_t s + \gamma v^i \partial_i s, \quad (4.30)$$

agrupando os fatores e utilizando a definição de derivada material obtemos,

$$\partial_\mu S^\mu = s\partial_\mu u^\mu + \gamma \frac{ds}{dt}, \quad (4.31)$$

podemos reescrever a Eq. (2.191) como

$$s\partial_\mu u^\mu + \frac{ds}{d\tau} = -\frac{1}{T}\Pi\partial_\mu u^\mu. \quad (4.32)$$

A partir da Eq. (4.13), nós obtemos a relação

$$\partial_\mu(\sigma u^\mu) = \sigma\partial_\mu u^\mu + u^\mu\partial_\mu\sigma. \quad (4.33)$$

Utilizando a Eq. (4.14), encontramos que

$$\frac{1}{\sigma}\gamma\frac{d}{dt}\sigma = -\partial_\mu u^\mu = 0. \quad (4.34)$$

Finalmente, utilizando as equações acima, podemos escrever a derivada temporal de  $s/\sigma$  como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{s}{\sigma}\right) = -\frac{1}{\sigma^*}\frac{1}{T}\Pi\partial_\mu u^\mu. \quad (4.35)$$

Para prosseguirmos, é imprescindível fornecer uma equação de estado, pois sem ela não teríamos um sistema possível de ser resolvido. Uma equação de estado nos dá as relações entre as grandezas termodinâmicas de uma determinada substância em um de seus estados da matéria. Sendo assim, ela funciona como uma forma de caracterizar o objeto de estudo. Para esta dissertação, iremos trabalhar com um gás ultrarrelativístico, cujas equações de estado são [25]:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{3g}{\pi^2}T^4, \\ s &= \frac{4g}{\pi^2}T^3, \\ p &= \frac{1}{3}\epsilon, \end{aligned} \quad (4.36)$$

onde o  $g$  é o fator de degenerescência. No caso abordado neste trabalho vamos supor que  $g = 1$ .

Neste trabalho, vamos nos restringir ao caso unidimensional, mas a metodologia é a mesma para os demais casos. A partir da equação de estado referente ao gás ultrarrelativístico, citada acima, encontramos a seguinte relação entre as derivadas da densidade de energia e pressão,

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} = 3\frac{dp}{d\tau}. \quad (4.37)$$

Aplicando a equação de estado na Eq. (2.189) obtemos,

$$3\frac{dp}{d\tau} + (\epsilon + p)\partial_\mu u^\mu = 0, \quad (4.38)$$

agora, abrindo a Eq.(2.190),

$$(\epsilon + p + \Pi)u^\mu\partial_\mu u^\lambda - \eta^{\lambda\mu}\partial_\mu(p + \Pi) + u^\lambda\frac{d(p + \Pi)}{d\tau} = 0, \quad (4.39)$$

e, aplicando a Eq.( 4.38) na expressão acima encontramos,

$$(\epsilon + p + \Pi)u^\mu\partial_\mu u^\lambda - \eta^{\lambda\mu}\partial_\mu(p + \Pi) + u^\lambda\frac{d(\Pi)}{d\tau} - u^\lambda C_s^2(\epsilon + p + \Pi)\partial_\mu u^\mu = 0, \quad (4.40)$$

com  $C_s^2 = 1/3$  sendo a velocidade do som ao quadrado. Neste trabalho vamos estar nos limitando ao caso  $\lambda = x$ , mas o procedimento para trabalhar com mais dimensões é o mesmo. Em seguida, vamos calcular termo a termo da equação acima. O primeiro pode ser calculado com o auxílio da Eq. (2.63),

$$(\epsilon + p + \Pi)u^\mu\partial_\mu u = (\epsilon + p + \Pi)\gamma\frac{du}{dt}, \quad (4.41)$$

já o segundo termo equivale a,

$$\eta^{x\mu}\partial_\mu(p + \Pi) = -\partial_x(p + \Pi), \quad (4.42)$$

pois é o único termo não nulo da métrica de Minkowski, para  $\lambda = 1$ , é  $\eta^{xx} = -1$ . Em seguida, para calcular os próximos termos devemos realizar a seguinte conta,

$$\begin{aligned} \partial_\mu u^\mu &= \partial_t\gamma + \gamma\partial_x v + v\partial_x\gamma, \\ \partial_\mu u^\mu &= \frac{d}{dt}\gamma + \gamma\partial_x v. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Como o fator  $\gamma$  pode ser escrito da forma  $\gamma = [1 + u^2]^{\frac{1}{2}}$ , a sua derivada temporal é dada por,

$$\frac{d}{dt}\gamma = \frac{u}{\gamma}\frac{d}{dt}u = v\frac{d}{dt}u, \quad (4.44)$$

obtemos então,

$$\partial_\mu u^\mu = v \frac{d}{dt} u + \gamma \partial_x v, \quad (4.45)$$

com essa equação em mãos podemos dar prosseguimento ao cálculo da derivada da viscosidade,

$$u \frac{d\Pi}{d\tau} = -u \left( \frac{\Pi}{\tau_r} + \frac{\zeta}{\tau_r} \left( v \frac{du}{dt} + \gamma \partial_x v \right) \right), \quad (4.46)$$

e o ultimo termo pode ser expresso como

$$u C_s^2 (\epsilon + p + \Pi) \partial_\mu u^\mu = C_s^2 \frac{(\epsilon + p + \Pi) u^2}{\gamma} \frac{du}{dt} + C_s^2 (\epsilon + p + \Pi) u \gamma \partial_x v. \quad (4.47)$$

Finalmente, somando todos esses termos, nós obtemos,

$$\left[ (\gamma(\epsilon + p + \Pi)(1 - v^2 C_s^2) - \frac{\zeta}{\tau_r} \frac{1}{\gamma} u^2) \frac{du}{dt} = -\partial_x(p + \Pi) + u \gamma \left[ \frac{\Pi}{\tau_r \gamma} + ((\epsilon + p + \Pi) C_s^2 + \frac{\zeta}{\tau_r}) \partial_x v \right] \right] \quad (4.48)$$

que junto das equações,

$$\frac{d\Pi}{d\tau} = \frac{\Pi}{\tau_r} + \frac{\zeta}{\tau_r} \left( v \frac{du}{dt} + \gamma \partial_x v \right), \quad (4.49)$$

e

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{s}{\sigma} \right) = -\frac{1}{\sigma^*} \frac{1}{T} \Pi \left( v \frac{du}{dt} + \gamma \partial_x v \right), \quad (4.50)$$

temos as 3 equações, para  $u$ , para  $\Pi$  e para  $s/\sigma$  que serão aplicadas para cada elemento de fluido (discretizado em termos de partículas, no método SPH), e nos proporcionará a evolução temporal do sistema. Lembrando que as derivadas da velocidade da pressão serão obtidas através das Eqs. (4.21) e (4.26).

### 4.3 Formulação do Programa

Nesta seção será explicada a forma com que o código foi escrito para que pudesse simular de forma eficaz a evolução temporal de um fluido. Em seguida, serão apresentados alguns exemplos que servirão como testes. A unidade de medida para espaço será  $fm(10^{-15}m)$ , e como estamos adotando a convenção de que  $c = 1$  a unidade para tempo também será de  $fm$ . E, a velocidade será uma fração de  $c$ , por conta disso também não

terá dimensão.

Primeiramente, devemos ressaltar a importância da escolha dos parâmetros numéricos  $N$ ,  $h$  e  $dt$ , onde,  $N$  é o número de partículas SPH escolhido para representar o fluido e  $dt$  é o tamanho do passo temporal. Temos que, quanto menor o passo temporal, maior precisão teremos; porém, o custo computacional também aumenta. O mesmo vale para o  $h$ . Porém ao diminuir seu tamanho devemos aumentar o número de partículas, pois é necessária uma quantidade considerável de partículas em cada elemento. Tendo em vista essas condições, é necessário escolher os parâmetros de forma que haja uma precisão boa, mas que não exija tanto poder computacional. Além disso, é importante ressaltar que o  $dt$  deve sempre ser menor que o  $h$  por pelo menos um fator 2.

O próximo passo é definir a condição inicial da densidade arbitrária carregada por cada partícula SPH (cada elemento de fluido). Após isso, é feito o cálculo da densidade de entropia e das demais grandezas termodinâmicas. Durante a simulação, iremos desprezar o efeito das bordas. Por conta disso, elas não serão evoluídas no tempo. Além disso, é de suma importância garantir que o choque não se aproxime das bordas.

Após colocar esta condição é feito o cálculo das derivadas espaciais da velocidade e pressão em cada instante de tempo. Para aumentar a precisão, cada passo temporal é separado em duas partes de igual tamanho, seguindo o método de Runge-Kutta de ordem 2 [26].

Então, aplicamos a equação de Euler (4.48) em cada elemento de fluido. Em seguida, calculamos a variação da viscosidade e da entropia por meio das Eqs.(4.49),(4.50) respectivamente. Por fim, calculamos a nova posição e velocidade de cada partícula para que então comece um novo passo temporal.

#### 4.3.1 Viscosidade Numérica

Para casos onde haja uma descontinuidade, como em uma onda de choque, é necessária a implementação de uma viscosidade numérica, ou pseudo-viscosidade, no código. Esta não têm significado físico; apenas serve para suavizar a descontinuidade e assim possibilita descrever o problema com uma função contínua.

Existem diversas versões para o cálculo da pseudo-viscosidade, cada uma com suas devidas vantagens e desvantagens. Neste trabalho, a viscosidade numérica é dada por um

termo de correção  $\Pi_{ab}$  no divergente da pressão [9],

$$\nabla p_a = s_a^* \sum_b \sigma_b \left( \frac{p_a}{s_a^{*2}} + \frac{p_b}{s_b^{*2}} + \Pi_{ab} \right) \nabla W(r_{ab}, h). \quad (4.51)$$

Onde o termo  $\Pi_{ab}$  é calculado da seguinte forma,

$$\Pi_{ab} = \begin{cases} \frac{-\alpha C_{ab} \mu_{ab} + \beta \mu_{ab}^2}{\rho_{ab}}, & \text{se } \mathbf{v}_{ab} \cdot \mathbf{r}_{ab} < 0, \\ 0, & \text{se } \mathbf{v}_{ab} \cdot \mathbf{r}_{ab} > 0. \end{cases} \quad (4.52)$$

Sendo que,

$$\begin{aligned} \mu_{ab} &= \frac{h \mathbf{v}_{ab} \cdot \mathbf{r}_{ab}}{r_{ab}^2 + \eta^2}, \\ \eta^2 &\approx 0.01 h^2, \end{aligned} \quad (4.53)$$

onde  $\alpha = 1$  e  $\beta = 2$  [9].

### 4.3.2 Exemplos

Nesta subseção serão apresentados dois exemplos com a finalidade de garantir a consistência do código. O primeiro será uma onda de som se propagando em um fluido ideal e o segundo é o modelo do Landau para choque de núcleos.

#### 4.3.2.1 Onda de Som

O primeiro exemplo a ser feito é de uma onda sonora se propagando em um fluido ideal (Figura 7). Como foi discutido anteriormente, a solução do tipo onda sonora é uma boa aproximação para perturbação de pequena amplitude na forma triangular. Para este exemplo serão utilizados os seguintes parâmetros numéricos do SPH:  $dt = 0.01 fm$ ,  $h = 0.02 fm$  e  $N = 1500$ .

Agora, podemos analisar o resultado obtido. Constatamos que a forma se mantém, mas com metade da amplitude original. Além disso, podemos calcular a velocidade através do gráfico e verificar que  $C_s \approx 1/\sqrt{3}$ . Temos então que os dados obtidos na simulação são condizentes com a teoria apresentada anteriormente.

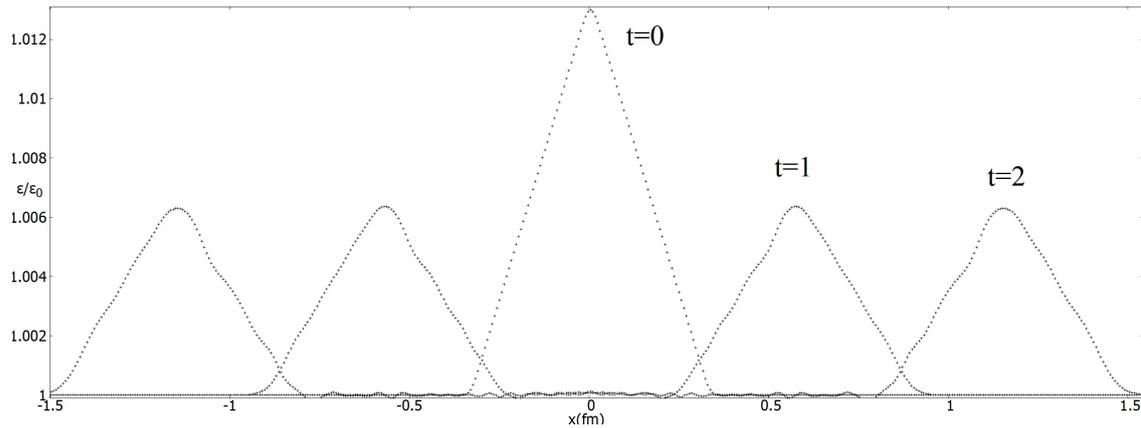


Figura 7: Propagação de uma onda de som de formato triangular. Com as plotagens sendo feitas com um intervalo de tempo de 1fm.

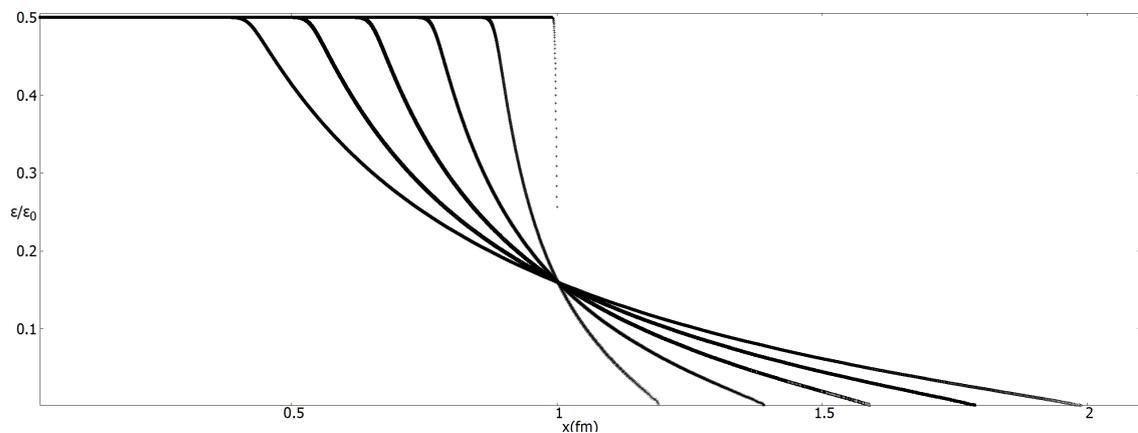


Figura 8: Evolução temporal do Modelo do Landau, com um intervalo de tempo de 0.2fm

#### 4.3.2.2 Modelo do Landau para colisões de núcleos

Agora, vamos adotar de exemplo o modelo que Landau sugeriu para explicar como funciona o processo de termalização após o choque de 2 núcleos. Neste modelo, podemos considerar que após a colisão o conjunto se comporta como um fluido ideal escoando até termalizar [10], que está ilustrado na Figura 8. Para a simulação serão utilizados os seguintes parâmetros numéricos do SPH  $dt = 0.0025 fm$ ,  $h = 0.005 fm$  e  $N = 10000$ . Para a condição inicial temos as partículas igualmente espaçadas e com mesma densidade de entropia.

Agora, podemos comparar a simulação com o resultado analítico [10] em diferentes instantes de tempo. Essas comparações estão ilustradas nas Figura 9, Figura 10 e Figura 11. Vemos que a solução numérica apresenta uma alta concordância com a solução analítica. A suavidade da solução numérica é por conta do tamanho do *grid*.

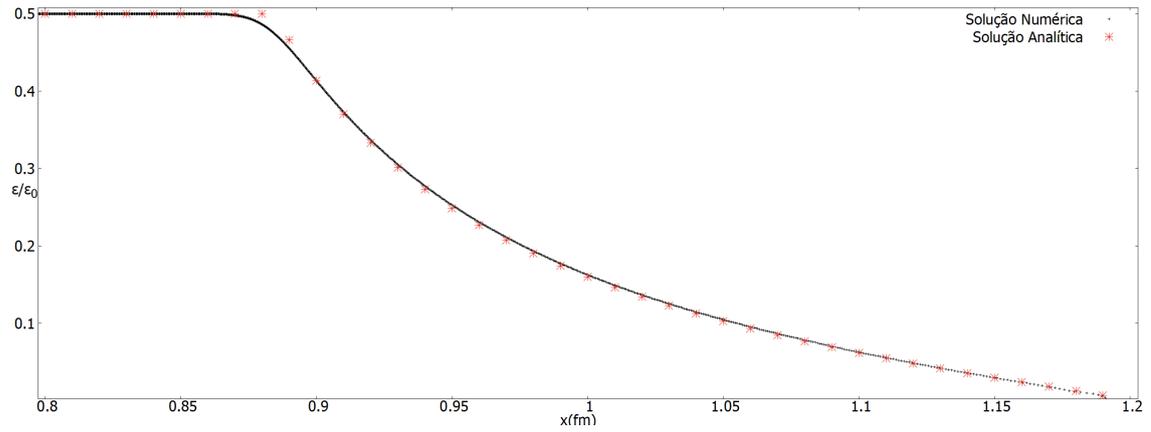


Figura 9: Comparação para  $t = 0.2$  fm

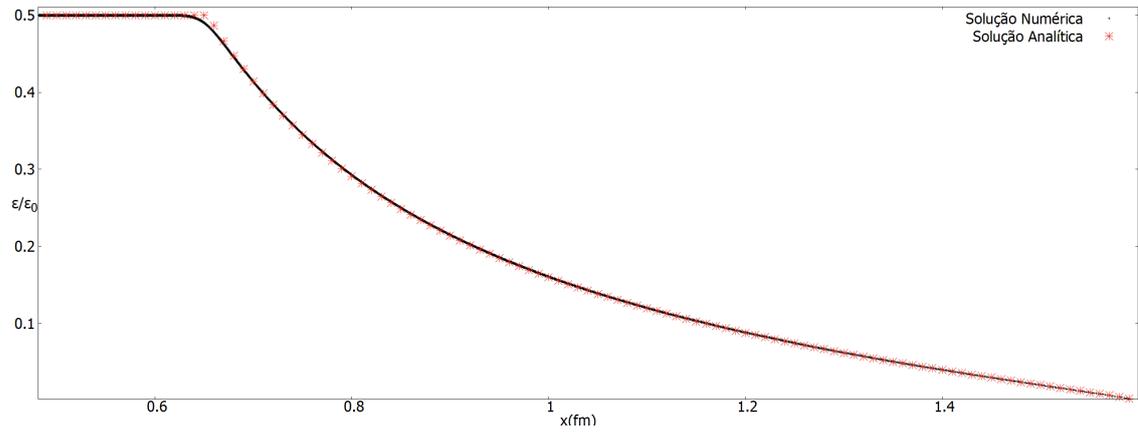


Figura 10: Comparação para  $t = 0.6$  fm

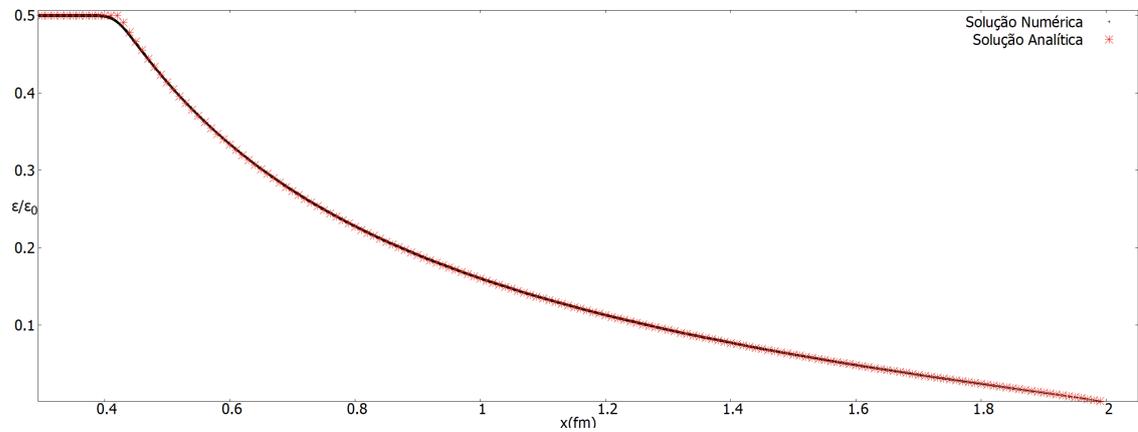


Figura 11: Comparação para  $t = 1.0$  fm

## 5 ANÁLISES E DISCUSSÕES

Neste capítulo, serão apresentadas uma série de simulações numéricas para ondas de choque, que utilizam os conceitos apresentados nos capítulos anteriores, e serão analisados os efeitos que a variação dos parâmetros numéricos têm no choque, com os parâmetros numéricos do SPH utilizados nas simulações sendo

- $h = 0,01 fm$ ,
- $N = 30000$ ,
- $dt = 0,005 fm$ .

E, todos os gráficos serão feitos em relação ao referencial do laboratório.

### 5.1 Problema de Riemann

Primeiramente, vamos adotar um problema mais simples para simular. O problema de Riemann consiste em uma interface separada em duas partes, as duas com um mesmo fluido ideal, só que com densidades de entropias diferentes [11]. Vamos considerar que na metade 1 o fluido têm densidade de entropia  $s_1$  e na segunda metade têm densidade de entropia  $s_2$ , o esquema está ilustrado na Figura 12. Obviamente, a energia associada a cada lado é  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ . Em um determinado momento, a divisão entre as partes é removida e temos a propagação de uma onda de choque, como ilustrado na Figura 13. Podemos perceber que a forma do choque não se altera após sua formação.

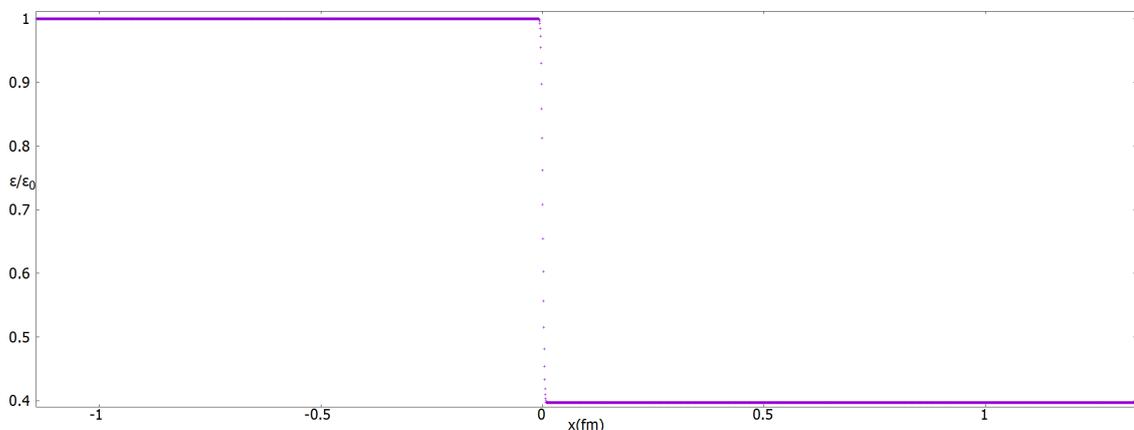


Figura 12: Condição inicial para o problema de Riemann para  $s_1/s_2 = 2$

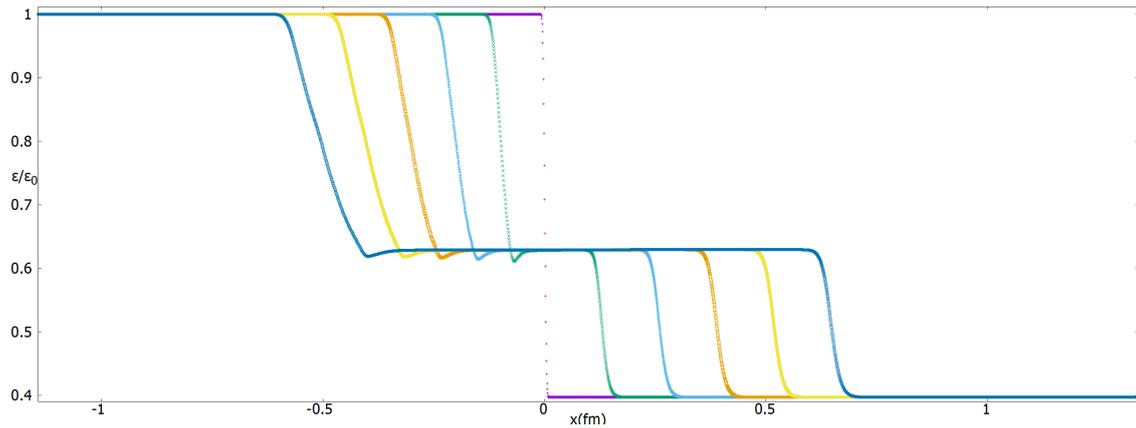


Figura 13: Onda de choque se propagando para a condição inicial do problema de Riemann para  $s_1/s_2 = 2$ , com intervalos de tempo de 0.2fm

Podemos também analisar o choque em um determinado instante de tempo nas Figura 14 e Figura 15. Para um fluido ideal, a onda de choque é uma descontinuidade, porém, computacionalmente, é impossível fazer esta representação. Como foi discutido anteriormente, foi implementada uma viscosidade numérica, que é a responsável pela suavização do choque.

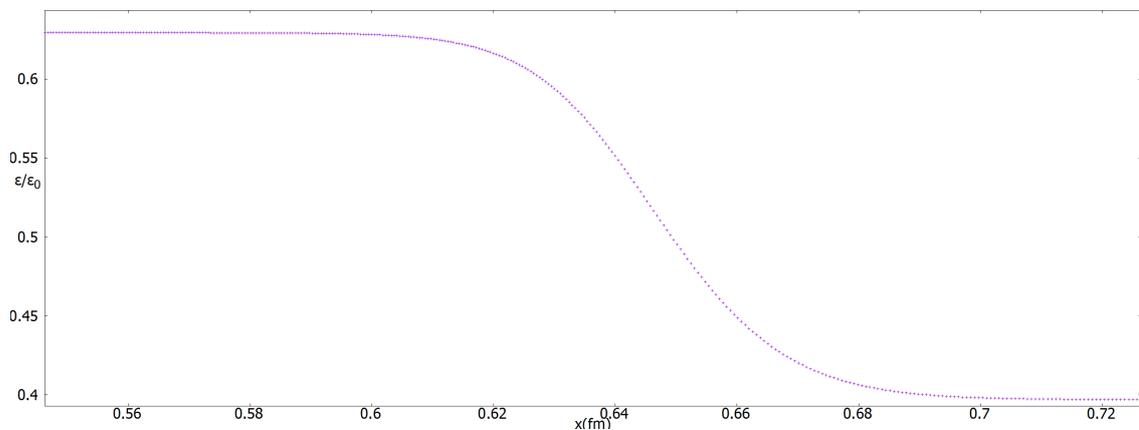


Figura 14: Problema de Riemann para  $s_1/s_2=2$  e  $t=1\text{fm}$

## 5.2 Ondas de Choque com Viscosidade

Agora, vamos considerar a mesma condição inicial que o problema de Riemann, só que agora o fluido terá uma viscosidade do tipo *bulk*. É importante ressaltar que só existem soluções analíticas para o problema de Riemann para o caso ideal [27]. Na Figura 16, podemos ver um exemplo de um choque se propagando. Neste exemplo podemos perceber que, após o choque ser formado, sua velocidade e forma permanecem constantes. Agora,

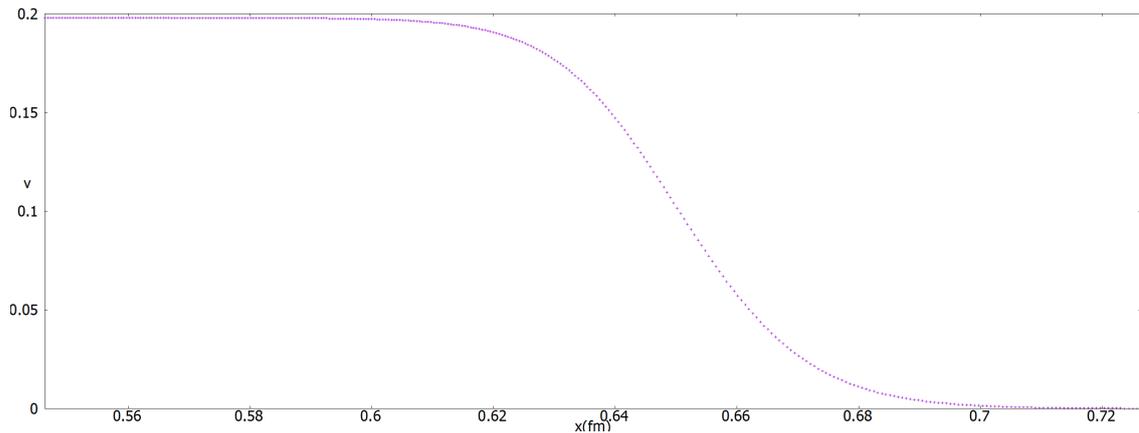


Figura 15: Problema de Riemann para  $s_1/s_2 = 2$  e  $t=1\text{fm}$

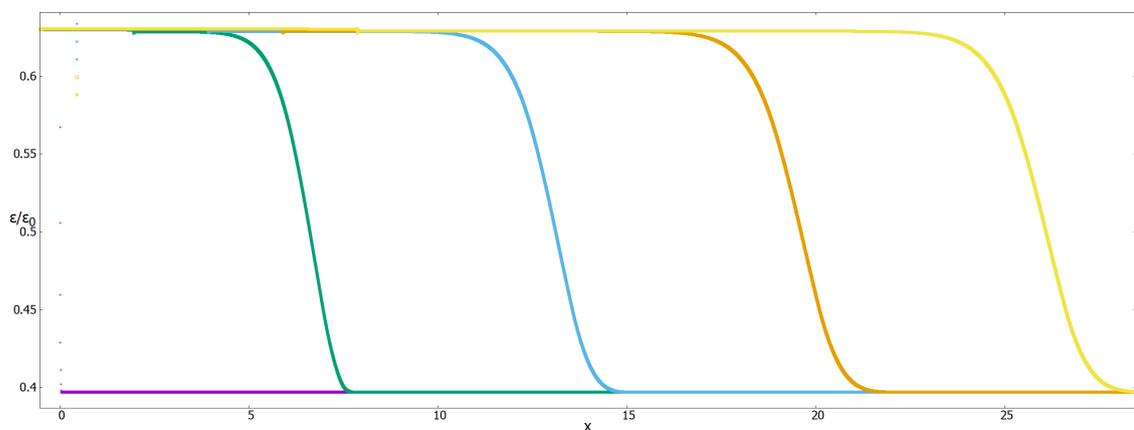


Figura 16: Propagação de uma onda de choque com  $\alpha = 0.1$ ,  $b = 5$  e  $s_1/s_2 = 2$ . Com intervalo de tempo de 10 fm.

serão apresentadas várias simulações com diferentes viscosidades, tempos de relaxação e  $s_1/s_2$ . A variação da viscosidade será feita através do parâmetro  $\alpha$ , definido na Eq. (2.197), e a variação do tempo de relaxação será feito por  $b$ , definido na Eq. (2.198).

Primeiramente, realizamos simulações com uma viscosidade pequena, de  $\alpha = 0.1$ . Nas Figura 17, Figura 18 e Figura 19 comparamos como a variação da razão  $s_1/s_2$  afeta o choque. Podemos ver que, quanto maior essa razão maior, a velocidade do choque. E, a viscosidade também aumenta pois devido o aumento da velocidade há um aumento do efeito de compressibilidade das partículas. Já nas Figura 20, Figura 21, Figura 22 variamos o parâmetro  $b$ . Sua variação diminui a velocidade máxima da teoria, o que ocasiona num acúmulo de matéria na parte final do choque.

Agora, da Figura 23 até a Figura 28 as simulações foram feitas com uma viscosidade de  $\alpha = 0.5$ . E, da Figura 29 até a Figura 34 adotamos uma viscosidade de  $\alpha = 1.0$ . Podemos checar que as conclusões feitas para  $\alpha = 0.1$  ainda são validas. Além disso, o

aumento da viscosidade faz com que o choque leve mais tempo para se formar (por isso que o tempo dessas simulações é maior que o tempo para  $\alpha = 0.1$ ). Também é possível verificar que  $\alpha$  tem uma relação inversamente proporcional com a velocidade do choque.

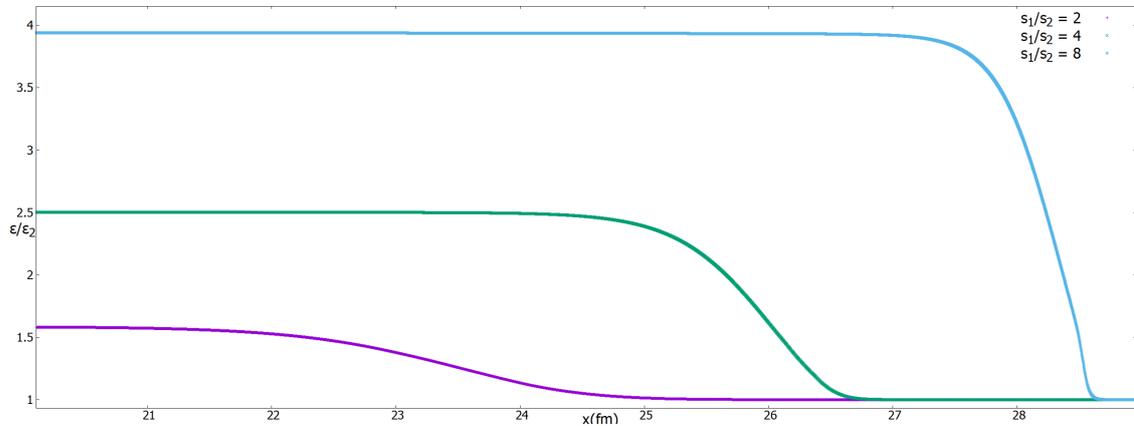


Figura 17: Energia para  $\alpha = 0.1$  e  $b = 5$   $t = 36$  fm

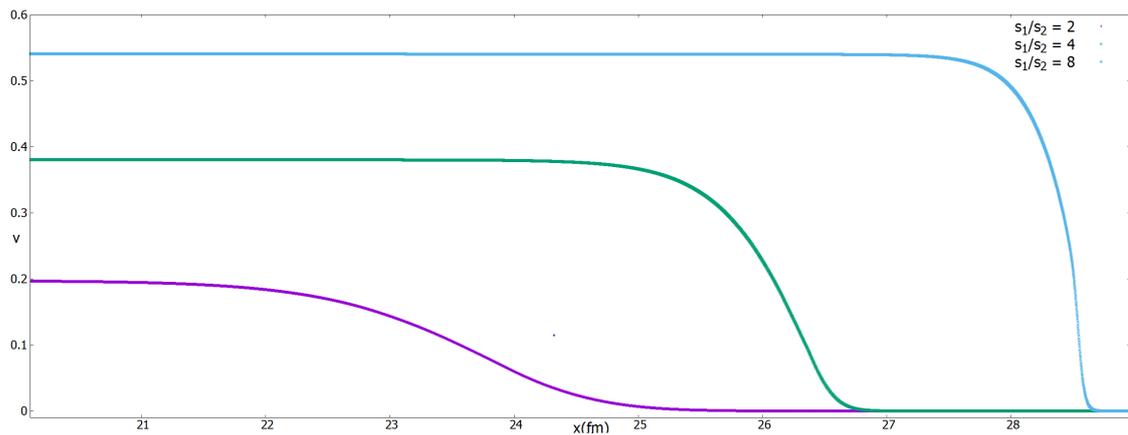


Figura 18: Velocidade para  $\alpha = 0.1$  e  $b = 5$   $t = 36$  fm

### 5.2.1 Choque Duplo

Temos que a parte teórica das ondas de choque já foi amplamente estudada, porém uma parte ainda carece de estudos. Quando o choque se move com velocidade superior à velocidade máxima da teoria linear da hidrodinâmica, dada pela Eq. (2.199), é esperado o surgimento de novos fenômenos. Podemos fazer essa situação ocorrer de duas formas. A primeira é aumentando a razão  $s_1/s_2$  para aumentar a velocidade do choque. A segunda é aumentando o parâmetro  $b$  para diminuirmos a velocidade máxima.

Nessas condições, é perceptível a formação de um segundo choque na parte final do primeiro. Dois exemplos que ilustram bem esse caso são as Figura 23 e Figura 26, onde

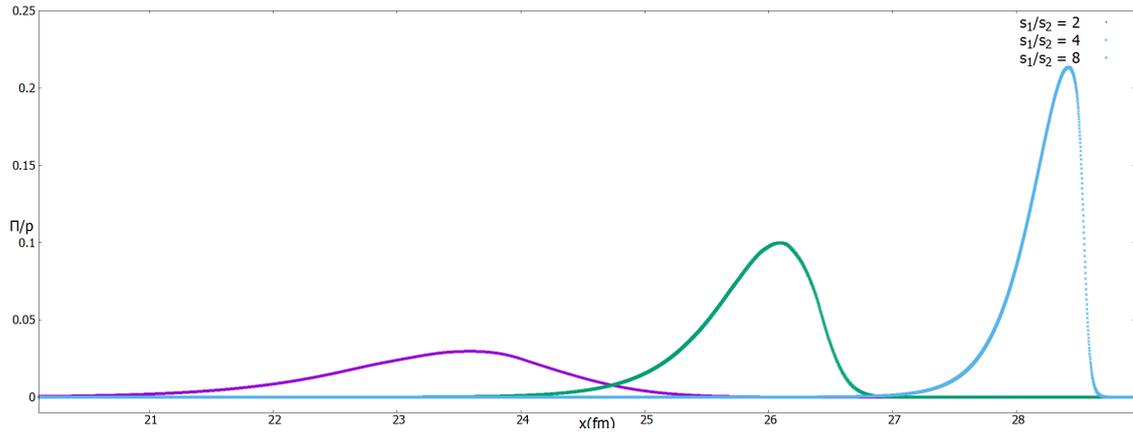


Figura 19:  $\Pi/p$  como função da distância para  $\alpha = 0.1$  e  $b = 5$   $t = 36 fm$

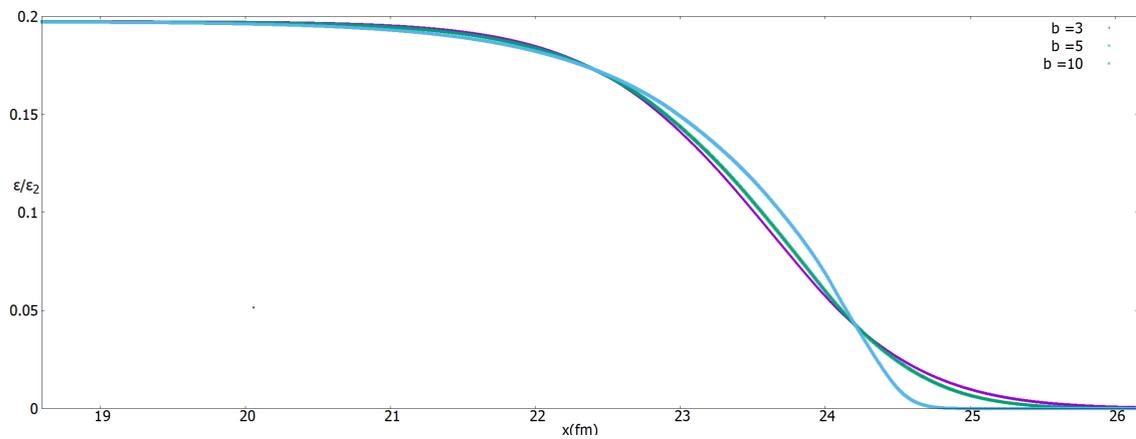


Figura 20: Energia para  $\alpha = 0.1$  e  $s_1/s_2 = 2$   $t=36fm$

há uma queda abrupta da densidade de energia no final do choque. Isto ocorre por conta de um acúmulo de matéria na borda do choque, pois o mesmo está tentando se mover com uma velocidade maior do que a teoria linear da hidrodinâmica comporta.

Contudo, ainda não há indícios se este fenômeno é algo físico ou não. Para confirmar isso seria necessária uma simulação utilizando uma teoria mais fundamental (como a equação de Boltzman para um gás). E, caso não seja físico é preciso encontrar fazer uma correção na teoria hidrodinâmica.

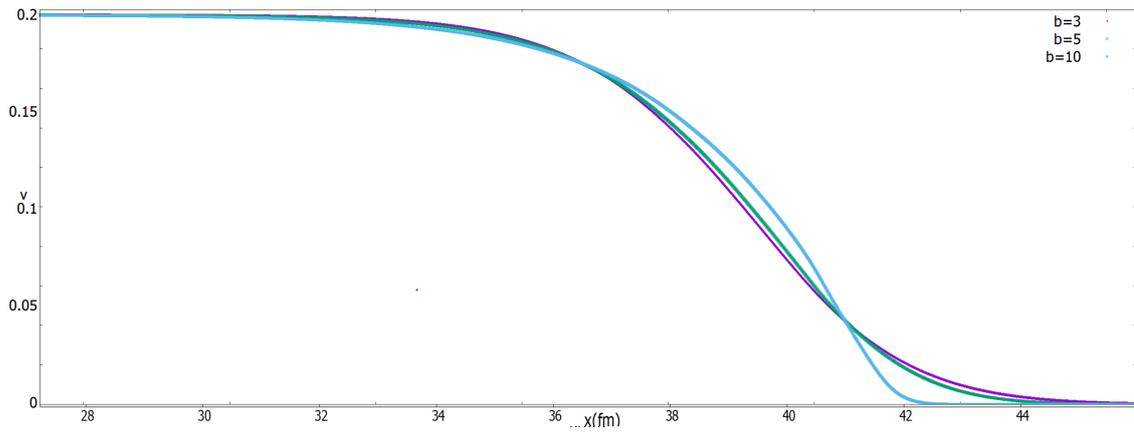


Figura 21: Velocidade para  $\alpha = 0.1$  e  $s_1/s_2 = 2$   $t=36\text{fm}$

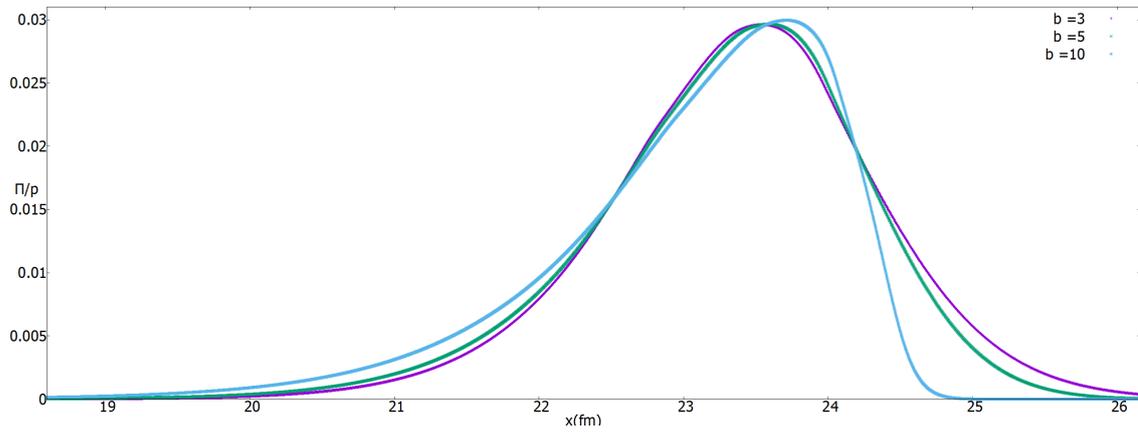


Figura 22: Viscosidade para  $\alpha = 0.1$  e  $s_1/s_2 = 2$   $t=36\text{fm}$

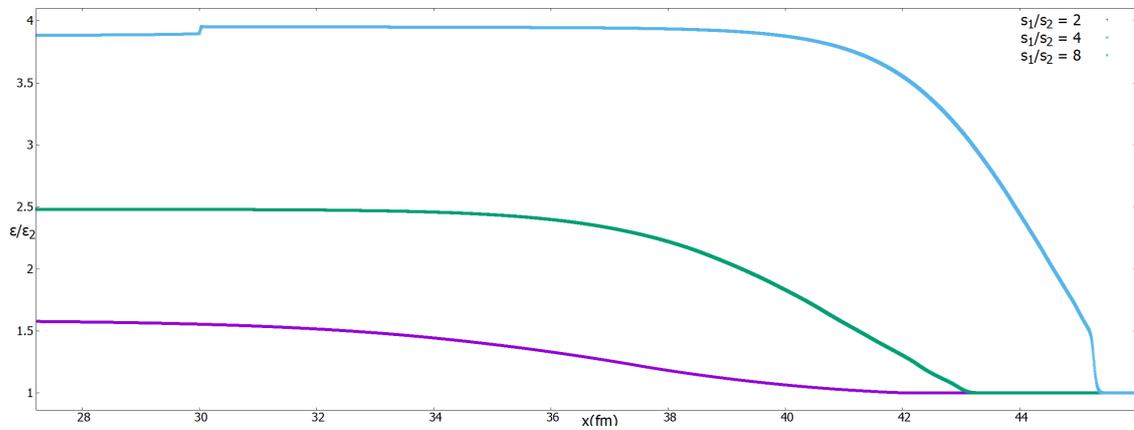


Figura 23: Energia para  $\alpha = 0.5$  e  $b = 5$   $t=56\text{fm}$

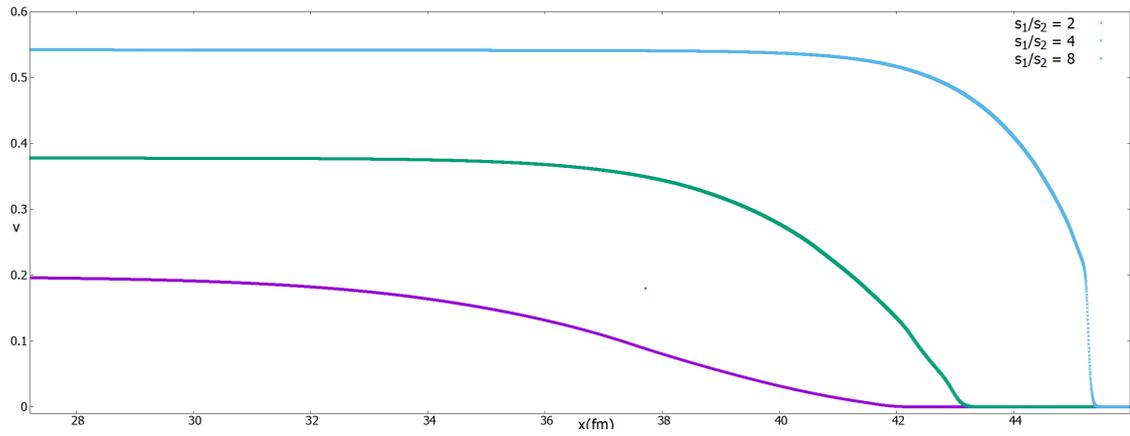


Figura 24: Velocidade para  $\alpha = 0.5$  e  $b = 5$   $t=56$ fm

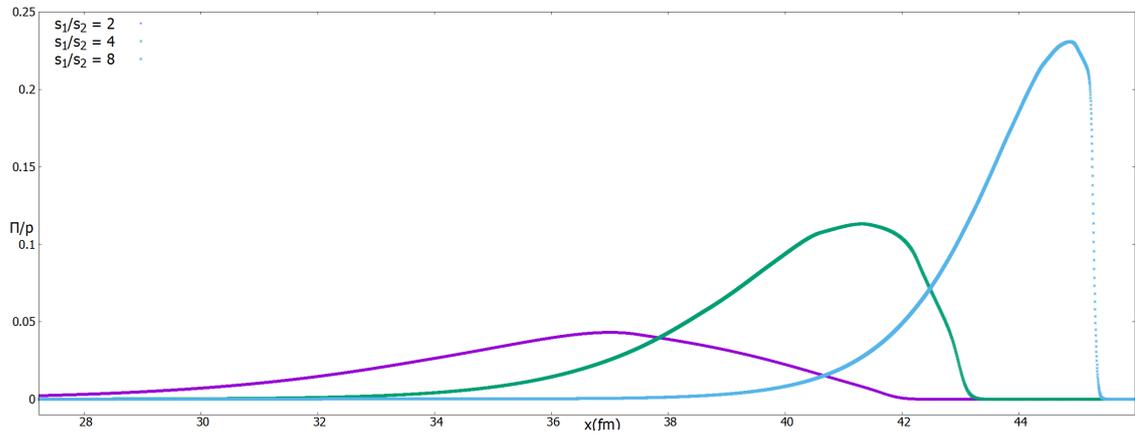


Figura 25: Viscosidade para  $\alpha = 0.5$  e  $b = 5$   $t=56$ fm

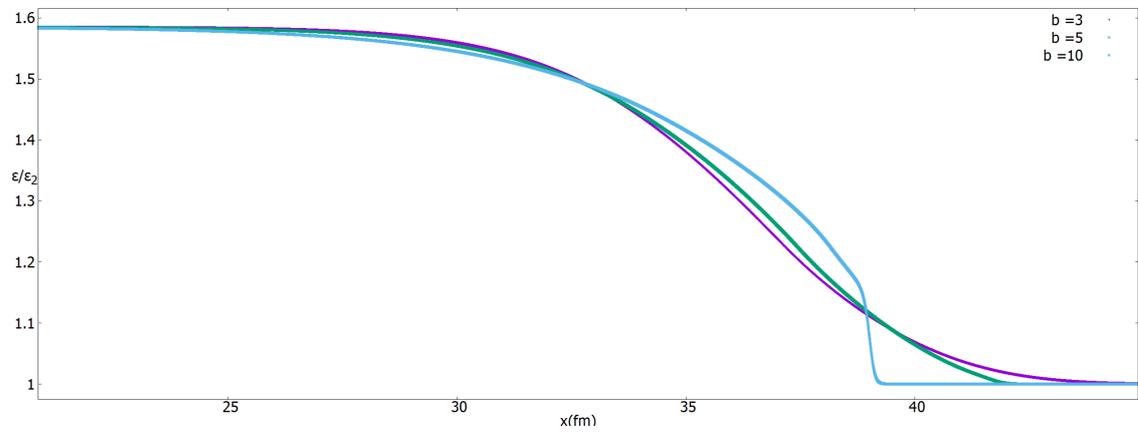


Figura 26: Energia para  $\alpha = 0.5$  e  $s_1/s_2 = 2$   $t=56$ fm

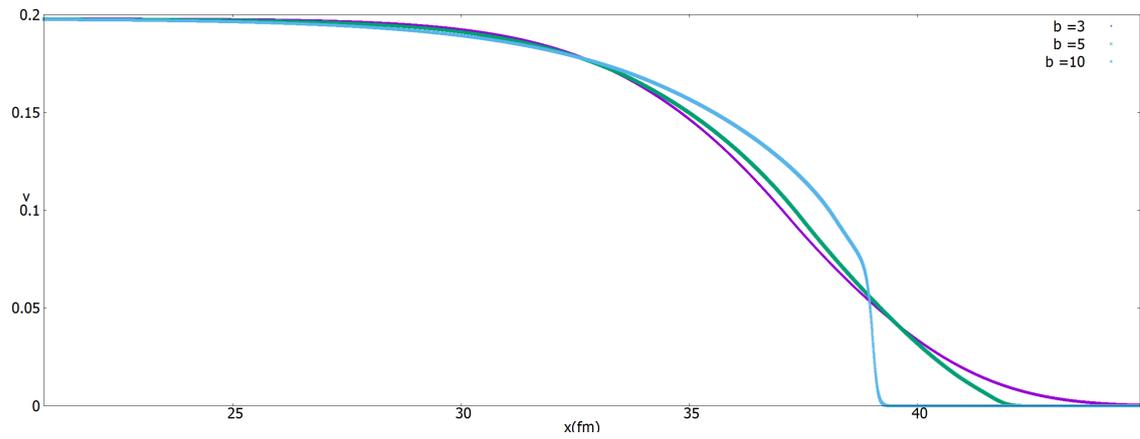


Figura 27: Velocidade para  $\alpha = 0.5$  e  $s_1/s_2 = 2$   $t=56\text{fm}$

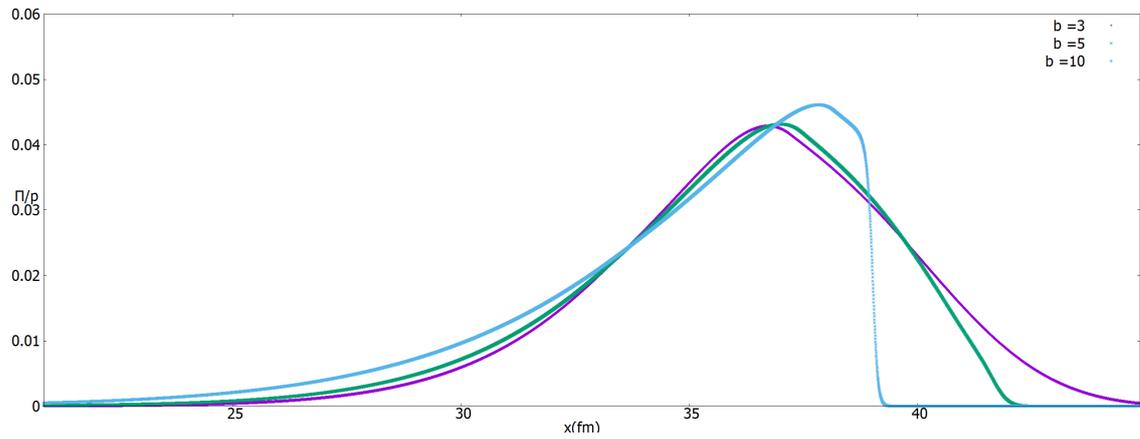


Figura 28: Viscosidade para  $\alpha = 0.5$  e  $s_1/s_2 = 2$   $t=56\text{fm}$

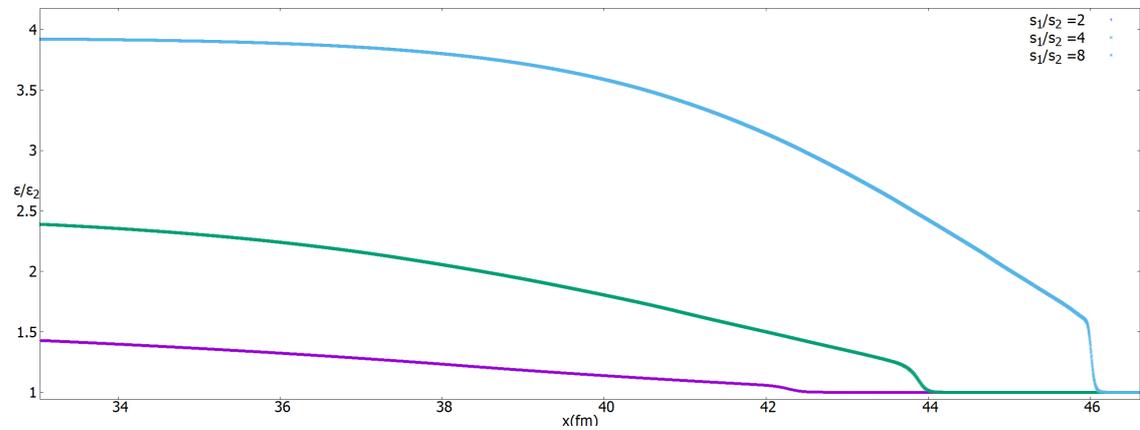


Figura 29: Energia para  $\alpha = 1.0$  e  $b = 5$   $t=56\text{fm}$

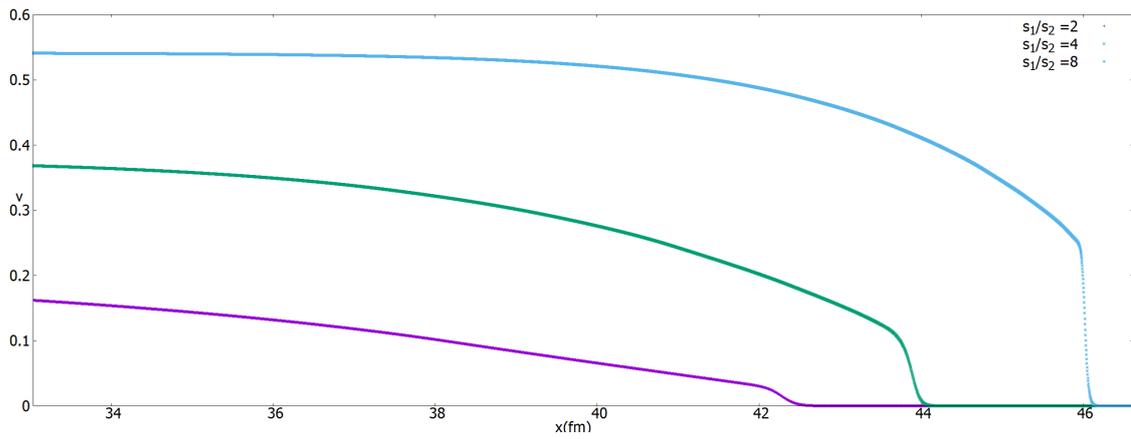


Figura 30: Velocidade para  $\alpha = 1.0$  e  $b = 5$   $t=56\text{fm}$

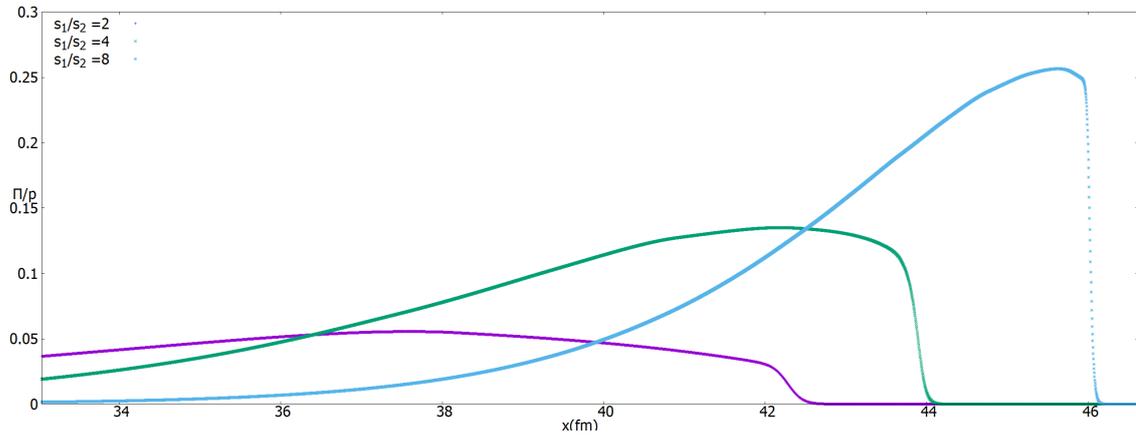


Figura 31: Viscosidade para  $\alpha = 1.0$  e  $b = 5$   $t=56\text{fm}$

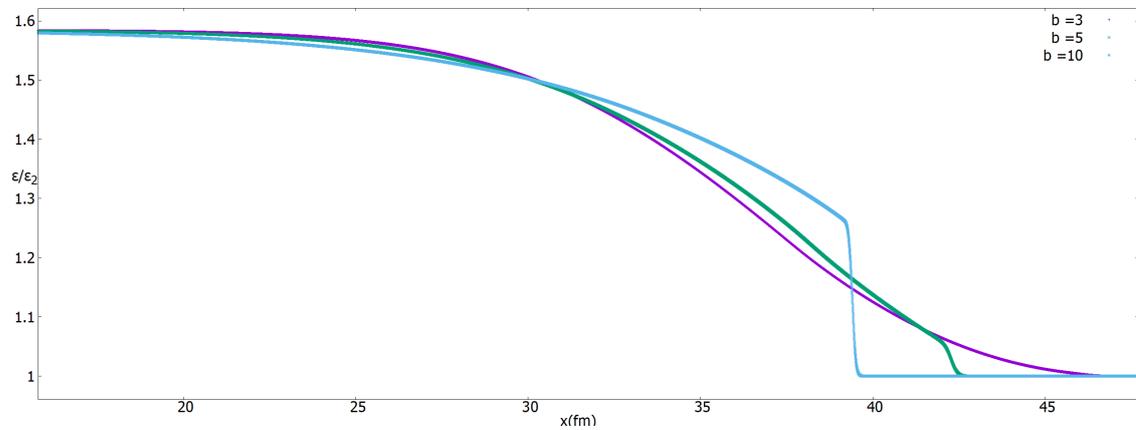


Figura 32: Energia para  $\alpha = 1.0$  e  $s_1/s_2 = 2$   $t=56\text{fm}$

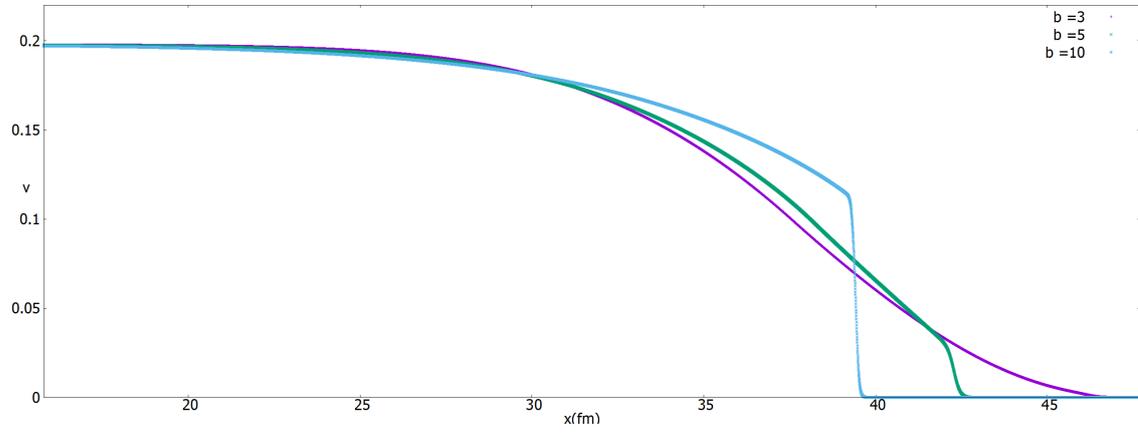


Figura 33: Velocidade para  $\alpha = 1.0$  e  $s_1/s_2 = 2$   $t=56$ fm

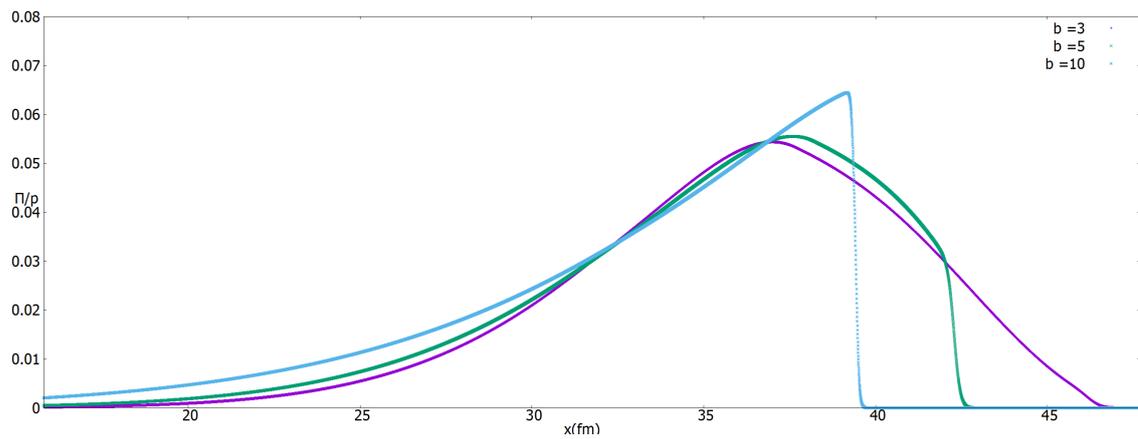


Figura 34: Viscosidade para  $\alpha = 1.0$  e  $s_1/s_2 = 2$   $t=56$ fm

## 6 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Nesta dissertação, revisamos as equações para a hidrodinâmica clássica utilizando a metodologia proposta por Landau [4]. Aplicamos a lei de Newton em cada elemento de fluido, primeiramente desconsiderando os efeitos de cisalhamento e em seguida foi feita uma correção nas equações, referente a viscosidade.

Em seguida, escrevemos as leis de conservação da física na forma tensorial, para serem invariantes por transformação de referencial na relatividade. E, a partir dessas equações, fizemos a generalização relativística para as equações da hidrodinâmica. Contudo, na generalização relativística das equações de Navier-Stokes, verificamos que essas equações violam o princípio da causalidade. Com isso, foi utilizada uma função memória para corrigir este problema, o que implicou em velocidade máxima de propagação da teoria.

Logo mais, procuramos soluções das equações hidrodinâmicas que se propagam na forma de onda. Duas soluções foram encontradas, as ondas de som e as ondas de choque. A primeira funciona apenas em casos de pequenas perturbações e não foi o foco deste trabalho. Já as ondas de choque não têm essa limitação. Encontramos as equações para onda de choque ao impor soluções que se propagam do tipo  $\omega = x - st$ , mas sem adotar o limite de pequenas perturbações. Por fim, no caso ideal, não encontramos uma função que descreva a onda de choque e sim uma equação que retorna dois valores para velocidade ( $v_1$  e  $v_2$ ) e dois valores para densidade de entropia ( $s_1$  e  $s_2$ ), o que implica que, em um fluido ideal, a onda de choque é uma descontinuidade se propagando. No caso dissipativo, soluções analíticas não são possíveis e por conta disso há a necessidade da utilização de um método numérico.

O método numérico utilizado nesta dissertação foi o SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*), que troca as derivadas parciais por somatórios, utilizando um *kernel* de interpolação. Assim, reescrevi as equações da hidrodinâmica utilizando esta metodologia e fiz dois exemplos simples para confirmar sua eficácia. O primeiro sendo uma onda de som, que foi apresentado junto da onda de choque. E o segundo foi referente ao modelo de Landau para colisão de núcleos, que, apesar de não ser mais utilizado nos dias atuais, serve como uma checagem de consistência por possuir solução analítica.

Então, fizemos uma simulação do problema de Riemann para um fluido ideal, que

têm como solução uma onda de choque. Depois, fizemos simulações para um fluido com viscosidade tipo *bulk*, e checamos como a variação da fração  $s_1/s_2$ , da viscosidade( $\alpha$ ) e do tempo de relaxação( $b$ ) afetam o choque. Concluimos então que  $\epsilon_1/\epsilon_2$  tem uma relação com a velocidade do choque. Já a viscosidade é inversamente proporcional à velocidade do choque mas é proporcional ao tempo de formação do choque (tempo que leva para a forma do choque parar de variar). E, o tempo de relaxação afeta a forma do choque, pois o aumento deste tempo de relaxação diminui a velocidade máxima teórica, o que implica num acúmulo de matéria da borda do choque.

Por fim, checamos o caso onde a velocidade de propagação do choque é maior que a velocidade máxima da teoria, que pode ser alcançado aumentando a velocidade do choque(aumentando  $s_1/s_2$ ) ou diminuindo a velocidade máxima da teoria(aumentando  $b$ ), podemos verificar a existência de um segundo choque no final da onda de choque inicial. A questão a ser verificada é se este segundo choque é físico ou não, fato que só pode ser verificado com simulações mais fundamentais(como a equação de Boltzmann para um gás), e caso não seja físico é necessária uma correção na teoria hidrodinâmica.

## Bibliografia

- [1] M. Torrilhon *The shock tube study in extended thermodynamics*. PHYSICS OF FLUIDS VOLUME 13, NUMBER 8 agosto 2001.
- [2] M. Torrilhon *Regularized 13-moment equations: shock structure calculations and comparison to Burnett model*. J. Fluid Mech. (2004), vol. 513, pp. 171–198.
- [3] M. Torrilhon *Start-up Phase of a Shocktube by Extended Thermodynamics and Navier-Stokes-Fourier*. PAMM, Proc. Appl. Math. Mech. 1 (2002)
- [4] L.D Landau and E.M Lifshitz. *FLuid Nechanics 2nd Edition*. Institute of Physical Problems , UssR academy of Sciences, Moscow.
- [5] Gabriel S. Denicol *et al Causal Theory of Relativistic Dissipative Hydrodynamics* .Brazilian Journal of Physics, vol. 37, no. 3A, Setembro, 2007.
- [6] Gabriel S. Denicol *et al Shock propagation and stability in causal dissipative hydrodynamics* .arXiv:0805.1719v1 12 Maio 2008.
- [7] Gabriel S. Denicol *et al Stability and Causality in relativistic dissipative hydrodynamics* .arXiv:0807.3120v1 19 Julho 2008.
- [8] Shi Pu *et al Does stability of relativistic dissipative fluid dynamics imply causality?* .arXiv:0907.3906v2 27 Abril 2010
- [9] J. J. Monaghan *Smoothed Particle Hydrodynamics*. Annual Reviews 1992.
- [10] Y.Hama *et al Topics on Hydrodynamics Model of Nucleus-Nucleus Collisions* .arXiv:hep-ph/0407264v3 10 Março 2013.
- [11] F.D. Lora-Clavijo *et al Exact solution of the 1D riemann problem in Newtonian and relativistic hydrodynamics* .Revista Mexicana de Física E 59(2013)28-50.
- [12] Professor John M. Cimbala. *Conservation of Mass using Control Volumes*. Disponível em: [www.me.psu.edu/cimbala/Learning/Fluid/CV\\_Mass/home.htm](http://www.me.psu.edu/cimbala/Learning/Fluid/CV_Mass/home.htm). **Acesso em: 31/01/2020.**

- [13] M. Bahrami. *Fluid Mechanics*. Disponível em: <http://www.sfu.ca/~mbahrami/ENSC%20283/Notes/Fluid%20Statics> . **Acesso em: 31/01/2020.**
- [14] Mohsen Sadeghkhan. *Analysis of Fluid Flow*. Disponível em: <https://acamech.com/analysis-of-fluid-flow/>. **Acesso em: 03/03/2022.**
- [15] Steven Weinberg. *Gravitation And Cosmology*. Massachusetts Institute of Technology.
- [16] Bernard Schutz. *A first course in General Relativity*. Cambridge university press, 2009.
- [17] Müller, I. *Zum Paradoxon der Wärmeleitungstheorie*. Z. Physik 198, 329–344 (1967).
- [18] W. Israel and J. M. Stewart *Transient relativistic thermodynamics and kinetic theory* . Ann. Phys. (N.Y.) 118, 341 (1979).
- [19] D. Jou *et al.* *Extended irreversible thermodynamics*. 1988 Rep. Prog. Phys. 51 1105
- [20] B. Carter. *Convective variational approach to relativistic thermodynamics of dissipative fluids* . Proc. R. Soc. London, Ser A, 433, 45 (1991);
- [21] M. Grmela and H. C. Ottinger. *Dynamics and thermodynamics of complex fluids. I. Development of a general formalism* . Phys. Rev. E 56, 6620 – 1 Dezembro 1997
- [22] T. Koide *et al.* *Relativistic dissipative hydrodynamics: A minimal causal theory* . Phys. Rev. C 75, 034909 – 22 Março 2007
- [23] *Sonic Shock*. Disponível em: [www.physicscentral.com/explore/action/shockwaves.cfm](http://www.physicscentral.com/explore/action/shockwaves.cfm). **Acesso em: 03/03/2022.**
- [24] C E Aguiar *et al.* *Smoothed particle hydrodynamics for relativistic heavy-ion collisions* . 2001 J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 27 75
- [25] Kepler Oliveira Filho. *Gás de Fótons*. Disponível em: [/astro.if.ufrgs.br/evol/node7.htm](http://astro.if.ufrgs.br/evol/node7.htm). **Acesso em: 31/01/2020.**
- [26] William H. Press. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* . Cambridge University Press.

- [27] I. Bouras *et al.* *Relativistic shock waves in viscous gluon matter* . arXiv:0902.1927v2  
22[hep-hp] Julho 2009.