Alexandre de Camargo

Análise das simetrias associadas às correntes de spin: um estudo com e sem acoplamento gravitacional

Brasil

2022

Alexandre de Camargo

Análise das simetrias associadas às correntes de spin: um estudo com e sem acoplamento gravitacional

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Física.

Universidade Federal Fluminense

Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro

Brasil

2022

Ficha catalográfica automática - SDC/BIF
Gerada com informações fornecidas pelo autor

D278a De camargo, Alexandre
Análise das simetrias associadas às correntes de spin: um estudo com e sem acoplamento gravitacional / Alexandre De camargo ; Rodrigo Ferreira Sobreiro, orientador. Niterói, 2022.
62 p.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2022.

DOI: http://dx.doi.org/10.22409/PPGF.2022.m.06338912903

1. Simetrias. 2. Teorias de calibre. 3. Spintrônica. 4. Gravitação. 5. Produção intelectual. I. Sobreiro, Rodrigo Ferreira, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Física. III. Título.

CDD -

Bibliotecário responsável: Debora do Nascimento - CRB7/6368

Alexandre de Camargo

Análise das simetrias associadas às correntes de spin: um estudo com e sem acoplamento gravitacional

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Física.

Trabalho aprovado. Brasil, 26 de abril de 2022:

Prof. Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro
Orientador

Prof. Luis Esteban Oxman
Convidado 1

Prof. Santiago Esteban Perez Bergliaffa
Convidado 2

Brasil
2022

Este trabalho é dedicado às crianças adultas que, quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.

Agradecimentos

Agradeço principalmente a minha mãe Simone e ao meu pai Amilton, que me educaram e me deram carinho e amor durante a minha trajetória. A minha irmã Karin que sempre me apoiou e me motivou a continuar estudando.

Agradeço imensamente ao professor Rodrigo que me aceitou como seu aluno de Mestrado e sempre teve paciência e disponibilidade para me auxiliar. Ao professor Víctor José Vásquez Otoya que foi um colaborador nesse projeto. Aos amigos que fiz durante a graduação em Física na UFPR, Carlos, Kalel, João, Lucas, Vinícius, Victor, Rafaela, Fernando Erd e Maíra que foram essenciais nessa jornada. Em especial, quero ressaltar os meus amigos mais próximos, Giovanne e Maíra Oneda que, apesar da distância, sempre estiveram em contato e fazem parte da minha vida. Sem essas pessoas esse trabalho não seria possível.

Agradeço, a UFPR que me permitiu conhecer pessoas incríveis e de obter meu bacharel em Física. E ao programa Pós-Graduação do IF-UFF e a todos os professores que me auxiliaram durante o trajeto do meu Mestrado.

Não importa o quanto você bate, mas sim o quanto aguenta apanhar e continuar.
O quanto pode suportar e seguir em frente.
É assim que se ganha.
(Rocky Balboa)

Resumo

A spintrônica é o estudo do momento angular intrínseco do elétron e o seu momento magnético associado. Ao invés de focar apenas na carga do elétron para manipular o movimento eletrônico ou armazenar informação, dispositivos spintrônicos utilizam os graus de liberdade do spin, para transmitir mais informações a um custo energético menor. Neste trabalho, utilizamos o formalismo da teoria de campo para estudar a natureza da não conservação das correntes de spin na spintrônica. Primeiramente, consideramos uma teoria de calibre sob o grupo $U(1)$ para o eletromagnetismo clássico no vácuo e obtivemos as equações de continuidade quebradas envolvendo as correntes de spin e o torque de transferência de spin. Generalizamos esse resultado para as teorias de Yang-Mills (YM) e comparamos com o caso Abeliano.

A próxima etapa foi estudar as correntes de spin em gravidade. Utilizando o formalismo de primeira ordem para a gravitação encontramos as equações mestras que governam as correntes de spin acopladas à gravidade. Linearizando a vierbein fizemos um estudo para o caso de aproximação de campo fraco, de maneira que o conjunto dessas equações mestras, tanto o caso linear quanto o não-linear, representam a essência para se buscar novos resultados na spintrônica em gravidade e são os principais resultados desse trabalho.

Palavras-chaves: Simetrias, teorias de calibre, spintrônica, gravitação, correntes de spin.

Abstract

Spintronics is the study of electron intrinsic magnetic angular momentum and your magnetic moment associated. Instead of only focusing in the electron charge to manipulate the electronic movement or store information, spintronics devices uses the spin degree of freedom to transmit more information with at a lower energy cost. In this work, we utilized the field theory formalism to study the nature of non-conservation of the spin-currents in spintronics. First of all, we considered a gauge theory under the group U (1) for the classical electromagnetism in vacuum in order to obtain the broken continuity equation involving spin-currents and spin transfer torque. A generalization of these studies to the Yang-Mills theories were performed and compared to the Abelian case.

The next step was study the spin-currents coupled with gravity. Using the first order formalism for gravity we derived the master equations governing the coupling between spin-currents and gravity, this being the most important result of this work. Taking the linearization of the vierbein we studied the case of weak field approximation, in the sense that the set of master equations, both the linear and non-linear case, represent the essence to seek new results in spintronics coupled with gravity and these equations are the main results of this work.

Key-words: Symmetries, gauge theories, spintronics, gravitation, spin-currents.

Sumário

Introdução

A Spintrônica é uma das áreas de matéria condensada emergentes da Física onde um de seus objetivos é o desenvolvimento de dispositivos nanoeletrônicos com capacidade de armazenamento e processamento cada vez melhores com um menor custo energético (BAIBICH et al., 1988), (BINASCH et al., 1989) e (WANG et al., 2006). O desenvolvimento dessa área está diretamente ligado ao estudo do transporte do spin dos elétrons e para isso é necessário uma definição correta da corrente de spin.

As notações e o formalismo para o tratamento das correntes de spin são bastantes variadas (SHI et al., 2006), (SCHÜTZ; KOPIETZ; KOLLAR, 2004), (ZHOU; ZHANG; HU, 2009), sendo que uma definição convencional da corrente de spin, baseada em uma analogia clássica, em que o operador densidade de corrente de spin é definido como $\frac{1}{2}\left(vs + sv\right)$, onde os portadores de spin s se movem com uma velocidade v, não pode descrever as correntes de spin corretamente, já que o spin é uma grandeza física intrínseca na mecânica quântica (AN et al., 2012).

Como o spin não é uma grandeza invariante no transporte de spin uma das formas de obter as equações de continuidade quebradas do spin é, por exemplo, pela derivada do limite não relativístico da evolução temporal do operador de Bargmann-Wigner (WIGNER, 1948), resultando em

$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{J} = \frac{e}{m} \vec{s} \times \vec{B}, \tag{1}$$

sendo $\vec{s} = \phi^{\dagger}\sigma\phi$ a densidade de spin, $\overleftrightarrow{J}$ a corrente de spin e ϕ a função de onda não-relativística do elétron. O termo do lado direito é o torque de Landau-Lifshitz exercido por um campo magnético em um momento de dipolo magnético de spin meio. Essa mesma equação (1) pode ser obtida considerando a equação de Pauli para o elétron (STILES, 2006), além de poder ser obtida por uma teoria $SU(2)$ de calibre (DARTORA; CABRERA, 2008) e (DARTORA; CABRERA, 2010).

Em (VERNES; GYÖRFFY; WEINBERGER, 2007) foram obtidas as equações de continuidade quebradas envolvendo a corrente de spin e o torque de transferência de spin (efeito onde a orientação de uma camada magnética em uma junção de túnel magnético ou válvula de spin pode ser modificada usando uma corrente de spin polarizada (VERNES; GYÖRFFY; WEINBERGER, 2007)) a partir equação de Dirac para uma partícula, ou seja, uma descrição em termos de mecânica quântica relativística. Nesse artigo, também foram estudados os limites clássicos e não relativísticos dessas equações.

Em 2011 foi publicado o artigo (SOBREIRO; OTOYA, 2011), onde os autores generalizaram os resultados de (VERNES; GYÖRFFY; WEINBERGER, 2007) por meio de uma teoria $U(1)$ de calibre para o caso do eletromagnetismo clássico onde a formulação foi baseada nas correntes associadas à simetria de calibre, assimetria quiral e simetria sob o grupo de estabilidade. Assim, utilizando as simetrias associadas à ação de Maxwell-Dirac foi encontrada uma corrente de Noether, a chamada corrente de Bargmann-Wigner, que apesar de ser conservada não é invariante de calibre, ou seja, não é um observável da teoria. Então, aplicando o princípio de calibre para o caso eletromagnético, foi recuperada a invariância de calibre da corrente de Bargmann-Wigner com o custo da perda da sua conservação.

Acoplando os férmions de Dirac à gravidade, desenvolvemos uma teoria de calibre não-Abeliana que descreve as correntes de spin acopladas à gravidade. No formalismo gravitacional um dos princípios mais importantes é o princípio da equivalência que, afirma que a massa inercial é equivalente à massa gravitacional. Assim, a intensidade do campo gravitacional e uma aceleração aplicada a um corpo, é localmente a mesma em uma região do espaço-tempo. Então, por esse princípio conseguimos representar o campo gravitacional com o tensor métrico (EINSTEIN, 1911).

Partindo da ação de Eintein-Hilbert sem a constante cosmológica e considerando o espaço tempo como uma variedade 4-dimensional, onde existe um espaço tangente plano que é uma boa aproximação local dessa variedade, tivemos que definir os campos da vierbein, que são essenciais na descrição de uma teoria de relatividade geral covariante, já que acoplam gravitação e férmions, e as conexões de spin, responsáveis pelo transporte paralelo. Como estamos tratando de uma teoria de calibre, os campos da vierbein e da conexão de spin aparecem naturalmente como campos fundamentais da teoria, porém como esses campos não são invariantes de calibre definimos os campos de força que se transformam covariantemente por transformações de calibre (ZANELLI, 2005).

Acoplando os férmions na ação e ficando com uma ação de Einstein-Hilbert-Dirac aplicamos o mesmo método do artigo (SOBREIRO; OTOYA, 2011) e a partir das simetrias de calibre, assimetrias quirais e simetrias do *little group* conseguimos obter a corrente de Bargmann-Wigner que novamente era conservada porém não invariante de calibre. Então, aplicando o princípio de calibre obtivemos uma nova corrente de Bargmann-Wigner não conservada, porém sendo um observável do nosso sistema. Assim, encontramos as equações mestras que governam as correntes de spin acopladas à gravidade e fizemos um estudo de caso para a aproximação de campo fraco.

Então, o objetivo desse trabalho foi de apresentar o método utilizado no artigo (SOBREIRO; OTOYA, 2011) para construir uma teoria de calibre Abeliana para a eletrodinâmica acoplada à férmions de Dirac e aplicar esse mesmo método para o caso de uma teoria não-Abeliana em que temos férmions acoplados a gravidade, encontrando as equações de continuidade quebradas. Este trabalho é divido em 3 capítulos, onde no primeiro é apresentado o estudo do eletromagnetismo como teoria de calibre e são definidas as notações e formalismos utilizados, além da apresentação das contas do artigo (SOBREIRO;

OTOYA, 2011). O segundo capítulo é o caso não-Abeliano do artigo (SOBREIRO; OTOYA, 2011), que não foi publicado, e comparamos se no limite Abeliano chegamos aos mesmos resultados. E o terceiro e último capítulo apresenta o caso da derivação das equações mestras que governam as correntes de spin acopladas a gravidade. E finalmente, temos a seção da conclusão onde são apresentados os resultados obtidos.

1 Correntes de spin na eletrodinâmica

A noção de calibre aparece quando temos um sistema com mais graus de liberdade na descrição da teoria do que na física do problema (LESSA, 2019). Simplificadamente, podemos dizer que as teorias de calibre são teorias de campo que admitem simetria global e/ou local entre os campos. Uma transformação de um certa configuração de campo para outra é chamada de transformação de calibre, e se essa transformação de calibre não acarretar em mudanças nos observáveis desse campo, temos uma invariância de calibre.

Como a teoria eletromagnética pode ser descrita por meio de uma teoria de campos, usando os campos elétricos e magnéticos, podemos inserir potenciais não observáveis, que não mudam os campos elétricos e magnéticos. Assim, é encontrada uma simetria de calibre, que leva a descrição da teoria eletromagnética como teoria de calibre, que será vista com mais detalhe na próxima seção.

1.1 Eletromagnetismo como teoria de calibre

Sendo uma das interações fundamentais da Física, o Eletromagnetismo é muito bem conhecido. Mais de um século atrás, Faraday, Maxwell e outros desenvolveram uma teoria das interações eletromagnéticas, culminando com o famoso artigo de Maxwell publicado em 1865 (MAXWELL, 1865). As equações de Maxwell no sistema de unidades naturais são

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \tag{1.1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{1.2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{1.3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \tag{1.4}$$

sendo $\vec{E}$ e $\vec{B}$ os campos elétricos e magnéticos respectivamente e, ρ a densidade de carga e $\vec{j}$ a densidade de corrente.

Como o estudo da simetria é uma ferramenta poderosa para entender a natureza dos sistemas físicos, podemos procurar as simetrias associadas a dinâmica descrita pelas equações de Maxwell. Assim, as transformações que não alterarem a física dos nossos objetos teóricos vão estar associadas tanto as simetrias do nosso sistema quanto a leis invariantes.

Além disso, como estamos interessados em uma teoria de calibre vamos procurar simetrias de calibre. Uma forma de definir uma teoria de calibre é definir como uma Lagrangeana invariante sobre certas transformações locais de acordo com certas operações. Para o caso eletromagnético temos

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{1.5}$$

sendo $\mathcal{L}_M$ a Lagrangeana e $F^{\mu\nu}$ o chamado tensor intensidade de campo. Para entender esse tensor, temos que definir alguns conceitos. Primeiramente, introduzimos um potencial vetor $\vec{A}$ e um potencial escalar V. A partir destes potenciais os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ podem ser calculados da seguinte maneira

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \tag{1.6}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \tag{1.7}$$

É fácil perceber que apesar da introdução dessas mudanças as equações (1.2) e (1.3) ainda são satisfeitas. Escolhendo uma transformação de calibre dada, por exemplo, por

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \tag{1.8}$$

sendo χ uma função escalar arbitrária. Claramente, essa função não muda o valor de $\vec{B}$ já que $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f$ é zero para qualquer função f escalar. Para preservar $\vec{E}$ o potencial escalar deve mudar também

$$V \to V' = V - \frac{\partial \chi}{\partial t}, \tag{1.9}$$

que claramente preserva a forma do campo elétrico dado por (1.7). Então, as expressões (1.8) e (1.9) definem a nossa transformação de calibre escolhida.

Agora vamos generalizar o potencial $\vec{A}$ no espaço quadri-dimensional. Para isso escrevemos

$$x^\mu = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (t, x, y, z)\,, \tag{1.10}$$

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -x, -y, -z)\,, \tag{1.11}$$

sendo x^μ a versão contravariante e x_μ a versão covariante. Para mudar de x^μ para x_μ, introduzimos o tensor métrico no espaço de Minkowski

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta^{\mu\nu}, \tag{1.12}$$

assim, temos a relação

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu}x^\nu. \tag{1.13}$$

Combinando as equações (1.8) e (1.9) em um único potencial quadrivetor genérico

$$A^{\mu} = \left(V, \vec{A}\right) \tag{1.14}$$

assim, A^{μ} é entendido como o campo de calibre ou potencial eletromagnético. Como as transformações de calibre apresentam derivadas, também podemos generalizar o operador diferencial de primeira ordem. Definindo

$$\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) \tag{1.15}$$

o operador covariante e

$$\partial^{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right) \tag{1.16}$$

o operador contravariante. Assim, as transformações de calibre podem ser generalizadas para o caso quadri-dimensional pela expressão

$$A^{\mu} \to A'^{\mu} = A^{\mu} - \partial^{\mu}\chi. \tag{1.17}$$

Agora, se voltarmos ao nosso tensor eletromagnético $F^{\mu\nu}$, ele é definido como

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}. \tag{1.18}$$

Então, se aplicarmos nele a transformação de calibre (1.17) obtemos

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} \to F'^{\mu\nu} &= \partial^{\mu}\left(A^{\nu} - \partial^{\nu}\chi\right) - \partial^{\nu}\left(A^{\mu} - \partial^{\mu}\chi\right) \\ &= \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu} - \partial^{\mu}\partial^{\nu}\chi + \partial^{\nu}\partial^{\mu}\chi \\ &= \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu} \\ &= F^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Assim, $F^{\mu\nu}$ é o tensor um tensor genérico linear em ∂^{μ} e A^{μ} que é invariante pelo calibre escolhido. É possível mostrar que as equações de Maxwell podem ser reescritas em função desse tensor eletromagnético da seguinte maneira

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = j^{\nu}, \tag{1.19}$$

que recupera as equações (1.1) e (1.4) e foi obtida a partir da extremização da ação (1.5). Sendo j^{ν} uma quadri-corrente definida como

$$j^{\mu} = (\rho, \vec{j}_{em}). \tag{1.20}$$

E a identidade de Bianchi, que não pode ser obtida pela Lagrangiana (1.5)

$$\partial_{\sigma}F^{\mu\nu} + \partial_{\mu}F^{\nu\sigma} + \partial_{\nu}F^{\sigma\mu} = 0 \tag{1.21}$$

que recupera as equações (1.2) e (1.3) [1]. As expressões (1.19) e (1.21) são chamadas de forma covariante das equações de Maxwell e são invariantes pelo calibre escolhido. Como existe uma simetria associada a essa invariância e pelo teorema de Noether (ITZYKSON; ZUBER, 2012), temos que a corrente j^{ν} é conservada. Então, mostramos como construir uma teoria de calibre e a sua consequência direta, a obtenção de uma corrente conservada. Agora, introduzindo campos fermiônicos e uma nova Lagrangeana, vamos aplicar esse mesmo método e analisar os resultados.

[1] Para mais informações consulte (GRIFFITHS, 2005)

2 Correntes de spin caso abeliano

Acoplando minimamente os férmions de Dirac ao campo eletromagnético, temos que a ação que descreve a dinâmica dos campos envolvidos é dada por:

$$S = S_0 + S_{int} + S_M \tag{2.1}$$

sendo S_0 a ação fermiônica de Dirac

$$S_0 = \int d^4x \bar{\psi} \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \psi, \tag{2.2}$$

S_{int} a ação do termo de interação

$$S_{int} = -e \int d^4x \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu, \tag{2.3}$$

e S_M a ação eletromagnética de Maxwell

$$S_M = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \tag{2.4}$$

A constante de acoplamento elétrico, ou seja, a carga elétrica é dada por e. O campo ψ é um campo espinorial que descreve as excitações eletrônicas e seu adjunto é dado por $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$. As matrizes γ^μ são chamadas de matrizes gama, ou, matrizes de Dirac, e são um conjunto de matrizes convencionais, que satisfazem uma determinada relação de anticomutação que assegura que essas matrizes geram a álgebra de Clifford $CL_{1,3}(R)$[1]. Se tratando de um acoplamento mínimo trocamos a derivada ∂_μ pela derivada covariante definida como

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu. \tag{2.5}$$

Para entender a dinâmica dos campos acima é preciso extrair as equações de movimento associadas a cada campo. A partir da ação (2.1) extraímos as equações de campo espinorias:

$$\begin{aligned} \left(i\gamma^\mu D_\mu - m \right) \psi &= 0, \\ \bar{\psi}(i\gamma^\mu \overleftarrow{D}_\mu + m) &= 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Para o campo eletromagnético, podemos utilizar as equações de Euler-Lagrange variando o campo de calibre A_μ e obtendo

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi, \tag{2.7}$$

que, se comparada com a equação (1.19), mostra que a nossa quadricorrente é dada por

$$j_f^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi, \tag{2.8}$$

[1] A convenção utilizada é a mesma do livro (ITZYKSON; ZUBER, 2012)

que é conservada segundo o teorema de Noether, ou seja,

$$\partial_\mu j_f^\mu = 0. \tag{2.9}$$

Além disso, podemos definir o adjunto do tensor eletromagnético como:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \tag{2.10}$$

que preserva as identidades de Bianchi (1.21). A partir das propriedades topológicas da teoria encontramos as equações homogêneas de Maxwell:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \tag{2.11}$$

ou seja, não existem monopólos magnéticos em teorias de calibre abelianas.

Se tratando de uma teoria de calibre, a simetria de calibre é essencial. Neste caso, a simetria de calibre é descrita pelo grupo $U(1)$ local e o seu conjunto de transformações infinitesimais é dado por

$$\begin{aligned}
\delta\psi &= -ie\alpha\psi, \\
\delta\bar{\psi} &= \bar{\psi}ie\alpha, \\
\delta A_\mu &= \partial_\mu\alpha,
\end{aligned}$$

onde α é um parâmetro que depende das coordenadas do espaço-tempo. A partir do teorema de Noether:

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^A)}\delta\phi^A - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^A)}\partial_\nu\phi^A - \delta^\mu_\nu\mathcal{L}\right)\delta_{x^\nu}, \tag{2.12}$$

sendo $\mathcal{L}$ a Lagrangeana e A um índice geral e coletivo caracterizando o índice dos campos ϕ assim como a soma sobre todos os campos. Corroboramos o resultado dado por (2.8), encontrando a corrente fermiônica associada a simetria do grupo $U(1)$:

$$j_f^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{2.13}$$

que, como já visto, é conservada.

Outro grupo de transformações que vão aparecer no nosso trabalho são as transformações quirais, dadas por

$$\begin{aligned}
\delta_c\psi &= -i\alpha\gamma_5\psi, \\
\delta_c\bar{\psi} &= -i\alpha\bar{\psi}\gamma_5, \\
\delta_c A_\mu &= 0,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

onde agora α é uma constante. Ao utilizando novamente a fórmula da corrente de Noether (2.12), encontramos a corrente quiral:

$$S^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi, \tag{2.15}$$

que é claramente não conservada já que a ação (2.1) descreve a dinâmica para férmions massivos e claramente

$$\partial_\mu S^\mu = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi. \tag{2.16}$$

O próximo passo é encontrar a corrente de Bargmann-Wigner que vai estar associada com a simetria do grupo de Poincaré $ISO(1,3)$. Os geradores desse grupo são dados por:

$$P_\mu = i\partial_\mu, \tag{2.17}$$

associado a translações e

$$J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + I_{\mu\nu}, \tag{2.18}$$

onde $J_{\mu\nu}$ vai ser o gerador das transformações de Lorentz, com $L_{\mu\nu}$:

$$L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \tag{2.19}$$

o operador para a parte angular e $I_{\mu\nu}$ o operador de spin, momento angular intrínseco. A álgebra de Poincaré é

$$\begin{aligned}
[P_\mu, P_\nu] &= 0, \\
[J_{\mu\nu}, P_\alpha] &= i(\eta_{\alpha\nu}P_\mu - \eta_{\alpha\mu}P_\nu), \\
[J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] &= i(\eta_{\nu\alpha}J_{\mu\beta} - \eta_{\mu\alpha}J_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}J_{\nu\alpha} - \eta_{\nu\beta}J_{\mu\alpha}).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

O primeiro termo de (2.20) demonstra a comutação entre translações no espaço-tempo. Como $J_{\mu\nu}$ é o gerador das transformações de Lorentz a segunda relação de (2.20) mostra que as translações espaço-temporais e as transformações de Lorentz não comutam. E a terceira relação é associada ao grupo homogêneo de Lorentz que consiste de rotações e empurrões, assim também é um subgrupo de estabilidade do grupo de Poincaré. Além disso, o grupo de Poincaré possui um subgrupo abeliano que vamos estudar na próxima seção.

2.1 Subgrupo de estabilidade de Poincaré

Para encontrar a corrente de Bargmann-Wigner, vamos estudar o subgrupo de estabilidade do grupo de Poincaré, cujo gerador é o pseudo-vetor de Pauli-Lubanski definido por

$$W^\mu = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}J_{\nu\alpha}P_\beta \tag{2.21}$$

que pode ser escrito só em função do momento angular $I_{\nu\alpha}$:

$$W^\mu = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}I_{\nu\alpha}P_\beta. \tag{2.22}$$

As suas relações de comutação são dadas por

$$\begin{aligned}
[W^{\mu}, W^{\nu}] &= i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} W_{\alpha} P_{\beta} \\
[W^{\mu}, P_{\alpha}] &= 0 \\
[J_{\nu\mu}, W^{\alpha}] &= i\left(\eta_{\nu\beta}\delta^{\alpha}_{\nu} - \eta_{\nu\beta}\delta^{\alpha}_{\mu}\right) W^{\beta},
\end{aligned} \tag{2.23}$$

assim, pela primeira relação acima vemos que a álgebra fecha, ou seja, forma um grupo. Da segunda relação, temos que o gerador não afeta o momento linear, ou seja, o momento linear é invariante pelas transformações do grupo. Assim, W^{μ} forma um grupo de estabilidade que denotaremos por $L(1,3)$. Esse *little group* pode ser entendido como transformações de Lorentz que não alteram o momento linear. Como estamos tratando de férmions, de (ITZYKSON; ZUBER, 2012) temos:

$$I_{\mu\nu} = \frac{\sigma_{\mu\nu}}{2}, \tag{2.24}$$

assim,

$$W^{\mu} = -\frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\sigma_{\mu\nu}P_{\beta} \tag{2.25}$$

e usando a relação

$$\gamma_5\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma} \tag{2.26}$$

reescrevemos como

$$W^{\mu}_{f} = \frac{i}{2}\gamma^{5}\sigma^{\mu\nu}P_{\nu}, \tag{2.27}$$

onde indicamos com o subíndice f o caráter fermiônico e $\sigma_{\mu\nu}$ são as matrizes de Pauli com dois índices espinoriais[2]. As transformações dos campos espinoriais sob a ação do *little group* são:

$$\begin{aligned}
\delta_{l}\psi &= -i\omega_{\mu}W^{\mu}_{f}\psi, \\
\delta_{l}\bar{\psi} &= -i\omega_{\mu}\overleftarrow{W}^{\mu}_{f},
\end{aligned} \tag{2.28}$$

onde ω_{μ} é uma constante real de dimensão $[L]^{1}$. Utilizando o teorema de Noether encontramos a corrente:

$$T^{\mu\nu}_{f} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}W^{\mu}_{f}\psi. \tag{2.29}$$

A corrente dada por (2.29) é um tensor de nível dois chamado de corrente de Bargmann-Wigner (ITZYKSON; ZUBER, 2012).

Já para o setor bosônico, o pseudo-vetor de Pauli-Lubanski é

$$W^{\mu\nu\alpha}_{b} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}P_{\beta}, \tag{2.30}$$

onde o índice b indica o caráter bosônico e utilizamos $I^{\mu\nu\alpha\beta} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}$. Assim, A_{μ} se transforma da seguinte maneira:

$$\delta_{l}A_{\alpha} = i\omega^{\nu}W_{b\alpha\nu\sigma}A^{\sigma} = \frac{1}{2}\omega^{\nu}\epsilon_{\alpha\nu\sigma\beta}\partial^{\beta}A^{\sigma}. \tag{2.31}$$

[2] Notação utilizada de (ITZYKSON; ZUBER, 2012)

Utilizando as propriedades anti-simétricas do tensor $\epsilon_{\alpha\nu\sigma\beta}$:

$$\delta_l A_\alpha = -\frac{1}{4}\omega^\nu \epsilon_{\alpha\nu\beta\sigma}\left(\partial^\beta A^\sigma - \partial^\sigma A^\beta\right) = -\frac{1}{2}\omega_\nu \tilde{F}_\alpha^{\ \nu}. \tag{2.32}$$

Assim, pelo teorema de Noether, utilizando (2.12), encontramos a corrente associada:

$$T_b^{\mu\nu} = \frac{1}{2}F^{\mu\alpha}\tilde{F}_\alpha^{\ \nu} \tag{2.33}$$

e a corrente de Bargmann-Wigner total vai ser a soma do setor bosônico e do fermiônico:

$$T^{\mu\nu} = T_f^{\mu\nu} + T_b^{\mu\nu} \tag{2.34}$$

que é claramente conservada

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \tag{2.35}$$

2.2 Restaurando a invariância de Calibre da corrente de Bargmann-Wigner

A invariância pelas transformações do grupo de Poincaré é uma simetria fundamental na teoria de partículas, já que o princípio fundamental da relatividade requer que as leis da física sejam invariantes com respeito à ação do grupo de Poincaré no espaço-tempo. Porém, de acordo com o *princípio de calibre* para ser um observável é necessário que exista uma invariância de calibre por simetrias locais. Então, precisamos nos certificar de que a corrente de Bargmann-Wigner seja invariante pelo calibre do grupo local $U(1)$.

Como dividimos a corrente de Bargmann-Wigner em uma parte fermiônica e outra bosônica, vamos analisar cada setor separadamente. Para o setor fermiônico fica evidente que não existe invariância de calibre, já que:

$$\delta_g T_f^{\mu\nu} = -ie\bar{\psi}\gamma^\mu\left(W_f^\nu \alpha\right)\psi. \tag{2.36}$$

Assim, pelo princípio de calibre, não pode ser associada à um observável físico. Para resolver esse problema, fazemos o ansätze (AITCHISON; HEY, 2012)

$$\partial_\mu\psi \to D_\mu\psi, \tag{2.37}$$

ou seja, fazemos a troca mais simples que torna a expressão invariante de calibre. Assim, a equação (2.27) se torna:

$$\mathcal{W}_f^\mu = -\frac{1}{2}\gamma^5\sigma^{\mu\nu}D_\nu. \tag{2.38}$$

O tensor de Bargmann-Wigner para o setor fermiônico é então reescrito como

$$\mathcal{T}_f^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\sigma^{\nu\mu}D_\mu\psi = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\sigma^{\nu\mu}D_\mu\psi. \tag{2.39}$$

Como o setor bosônico é claramente invariante de calibre, a corrente total de Bargamnn-Wigner é reescrita como:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \frac{ie}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\sigma^{\nu\alpha}A_\alpha\psi \tag{2.40}$$

e claramente $\delta_g\mathcal{T}^{\mu\nu} = 0$. Agora temos uma corrente que pode ser associada a um observável porém perdemos a sua conservação. Então, podemos buscar as equações de continuidade quebrada para cada setor separadamente.

Primeiramente, para o setor fermiônico. Usamos a relação $\gamma^\mu\gamma^\nu = \eta^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}$ e reescrevemos:

$$\mathcal{T}_f^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu i\gamma^\nu\gamma^\alpha D_\alpha\psi - \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\eta^{\nu\alpha}D_\alpha\psi, \tag{2.41}$$

usando as equações de campo (2.6), a corrente vira:

$$\mathcal{T}_f^{\mu\nu} = \frac{1}{2}m\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\psi - \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu D_\nu\psi. \tag{2.42}$$

Usando a relação $\gamma^\mu\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^\mu$, temos:

$$\mathcal{T}_f^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}m\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\gamma^\nu\psi + \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5 D_\nu\psi. \tag{2.43}$$

Aplicando a 4-divergência:

$$\begin{aligned}\partial_\mu\mathcal{T}_f^{\mu\nu} = &-\frac{1}{2}m(\bar{\psi}\gamma^\mu)\overleftarrow{\partial}^\dagger_\mu\gamma^5\gamma^\nu\psi + \frac{1}{2}m\bar{\psi}\gamma^5\partial_\mu(\gamma^\mu\gamma^\nu\psi)+ \\ &+\frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu)\overleftarrow{\partial}^\dagger_\mu\gamma^5 D_\nu\psi - \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^5\partial_\mu(\gamma^\mu D_\nu\psi)\end{aligned} \tag{2.44}$$

e como a derivada covariante é uma matriz diagonal da forma $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$, se substituirmos essa relação na equação (2.2):

$$\begin{aligned}\partial_\mu\mathcal{T}_f^{\mu\nu} = &-\frac{1}{2}m(\bar{\psi}\gamma^\mu)\overleftarrow{D}^\dagger_\mu\gamma^5\gamma^\nu\psi + \frac{1}{2}m\bar{\psi}\gamma^5 D_\mu(\gamma^\mu\gamma^\nu\psi)+ \\ &+\frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu)\overleftarrow{D}^\dagger_\mu\gamma^5 D_\nu\psi - \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^5 D_\mu(\gamma^\mu D_\nu\psi).\end{aligned} \tag{2.45}$$

Utilizando as equações de campo (2.6) no primeiro e terceiro termos e a regra da cadeia no segundo e quarto termos, temos:

$$\partial_\mu\mathcal{T}_f^{\mu\nu} = -\frac{i}{2}m^2\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\nu\psi + \frac{1}{2}m\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu D_\mu(\gamma^\nu\psi) - \frac{1}{2}m\bar{\psi}\gamma^5 D_\nu\psi - \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu D_\mu D_\nu\psi \tag{2.46}$$

usando que $D_\mu\gamma^\mu = 0$. O segundo termo pode ser reescrito como

$$\frac{1}{2}m\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu D_\mu(\gamma^\nu\psi) = \frac{1}{2}m\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu D_\mu\psi \tag{2.47}$$

e utilizando a relação $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$, reescrevemos:

$$\frac{1}{2}m\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu D_\mu(\gamma^\nu\psi) = m\bar{\psi}\gamma^5\eta^{\mu\nu}D_\mu\psi - \frac{1}{2}m\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\nu\gamma^\mu D_\mu\psi. \tag{2.48}$$

Agora, utilizando as equações de campo espinoriais no segundo termo da expressão (2.48), chegamos em:

$$\frac{1}{2}m\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu D_\mu(\gamma^\nu\psi) = m\bar{\psi}\gamma^5 D_\nu\psi + \frac{i}{2}m^2\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\nu\psi. \tag{2.49}$$

Substituindo a equação (2.48) na equação (2.46)

$$\begin{aligned}\partial_\mu \mathcal{T}_f^{\mu\nu} = -\frac{i}{2}m^2\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\nu\psi + m\bar{\psi}\gamma^5 D_\nu\psi + +\frac{i}{2}m^2\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\nu\psi- \\ -\frac{1}{2}m\bar{\psi}\gamma^5 D_\nu\psi - \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu D_\mu(D_\nu\psi)\end{aligned} \tag{2.50}$$

e somando os termos iguais em (2.2), chegamos em:

$$\partial_\mu \mathcal{T}_f^{\mu\nu} = \frac{1}{2}m\bar{\psi}\gamma^5 D_\nu\psi - \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu D_\mu D\nu\psi. \tag{2.51}$$

Usando a equação de campo espinorial no primeiro termo e isolando os termos semelhantes:

$$\begin{aligned}\partial_\mu \mathcal{T}_f^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi(D_\nu D_\mu - D_\mu D_\nu) \\ &= \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi[D_\nu, D_\mu].\end{aligned}$$

Como $F^{\mu\nu} = \frac{i}{e}[D_\nu, D_\mu]$ e $S^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$

$$\partial_\mu \mathcal{T}_f^{\mu\nu} = \frac{e}{2}S_\mu F^{\mu\nu}, \tag{2.52}$$

onde S^μ é a corrente quiral definida em (2.15). Essa equação representa o resultado covariante das equações obtidas no artigo (VERNES; GYÖRFFY; WEINBERGER, 2007).

Para o setor bosônico, aplicando a 4-divergência em (2.33):

$$\partial_\mu T_b^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu F^{\mu\alpha}\right)\tilde{F}_\alpha{}^\nu + \frac{1}{2}F_{\mu\alpha}\left(\partial^\mu\tilde{F}^{\alpha\nu}\right), \tag{2.53}$$

de (2.7) podemos escrever

$$\partial_\mu F^{\mu\alpha} = j_f^\alpha. \tag{2.54}$$

Antissimetrizando o segundo termo, temos:

$$\partial_\mu T_b^{\mu\nu} = \frac{1}{2}j_f^\alpha\tilde{F}_\alpha{}^\nu + \frac{1}{4}F_{\mu\alpha}\left(\partial^\mu\tilde{F}^{\alpha\nu} - \partial^\alpha\tilde{F}^{\mu\nu}\right), \tag{2.55}$$

definindo

$$K^{\mu\alpha\nu} = \partial^\mu\tilde{F}^{\alpha\nu} - \partial^\alpha\tilde{F}^{\mu\nu} \tag{2.56}$$

e a sua forma dual

$$\begin{aligned}\tilde{K}_\gamma &= \frac{1}{3!}\epsilon_{\gamma\mu\alpha\nu}K^{\mu\alpha\nu}, \\ \tilde{K}_\gamma &= \frac{1}{3!}\frac{1}{2}[\epsilon_{\gamma\mu\alpha\nu}\epsilon^{\alpha\nu\beta\sigma}\partial^\mu F_{\beta\sigma} - \epsilon_{\gamma\alpha\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\beta\sigma}\partial^\alpha F_{\beta\sigma}], \\ \tilde{K}_\gamma &= \frac{1}{3!}\frac{1}{2}[2\left(\delta_\gamma^\beta\delta_\mu^\sigma - \delta_\mu^\beta\delta_\gamma^\sigma\right)\partial^\mu F_{\beta\sigma} + 2\left(\delta_\gamma^\beta\delta_\alpha^\sigma - \delta_\alpha^\beta\delta_\gamma^\sigma\right)F_{\beta\sigma}], \\ \tilde{K}_\gamma &= -\frac{4}{3!}\partial^\sigma F_{\sigma\gamma}, \\ \tilde{K}_\gamma &= -\frac{4}{3!}j_\gamma.\end{aligned} \tag{2.57}$$

Ainda, podemos inverter (2.57) e temos:

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\nu\beta\sigma\gamma}\tilde{K}_{\gamma} &= \frac{1}{3!}\epsilon^{\nu\beta\sigma\gamma}\epsilon_{\gamma\mu\alpha\delta}K^{\mu\alpha\delta} = -\frac{1}{3!}\epsilon^{\gamma\nu\beta\sigma}\epsilon_{\gamma\mu\alpha\delta}K^{\mu\alpha\delta}, \\
\epsilon^{\nu\beta\sigma\gamma}\tilde{K}_{\gamma} &= -\frac{1}{3!}\left(\delta^{\nu}_{\mu}\delta^{\beta}_{\alpha}\delta^{\sigma}_{\alpha} - \delta^{\nu}_{\mu}\delta^{\beta}_{\delta}\delta^{\sigma}_{\alpha} - \delta^{\nu}_{\delta}\delta^{\beta}_{\alpha}\delta^{\sigma}_{\mu} + \delta^{\nu}_{\delta}\delta^{\beta}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\alpha} + \delta^{\nu}_{\alpha}\delta^{\beta}_{\delta}\delta^{\sigma}_{\mu} - \delta^{\nu}_{\alpha}\delta^{\beta}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\delta}\right)K^{\mu\alpha\delta}, \\
\epsilon^{\nu\beta\sigma\gamma}\tilde{K}_{\gamma} &= -\frac{1}{3!}\left(K^{\nu\beta\sigma} - K^{\nu\sigma\beta} - K^{\sigma\beta\nu} + K^{\beta\sigma\nu} + K^{\sigma\nu\beta} - K^{\beta\sigma\nu}\right), \qquad (2.58)
\end{aligned}$$

chegando em

$$K^{\nu\mu\alpha} = -\epsilon^{\nu\mu\alpha\gamma}\tilde{K}_{\gamma}. \qquad (2.59)$$

Então, substituindo o valor de $\tilde{K}_{\gamma}$ por (2.57) e chegamos em:

$$K^{\nu\mu\alpha} = \frac{4}{3!}\epsilon^{\nu\mu\alpha\gamma}j_{f\gamma}. \qquad (2.60)$$

Assim, de (2.60) e (2.55), temos:

$$\partial_{\mu}T^{\mu\nu}_{b} = \frac{1}{6}j_{f\mu}\tilde{F}^{\mu\nu} \qquad (2.61)$$

A equação (2.61) representa a quebra da conservação da parte bosônica da equação de continuidade (2.35). Então, perdemos a conservação, mas ganhamos a invariância de calibre, de modo que temos grandezas físicas que podem ser medidas em laboratórios. Para entender melhor as equações (2.52) e (2.61), vamos decompô-las nas componentes espaço-temporais.

2.3 Decomposição espaço-temporal

Assim como na dedução das equações de continuidade quebradas, vamos dividir a decomposição espaço-temporal nas componentes fermiônicas e bosônicas.

2.3.1 Componentes Fermiônicas

Considerando a parte fermiônica dada por (2.52), temos:

$$\partial_{\nu}\mathcal{T}^{\nu\mu}_{f} = \partial_{0}\mathcal{T}^{0\mu}_{f} + \partial_{j}\mathcal{T}^{j\mu}_{f}, \qquad (2.62)$$

sendo as componentes escritas explicitamente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{00}_{f} &= -\frac{i}{2}\psi^{\dagger}\Sigma^{i}D_{i}\psi = -\frac{1}{2}\mathcal{T}, \\
\mathcal{T}^{i0}_{f} &= -\frac{i}{2}\psi^{\dagger}\alpha^{i}\Sigma^{j}D_{j}\psi = -\frac{1}{2}\mathcal{T}^{i}, \\
\mathcal{T}^{0i}_{f} &= \frac{m}{2}\psi^{\dagger}\left(\beta\Sigma^{i} + \frac{i}{m}\gamma^{5}D^{i}\right)\psi = -\frac{m}{2}\mathcal{J}^{i}, \\
\mathcal{T}^{ij}_{f} &= \frac{m}{2}\psi^{\dagger}\alpha^{i}\left(\beta\Sigma^{j} + \frac{i}{m}\gamma^{5}D^{j}\right)\psi = -\frac{m}{2}\mathcal{J}^{ij}, \qquad (2.63)
\end{aligned}$$

onde $\beta = \gamma^0$, $\alpha^i = \gamma^0\gamma^i$ e $\Sigma^i = \gamma^5\gamma^0\gamma^i$. Para chegar nas expressões dadas por (2.63) usamos as equações de Dirac covariantes (2.6) e as relações das matrizes gamas e sigmas que podem ser encontradas em (ITZYKSON; ZUBER, 2012). Então, a expressão (2.62) pode ser dividida em uma parte temporal e outra espacial:

$$\begin{aligned} \partial_\nu \mathcal{T}_f^{\nu 0} &= \partial_0 \mathcal{T}_f^{00} + \partial_i \mathcal{T}_f^{i0} = -\frac{1}{2}\left(\partial_0 \mathcal{T} + \partial_i \mathcal{T}^i\right), \\ \partial_\nu \mathcal{T}_f^{\nu i} &= \partial_0 \mathcal{T}_f^{0i} + \partial_i \mathcal{T}_f^{ij} = \frac{m}{2}\left(\partial_0 \mathcal{J}^i + \partial_j \mathcal{J}^{ij}\right), \end{aligned} \tag{2.64}$$

e, usando as equações (2.52) e as relações entre o tensor eletromagnético $F^{\mu\nu}$ e os campos elétrico e magnético dadas por:

$$\begin{aligned} E^i &= -F^{0i}, \\ \epsilon^{ijk} B_k &= -F^{ij}, \end{aligned} \tag{2.65}$$

temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} + \nabla.\mathcal{T} &= \frac{e}{c}\vec{S}.\vec{E}, \\ \frac{\partial \vec{\mathcal{J}}}{\partial t} + \nabla.\overleftrightarrow{\mathcal{J}} &= \frac{e}{m}\left(\vec{S}\times\vec{B} - S_0\vec{E}\right), \end{aligned} \tag{2.66}$$

sendo $S^i = \psi^\dagger \Sigma^i \psi$ e $S_0 = \psi^\dagger \gamma^5 \psi$. O vetor $\mathcal{T}^i$ é identificado como a generalização relativística da densidade de spin, enquanto $\mathcal{J}^{ij}$ é a generalização relativística da corrente de spin. O significado físico de $\mathcal{J}^{ij}$ se torna aparente se estudamos a evolução temporal da densidade de spin $\phi^\dagger \vec{\sigma} \phi$ sendo ϕ a função de onda não-relativística do elétron. Da equação de Schrödinger dependente do tempo que inclui um termo de Zeeman da forma $-\mu\vec{\sigma}.\vec{B}$ (VERNES; GYÖRFFY; WEINBERGER, 2007), sendo μ o momento magnético, encontramos

$$\frac{d\vec{s}}{dt} + \vec{\nabla}.\overleftrightarrow{\mathcal{J}} = \frac{e}{m}\vec{s}\times\vec{B}. \tag{2.67}$$

Claramente podemos comparar as equações (2.66) e (2.67) e considerar $\vec{s}\times\vec{B}$ como um torque que faz com que a densidade de spin $\vec{s}$ em um ponto $\vec{r}$ evolua no tempo. Para mais informações consultar (VERNES; GYÖRFFY; WEINBERGER, 2007). Para a parte bosônica as contas são mais simples.

2.3.2 Componentes Bosônicas

Para a parte bosônica as contas são mais simples já que:

$$T_b^{\mu\nu} = \frac{1}{2} F^{\mu\alpha} \tilde{F}_\alpha{}^\nu \tag{2.68}$$

e como

$$\tilde{F}_\alpha{}^\nu = \eta^{\mu\nu} \tilde{F}_{\alpha\mu}, \tag{2.69}$$

reescrevemos

$$\begin{aligned} T_b^{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}F^{\alpha\mu}\tilde{F}_{\alpha\mu} \\ &= -\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\epsilon_{\rho\sigma\alpha\mu}F^{\rho\sigma}F^{\alpha\mu} \\ &= \eta^{\mu\nu}\vec{E}\cdot\vec{B} = \eta^{\nu\beta}T, \end{aligned}$$

assim

$$T_b^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}T, \tag{2.70}$$

sendo $T = \vec{E}\cdot\vec{B}$. As decomposição fica,

$$\begin{aligned} T_b^{00} &= T, \\ T^{0i} &= T^{i0} = 0, \\ T^{ij} &= \eta^{ij}T. \end{aligned} \tag{2.71}$$

Então, a equação (2.61) pode ser dividida como:

$$\partial_\mu T_b^{\mu\nu} = \partial_0 T_b^{0\nu} + \partial_j T_b^{j\nu}, \tag{2.72}$$

assim

$$\begin{aligned} \partial_\mu T_b^{\mu 0} &= \partial_0 T_b^{00} + \partial_i T_b^{ij} = \frac{1}{6}j_{f\mu}\tilde{F}^{\mu 0}, \\ \partial_\mu T_b^{\mu j} &= \partial_0 T_b^{0i} + \partial_j T_b^{ij} = \frac{1}{6}j_{f\mu}\tilde{F}^{\mu j}, \end{aligned} \tag{2.73}$$

e usando que $\tilde{F}^{ij} = -\epsilon^{ijk}E_k$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{1}{6}\vec{j}_f\cdot\vec{B}, \\ \vec{\nabla}T &= \frac{1}{6}\left(-\rho\vec{B} + \vec{j}_f\times\vec{E}\right), \end{aligned} \tag{2.74}$$

sendo $\rho = j_{0f}$. A primeira relação de (2.74) mostra que caso o campo magnético não seja ortonormal a corrente de carga vai existir um fluxo de spin variando no tempo, em que o escalar T é a função do fluxo de spin do fóton. Já da segunda relação, caso o campo elétrico e o campo magnético, juntamente com a corrente de carga não forem mutualmente ortogonais então, o lado direito da segunda equação de (2.74) é diferente de zero, de modo que existe um gradiente dessa função do fluxo de spin do fóton. Nesse caso, podemos pensar na sugestão de que esse lado direito do segundo termo está associado como um tipo de força de um monopólo magnético efetivo com carga $\rho_m = -\frac{\rho}{6}$ e $j_m = -\frac{\vec{j}_f}{6}$. No caso em que o campo elétrico e magnético forem ortogonais, temos:

$$\begin{aligned} \vec{j}_f\cdot\vec{B} &= 0 \\ \rho\vec{B} &= \vec{j}_f\times\vec{E}, \end{aligned} \tag{2.75}$$

que é consistente com o caso clássico, caso $j_f = \rho v$ temos $\vec{B} = \vec{v} \times \vec{E}$, que é a relação entre os campos elétricos e magnéticos encontrada para uma partícula se movendo a uma velocidade constante.

3 Correntes de Spin caso não-abeliano

No capítulo anterior consideremos a teoria de calibre $U(1)$ Abeliana para o caso eletromagnético com o objetivo de obter as equações de continuidade quebradas envolvendo as correntes de spin. Nada mais justo do que utilizarmos uma teoria de calibre não-abeliana e comparar os nossos resultados.

3.1 Correntes de spin em teorias de Yang-Mills

No caso de um campo espinorial, vimos que dada uma simetria na Lagrangeana sobre transformações Abelianas locais introduzimos um campo de calibre Abeliano A_μ. Desde o artigo de Yang-Mills (YM) (YANG; MILLS, 1954) que desenvolveu uma teoria de calibre com base no grupo $SU(N)$ (ver, por exemplo, (RYDER, 1996)), que descreve o comportamento de partículas elementares usando grupos de Lie não-abelianos. Com base nessa teoria de (YM) vamos encontrar as equações de continuidade quebradas das correntes de spin acopladas ao eletromagnetismo utilizando uma teoria de calibre não-abeliana.

Consideramos $\phi(x)$ um multipleto do grupo não-Abeliano $SU(N)$, com elementos $U(x) = e^{-i\alpha^a t_a}$, com $a = 1, ..., N$ e sendo $N^2 - 1$ a dimensão do grupo, α^a um parâmetro que depende do espaço-tempo e t_a os elementos da álgebra de Lie do grupo G. Então, $\phi(x)$ se transforma como:

$$\phi(x) \to \phi'(x) = U(x)\phi(x) \tag{3.1}$$

e a derivada

$$\partial_\mu \phi \to \partial_\mu(U\phi) = U\partial_\mu \phi + (\partial_\mu U)\phi. \tag{3.2}$$

Da mesma maneira que para o caso Abeliano, podemos introduzir uma derivada covariante que vai se transformar como:

$$(\partial_\mu - igA_\mu)\phi = D_\mu \to (D_\mu \phi)' = U(D_\mu \phi), \tag{3.3}$$

sendo g a constante de acoplamento (no caso Abeliano era a carga elétrica e). Para as teorias não-Abelianas gerais a representação adjunta da derivada covariante é definida:

$$\begin{aligned} D_\mu \phi^a &\equiv \partial_\mu \phi^a + gC^a_{bc}A^b_\mu \phi^c \ , \\ D_\mu \Phi &\equiv \partial_\mu \Phi + ig[\mathcal{A}_\mu, \Phi], \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde o objeto totalmente antissimétrico C^a_{bc} é composto pelas constantes de estrutura da álgebra, $\mathcal{A}_\mu = A^a_\mu t_a$ e $\Phi = \phi^a t_a$. A álgebra, por sua vez, é caracterizada por

$$[t_a, t_b] = iC^c_{ab}t_c \ , \ \{a, b, c\} = \{1, 2, ..., N^2 - 1\}. \tag{3.5}$$

Voltando para a transformação da derivada covariante dada por (3.3), podemos encontrar a transformação para $\mathcal{A}^\mu$

$$\mathcal{A}'_\mu = U\mathcal{A}_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}\left(\partial_\mu U\right)U^{-1}. \tag{3.6}$$

Da mesma maneira que fizemos para o caso eletrodinâmico no capítulo 1, definimos um tensor $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ para um campo de calibre não-Abeliano como:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mu\nu} &= -\frac{1}{ig}[D_\mu, D_\nu] \\ &= \partial_\mu\mathcal{A}_\nu - \partial_\nu\mathcal{A}_\mu - ig[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu].\end{aligned} \tag{3.7}$$

Para $g = e$ e para um campo de calibre Abeliano $\mathcal{A}_\mu$, onde o último termo de (3.7) é zero, retornamos ao tensor eletromagnético definido em (1.18). Em componentes, o tensor eletromagnético para essa teoria é

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + gC^{abc}A^b_\mu A^c_\nu. \tag{3.8}$$

E o seu dual é definido como:

$$\tilde{\mathcal{F}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\beta\sigma}\mathcal{F}_{\beta\sigma}. \tag{3.9}$$

Mostrada a álgebra e definida as transformações do campo de matéria e do campo eletromagnético, vamos tratar da ação. Para o caso das teorias de Yang-Mills dividimos a nossa ação como:

$$S = S_0 + S_{int} + S_{YM}, \tag{3.10}$$

onde S_0 é a ação fermiônica, S_{int} é a ação de interação e S_{YM} é a ação de Yang-Mills,

$$\begin{aligned}S_0 &= \int d^4x\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi, \\ S_{int} &= -g\int d^4x\bar{\psi}\gamma^\mu\mathcal{A}_\mu\psi, \\ S_{YM} &= -\frac{1}{4}\int dx^4 F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu},\end{aligned} \tag{3.11}$$

onde ψ são os campos de Dirac que nessa teoria possuem índices na representação fundamental, i.e., $\psi_k, k = 1, 2, ..., N$. Trocando a derivada ∂_μ pela derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu + igt^aA^a_\mu$, podemos reescrever a ação (3.11) como:

$$S = -\frac{1}{4}\int dx^4 F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu} + \int dx^4\bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi. \tag{3.12}$$

E da ação (3.12), encontramos as equações para os campos de Dirac:

$$\begin{aligned}\left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right)\psi &= 0, \\ \bar{\psi}(i\gamma^\mu\overleftarrow{D}_\mu + m) &= 0.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Para os campos de calibre:

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{a\mu\nu} &= g\bar{\psi}\gamma^\mu t^a\psi - gC^{abc}A^b_\mu F^{\mu\nu c}, \\ D_\mu\tilde{\mathcal{F}}^{\mu\nu} &= 0,\end{aligned} \tag{3.14}$$

em que a segunda equação de (3.14) representa as identidades de Bianchi e são relacionadas à estrutura topológica da teoria e não podem ser obtidas da ação (3.12).

Sabendo que a ação (3.12) é invariante por transformações do grupo $SU(N)$ local, com base em (3.1) os campos fermiônicos se transformam infinitesimalmente como:

$$\begin{aligned} \delta_g\psi &= -ig\alpha^a t_a\psi, \\ \delta_g\bar{\psi} &= ig\alpha^a t_a\psi \end{aligned} \tag{3.15}$$

e usando (3.6), temos a transformação infinitesimal para o potencial A_μ:

$$\delta A^a_\mu = -D^{ac}_\mu\alpha^c, \tag{3.16}$$

sendo $D^{ac}_\mu = \partial_\mu\delta^{ac} + gC^{abc}A^b_\mu$ a forma adjunta da derivada covariante. De acordo com (3.6) e (3.8), pode-se mostrar que o tensor de curvatura se transforma como:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \to \mathcal{F}'_{\mu\nu} = U\mathcal{F}_{\mu\nu}U^{-1}, \tag{3.17}$$

ou, infinitesimalmente

$$\delta F_{a\mu\nu} = gC_ab^c\alpha_bF_{c\mu\nu}. \tag{3.18}$$

Essas transformações deixam a ação (3.12) invariante. Note que devido ao auto acoplamento g, os campos não-Abelianos interagem entre si: a densidade Lagrangiana para os campos de Yang-Mills não é linear em $\mathcal{A}_\mu$. Isso é o oposto do que ocorre no eletromagnetismo, onde o campo eletromagnético não carrega cargas, de modo que não pode agir como fonte de si mesmo. Além disso, é possível perceber que a parte do acoplamento entre os campos de matéria e os campos de calibre é dado pela derivada covariante e que $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ se transforma covariantemente sobre as transformações de calibre, diferentemente de $\mathcal{A}_\mu$, cuja transformação é inomogênea. Pelo princípio de calibre $F^{\mu\nu}$ não é mais um observável do sistema, diferentemente do caso Abeliano. Assim, aplicando o teorema de Noether na ação (3.12) e usando as transformações globais dos campos, obtemos a corrente conservada

$$j^{a\mu} = g\bar{\psi}\gamma^\mu t^a\psi - gC^{abc}A_{b\nu}F^{\nu\mu}_c. \tag{3.19}$$

Assim como no caso Abeliano, a assimetria quiral vai estar presente no caso não-Abeliano. Definimos as transformações quirais como

$$\begin{aligned} \delta_c\psi &= -i\alpha^a\gamma_5t^a\psi, \\ \delta_c\bar{\psi} &= -i\alpha^a\bar{\psi}t^a\gamma_5, \\ \delta_qA_{a\mu} &= 0, \end{aligned} \tag{3.20}$$

onde α^a é um parâmetro constante. A corrente quiral não-Abeliana não conservada é

$$S^{a\mu} = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5t^a\psi \tag{3.21}$$

de modo que

$$D^{ac}_{\mu}S^{c\mu} = 2im\bar{\psi}\gamma^5 t^a\psi, \tag{3.22}$$

onde a presença da massa em (3.22), como no caso Abeliano, impede a conservação da corrente. Agora vamos generalizar as seções 2.1 e 2.2 para o caso não abeliano e ver se recuperamos o limite abeliano.

3.2 Grupo de estabilidade L(1,3)

Utilizando (2.27), os campos de matéria se transformam da seguinte maneira em relação ao grupo $L(1,3)$

$$\begin{aligned} \delta_l\psi &= -i\omega_\mu W^\mu_F\psi, \\ \delta_l\bar{\psi} &= -i\omega_\mu \overleftarrow{W}^\mu_F, \end{aligned} \tag{3.23}$$

onde novamente ω_μ é um parâmetro real e constante, e o índice F é utilizado para designar o setor fermiônico. Pelo teorema de Noether (2.12) a corrente associada é:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu}_f = \bar{\psi}\gamma^\mu W^\nu_F\psi, \tag{3.24}$$

que é a corrente de Bargmann-Wigner encontrada também em (2.29). Para o setor bosônico utilizamos o vetor de Pauli-Lubanski (2.30) e a transformação infinitesimal do campo de calibre

$$\delta A^a_\mu = \frac{1}{2}\omega_\nu \epsilon_\alpha{}^{\nu\sigma\beta}\partial_\beta A^a_\sigma. \tag{3.25}$$

Assim, a corrente de Bargmann-Wigner para o setor bosônico do caso não-Abeliano é:

$$T^{\mu\nu}_B = \frac{1}{2}\epsilon_\alpha{}^{\nu\beta\sigma}F^{\mu\alpha}_a\partial_\beta A^a_\sigma. \tag{3.26}$$

E pelo teorema de Noether (ITZYKSON; ZUBER, 2012) a corrente total de Bargmann-Wigner é:

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_F + T^{\mu\nu}_B, \tag{3.27}$$

que é claramente conservada

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \tag{3.28}$$

3.3 Restaurando a invariância de Calibre da corrente de Bargmann-Wigner

Apesar de ser conservada a corrente (3.27) não é invariante de calibre, então pelo *princípio de calibre* não pode ser um observável do nosso sistema. Então, assim como na seção 2.2 restaurar a invariância de calibre da corrente de Bargmann-Wigner. Começando pelo setor fermiônico, temos

$$\begin{aligned} \delta_g T_F^{\mu\nu} &= ig\bar{\psi}\alpha^a t^a W^\nu \psi + \bar{\psi}\gamma^\mu W^\nu \left(-ig\alpha^a t^a \psi\right), \\ \delta_g T_F^{\mu\nu} &= -ig\bar{\psi}\gamma^\mu (W^\nu \alpha^a) t^a \psi. \end{aligned} \tag{3.29}$$

E da mesma maneira para o caso abeliano, levamos a derivada ordinária numa derivada covariante, assim o vetor de Pauli-Lubanski fica:

$$\mathcal{W}_f^\mu = -\frac{1}{2}\gamma^5 \sigma^{\mu\nu} D_\nu. \tag{3.30}$$

Assim, o tensor de Bargmann-Wigner para o setor fermiônico é reescrito como

$$\mathcal{T}_F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\sigma^{\mu\nu}D_\nu\psi = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\sigma^{\mu\nu}D_\nu\psi, \tag{3.31}$$

ou explicitando os termos da derivada:

$$\mathcal{T}_F^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \frac{ig}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\sigma^{\nu\alpha}\mathcal{A}_\alpha\psi. \tag{3.32}$$

Aplicando as transformações infinitesimais nos campos de matéria em (3.32), temos:

$$\delta_g\mathcal{T}_F^{\mu\nu} = \delta_g T^{\mu\nu} + \frac{ig}{2}\delta\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\sigma^{\nu\alpha}\mathcal{A}_\alpha\psi + \frac{ig}{2}\delta\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\sigma^{\nu\alpha}\delta\mathcal{A}_\alpha\psi + \frac{ig}{2}\delta\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\sigma^{\nu\alpha}\mathcal{A}_\alpha\delta\psi, \tag{3.33}$$

fazendo uso das equações (3.15) e (3.6), chegamos em:

$$\begin{aligned} \delta_g\mathcal{T}_F^{\mu\nu} &= \frac{ig}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\sigma^{\nu\alpha}\left(\partial_\alpha\alpha_b\right)t^b\psi - \frac{g^2}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\sigma^{\nu\alpha}\alpha_b t^b\mathcal{A}_\alpha\psi + \\ &+ \frac{ig}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\sigma^{\nu\alpha}\Big(gC_a^{bc}\alpha_b A_{c\alpha} + \partial_\alpha\alpha_a\Big)t^a\psi + \frac{g^2}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\sigma^{\nu\alpha}\mathcal{A}_\alpha\alpha_b t^b\psi \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\delta_g\mathcal{T}_F^{\mu\nu} = -\frac{g^2}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\sigma^{\nu\alpha}\Big[\alpha_b t^b, \mathcal{A}_\alpha\Big]\psi + \frac{ig^2}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\sigma^{\nu\alpha}C_a^{bc}\alpha_b A_{c\alpha}t^a\psi, \tag{3.35}$$

evidentemente

$$\delta_g\mathcal{T}_F^{\mu\nu} = 0. \tag{3.36}$$

Assim, o setor fermiônico é claramente invariante de calibre local.

Para o setor bosônico, efetuamos as transformações de calibre em (3.26), temos:

$$\begin{aligned} \delta_g T_B^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\epsilon_\alpha^{\nu\beta\sigma}\Big(g\alpha_b C_a^{bc}F_c^{\mu\alpha}\Big)\partial_\beta A_\sigma^a + \frac{1}{2}\epsilon_\alpha^{\nu\beta\sigma}F_c^{\mu\alpha}\partial_\beta\Big(g\alpha_b C^{abc}A_{c_\sigma} + \partial_\sigma\alpha^a\Big), \\ \delta_g T_B^{\mu\nu} &= \frac{g}{2}\epsilon_\alpha^{\nu\beta\sigma}\alpha_b C_a^{bc}F_c^{\mu\alpha}\partial_\beta A_\sigma^a + \frac{g}{2}\epsilon_\alpha^{\nu\beta\sigma}C^{abc}F_a^{\mu\alpha}\left(\partial_\beta\alpha_b\right)A_{c\sigma} + \\ &+ \frac{g}{2}\epsilon_\alpha^{\nu\beta\sigma}C^{abc}\alpha_b F_a^{\mu\alpha}\partial_\beta A_{c\sigma} + \frac{1}{2}\epsilon_\alpha^{\nu\beta\sigma}F_a^{\mu\alpha}\partial_\beta\partial_\sigma\alpha^a. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Trocando os índices $c \leftrightarrow a$ no terceiro termo da equação acima, usando a antissimetria das constantes de estrutura C^{abc} e utilizando o fato que a contração de termos simétricos com antissimétricos é zero, tem-se:

$$\delta_b T_B^{\mu\nu} = \frac{g}{2}\epsilon_\alpha^{\nu\beta\sigma}C^{abc}F_a^{\mu\alpha}\left(\partial_\beta\alpha_b\right)A_{c\sigma}. \tag{3.38}$$

Assim, diferentemente do caso Abeliano, a corrente do setor bosônico não é invariante de calibre. Se substituímos a derivada usual pela derivada covariante como no caso fermiônico é possível perceber que a corrente (3.38) ainda não se torna invariante de calibre. Então, o que fazemos, primeiramente, é anti-simetrizar essa corrente:

$$T_B^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_\alpha^{\nu\beta\sigma} F_a^{\mu\alpha}\left(\partial_\beta A_\sigma^a - \partial_\sigma A_\beta^a\right), \tag{3.39}$$

adicionando o termo $-gC^{abc}A_\beta^b A_\sigma^c$ dentro dos parênteses em (3.39),

$$\mathcal{T}_b^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_\alpha^{\nu\beta\sigma} F_a^{\mu\alpha}\left(\partial_\beta A_\sigma^a - \partial_\sigma A_\beta^a - gC^{abc}A_\beta^b A_\sigma^c\right) = \frac{1}{4}\epsilon_\alpha^{\nu\beta\sigma} F_a^{\mu\alpha} F_\alpha^{a\nu},$$

$$\mathcal{T}_b^{\mu\nu} = \frac{1}{2} F_a^{\mu\alpha}\tilde{F}_\alpha^{a\nu}, \tag{3.40}$$

sendo usada a equação (3.9). Assim, a corrente de Bargmann-Wigner total invariante de calibre para o caso não-Abeliano é:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \mathcal{T}_F^{\mu\nu} + \mathcal{T}_B^{\mu\nu}. \tag{3.41}$$

Que é invariante de calibre, mas não é mais conservada. Agora, vamos analisar a 4-divergência de cada setor separadamente.

Primeiramente, para o setor fermiônico reescrevendo (3.32) como:

$$\mathcal{T}_F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\sigma^{\nu\alpha}\partial_\alpha\psi + \frac{ig}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\sigma^{\nu\alpha}\mathcal{A}_\alpha\psi, \tag{3.42}$$

usando a relação $\gamma^\mu\gamma^\nu = \eta^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}$ e (3.13), temos:

$$\mathcal{T}_F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}m\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\psi - \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\partial^\nu\psi + \frac{g}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\mathcal{A}^\nu\psi, \tag{3.43}$$

atuando a 4-divergência na equação acima:

$$\begin{aligned}\partial_\mu\mathcal{T}_F^{\mu\nu} = &-\frac{1}{2}m\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\gamma^\nu\psi + \frac{1}{2}m\bar{\psi}\gamma^5\left(2\delta_\mu^\nu - \gamma^\nu\gamma_\mu\right)\partial^\mu\psi + \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\partial^\nu\psi + \\ &-\frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^5\partial^\nu\left(\gamma^\mu\partial_\mu\psi\right) - \frac{g}{2}\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\mathcal{A}^\nu\psi + \frac{g}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\partial_\mu\mathcal{A}^\nu\psi + \frac{g}{2}\bar{\psi}\gamma^5\mathcal{A}^\nu\gamma^\mu\partial_\mu\psi,\end{aligned} \tag{3.44}$$

onde foi usado $\gamma_\mu\gamma^\nu = 2\delta_\mu^\nu - \gamma^\nu\gamma_\mu$. Utilizando (3.13)

$$\begin{aligned}\partial_\mu\mathcal{T}_F^{\mu\nu} = &-\frac{ig}{2}m\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\gamma^\nu\mathcal{A}_\mu\psi - \frac{i}{2}m^2\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\nu\psi + m\bar{\psi}\gamma^5\partial^\nu\psi + \frac{ig}{2}m\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\nu\gamma^\mu\mathcal{A}_\mu\psi + \\ &+\frac{i}{2}m^2\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\nu\psi - \frac{g}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\mathcal{A}_\mu\partial^\nu\psi - \frac{1}{2}m\bar{\psi}\gamma^5\partial_\nu\psi - \frac{g}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\partial^\nu\mathcal{A}_\mu\psi + \\ &-\frac{g}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\mathcal{A}_\mu\partial^\nu\psi - \frac{1}{2}m\bar{\psi}\gamma^5\partial^\nu\psi - \frac{ig^2}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}^\nu\psi - \frac{ig}{2}m\bar{\psi}\gamma^5\mathcal{A}^\nu\psi + \\ &+\frac{g}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\partial_\mu\mathcal{A}^\nu\psi - \frac{ig^2}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\mathcal{A}^\nu\mathcal{A}_\mu\psi - \frac{ig}{2}m\bar{\psi}\gamma^5\mathcal{A}^\nu\psi.\end{aligned} \tag{3.45}$$

Usando $\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5$

$$\begin{aligned}\partial_\mu\mathcal{T}_F^{\mu\nu} = &\frac{ig}{2}m\bar{\psi}\gamma^5\left(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu\right)\mathcal{A}_\mu\psi - igm\bar{\psi}\gamma^5\mathcal{A}^\nu\psi + \\ &+\frac{g}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma_\mu\left(\partial^\mu\mathcal{A}^\nu - \partial^\nu\mathcal{A}^\mu + ig[\mathcal{A}^\mu, \mathcal{A}^\nu]\right)\psi.\end{aligned} \tag{3.46}$$

Da álgebra de Clifford $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$, (3.5), (3.8), (3.9), e (3.21) pode-se mostrar que

$$\partial_\mu \mathcal{T}_F^{\mu\nu} = -\frac{g}{2} S_\mu^a F_a^{\mu\nu}. \tag{3.47}$$

Para o setor bosônico. Atuamos a 4-divergência em (3.40)

$$\begin{aligned} \partial_\mu T_B^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu F_a^{\mu\alpha}\right)\tilde{F}_\alpha^{a\nu} + \frac{1}{2} F_{\mu\alpha}^a \partial^\mu \tilde{F}_a^{\alpha\nu}, \\ \partial_\mu T_B^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} j_a{}^\alpha \tilde{F}_{\alpha\nu}^a + \frac{1}{4} F_{\mu\alpha}^a \left(\partial^\mu \tilde{F}_a^{\alpha\nu} - \partial^\alpha \tilde{F}_a^{\mu\nu}\right), \end{aligned} \tag{3.48}$$

onde usamos (3.8), (3.9) e o último termo foi antissimetrizado. Definindo

$$K_a^{\mu\alpha\nu} = \partial^\mu \tilde{F}_a^{\alpha\nu} - \partial^\alpha \tilde{F}_a^{\mu\nu}. \tag{3.49}$$

Assim,

$$\partial_\mu T_B^{\mu\nu} = \frac{1}{2} j_a{}^\alpha \tilde{F}_a^{\alpha\nu} + \frac{1}{4} F_{\mu\alpha}^a K_a^{\mu\alpha\nu}. \tag{3.50}$$

Seguindo os mesmo passos da seção 2.2, temos

$$K_a^{\nu\mu\alpha} = \frac{4}{3!} \epsilon^{\nu\mu\alpha\gamma} j_{a\gamma}. \tag{3.51}$$

Substituindo (3.51) em (3.50), obtemos

$$\partial_\mu T_B^{\mu\nu} = \frac{1}{6} j_\mu^a \tilde{F}_a^{\mu\nu}. \tag{3.52}$$

Assim, as equações (3.47) e (3.52) representam as equações de continuidade quebradas para os setores fermiônicos e bosônicos respectivamente. Essas equações são equivalentes ao caso Abeliano, mas devido a diferença da ação de EH e de YM, o setor gravitacional será regido por equações diferentes.

4 Correntes de spin em gravidade

Nesta seção vamos considerar os férmions de Dirac acoplados a gravidade no formalismo de primeira ordem e vamos derivar os as equações mestras que governam o acoplamento entre as correntes de spin e o campo gravitacional. A ideia geral por trás da formulação da gravidade por primeira ordem é considerar apenas termos de derivada de primeira ordem na ação gravitacional.

A gravitação é diretamente ligada às estruturas do espaço-tempo e neste trabalho o campo gravitacional vai ser caracterizado pela vierbein e pela conexão de spin, neste caso, estruturas essenciais para a formulação covariante de uma ação fermiônica acoplada a gravidade. Assim, nas próximas seções serão definidas as estruturas e ferramentas utilizadas para descrever o nosso espaço-tempo.

4.1 A vierbein

Considerando agora o espaço-tempo como uma variedade suave M 4-dimensional. Uma construção natural presente em variedades diferenciáveis é a de que existe em cada ponto do espaço-tempo um espaço tangente T_x associado. Vamos usar o alfabeto grego $(\mu, \nu, \rho, ... = 0, 1, 2, 3)$ para as coordenadas $x^\mu \in M$ e índices latinos minúsculos $(a, b, c, ... = 0, 1, 2, 3)$ para as coordenadas $x^a \in T_x$. O espaço tangente T_x será definido como o espaço tempo de Minkowski com a métrica com assinatura negativa, dada por

$$\eta_{ab} = diag(+1, -1, -1, -1). \tag{4.1}$$

Este espaço tangente T_x é uma boa aproximação da variedade M em um conjunto aberto nas redondezas de x, isso significa que existe uma maneira de representar os tensores em M por tensores em T_x, e vice versa (ZANELLI, 2005). A relação precisa entre o espaço tensorial em M e em T_x é um isomorfismo representado por um mapa linear e (NAKAHARA, 2003), (BERTLMANN, 2000), (ZANELLI, 2005).

A ideia de um campo da vierbein e^a_μ surge da matriz de transformação 4×4, presente em

$$dx^a = e^a_\mu dx^\mu, \tag{4.2}$$

onde dx^a representa uma base no espaço tangente T_x e dx^μ uma base no espaço M. Assim, localmente, é possível escrever uma relação linear entre coordenadas presentes em T_x e M em que o campo da vierbein faz essa transformação entre as coordenadas ortonormais no espaço de Minkowski e as coordenadas $x^\mu \in M$. A relação inversa também é válida

$$dx^\mu = e^\mu_a dx^a, \tag{4.3}$$

de modo que o princípio de equivalência para todos os pontos em M é assegurado. De acordo com esse isomorfismo, o elemento de linha tanto no espaço tangente T_x quanto em M serão equivalentes, i.e, $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \eta_{ab}dx^a dx^b$, sendo $g_{\mu\nu}$ a métrica em M. Assim, pela invariância do comprimento de arco e pelas relações (4.2) e (4.3), o campo da métrica e a sua inversa são

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{ab}e^a_\mu e^b_\nu \ , \\ g^{\mu\nu} &= \eta^{ab}e^\mu_a e^\nu_b \ . \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde fica evidente que a métrica $g_{\mu\nu}$ é induzida pela vierbein. E as relações

$$\begin{aligned} e^a_\mu e^\mu_b &= \delta^a_b, \\ e^a_\mu e^\nu_a &= \delta^\nu_\mu, \end{aligned} \tag{4.5}$$

são sempre verdadeiras. Assim, o campo da vierbein contém todas as propriedades métricas de M. O contrário não é verdade, já que dada uma métrica $g_{\mu\nu}$ existem infinitas escolhas de vierbeins que reproduzem essa mesma métrica.

4.2 Conexão de Spin

A conexão de spin $\omega^a_{\mu b}$ realiza o transporte paralelo dos tensores de Lorentz no espaço tangentes $T_x \to T_{x+dx}$. De acordo com (ZANELLI, 2005), o transporte paralelo de um campo vetorial ϕ^a de $x + dx$ até x é definido como um vetor $\phi^a_{||}$:

$$\begin{aligned} \phi^a_{||}(x) &\equiv \phi^a(x+dx) + dx^\mu \omega^a_{\mu b}\phi^b(x), \\ &\equiv \phi^a(x) + dx^\mu[\partial_\mu \phi^a(x) + \omega^a_{\mu b}\phi^b(x)], \\ &\equiv \phi^a(x) + dx^\mu D_\mu \phi^a(x), \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde a derivada covariante $D_\mu \cdot^a \equiv \partial_\mu \cdot^a + \omega^a_{\mu b} \cdot^b$ é chamada de derivada de Fock-Ivanenko (FOCK; IVANENKO, 1929). Assim , a conexão de spin define um operador diferencial que atua na variedade M. A partir da conexão de spin podemos encontrar a conexão afim $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ associada

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = e^\mu_a \left(\partial_\alpha e^a_\beta + \omega^a_{\alpha b} e^b_\beta\right) \ , \tag{4.7}$$

que das relações entre espaços tangentes em diferentes pontos da variedade. Além disso, a propriedade (4.7) mostra que as propriedades afins do espaço-tempo são arbitrárias e estão alocadas nas componentes de $\omega^a_{\mu b}$. No caso de uma teoria de calibre para o grupo de Lorentz local, a conexão de spin emerge naturalmente como um campo de calibre. Então, os índices duplos no espaço tangente são associados ao fato que a conexão de spin é um campo com valor algébrico na representação adjunta do grupo de Lorentz. Como consequência,

$$\omega^{ab}_\mu = -\omega^{ba}_\mu . \tag{4.8}$$

A vierbein e a conexão de spin, serão usadas na construção da curvatura e da torção que vão servir para construir os tensores de intensidade de campo e também são os campos fundamentais da teoria de calibre.

4.3 Curvatura e Torção

Todas as vezes que a curvatura se manifesta ela depende de algo chamado conexão, que mostra a forma de como relacionar vetores no espaço tangente. Uma conexão que podemos construir da métrica é dada pelo objeto chamado símbolo de Christoffel, dado por

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu} \right) + K^{\lambda}_{\mu\nu}, \tag{4.9}$$

onde $K^{\lambda}_{\mu\nu}$ é o tensor de contorção definido em termos do tensor de torção

$$K_{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2} \left(T_{\mu\nu\sigma} + T_{\nu\sigma\mu} - T_{\sigma\mu\nu} \right). \tag{4.10}$$

E o tensor de torção pode ser escrito em termos do símbolo de Christoffel como

$$T^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}, \tag{4.11}$$

além de construir o tensor de Riemann como

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}, \tag{4.12}$$

que contém todas as informações sobre a curvatura da variedade. As componentes do tensor de Riemann podem ser escritas em função das conexões de spin também, dadas por:

$$R^{ab}_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega^{ab}_{\nu} - \partial_\nu \omega^{ab}_{\mu} + \omega^{a}{}_{c\mu} \omega^{cb}_{\nu} - \omega^{a}{}_{c\nu} \omega^{cb}_{\mu}. \tag{4.13}$$

O tensor de torção é definido como o resultado da derivada covariante atuando na vierbein e^a_μ. As suas componentes são

$$T^{a}_{\mu\nu} = D_\mu e^a_\nu - D_\nu e^a_\mu, \tag{4.14}$$

e diferentemente da curvatura, a torção depende tanto da conexão de spin quanto da vierbein.

A interpretação geométrica da curvatura e da torção é bem simples. A curvatura carrega informação sobre a regra do paralelogramo para a soma de vetores. Imagine que fazemos dois transportes paralelos ao longo de diferentes direções, por exemplo, n^μ e depois t^μ. Agora pegamos o mesmo vetor e fazemos outro transporte paralelo, porém invertendo a ordem, primeiro t^μ e depois n^μ. O vetor resultante vai terminar no mesmo ponto, mas não vai coincidir já que a variedade é curva. Mas caso $T^a \neq 0$, os dois vetores resultantes vão coincidir paralelamente, mas não vão estar no mesmo ponto já que a variedade vai estar torcida (NAKAHARA, 2003).

4.4 Gravidade como uma teoria de Calibre

Definidas as principais ferramentas usadas no formalismo de primeira ordem, vamos aplicar uma teoria de calibre para o grupo local de Lorentz já que estamos interessados em um teoria de calibre gravitacional. Definindo a matriz de transformação de Lorentz como

$$\Lambda(x) \in SO(1,3), \tag{4.15}$$

e dado duas coordenadas x e x' que se relacionam pela transformação de Lorentz (4.15) por meio de

$$dx'^{a} = \Lambda^{a}{}_{b} dx^{b} \tag{4.16}$$

vemos que a transformação (4.16) não afeta as coordenadas x^{μ} de modo que essa é uma transformação de calibre genuína. Como dito na seção anterior, a conexão de spin emerge como um campo de calibre na teoria de calibre para o grupo de Lorentz local e de acordo com a definição da derivada covariante (4.6) é necessário que a conexão de spin se transforme por uma rotação $\Lambda^{a}{}_{c}$ como:

$$\omega^{a}{}_{b\mu} \rightarrow \omega'^{a}{}_{b\mu} = \Lambda^{a}{}_{c}\Lambda_{b}{}^{d}\omega^{c}{}_{d\mu} + \Lambda^{a}{}_{c}\partial_{\mu}\Lambda_{b}{}^{c}. \tag{4.17}$$

Como o outro campo fundamental da nossa teoria é a vierbein e^{a}_{μ} e a sua inversa e^{μ}_{a}, a sua transformação por uma rotação $\Lambda^{a}{}_{c}$ é dada por:

$$e^{a}_{\mu} \rightarrow e'^{a}_{\mu} = \Lambda^{a}{}_{b} e^{b}_{\mu}. \tag{4.18}$$

Infinitesimalmente as transformações de Lorentz desses campos são definidos como

$$\begin{aligned} \delta\omega^{ab}_{\mu} &= D_{\mu}\alpha^{ab} \,, \\ \delta e^{a}_{\mu} &= \alpha^{a}{}_{b} e^{b}_{\mu} \,, \\ \delta e^{\mu}_{a} &= -\alpha_{a}{}^{b} e^{\mu}_{b} \,, \end{aligned} \tag{4.19}$$

com $\alpha(x)$ sendo um parâmetro infinitesimal local. Claramente das relações (4.19) vemos que os campos da vierbein e de conexão de spin não são invariantes de calibre e dessa forma não podem ser observáveis do nosso sistema. Então, se pensarmos nos tensores de curvatura e de torção e aplicarmos as transformações de Lorentz

$$\begin{aligned} R^{a}{}_{b\nu\mu} \rightarrow R'^{a}{}_{b\nu\mu} &= \Lambda^{a}{}_{c}\Lambda_{b}{}^{d} R^{c}{}_{d\nu\mu}, \\ T^{a}{}_{\nu\mu} \rightarrow T'^{a}{}_{\nu\mu} &= \Lambda^{a}{}_{b} T^{b}{}_{\nu\mu}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Vemos que claramente esses tensores se transformam covariantemente sobre transformações de calibre do grupo local de Lorentz. De modo que, esses serão os campos de força da nossa teoria.

Como estamos trabalhando com uma teoria de calibre, devido ao fato de que $\omega^{a}_{\mu b}$ e e^{a}_{μ} terem diferentes funções, ressaltadas por suas diferentes regras de transformação sob o grupo de Lorentz: a vierbein se transforma como um vetor e não como uma conexão (ZANELLI, 2005), isso implica que os campos vetoriais tem a função de campos de matéria e as conexões carregam as informações das interações.

Então, temos definidos os nossos campos de força e a simetria de calibre utilizada. Agora vamos introduzir os campos de matéria e a ação que acopla matéria à gravidade.

4.5 Ação de Eintein-Hilbert-Dirac e equações de campo

Da mesma forma definida na seção 2, o campo ψ vai ser o nosso campo espinorial e vai representar os férmions da nossa teoria e $\bar{\psi} = \psi^{\dagger}\gamma^0$ vai ser o seu adjunto. A álgebra de Clifford definida no espaço tangente $\left\{\gamma^a, \gamma^b\right\} = 2\eta^{ab}$ com as matrizes gama na representação de Dirac definidas em (ITZYKSON; ZUBER, 2012).

As transformações de Lorentz infinitesimais e locais para os campos de spin são

$$\begin{aligned} \delta\psi &= -i\alpha^{ab}\sigma_{ab}\psi \ , \\ \delta\bar{\psi} &= i\bar{\psi}\alpha^{ab}\sigma_{ab} \ , \end{aligned} \tag{4.21}$$

com $\sigma_{ab} = \frac{i}{2}[\gamma_a, \gamma_b]$. A ação que vai acoplar os campos de spin com a gravidade será a ação de Einstein-Hilbert-Dirac,

$$S = -\frac{1}{2k}\int d^4x \ \mathrm{e}R^{ab}_{\mu\nu}e^{\mu}_a e^{\nu}_b + \int d^4x \ \mathrm{e}\bar{\psi}\left(i\gamma^a e^{\mu}_a D_{\mu} - m\right)\psi \ , \tag{4.22}$$

onde não incluímos a constante cosmológica Λ e $k = 8\pi G$ com G sendo a constante de Newton, m a massa fermiônica e e a determinante da vierbein. Pela expressão (4.22) já obtemos algumas informações relevantes. Só temos a presença da curvatura $R^{ab}_{\mu\nu}$ na ação já que não é necessário colocar a torção explicitamente, uma vez que os espinores induzem uma torção, como vai ser visto nas equações de campo para a conexão de spin. O acoplamento gravitacional com a matéria, é visto na segunda parte da equação com a presença do produto entre as matrizes gama de Dirac e a vierbein e também pelo acoplamento mínimo com a conexão de spin.

A derivada covariante na representação fundamental é:

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - \frac{i}{4}\sigma_{ab}\omega^{ab}_{\mu}, \tag{4.23}$$

chamada de derivada de Fock-Ivanenko (FOCK; IVANENKO, 1929). A ação (4.22) é invariante pelas transformações (4.19) e (4.21).

As equações de campo podem ser calculadas a partir da ação (4.22). Para o campo da vierbein, obtemos a equação de Einstein no formalismo de primeira ordem

$$R^a_{\mu} - \frac{1}{2}Re^a_{\mu} = ik\bar{\psi}\gamma^a D_{\mu}\psi \ , \tag{4.24}$$

com

$$\begin{aligned} R^a_\mu &= R^{ab}_{\mu\nu} e^\nu_b \ , \\ R &= R^a_\mu e^\mu_a \ , \end{aligned} \tag{4.25}$$

sendo respectivamente o tensor de Ricci tensor e a curvatura escalar. Para o campo da conexão espinorial temos

$$D_\nu \left[\mathrm{e} \left(e^\mu_a e^\nu_b - e^\mu_b e^\nu_a \right) \right] = k \mathrm{e} \bar{\psi} \gamma^c e^\mu_c \sigma_{ab} \psi \ . \tag{4.26}$$

A equação de campo para o dual do campo espinorial é

$$\left(i \gamma^a e^\mu_a D_\mu - m \right) \psi = 0 \ . \tag{4.27}$$

que é a equação de Dirac para espaço-tempo curvo. De (4.27) encontramos

$$\bar{\psi} \left(i \tilde{D}_\mu \gamma^a e^\mu_a + m \right) = 0 \ , \tag{4.28}$$

com $\tilde{D}_\mu = \overleftarrow{\partial}_\mu + \frac{i}{4} \sigma_{ab} \omega^{ab}_\mu$. Diretamente da ação de Einstein-Hilbert-Dirac temos a equação de campo para ψ dada por

$$i \left(\mathrm{e} \bar{\psi} \gamma^a e^\mu_a \right) \tilde{D}_\mu + \mathrm{e} m \bar{\psi} = 0 \ . \tag{4.29}$$

Combinando (4.28) e (4.29) temos a relação

$$D_\mu \left(\mathrm{e} e^\mu_a \right) = 0 \ . \tag{4.30}$$

Combinando a equação (4.24) com a segunda equação de (4.27), temos o escalar da curvatura em termos da matéria,

$$R = -mk \bar{\psi} \psi \ . \tag{4.31}$$

Deduzidas as equações de campo, a próxima etapa é encontrar as correntes associadas às simetrias usando a fórmula da corrente de Noether dada por (2.12).

4.6 Correntes e simetrias

A simetria mais importante é a simetria de calibre sobre as transformações de Lorentz locais, dada pelas equações (4.19) e (4.21) e a corrente de Noether associada é

$$j^\mu_{ab} = \mathrm{e} \bar{\psi} \gamma^c e^\mu_c \sigma_{ab} \psi \ , \tag{4.32}$$

que aparece como uma densidade de spin em (4.26).

Como dito nas seções anteriores, para o caso de férmions não massivos aparecem as simetrias quirais em algum momento da nossa teoria. Assim, a primeira transformação quiral definida é

$$\begin{aligned}\delta_c^{(1)}\psi &= -i\alpha\gamma^5\psi \ , \\ \delta_c^{(1)}\bar{\psi} &= -i\alpha\bar{\psi}\gamma^5 \ , \end{aligned} \tag{4.33}$$

onde agora α é uma constante real e um parâmetro global. Devido a presença da massa fermiônica, a corrente S^μ associada a essa simetria não é conservada

$$\begin{aligned}S^\mu &= \mathrm{e}e^\mu_a\bar{\psi}\gamma^a\gamma^5\psi = \mathrm{e}e^\mu_a S^a \ , \\ \partial_\mu S^\mu &= 2im\mathrm{e}\bar{\psi}\gamma^5\psi \ . \end{aligned} \tag{4.34}$$

Uma segunda simetria quiral pode ser definida pelas transformações infinitesimais:

$$\begin{aligned}\delta_c^{(2)}\psi &= -i\alpha^{ab}\gamma^5\sigma_{ab}\psi \ , \\ \delta_c^{(2)}\bar{\psi} &= -i\alpha^{ab}\bar{\psi}\gamma^5\sigma_{ab} \ , \end{aligned} \tag{4.35}$$

sendo α^{ab} uma constante global também. A corrente associada a essa simetria também é não conservada e é dada por

$$\begin{aligned}S^{ab}_\mu &= \mathrm{e}e^c_\mu\bar{\psi}\gamma_c\gamma^5\sigma^{ab}\psi \ , \\ D^\mu S^{ab}_\mu &= 2im\mathrm{e}\bar{\psi}\gamma^5\sigma^{ab}\psi \ . \end{aligned} \tag{4.36}$$

A outra simetria que já foi discutida nas seções anteriores, é a simetria do *little group* que é o grupo de estabilidade do grupo de Poincaré. Considerando a seguinte sequência de subgrupos associadas aos automorfismos do espaço-tempo

$$\mathrm{diff}(1,3) \longrightarrow A(1,3;\mathbb{R}) \longrightarrow ISO(1,3) \ , \tag{4.37}$$

essa sequência significa que o grupo afim $A(1,3;\mathbb{R})$ é um subgrupo do grupo de difeomorfismo $\mathrm{diff}(1,3)$ e que o grupo local de Poincaré $ISO(1,3)$ é um subgrupo de $A(1,3;\mathbb{R})$. O grupo afim engloba todas as transformações inversíveis mais as translações e transformações de Lorentz, $A(1,3;\mathbb{R}) = GL(1,3;\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{1,3}$. Assim, o grupo de Poincaré local é um grupo de estabilidade do grupo de difeomorfismos. Se considerarmos outra sequência de subgrupos

$$ISO_{local}(1,3) \longrightarrow ISO_{global}(1,3) \longrightarrow L(1,3) \ . \tag{4.38}$$

o grupo $L(1,3)$ vai ser o grupo de estabilidade do grupo de Poincaré e responsável pela definição de spin e correntes de spin. Como o *littlegroup* $L(1,3)$ é também um subgrupo do grupo de difeomorfismos podemos definir o spin e a corrente de spin da mesma maneira que definimos no espaço de Minkowski. Como já vimos, o gerador de $L(1,3)$ é dado por

(2.21) e como o spin difere de campo pra campo, precisamos especificar $J_{\mu\nu}$ para cada campo. Assim, para os férmions,

$$J_{\mu\nu} = e^a_\mu e^b_\nu \sigma_{ab}/2, \tag{4.39}$$

de modo que o pseudo-vetor de Pauli-Lubanski agora é dado por

$$W^\mu_F = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} e^a_\nu e^b_\alpha \sigma_{ab} P_\beta \ , \tag{4.40}$$

onde o índice F indica o setor fermiônico. Para os campos vetoriais podemos usar a relação $(J_{\mu\nu})_{\alpha\beta} = (\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} - \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha})/2$ e o pseudo-tensor de Pauli-Lubanski é (2.30). As transformações infinitesimais para o *little group* $L(1,3)$ são dadas por

$$\begin{aligned}
\delta_l \omega^{ab}_\mu &= -\frac{i}{2}\xi_\nu \epsilon_\mu{}^{\nu\alpha\beta} P_\beta \omega^{ab}_\alpha \ , \\
\delta_l e^a_\mu &= -\frac{i}{2}\xi_\nu \epsilon_\mu{}^{\nu\alpha\beta} P_\beta h^a_\alpha \ , \\
\delta_l e^\mu_a &= -\frac{i}{2}\xi_\nu \epsilon^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\beta P_\beta H^\alpha_a \ , \\
\delta_l \psi &= \frac{1}{2}\xi_\mu \gamma^5 \sigma^{ab} e^\mu_a e^\nu_b P_\nu \psi \ , \\
\delta_l \bar{\psi} &= \frac{1}{2}\bar{\psi}\overleftarrow{P}_\nu \xi_\mu \gamma^5 \sigma^{ab} e^\mu_a e^\nu_b \ ,
\end{aligned} \tag{4.41}$$

onde foi usada a relação $\gamma^5\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}$, com $\sigma_{\mu\nu} = e^a_\mu e^b_\nu \sigma_{ab}$, ξ_μ é um parâmetro global e H^α_a é a inversa de h^a_α. Assim, usando o teorema de Noether e a fórmula para a corrente (2.12), encontramos a corrente de Noether, i.e., a corrente de Bargmann-Wigner

$$K^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{e}}{4k} e^\mu_a e^\alpha_b \epsilon_\alpha{}^{\nu\beta\gamma}\left(\partial_\beta \omega^{ab}_\gamma - \partial_\gamma \omega^{ab}_\beta\right) - \frac{\mathrm{e}}{2} e^\mu_c e^\nu_a e^\alpha_b \bar{\psi}\gamma^c\gamma^5\sigma^{ab}\partial_\alpha\psi \ . \tag{4.42}$$

O primeiro termo de (4.42) é decorrente da contribuição da conexão de spin e o segundo termo vem da contribuição do elétron. Como na ação (4.22) não temos nenhum termo da derivada da vierbein, então, não existe uma contribuição da vierbein para a corrente de Bargmann-Wigner (4.42). Isso é decorrente da ação de Einstein-Hilbert escrita no formalismo de primeira ordem.

Claramente a corrente (4.42) é conservada

$$\partial_\mu K^{\mu\nu} = 0, \tag{4.43}$$

porém não é invariante de calibre, assim não pode ser um observável do nosso sistema. Então, vamos aplicar o princípio de calibre de modo a termos uma corrente mensurável.

4.7 Restaurando a invariância de Calibre

No caso da eletrodinâmica aplicada a férmions foi imposto o acoplamento mínimo e feita a substituição $\partial \to D$ na corrente (2.27). Porém, estamos trabalhando com uma teoria não-Abeliana com um campo de fundo não nulo, assim fazemos o ansatz

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \psi &\longrightarrow D_\alpha \psi \ , \\ \partial_\beta \omega_\gamma^{ab} - \partial_\gamma \omega_\beta^{ab} &\longrightarrow R_{\beta\gamma}^{ab} \ . \end{aligned} \tag{4.44}$$

Onde a primeira equação é o acoplamento mínimo, utilizado anteriormente e em (AITCHISON; HEY, 2012). A segunda relação decorre do exemplo Abeliano da eletrodinâmica em que a relação $\partial_\beta \omega_\gamma^{ab} - \partial_\gamma \omega_\beta^{ab}$ é exatamente o tensor $R_{\beta\gamma}^{ab}$.

Fazendo as substituições (4.44) em (4.42) obtemos

$$\mathcal{K}^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{e}}{4k} e_a^\mu e_b^\alpha \epsilon_\alpha{}^{\nu\beta\gamma} R_{\beta\gamma}^{ab} - \frac{\mathrm{e}}{2} e_c^\mu e_a^\nu e_b^\alpha \bar{\psi} \gamma^c \gamma^5 \sigma^{ab} D_\alpha \psi \ , \tag{4.45}$$

que vai ser a nossa corrente de Bargmann-Wigner invariante de calibre, porém não é mais conservada. Assim, podemos dividir essa corrente em um setor fermiônico e outro bosônico, escritos, respectivamente, como

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{\mu\nu} &= \frac{\mathrm{e}}{2k} e_a^\mu \tilde{R}^{a\nu} \ , \\ \mathcal{F}^{\mu\nu} &= \frac{\mathrm{e}}{2} e_c^\mu e_a^\nu e_b^\alpha \bar{\psi} \gamma^c \gamma^5 \sigma^{ab} D_\alpha \psi \ , \end{aligned} \tag{4.46}$$

com

$$\begin{aligned} \tilde{R}^{a\mu} &= e_b^\alpha \tilde{R}_\alpha^{ab\,\mu} \\ \tilde{R}_{\mu\nu}^{ab} &= \frac{\mathrm{e}}{2} \epsilon_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{ab} \ . \end{aligned} \tag{4.47}$$

Se fixarmos o fundo, $e_a^\mu \equiv \eta_a^\mu$, a expressão para a parte fermiônica em (4.46) é equivalente à encontrada para a parte fermiônica da eletrodinâmica dada por (2.29). Já para a parte bosônica, como a ação de Einstein-Hilbert difere da ação de Yang-Mills, a equação da parte bosônica com o fundo fixado é diferente da encontrada em (2.33). Agora vamos encontrar as equações de continuidade quebradas separadamente para cada setor.

Primeiramente, para o setor bosônico, aplicando a 4-divergência na primeira equação de (4.46), obtemos

$$\partial_\mu \mathcal{B}_\nu^\mu = \frac{1}{4} j_{ab}^\alpha \tilde{R}_{\alpha\nu}^{ab} + \frac{\mathrm{e}}{4k} \left(e_a^\mu e_b^\alpha - e_a^\alpha e_b^\mu \right) D_\mu \tilde{R}_{\alpha\nu}^{ab} \ , \tag{4.48}$$

onde foi usada a relação (4.26). Para a parte fermiônica, primeiramente utilizamos novamente a equação de campo (4.48) para reescrever a segunda equação de (4.46) como

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = -\frac{m}{2} \mathrm{e} e_a^\mu e_b^\nu \bar{\psi} \gamma^a \gamma^5 \gamma^b \psi + \frac{i}{2} \mathrm{e} \bar{\psi} e_c^\mu \gamma^c \gamma^5 D^\nu \psi \ , \tag{4.49}$$

assim aplicando a 4-divergência, temos

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{i}{8} R_{ab}^{\mu\nu} S_\mu^{ab} + \frac{m}{2} \mathrm{e} e_a^\mu D_\mu e_b^\nu \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^a \gamma^b \psi + \frac{i}{2} \mathrm{e} D^\nu e_a^\mu \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^a D_\mu \psi \ . \tag{4.50}$$

Aplicando (4.30) e a identidade

$$D_\mu \mathrm{e} = -\mathrm{e} e^b_\nu D_\mu e^\nu_b \ , \tag{4.51}$$

obtemos

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{i}{8} R^{\mu\nu}_{ab} S^{ab}_\mu - \frac{i}{4} \Theta^{ab}_5 T^\nu_{ab} + X^\nu \ , \tag{4.52}$$

com

$$\begin{aligned} T^\mu_{ab} &= e^\nu_a D_\nu e^\mu_b - e^\nu_b D_\nu e^\mu_a \ , \\ \Theta^{ab}_5 &= m\mathrm{e}\bar{\psi}\gamma^5\sigma^{ab}\psi \ , \\ X^\nu &= \frac{i}{2} D^\nu \left(\mathrm{e} e^\mu_a\right) \bar{\psi}\gamma^5\gamma^a D_\mu \psi. \end{aligned} \tag{4.53}$$

O pseudo-tensor bilinear antissimétrico Θ^{ab}_5 aparece na equação quiral (4.36). Além disso a quantidade T^μ_{ab} está relacionada com a 2-forma da torção, dada por

$$T^\mu_{ab} = -e^\alpha_a e^\beta_b e^\mu_c T^c_{\alpha\beta} \ . \tag{4.54}$$

É interessante notar que na derivação da equação (4.52) é válida para campos gravitacionais externos, ou seja, o caso de correntes de spin livres imersas em um fundo gravitacional. Isso ocorre devido ao fato de que foram usadas somente as equações dos campos espinoriais como (4.27), (4.28) e (4.29). Além disso, a interação entre elétrons devido ao campo eletromagnético não foi considerada. Assim, a equação (4.52) é válida para o caso de um sistema com um elétron ou sistemas fracamente interagentes. Na próxima seção vamos estudar como as equações de continuidade se comportam na aproximação de campo fraco.

4.8 Aproximação de campo fraco

O limite de campo fraco produz equações de campo lineares, já que escrevemos o tensor métrico como a soma da métrica de Minkowski e um termo de correção infinitesimal. Então, assumindo que conseguimos encontrar um sistema de coordenadas que é localmente Minkowskiano, exigido pelo Princípio de Equivalência, a vierbein linearizada e a sua inversa são escritas como

$$\begin{aligned} e^a_\mu &\approx \eta^a_\mu + h^a_\mu \ , \\ e^\mu_a &\approx \eta^\mu_a - h^\mu_a \ , \end{aligned} \tag{4.55}$$

em que $\{\eta^a_\mu, \eta^\mu_a\}$ é a vierbein de Minkowski definindo o fundo Minkowskiano e $\{h^a_\mu, h^\mu_a\}$ são as flutuações gravitacionais pequenas do espaço-tempo plano. O determinante da vierbein também é simplificado para $\mathrm{e} \approx 1 + \mathrm{h}$ com $\mathrm{h} = \eta^\mu_a h^a_\mu$. A conexão de spin também é perturbada próxima ao espaço tempo de Minkowski, de maneira que vai ser escrita como uma parte independente da métrica mais uma pequena flutuação. Assim,

$$\omega = \underline{\omega}(\eta + h) + \bar{\omega} \approx \left.\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial h^a_\mu}\right|_{h=0} h^a_\mu + \bar{\omega} = z^\mu_a h^a_\mu + \bar{\omega} \ , \tag{4.56}$$

onde $\bar{\omega}$ é a parte independente da métrica e é considerada uma pequena flutuação, além de $\underline{\omega}(\eta) = 0$. De (4.7), podemos linearizar a conexão afim de modo a obter

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \approx \eta^\mu_a \left(\partial_\alpha h^a_\beta + z^{a\sigma}_{\alpha bc} h^c_\sigma \eta^b_\beta\right) + \eta^\mu_a \bar{\omega}^a_{\alpha b} \eta^b_\beta \ , \tag{4.57}$$

com $z^{a\sigma}_{\alpha bc} = \left.\frac{\partial \underline{\omega}^a_{\alpha b}}{\partial h^c_\sigma}\right|_{h=0}$ sendo uma constante tensorial. Assim, conseguimos escrever o tensor de curvatura e o seu dual linearizado

$$\begin{aligned} R^{ab}_{\mu\nu}(\omega) &\approx \partial_\mu \bar{\omega}^{ab}_\nu - \partial_\nu \bar{\omega}^{ab}_\mu + z^{ab\sigma}_{\nu c} \partial_\mu h^c_\sigma - z^{ab\sigma}_{\mu c} \partial_\nu h^c_\sigma \ , \\ \tilde{R}^{ab}_{\mu\nu}(\omega) &\approx \epsilon_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \bar{\omega}^{ab}_\beta + \epsilon_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} z^{ab\sigma}_{\beta c} \partial_\alpha h^c_\sigma \ . \end{aligned} \tag{4.58}$$

E o tensor de Ricci dual linearizado fica

$$\tilde{R}^a_\nu \approx \eta^\mu_b \epsilon_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \bar{\omega}^{ab}_\beta + \eta^\mu_b \epsilon_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} z^{ab\sigma}_{\beta c} \partial_\alpha h^c_\sigma \ . \tag{4.59}$$

Como queremos escrever as equações de continuidade para os setores fermiônicos e bosônicos linearizadas e já linearizamos as grandezas físicas que compõem essas equações de continuidade, começando pelo a corrente invariante de calibre de Bargmann-Wigner do setor bosônico (4.46), temos

$$\mathcal{B}^{\mu\nu} \approx \frac{1}{2k} \eta^\mu_a \eta^\gamma_b \left[\epsilon_\gamma{}^{\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \bar{\omega}^{ab}_\beta + \epsilon_\gamma{}^{\nu\alpha\beta} z^{ab\sigma}_{\beta c} \partial_\alpha h^c_\sigma\right] \ , \tag{4.60}$$

como na equação de continuidade (4.48) temos a corrente invariante de calibre (4.32), linearizando-a temos

$$j^\mu_{ab} \approx G^\mu_{ab} + \mathrm{h} G^\mu_{ab} - h^\mu_c G^c_{ab} \ , \tag{4.61}$$

com $G^c_{ab} = \bar{\psi}\gamma^c \sigma_{ab} \psi$ e $G^\mu_{ab} = \eta^\mu_c G^c_{ab}$. Agora considerando apenas termos lineares a equação (4.48) fica

$$\begin{aligned} \partial_\mu \mathcal{B}^\mu_\nu &= \frac{1}{4} \epsilon_{\alpha\nu}{}^{\beta\gamma} G^\alpha_{ab} \partial_\beta \bar{\omega}^{ab}_\gamma + \frac{1}{2k} \epsilon_{\alpha\nu}{}^{\beta\gamma} \eta^\mu_a \eta^\alpha_b \partial_\mu \partial_\beta \bar{\omega}^{ab}_\gamma + \\ &+ \frac{1}{4} G^\alpha_{ab} \epsilon_{\alpha\nu}{}^{\sigma\beta} z^{ab\gamma}_{\beta c} \partial_\sigma h^c_\gamma + \frac{1}{2k} \eta^\mu_a \eta^\alpha_b \epsilon_{\alpha\nu}{}^{\sigma\beta} z^{ab\gamma}_{\beta c} \partial_\mu \partial_\sigma h^c_\gamma \ . \end{aligned} \tag{4.62}$$

Para a parte fermiônica, linearizando a segunda equação de (4.46), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\mu\nu} &\approx \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \sigma^{\nu\alpha} \left(\bar{D}_\alpha - \frac{i}{4} \sigma_{mn} z^{mn\sigma}_{\alpha p} h^p_\sigma\right) \psi - \frac{1}{2} \left(\eta^\nu_a h^\alpha_b + \eta^\alpha_b h^\nu_a\right) \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \sigma^{ab} \partial_\alpha \psi + \\ &- \frac{1}{2} h^\mu_c \bar{\psi} \gamma^c \gamma^5 \sigma^{\nu\alpha} \partial_\alpha \psi + \frac{1}{2} \mathrm{h} \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \sigma^{\nu\alpha} \partial_\alpha \psi \ , \end{aligned} \tag{4.63}$$

com $\gamma^{\mu} = \eta^{\mu}_{a}\gamma^{a}$. E como a equação de continuidade fermiônica (4.52) está em função de T^{μ}_{ab}, Θ^{ab}_{5}, X^{ν} e S^{ab}_{μ}, podemos linearizar esses termos separadamente para facilitar. Assim, começando pela torção projetada T^{μ}_{ab}

$$
\begin{aligned}
T^{\mu}_{ab} &\approx -\eta^{\nu}_{a}\partial_{\nu}h^{\mu}_{b} + \eta^{\nu}_{b}\partial_{\nu}h^{\mu}_{a} - \eta^{\nu}_{a}\eta^{\mu}_{c}\bar{\omega}_{b}{}^{c}{}_{\nu} + \\
&+ \eta^{\nu}_{b}\eta^{\mu}_{c}\bar{\omega}_{a}{}^{c}{}_{\nu} - \eta^{\nu}_{a}\eta^{\mu}_{c}z_{b\nu d}^{c\sigma}h^{d}_{\sigma} + \eta^{\nu}_{b}\eta^{\mu}_{c}z_{a\nu d}^{c\sigma}h^{d}_{\sigma} \; .
\end{aligned}
\tag{4.64}
$$

E as fontes Θ^{ab}_{5}, X^{ν} e S^{ab}_{μ}

$$
\begin{aligned}
S^{ab}_{\mu} &\approx (1+\mathrm{h})\,\bar{S}^{ab}_{\mu} + h^{c}_{\mu}\bar{\psi}\gamma_{c}\gamma^{5}\sigma^{ab}\psi \; , \\
\Theta^{ab}_{5} &\approx m\,(1+\mathrm{h})\,\bar{\Theta}^{ab}_{5} \; , \\
X^{\nu} &\approx \frac{i}{2}\left[\partial^{\nu}\left(-h^{\mu}_{a} + \mathrm{h}\eta^{\mu}_{a}\right) + \bar{\omega}_{a}{}^{b\nu}\eta^{\mu}_{b} + z_{a}{}^{b\nu\sigma}{}_{d}h^{d}_{\sigma}\eta^{\mu}_{b}\right] X^{a5}_{\mu} \; .
\end{aligned}
\tag{4.65}
$$

com

$$
\begin{aligned}
\bar{S}^{ab}_{\mu} &= \bar{\psi}\gamma_{\mu}\gamma^{5}\sigma^{ab}\psi \; , \\
\bar{\Theta}^{ab}_{5} &= \bar{\psi}\gamma^{5}\sigma^{ab}\psi \; , \\
X^{a5}_{\mu} &= \bar{\psi}\gamma^{5}\gamma^{a}\partial_{\mu}\psi \; ,
\end{aligned}
\tag{4.66}
$$

sendo independente dos campos gravitacionais. Assim, a equação de continuidade quebrada (4.52) assume a forma

$$
\begin{aligned}
\partial_{\mu}\mathcal{F}^{\mu\nu} &= \frac{i}{8}\left(\partial^{\mu}\bar{\omega}^{\nu}_{ab} - \partial^{\nu}\bar{\omega}^{\mu}_{ab} + z^{\sigma\nu}_{abc}\partial^{\mu}h^{c}_{\sigma} - z^{\sigma\mu}_{abc}\partial^{\nu}h^{c}_{\sigma}\right)\bar{S}^{ab}_{\mu} + \frac{im}{4}\left[\eta^{\mu}_{a}\partial_{\mu}h^{\nu}_{b} + \right. \\
&- \eta^{\mu}_{b}\partial_{\mu}h^{\nu}_{a} + \frac{i}{4}\left.\left(\eta^{\nu}_{a}\eta^{\mu}_{c}\bar{\omega}_{b}{}^{c}{}_{\nu} - \eta^{\nu}_{b}\eta^{\mu}_{c}\bar{\omega}_{a}{}^{c}{}_{\nu} + \eta^{\nu}_{a}\eta^{\mu}_{c}z_{b\nu d}^{c\sigma}h^{d}_{\sigma} - \eta^{\nu}_{b}\eta^{\mu}_{c}z_{a\nu d}^{c\sigma}h^{d}_{\sigma}\right)\right]\bar{\Theta}^{ab}_{5} + \\
&+ \frac{i}{2}\left[\partial^{\nu}\left(-h^{\mu}_{a} + \mathrm{h}\eta^{\mu}_{a}\right) + \bar{\omega}_{a}{}^{b\nu}\eta^{\mu}_{b} + z_{a}{}^{b\nu\sigma}{}_{d}h^{d}_{\sigma}\eta^{\mu}_{b}\right] X^{a5}_{\mu} \; .
\end{aligned}
\tag{4.67}
$$

Como a equação (4.67) é uma aproximação linear da equação (4.52), então só foram usados as equações de campo dos espinores de modo que também é válida para campos gravitacionais externos. Assim, podemos determinar os valores de $\bar{\omega}$ e h e estudar os efeitos das correntes de spin em diversos cenários. Por exemplo, fazendo $\bar{\omega} = 0$ temos um fundo Riemanniano e os efeitos nas correntes de spin podem ser devido a ondas gravitacionais ou um potencial Newtoniano.

5 Conclusão

Partindo de uma teoria de calibre abeliana para eletrodinâmica, impondo a invariância de calibre da ação de Maxwell-Dirac pelas transformações do grupo $U(1)$, foram obtidas as correntes de spin associadas as simetrias do nosso sistema, com acoplamento mínimo entre os férmions de Dirac e o eletromagnetismo. As correntes encontradas foram divididas em setor fermiônico e bosônico. Para o setor de férmions a corrente encontrada a partir do teorema de Noether,o tensor de Bargmann-Wigner (2.29), era conservada, porém não invariante de calibre. Assim, aplicando o princípio de calibre e o tornando invariante de calibre foi mostrado que podemos considerar as correntes de spin como objetos observáveis da nossa teoria. A opção por objetos invariantes de calibre, mesmo que perdendo a sua conservação mostra a importância das teorias de calibre para a spintrônica.

Para o setor bosônico, a corrente de Bargmann-Wigner (2.33) se mostrou invariante de calibre e não conservada, quebrando a equação de continuidade como pode ser visto em (2.61). Da quebra em componentes de espaço e tempo da equação (2.61), foi possível perceber que caso os campos elétricos e magnéticos não sejam perpendiculares, existe um fluxo de spin fotônico T que varia ao longo do tempo. Caso o gradiente dessa função escalar T não seja zero, é sugerida a existência de um monopólo magnético efetivo nesse caso em que o campo elétrico e magnético não são mutuamente ortogonais.

As equações de continuidade quebradas para o caso não-Abeliano (3.47) e (3.52) são equivalentes ao caso Abeliano no vácuo, ou seja, se fizermos $C^{abc} = 0$ e $g \to e$ obtemos novamente (2.29) e (2.61). Diferentemente do caso Abeliano, no não-Abeliano a corrente do setor bosônico não é imediatamente invariante de calibre, já que nesse caso o tensor eletromagnético (3.8) não é um observável da teoria.

No capítulo 4 acoplamos os férmions de Dirac à gravidade por meio da ação de Einstein-Hilbert-Dirac no formalismo de primeira ordem. Utilizando a mesma ideia para o caso da eletrodinâmica, discutida nos capítulos anteriores, encontramos a corrente de Bargmann-Wigner (4.42) associada a simetria do nosso sistema. Essa corrente, apesar de conservada, não era invariante de calibre, assim não podendo ser um observável do nosso sistema. Então, aplicando o princípio de calibre obtivemos uma nova corrente de spin (4.45) invariante de calibre, mas perdemos a sua conservação, onde a curvatura teve uma influência explicita na não-conservação das correntes de spin. Como já não é mais conservada, podemos dividir a corrente de spin (4.45) em um setor fermiônico e outro bosônico (4.46). Assim, para cada setor encontramos as equações mestras que governam as correntes de spin acopladas a gravidade, a equação (4.48) associada ao setor bosônico e (4.52) ao setor fermiônico.

Para o setor fermiônico é importante notar que a equação (4.52) é válida para férmions fracamente interagentes, já que a interação entre elétrons devido ao campo eletromagnético não foi considerado, como dito anteriormente, a sua não-conservação esteve diretamente ligada com a curvatura, mais especificamente, do acoplamento dado pela corrente quiral com a curvatura, o primeiro termo de (4.52). Esse acoplamento é similar ao caso eletromagnético (SOBREIRO; OTOYA, 2011).

Para o setor bosônico, como a derivada da vierbein não aparece na ação de Einstein-Dirac, então não interfere na equação da corrente de spin para esse setor, de modo que a conexão de spin é a única grandeza que contribui explicitamente para o corrente de spin bosônica. Ainda em relação ao fato da derivada da vierbein não aparecer na ação, temos que a inclusão de um termo com a constante cosmológica $\sim \Lambda e$ não vai interferir na corrente de Bargmann-Wigener encontrada, já que o termo cosmológico só afeta as equações de campo da vierbein. A não presença de derivadas da vierbein na ação é uma particularidade da ação de Eintein-Hilbert escrita no formalismo de primeira ordem. Além disso, a corrente de calibre se acopla com a curvatura, de modo a não permitir que a equação da corrente de spin do setor bosônico seja conservada e diferentemente do setor fermiônico, no bosônico, apenas a curvatura tem uma função explícita na não-conservação, já que, no fermiônico além do acoplamento com a primeira corrente quiral, a torção se acopla com a corrente Θ definida em (4.53), que a menos de um fator, aparece na segunda equação de não conservação quiral (4.36).

Finalmente, nossos resultados dados por (4.48) e (4.52) (e as suas versões lineares (4.62) e (4.67)) representam as equações mestras que governam as correntes de spin acopladas a gravidade, assim representam uma forma de obter novos fenômenos físicos associados à correntes de spin influenciadas por campos gravitacionais. Novas pesquisas podem ser feitas, por exemplo, usando a versão linear da equação de continuidade quebrada fermiônica (4.67) e estudar o efeito sobre correntes de spin de ondas gravitacionais ou devido a um potencial Newtoniano. Além de aplicações interessadas em buracos negros.

Referências

AITCHISON, I. J.; HEY, A. J. *Gauge theories in particle physics: A practical introduction, Volume 2: Non-Abelian Gauge theories: QCD and the electroweak theory*. [S.l.]: CRC Press, 2012. v. 2. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 53.

AN, Z. et al. The universal definition of spin current. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 2, n. 1, p. 1–6, 2012. Citado na página 17.

BAIBICH, M. N. et al. Giant magnetoresistance of (001) fe/(001) cr magnetic superlattices. *Physical review letters*, APS, v. 61, n. 21, p. 2472, 1988. Citado na página 17.

BERTLMANN, R. A. *Anomalies in quantum field theory*. [S.l.]: Oxford university press, 2000. v. 91. Citado na página 45.

BINASCH, G. et al. Enhanced magnetoresistance in layered magnetic structures with antiferromagnetic interlayer exchange. *Physical review B*, APS, v. 39, n. 7, p. 4828, 1989. Citado na página 17.

DARTORA, C.; CABRERA, G. Magnetization, spin current, and spin-transfer torque from s u (2) local gauge invariance of the nonrelativistic pauli-schrödinger theory. *Physical Review B*, APS, v. 78, n. 1, p. 012403, 2008. Citado na página 17.

DARTORA, C.; CABRERA, G. Generation of electric field by spin-currents in the u (1)× su (2) gauge invariant pauli–schrödinger non-relativistic theory. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 374, n. 25, p. 2596–2599, 2010. Citado na página 17.

EINSTEIN, A. On the influence of gravitation on the propagation of light. *Annalen der Physik*, v. 35, n. 898-908, p. 906, 1911. Citado na página 18.

FOCK, V.; IVANENKO, D. On a possible geometric interpretation of relativistic quantum theory. *Zeitschrift für Physik*, v. 54, p. 798, 1929. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 49.

GRIFFITHS, D. J. *Introduction to electrodynamics*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 2005. Citado na página 24.

ITZYKSON, C.; ZUBER, J.-B. *Quantum field theory*. [S.l.]: Courier Corporation, 2012. Citado 6 vezes nas páginas 24, 25, 28, 33, 40 e 49.

LESSA, L. A. Notes on gauge theories. 2019. Citado na página 21.

MAXWELL, J. C. Viii. a dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, The Royal Society London, n. 155, p. 459–512, 1865. Citado na página 21.

NAKAHARA, M. *Geometry, topology and physics*. [S.l.]: CRC press, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 47.

RYDER, L. H. *Quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge university press, 1996. Citado na página 37.

SCHÜTZ, F.; KOPIETZ, P.; KOLLAR, M. What are spin currents in heisenberg magnets? *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, Springer, v. 41, n. 4, p. 557–560, 2004. Citado na página 17.

SHI, J. et al. Proper definition of spin current in spin-orbit coupled systems. *Physical review letters*, APS, v. 96, n. 7, p. 076604, 2006. Citado na página 17.

SOBREIRO, R. F.; OTOYA, V. V. The role of gauge symmetry in spintronics. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 326, n. 12, p. 3067–3074, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 17, 18, 19 e 58.

STILES, M. *J. Miltat in Spin Dynamics in Confined Magnetic Structures, III, edited by B. Hillebrands and A. Thiaville*. [S.l.]: Springer, Berlin, 2006. Citado na página 17.

VERNES, A.; GYÖRFFY, B.; WEINBERGER, P. Spin currents, spin-transfer torque, and spin-hall effects in relativistic quantum mechanics. *Physical Review B*, APS, v. 76, n. 1, p. 012408, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 17, 31 e 33.

WANG, Y. et al. Consistency in Formulation of Spin Current and Torque Associated with a Variance of Angular Momentum. *Phys. Rev. Lett.*, v. 96, p. 066601, 2006. Citado na página 17.

WIGNER, E. Z. physik 124 (1947) 665; v. bargmann and ep wigner. *Proc. Nat. Acad. Sci*, v. 34, p. 211, 1948. Citado na página 17.

YANG, C.-N.; MILLS, R. L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Physical review*, APS, v. 96, n. 1, p. 191, 1954. Citado na página 37.

ZANELLI, J. Lecture notes on chern-simons (super-) gravities. (february 2008). *arXiv preprint hep-th/0502193*, 2005. Citado 4 vezes nas páginas 18, 45, 46 e 49.

ZHOU, X.; ZHANG, Z.; HU, C.-Z. Spin continuity equation and definition of spin current. *arXiv preprint arXiv:0904.3796*, 2009. Citado na página 17.