

Universidade Federal Fluminense



**Proposta de preparação e caracterização de estados  
X utilizando modos spin-órbita de um feixe laser**

**Vinicius de Souza Lamego**

Volta Redonda  
2020



Vinicius de Souza Lamego

**Proposta de preparação e caracterização de estados X  
utilizando modos spin-órbita de um feixe laser**

Dissertação de Mestrado apresentada ao programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Mestre em Física.

Universidade Federal Fluminense – UFF

Instituto de Física

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Prof. Dr. José Augusto Oliveira Huguenin

Coorientador: Prof. Dr. Wagner Franklin Balthazar

Volta Redonda – RJ

2020

Ficha catalográfica automática - SDC/BIF  
Gerada com informações fornecidas pelo autor

L228p   Lamego, Vinicius De Souza  
Proposta de preparação e caracterização de estados X  
utilizando modos spin-órbita de um feixe laser / Vinicius De  
Souza Lamego ; José Augusto Oliveira Huguenin, orientador ;  
Wagner Franklin Balthazar, coorientador. Niterói, 2020.  
88 f. : il.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,  
Niterói, 2020.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22409/PPGF.2020.m.15542362745>

1. Computação e informação quântica. 2. Estados X. 3.  
Tomografia de estados quânticos. 4. Modos spin-órbita de um  
feixe laser. 5. Produção intelectual. I. Huguenin, José  
Augusto Oliveira, orientador. II. Balthazar, Wagner Franklin,  
coorientador. III. Universidade Federal Fluminense. Instituto  
de Física. IV. Título.

CDD -

Vinicius de Souza Lamego

## **Proposta de preparação e caracterização de estados X utilizando modos spin-órbita de um feixe laser**

Dissertação de Mestrado apresentada ao programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Mestre em Física.

Trabalho aprovado. Volta Redonda – RJ, 18 de dezembro de 2020:

---

**Prof. Dr. José Augusto Oliveira  
Huguenin**  
Orientador

---

Membro Externo

---

Membro Interno

Volta Redonda – RJ  
2020









# Agradecimentos

Este trabalho é fruto de um esforço coletivo do qual tive a honra de participar. Desde o primeiro dia de trabalho no programa de pós graduação estive cercado por um clima de cooperação construído por camaradas alunos e professores. Desta forma, aproveito esta oportunidade para declarar a minha gratidão ao meu orientador Prof. Dr. José Augusto Oliveira Huguenin e ao meu coorientador Prof. Dr. Wagner Franklin Balthazar pela confiança, paciência e dedicação. Agradeço aos professores José Augusto Oliveira Huguenin, Rogério Menezes de Almeida, Alexandre Grezzi De Miranda Schmidt e Rodrigo Garcia Amorim pela dedicação e compromisso ao lecionar disciplinas ao longo desta etapa. Registro também a gratidão a todos meus colegas, em especial, aos companheiros de pesquisa Daniel, Marcelo, Laiz Ventura, Vitória, Leandro, Raiane e João Marcelo. Todos vocês fazem parte desta conquista, muito obrigado! Minha eterna gratidão à toda minha família por acreditar que este sonho seria possível e compreender a minha ausência em diversos momentos. Sobretudo agradeço à minha mãe, Sueli, que com amor me apoiou durante toda minha vida e ao meu pai, Luiz, por seu carinho e amizade. Agradeço à minha irmã Nathália que, mesmo mais nova e morando longe, me ensinou valores importantes. Declaro gratidão à minha irmã Talita e ao meu querido sobrinho Yuri que com carinho e amor sempre compreenderam minha ausência devido aos estudos. Registro minha imensa gratidão à minha noiva, meu amor e futura esposa, Melissa Felix de Abreu que, com amor, companherismo e cumplicidade, me ajudou nesta conquista. Esta vitória é nossa, meu amor! Dedico este trabalho a todos vocês, muito obrigado!



*Quantum theory provides us with a striking illustration of the fact that we can fully understand a connection though we can only speak of it in images and parables.*  
(Werner Heisenberg)



# Resumo

A utilização de graus de liberdade de feixes clássicos para codificação de q-bits está cada vez mais sendo explorada na literatura científica. Nessa abordagem a utilização dos modos spin órbita apresenta possibilidades interessantes para simulação de sistemas quânticos: podemos construir os modos ditos não separáveis que, por não ser possível escrevê-los como um produto entre a estrutura transversa e o vetor de polarização, são análogos clássicos para estados quânticos maximamente emaranhados. Esta analogia abre caminho para o estudo de estados de sistemas bipartidos de interesse como, por exemplo, os que exibem correlações de medidas. Dentre os estados correlacionados destacam-se os estados X, conhecidos por abranger uma diversidade de estados para sistemas bipartidos. Neste conjunto encontram-se, por exemplo, estados maximamente emaranhados, parcialmente emaranhados e não emaranhados. Pensando em sua importância, o presente trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta de circuito óptico para simular a preparação e caracterização de estados X utilizando modos spin órbita. Além disso, para ilustrar as potencialidades desta proposta, são apresentados resultados de simulações computacionais para preparação e caracterização de estados de Werner a partir do circuito óptico apresentado. Os resultados indicam um bom acordo com as expectativas teóricas.

**Palavras-chaves:** computação e informação quântica. estados X. tomografia de estados quânticos. modos spin-órbita de um feixe laser.



# Abstract

The use of degrees of freedom of classical beams for qubit coding is increasingly being explored in the scientific literature. In this approach, the use of spin orbit modes presents interesting possibilities for the simulation of quantum systems: we can build the so-called non-separable modes that, because they cannot be factored as a product between the transverse structure and the polarization vector, are classical analogues of maximum entangled quantum states. This analogy opens the way for the study of quantum states of interest such as correlated states. Among the correlated states, the X states stand out, known for covering a diversity of states for bipartite systems. This set includes, for example, states that are highly entangled, partially entangled and not entangled. Thinking about its importance, the present work aims to present an optical circuit proposal to simulate the preparation and characterization of X states using spin orbit modes. In addition, to illustrate the potential of this proposal, results of computer simulations are presented for the preparation and characterization of Werner states from the presented optical circuit. The results indicate a good agreement with theoretical expectations.

**Key-words:** quantum computation and quantum information. x states. quantum states tomography. spin-orbit laser beam modes.





# Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação de uma placa de onda de espessura $d$ com eixo lento (rápido) coincidindo com eixo $y$ ( $x$ ). O campo elétrico da onda incidente pode sofrer alteração dependendo da fase relativa introduzida pela placa. Fonte: (30) . . . . .	30
Figura 2 – Esfera de Poincaré. Estados de polarização linear estão no equador enquanto os de polarização circular estão nos polos. Entre os polos e o equador estão os estados de polarização elíptica. Fonte: (30) . . . . .	32
Figura 3 – Exemplo para ilustração: A luz incidente tem polarização diagonal é convertida em luz circularmente polarizada devido a atuação das placas de onda. Fonte: (30) . . . . .	32
Figura 4 – Representação dos dispositivos: (a) PBS e (b) BS. Fonte: (34) . . . . .	34
Figura 5 – Perfil de intensidade para os modos Hermite-Gauss. O modo fundamental possui uma distribuição de intensidade gaussiana na direção radial. Os modos hermite $HG_{10}$ e $HG_{01}$ constituem um sistema de dois níveis sendo, portanto, úteis na codificação de q-bits. Fonte: (30) . . . . .	37
Figura 6 – Perfil de intensidade dos modos Laguerre-Gauss. Observa-se que devido a singularidade na quantidade $\phi$ para modos com carga topológica $l \neq 0$ não temos intensidade no centro. Fonte: (30) . . . . .	38
Figura 7 – Na imagem (a) vemos um feixe com frente de onda plana e vetor de onda na direção de propagação do feixe. Na imagem (b) temos um feixe Laguerre-Gauss com frente de onda helicoidal que, por possuir momento angular orbital não nulo, tem o vetor de onda espiralando em torno da direção de propagação. Fonte: (30). . . . .	39
Figura 8 – Análogo da esfera de Poincaré para representação geométrica de modos transversos. Os modos hermite de primeira ordem se encontram no equador da esfera enquanto os modos laguerre de primeira ordem estão nos polos. Entre o equador e os polos estão os modos elípticos. Fonte: (34)	39
Figura 9 – Esfera de Bloch é uma representação gráfica de q-bits em estados puros ( $ \beta  = 1$ ). Fonte:(1). . . . .	46
Figura 10 – Perfil transverso dos modos não separáveis. Fonte: (20) . . . . .	53
Figura 11 – Circuito para preparação de modos spin órbita. A máscara holográfia produz os modos hermite a partir do feixe laser inicialmente com modo Gaussiano e polarização vertical. O feixe é dividido entre os braços do interferômetro Mach-Zender sendo feitas operações no modo, na atuação do prisma de Dove, e polarização, com a atuação da HWP. O resultado é a produção dos modos não separáveis na saída. Fonte: Adaptado de (42)	54

Figura 12 – Circuito óptico empregado para verificar a violação da desigualdade tipo Bell por modos Spin-órbita não separáveis. Fonte: (21) . . . . .	59
Figura 13 – Esquema experimental para implementação do análogo clássico da tomografia de estados quânticos para q-bits codificados na polarização de um feixe laser. . . . .	68
Figura 14 – Esquema experimental para implementação do análogo clássico da tomografia de estados quânticos para o q-bits codificados nos modos transversos de um feixe laser. . . . .	70
Figura 15 – Esquema experimental para implementação do análogo clássico da tomografia de estados quânticos de dois q-bits codificados na polarização e nos modos transversos de um feixe laser. As setas ao lado dos dispositivos CL, DP, QWP e HWP indicam que estes são inseridos e retirados do circuito conforme a base de medida escolhida. . . . .	73
Figura 16 – Esquema experimental para preparação do caso geral de estados tipo X. Nesse caso os q-bits são codificados na polarização e nos modo transversos de um feixe laser. . . . .	78
Figura 17 – Intensidades de saída obtidos na simulação da tomografia de estados de Werner codificados em modos spin-órbita a partir do circuito da Figura 11. . . . .	80

# Lista de tabelas

Tabela 1	– Síntese dos parâmetros de Stokes e as respectivas bases de medida. Cada base é definida a partir dos estados produto conforme mencionado anteriormente na seção 2.4. Nesse caso $\{ 0\rangle,  1\rangle\}$ é a base computacional, enquanto $\{ R\rangle,  L\rangle\}$ e $\{ +\rangle,  -\rangle\}$ são as bases descritas pelas equações (2.22-2.25). . . . .	66
Tabela 2	– Relação entre os dispositivos ópticos, bases de medidas e parâmetros de Stokes a serem determinados para tomografia de um sistema com 2 q-bits. . . . .	68
Tabela 3	– Resumo de todas as informações relevantes para realização da tomografia de q-bits codificados na polarização. . . . .	71
Tabela 4	– Síntese dos parâmetros de Stokes e as respectivas bases de medida. Cada base é definida a partir dos estados produto conforme mencionado anteriormente na seção 2.4. Nesse caso $\{ 0\rangle,  1\rangle\}$ é a base computacional, enquanto $\{ R\rangle,  L\rangle\}$ e $\{ +\rangle,  -\rangle\}$ são as bases descritas pelas equações (2.22-2.25). . . . .	72
Tabela 5	– Relação entre os parâmetros de Stokes a serem determinados, as bases de medida e os dispositivos ópticos necessários para a escolha da base. Cada base é definida a partir dos estados produto conforme mencionado anteriormente na seção 2.4. Nesse caso $\{ H\rangle,  V\rangle\}$ é a base computacional, enquanto $\{ R\rangle,  L\rangle\}$ e $\{ +\rangle,  -\rangle\}$ são as bases descritas pelas equações (2.22-2.25). O primeiro q-bit está codificado na polarização enquanto o segundo está codificado no modo transversal. Para facilitar a leitura o q-bit codificado na polarização (modo transversal) está representado com letra maiúscula (minúscula). . . . .	74



# Lista de abreviaturas e siglas

MQ	Mecânica Quântica.
BS	Divisor de feixe, do inglês <i>Beam Splitter</i>
PBS	Divisor de feixe polarizado, do inglês <i>Polarization Beam Splitter</i> .
MZIM	Interferômetro de Mach-Zehnder com uma reflexão espelho adicional
CL	Lentes cilíndricas, do inglês <i>Cylindrical lenses</i>
DP	Prisma de Dove, do inglês <i>Dove prism</i> .
QWP	Placa de quarto de onda, do inglês <i>Quarter Wave Plate</i> .
SWP	Placa de onda S, do inglês <i>S Wave Plate</i> .



# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>23</b>
<b>1</b>	<b>GRAUS DE LIBERDADE DA LUZ</b> . . . . .	<b>27</b>
1.1	Polarização . . . . .	28
1.2	Caminho . . . . .	33
1.3	Modos Transversos . . . . .	34
<b>2</b>	<b>CODIFICAÇÃO DE Q-BITS EM GRAUS DE LIBERDADE DA LUZ</b>	<b>41</b>
2.1	Q-bits . . . . .	41
2.2	Descrição de estados quânticos no formalismo do operador densidade	42
2.3	Q-bits no formalismo do operador densidade . . . . .	44
2.4	Codificação e analogia clássico-quântica . . . . .	47
<b>3</b>	<b>NÃO SEPARABILIDADES DE MODOS SPIN-ÓRBITA</b> . . . . .	<b>51</b>
3.1	Descrição geral dos modos spin-órbita . . . . .	51
3.2	Não separabilidade e emaranhamento em modos bipartidos . . . . .	53
3.2.1	Preparação estados tipo- Bell . . . . .	53
3.2.2	Desigualdade de Bell . . . . .	55
3.2.3	Violação de desigualdade tipo-Bell por modos spin-órbita não separáveis . .	57
3.2.4	Quantização dos modos spin-órbita - Emaranhamento de graus de liberdade .	60
<b>4</b>	<b>TOMOGRAFIA DE MODOS SPIN-ÓRBITA</b> . . . . .	<b>65</b>
4.1	Tomografia de um q-bit . . . . .	65
4.2	Tomografia de q-bits codificados em graus de liberdade de um feixe laser . . . . .	67
4.2.1	Tomografia de q-bits codificados na polarização de um feixe laser . . . . .	68
4.2.2	Tomografia de q-bits codificados nos modos transversos de um feixe laser .	70
4.3	Tomografia de 2 q-bits . . . . .	71
4.4	Tomografia de modos spin-órbita . . . . .	72
<b>5</b>	<b>PROPOSTA DE CIRCUITO ÓPTICO PARA GERAÇÃO DO ANÁLOGO SPIN-ÓRBITA DE ESTADOS X</b> . . . . .	<b>75</b>
5.1	Estados X . . . . .	75
5.2	Preparação de estados X a partir de modos spin-órbita . . . . .	77
5.3	Simulação de circuito óptico de preparação e caracterização de estados de Werner . . . . .	79

**Conclusão . . . . . 83**

**REFERÊNCIAS . . . . . 85**



# Introdução

A origem da teoria quântica no início do século XX representa uma das mais acentuadas mudanças de paradigma já vistas na história da ciência, impactando de forma irreversível o desenvolvimento da Física. A recente busca pelo desenvolvimento de tecnologias baseadas nos postulados da teoria quântica se consolidou com estabelecimento de uma variedade de áreas de pesquisa como informação e computação quântica (1), óptica quântica (2), metrologia quântica (3), entre outras.

Como observado por Feynman na década de 80 (4), as peculiaridades da mecânica quântica (MQ) inviabilizam a simulação eficiente de sistemas quânticos por meio de computadores clássicos. Este fato simboliza uma das primeiras evidências acerca das possíveis vantagens que sistemas de processamento de dados baseados em MQ podem apresentar em comparação aos sistemas clássicos na execução de determinadas tarefas. O interesse na computação e informação quântica cresceu com a publicação de importantes trabalhos que sugeriam (ao menos teoricamente) vantagens significativas, em comparação à contrapartida clássica, na execução de tarefas computacionais como fatoração em números primos (5), buscas em banco de dados (6) e até mesmo em tarefas triviais como a verificação se uma dada função booleana é balanceada ou constante (7).

Esta vantagem computacional é, em grande parte, devida ao espontâneo paralelismo viabilizado pela superposição quântica e às correlações presentes em sistemas emaranhados (1). Naturalmente o estudo direcionado às propriedades de sistemas quânticos correlacionados assume uma importância ímpar no desenvolvimento desta área de pesquisa. Neste sentido, existem trabalhos dedicados ao estudo de estados quânticos que apresentem correlações e, especialmente, em como tais correlações se comportam quando o sistema quântico em questão é submetido aos processos físicos encontrados em canais quânticos ruidosos (8), (9).

Dentre os estados para sistemas bipartidos de interesse destacam-se os ditos estados X. Estes estados são conhecidos por generalizar um conjunto amplo incluindo estados maximamente emaranhados (estados de Bell), parcialmente emaranhados (por exemplo, estados de Werner) e estados não emaranhados (10). Estados tipo X se destacam por serem muito úteis no estudo da evolução de correlações quando o sistema é submetido a canais ruidosos (11), (12). Desta forma, muitos trabalhos são dedicados ao estudo desta classe de estados tanto em abordagens teóricas (10), para investigação de propriedades fundamentais, bem como realizações experimentais (13), para preparação e caracterização de estados tipo X, por exemplo.

Investigações em informação e computação quântica podem ser realizadas a partir

de diferentes sistemas físicos sendo os sistemas ópticos uma das plataformas mais utilizadas para este fim. A partir da codificação de q-bits em graus de liberdade de fótons foram implementados protocolos de informação e computação quântica como, por exemplo, criptografia quântica (14), portas lógicas quânticas (15) e algoritmos quânticos (16).

Além disso, uma notável semelhança entre a estrutura matemática da óptica linear e a mecânica quântica possibilita a simulação de sistemas quânticos utilizando-se graus de liberdade de feixes clássicos (polarização, modos transversos, entre outros). A praticidade desta analogia é testemunhada pela quantidade de trabalhos encontrados na literatura científica que utilizam feixes clássicos para emular sistemas quânticos (17), (18), (19).

Neste cenário os conhecidos modos spin-órbita, descritos essencialmente pela polarização e modo transversal, assumem um papel de protagonismo na simulação de sistemas quânticos bipartidos. A partir destes modos podemos construir os ditos modos não separáveis que, por não ser possível escrevê-los como um produto entre a estrutura transversal e o versor de polarização, são análogos a estados quânticos maximamente emaranhados. Essa versatilidade permitiu a utilização de modos spin-órbita para estudar tanto os aspectos mais fundamentais de sistemas quânticos, como contextualidade quântica (20) e a violação de desigualdade tipo Bell por modos não separáveis (21)(22), quanto aplicações em informação e computação quântica, como protocolos de distribuição de chaves quânticas (23) e implementação de portas lógicas quânticas (24).

No cenário de simulação de estados quânticos com os modos spin-órbita, a geração de estados X não foi discutida na literatura até o presente momento e, pensando na completeza desta plataforma, sua obtenção tem fundamental importância neste ativo campo de pesquisa. Neste trabalho, apresentamos uma proposta de circuito óptico para preparar e caracterizar um estado X geral codificado em modos spin-órbita de um feixe laser. São apresentados também resultados obtidos da simulação computacional da preparação e caracterização de estados de Werner, casos particulares do estado X, a partir dos circuitos ópticos propostos.

A dissertação está organizada como se segue. No capítulo 1 são discutidos os graus de liberdade da luz mais comuns na codificação de q-bits: polarização, modo transversal e caminho. No capítulo 2 é discutida a codificação de q-bits no grau de liberdade da luz bem como o formalismo matemático de representação de estados de sistemas quânticos, em especial, sistemas de dois níveis (q-bits). No capítulo 3 é apresentada a descrição dos modos spin-órbita via óptica clássica enfatizando-se a possibilidade de não separabilidade dos mesmos. Ainda no capítulo 3 é discutido o paradoxo EPR, a desigualdade de Bell, bem como a violação de uma desigualdade tipo Bell (construída a partir das intensidades normalizadas) por modos spin-órbita não separáveis. O capítulo 3 termina com a quantização de modos spin-órbita e as interpretações físicas de resultados obtidos na simulação de sistemas quânticos por feixes intensos (violação da desigualdade

tipo Bell por modos não separáveis, por exemplo) na perspectiva da óptica quântica. No capítulo 4 é realizada a descrição do processo de tomografia de estados quânticos e é apresentado um circuito óptico para caracterização de q-bits codificados em modos spin-órbita. Este circuito assume papel central na proposta de caracterização de estados  $X$ , descrita no capítulo 5. No capítulo 5 é apresentado o embasamento teórico referente aos estados  $X$ , os circuitos para preparação e caracterização de um estado  $X$  geral e os resultados da simulação computacional da preparação e caracterização de estados de Werner. No capítulo de conclusão são apresentadas as considerações finais e projeções futuras.



# 1 Graus de liberdade da Luz

A teoria eletromagnética clássica desenvolvida por Maxwell ganhou notoriedade ao unificar o Eletromagnetismo e a Óptica. Tal teoria é baseada no conceito de campo eletromagnético que tem o papel de mediador na interação entre cargas elétricas (em contraste com teorias de ação a distância)(25). A dinâmica dos campos elétricos e magnéticos é descrita pelas equações de Maxwell que, na forma diferencial, no vácuo e com ausência de fontes, são dadas por (26)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.4)$$

onde as constantes  $\mu_0$  e  $\epsilon_0$  são, respectivamente, a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica do vácuo.

A evolução de um sistema físico geralmente é dada pelas equações que descrevem sua dinâmica em conjunto com as condições iniciais e as respectivas condições de contorno. O teorema de Helmholtz diz que um campo vetorial fica completamente caracterizado se seu divergente, rotacional e condições de contorno são conhecidos. Este fato garante a existência de soluções únicas para o campo eletromagnético.

Das equações 1.3 e 1.4 percebe-se imediatamente que, se  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq 0$  e  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \neq 0$ , os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  serão descritos por equações diferenciais acopladas que dão origem a uma dinâmica com dependência mútua: variações temporais de  $\mathbf{E}$  ( $\mathbf{B}$ ) resultam em variações espaciais de  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{E}$ ). Aplicando o rotacional nas equações 1.3 e 1.4 são obtidas equações desacopladas para o campo elétrico e magnético dadas por

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (1.5)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}, \quad (1.6)$$

onde

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (1.7)$$

Portanto, nota-se que os campos elétrico e magnético obedecem a uma equação de onda tridimensional que se propaga com velocidade  $c$  (que é igual à velocidade da luz no vácuo). Essas equações admitem algumas famílias de soluções sendo, a mais simples e imediata, a solução de onda plana dada por

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp [i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] , \quad (1.8)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \exp [i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] , \quad (1.9)$$

onde  $\mathbf{k}$  é o vetor de onda que aponta na direção de propagação da onda e tem módulo igual a  $\frac{2\pi}{\lambda}$ , sendo  $\lambda$  o comprimento de onda e  $\omega$  a frequência angular. Os termos  $\mathbf{E}_0$  e  $\mathbf{B}_0$  dão à solução o caráter vetorial enquanto a exponencial com argumento imaginário fornece o comportamento periódico. Após substituir as soluções 1.8 e 1.9 nas equações de Maxwell (equações 1.1 - 1.4) e com algumas manipulações algébricas deduzem-se as seguintes relações:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \quad (1.10)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0, \quad (1.11)$$

$$\mathbf{B}_0 = \frac{k}{\omega} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0. \quad (1.12)$$

As equações 1.10, 1.11 e 1.12 mostram que  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{B}_0$  e  $\mathbf{k}$  são mutuamente ortogonais e, portanto, se tratam de ondas transversais. A previsão de ondas eletromagnéticas transversais que se propagam com velocidade  $c$  (no vácuo) e sua posterior detecção experimental resumem as primeiras evidências que corroboraram para a teoria eletromagnética clássica da luz.

Ondas transversais possuem a direção de oscilação perpendicular à direção de propagação podendo, assim, ser polarizadas. Nesse sentido, a polarização, os modos transversos (obtidos via solução da equação paraxial) e o caminho formam um conjunto de graus de liberdade que podem ser explorados para codificação de q-bits. Em seguida será realizada uma discussão mais detalhada e, uma vez que a presente proposta está baseada na codificação de q-bits na polarização e no modo transversal, serão enfatizados os graus de liberdade de polarização e modos transversos.

## 1.1 Polarização

Nesta seção será realizada a discussão a respeito do grau de liberdade de polarização com base nas referências (27), (28) e (29). Tendo em vista que a relação entre os campos

$\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  é bem definida, a discussão estará restrita ao campo elétrico. Em outras palavras, se o campo elétrico é conhecido, o campo magnético pode ser facilmente obtido por meio da equação 1.12.

Por questão de simplicidade, suponha uma onda plana monocromática (conforme Eq. 1.8) se propagando na direção  $\hat{\mathbf{z}}$ . Nesse caso, o estado de polarização mais geral possível pode ser representado pela equação

$$\mathbf{E} = (E_{0x}\hat{\mathbf{x}} + e^{i\delta}E_{0y}\hat{\mathbf{y}}) e^{i(kz-\omega t)}, \quad (1.13)$$

para o campo elétrico, onde  $E_{0x}$  e  $E_{0y}$  são, respectivamente, as amplitudes das componentes do campo elétrico ao longo das direções de  $\hat{\mathbf{x}}$  e  $\hat{\mathbf{y}}$  e  $\delta$  representa a fase relativa ( $\delta = \delta_x - \delta_y$ ).

A polarização fica completamente caracterizada pela razão entre as amplitudes das duas componentes e a fase relativa. Dentre os principais estados de polarização destacam-se a polarização elíptica, circular e linear. Se a fase relativa é dada por  $\delta = n\pi$  (onde  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) dizemos que a luz é linearmente polarizada. Na polarização linear a direção de vibração do campo elétrico é bem definida e a extremidade do vetor  $\mathbf{E}$  oscila descrevendo um movimento harmônico simples ao longo de uma dada direção para uma posição  $z$  fixa.

Quando uma luz linearmente polarizada possui as amplitudes na direção de  $\hat{\mathbf{x}}$  e  $\hat{\mathbf{y}}$  iguais, temos uma onda com polarização diagonal (anti-diagonal) cujo eixo de polarização possui inclinação de  $45^\circ(135^\circ)$  em relação à direção horizontal. Há ainda dois casos especiais de polarização linear: se a componente  $E_{0x}$  ( $E_{0y}$ ) é nula temos luz polarizada vertical(horizontal).

Por outro lado, se a fase relativa é da forma  $\delta = n\pi + \frac{\pi}{2}$  (sendo  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) e as amplitudes  $E_{0x}$  e  $E_{0y}$  são iguais, dizemos que a luz é circularmente polarizada. Nesse caso a extremidade do vetor campo elétrico (para  $z$  fixo) descreve uma trajetória circular e  $\mathbf{E}$  é dado pela equação

$$\mathbf{E} = E_0 (\mathbf{x} \pm i\mathbf{y}) e^{i(kz-\omega t)}. \quad (1.14)$$

Por fim, o estado de polarização elíptica ocorre quando a fase relativa é da forma  $\delta = n\pi + \frac{\pi}{2}$  (novamente  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) e  $E_{0x} \neq E_{0y}$ . Nesse caso o campo elétrico dado por

$$\mathbf{E} = (E_{0x}\mathbf{x} \pm i\mathbf{y}E_{0y}) e^{i(kz-\omega t)}. \quad (1.15)$$

Os estados de polarização circular à direita, circular à esquerda, diagonal, anti-diagonal, horizontal e vertical assumem um papel fundamental na presente proposta

formando um conjunto de bases de medida no processo de caracterização (análogo clássico da tomografia de estados quânticos).

A polarização da luz pode ser manipulada utilizando-se elementos ópticos conhecidos como placas de onda. Tratam-se de cristais birefringentes que são capazes de introduzir uma diferença de fase entre as componentes do vetor campo elétrico alterando assim a polarização do mesmo. A Figura 1 mostra um modelo de placa de onda.

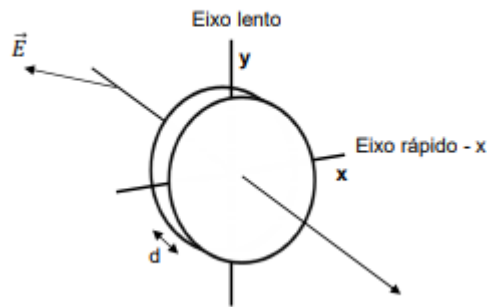


Figura 1 – Representação de uma placa de onda de espessura  $d$  com eixo lento (rápido) coincidindo com eixo  $y$  ( $x$ ). O campo elétrico da onda incidente pode sofrer alteração dependendo da fase relativa introduzida pela placa. Fonte: (30)

O material utilizado em placas de onda (dito birefringente) possui uma anisotropia tal que o índice de refração na direção do eixo rápido é menor que na direção do eixo lento (vide Figura 1). Este fato implica que a velocidade de oscilação do campo elétrico ao longo do eixo lento será menor que na direção do eixo rápido, introduzindo-se assim uma defasagem entre as componentes do campo ao longo destas direções. Nesse caso a diferença de fase introduzida pela placa de onda será dada por:

$$N\lambda = d(n_l - n_r), \quad (1.16)$$

onde  $n_l(n_r)$  é o índice de refração ao longo do eixo lento(rápido) enquanto  $\lambda$  é o comprimento de onda da luz (a análise está limitada a um feixe monocromático).

Em especial se  $N = \frac{1}{2}$  tem-se uma placa de meia onda (HWP, do inglês *half wave plates*) pois implementa uma diferença de caminho de  $\frac{\lambda}{2}$  o que corresponde a introdução de uma fase relativa de  $\pi$ . Por outro lado se  $N = \frac{1}{4}$  a placa de onda é denominada placa de quarto de onda (QWP, do inglês *quarter wave plates*) uma vez que esta implementa uma diferença de caminho de  $\frac{\lambda}{4}$  o que corresponde a uma fase relativa de  $\frac{\pi}{2}$ .

Para modelar o efeito de elementos ópticos (placas de onda, lentes, polarizadores e entre outros) em um feixe de luz é conveniente utilizar o formalismo das matrizes de



Jones (31). Nesta notação, estados de polarização da luz são representados por meio de um vetor (dito vetor de polarização) que pode ser visto na equação 1.17.

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x} \\ e^{i\delta} E_{0y} \end{bmatrix} e^{i(kz-\omega t)} \quad (1.17)$$

Escrevendo os estados de polarização descritos acima neste formalismo, temos

$$\mathbf{E}_{LIN\pm} = E_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix} e^{i(kz-\omega t)}, \quad (1.18)$$

$$\mathbf{E}_{CIRC\pm} = E_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix} e^{i(kz-\omega t)}, \quad (1.19)$$

$$\mathbf{E}_{ELIP\pm} = \begin{bmatrix} E_{0x} \\ \pm i E_{0y} \end{bmatrix} e^{i(kz-\omega t)}, \quad (1.20)$$

onde  $E_{LIN\pm}$  é a polarização linear diagonal (+) e antidiagonal(-),  $E_{CIRC\pm}$  circular à direita (+) e à esquerda (-) e  $E_{ELIP\pm}$  é a luz com polarização elíptica à direita (+) e à esquerda(-).

No formalismo de Jones os elementos ópticos são representados por matrizes que atuam nos vetores que descrevem o estado de polarização da luz. A atuação das placas de onda, por exemplo, será representada por matrizes que multiplicam os vetores de Jones, transformando-os. As placas de onda descritas acima (HWP e QWP) são representadas, respectivamente, pelas matrizes de jones

$$[HWP] = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix}, \quad (1.21)$$

$$[QWP] = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) + i \sin^2(\theta) & \cos(\theta) \sin(\theta) (1 - i) \\ \cos(\theta) \sin(\theta) (1 - i) & i \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \end{bmatrix}, \quad (1.22)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre o eixo rápido e o eixo x.

Além das representações algébrica e matricial, existe uma terceira opção de representação geométrica. Os estados de polarização da luz podem ser representados em uma esfera de raio unitário conhecida como esfera de Poincaré (32) conforme Figura 2.

Os estados de polarização são representados na superfície da esfera. Os estados de polarização linear estão no equador enquanto os de polarização circular estão nos polos. Estados de polarização elíptica estão entre os polos e o equador. Nesta representação, a atuação de placas de onda podem ser interpretadas como rotações do vetor unitário que representa a polarização levando a outros pontos da esfera de Poincaré.

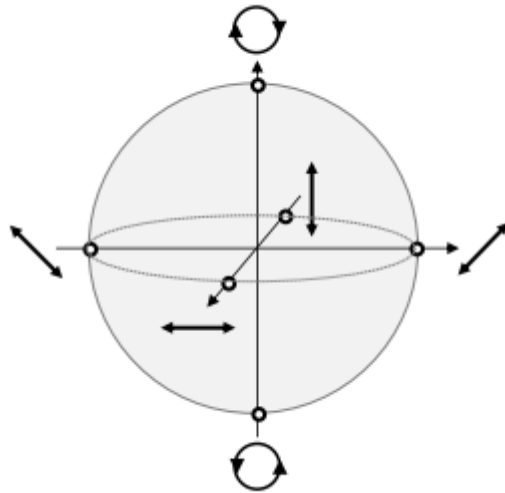


Figura 2 – Esfera de Poincaré. Estados de polarização linear estão no equador enquanto os de polarização circular estão nos polos. Entre os polos e o equador estão os estados de polarização elíptica. Fonte: (30)

Para ilustrar todas as idéias expostas nessa seção, considere a situação proposta na referência (30) conforme Figura 3.

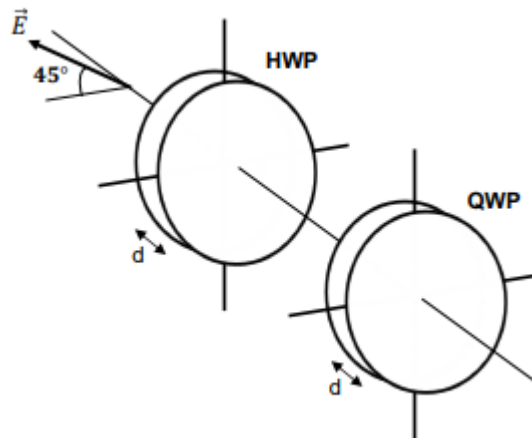


Figura 3 – Exemplo para ilustração: A luz incidente tem polarização diagonal é convertida em luz circularmente polarizada devido a atuação das placas de onda. Fonte: (30)

A luz incidente está polarizada a  $45^\circ$  e interage primeiro com a HWP e em seguida com a QWP. É importante destacar que nestes processos a ordem importa, isto é, o resultado final depende da ordem das placas. Se a HWP e a QWP estão configuradas com o ângulo entre o eixo rápido e o eixo x igual a  $0^\circ$  a atuação do conjunto de placas no

estado de polarização da luz incidente será dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{E}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix} = \frac{E}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix}. \quad (1.23)$$

Se verifica imediatamente que a atuação do conjunto de placas transformou o estado de polarização linear em um estado de polarização circular. Na representação da esfera de Poincaré o vetor unitário sofre uma rotação, saindo do equador para apontar na direção dos pólos.

## 1.2 Caminho

As equações de Maxwell (1.1 - 1.4) preveem que ondas eletromagnéticas, além de possuírem uma direção de propagação (dada por  $\mathbf{k}$ ), possuem energia, momento linear e momento angular. É importante destacar que tais previsões implicam nas leis de conservação para momento linear, momento angular e energia. A título de ilustração, considere a expressão para a densidade de energia  $U$  para campos quase estacionários no vácuo dada por (33)

$$U = \frac{1}{2}\epsilon_0\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2. \quad (1.24)$$

Utilizando as equações de Maxwell pode-se demonstrar que derivada temporal de 1.24 obedece à lei de conservação da energia expressa por

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{S}, \quad (1.25)$$

onde

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (1.26)$$

onde  $\mathbf{j}$  é a densidade de corrente e  $\mathbf{S}$  o vetor de Poynting que pode ser obtido via 1.26. O primeiro termo do lado direito da equação 1.25 representa o trabalho por unidade de tempo e volume realizado pelo campo eletromagnético sobre cargas em movimento. No caso de ausência de cargas a expressão 1.25 é reduzida a 1.27 que pode ser comparada imediatamente com a equação da continuidade levando, assim, à interpretação física do vetor de Poynting enquanto densidade de corrente de energia eletromagnética.

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (1.27)$$

Comparando as equações 1.12 e 1.26 verifica-se que o vetor de Poynting  $\mathbf{S}$ , além de representar o fluxo de energia por unidade de tempo e por unidade de volume, é paralelo

a  $\mathbf{k}$  e, conseqüentemente, aponta na direção de propagação da luz. Para uma dada direção de propagação da luz podemos associar um caminho definindo-se, portanto, outro grau de liberdade da luz que pode ser explorado para a codificação de q-bits. Assim como placas de onda manipulam a polarização da luz, o caminho de um feixe de laser pode ser manipulado utilizando divisores de feixe (BS - do inglês *Beam Splitter*) e divisores de feixe polarizado (PBS - do inglês *Polarized Beam Splitter*).

As atuações do BS e PBS estão representadas na Figura 1.2. Em um dispositivo BS típico a luz é dividida igualmente para as duas saídas independente da polarização. Para um dispositivo PBS típico seu funcionamento consiste na seleção com base na polarização: luz polarizada horizontalmente (verticalmente) é transmitida(refletida). Esses dispositivos podem ser reconhecidos como medidas projetivas em meio a analogia clássico-quântica.

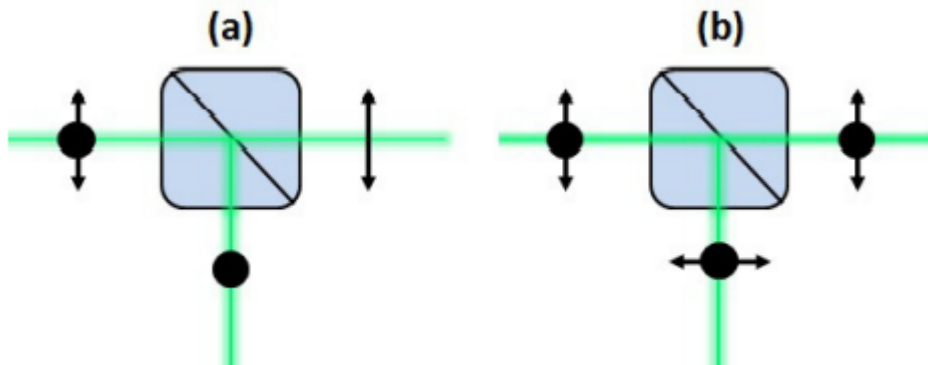


Figura 4 – Representação dos dispositivos: (a) PBS e (b) BS. Fonte: (34)

### 1.3 Modos Transversos

Os modos transversos definem a distribuição de energia no plano transversal à direção de propagação da luz. Assim como a polarização e o caminho, os modos transversos constituem um outro grau de liberdade da luz que, por sua vez, podem ser obtidos via solução da equação de Helmholtz sob aproximação paraxial. O procedimento de obtenção dos modos transversos será ilustrado a seguir com base nas referências (30), (34).

Foi mostrado anteriormente que o campo elétrico obedece à equação 1.5 que admite solução de onda plana. Todavia, ondas planas não são naturais visto que estas possuem frentes de onda infinitas (35). Uma solução mais apropriada pode ser escrita na forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_0 E_0(\mathbf{r}) e^{-ikz} e^{i\omega t}, \quad (1.28)$$

sendo introduzidos a amplitude complexa  $E_0(\mathbf{r})$  com dependência espacial e o versor  $\mathbf{e}_0$  que caracteriza a polarização. Substituindo a equação 1.28 na 1.5, obtemos a dita equação

de Helmholtz dada por

$$(\nabla^2 + k^2) E_0(\mathbf{r}) e^{-ikz} = 0. \quad (1.29)$$

Como  $e^{i\omega t} \neq 0$  a expressão pôde ser simplificada obtendo-se uma equação diferencial que diz respeito apenas às coordenadas espaciais. Após escrever o Laplaciano em coordenadas cartesianas e calcular as derivadas da equação 1.29 explicitamente, obtém-se a equação

$$\frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial E_0(\mathbf{r})}{\partial x} = 0. \quad (1.30)$$

Se a taxa de variação de  $E_0(\mathbf{r})$  ao longo da direção  $z$  é pequena comparada ao comprimento de onda  $\lambda$  então a aproximação paraxial dada pela equação

$$\left| \frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial y^2} \right| \text{ e } 2k \left| \frac{\partial E_0(\mathbf{r})}{\partial z} \right| \quad (1.31)$$

é válida e a equação 1.30 pode ser aproximada conforme a equação

$$\frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial E_0(\mathbf{r})}{\partial x} = 0, \quad (1.32)$$

que é conhecida como aproximação paraxial da equação de Helmholtz.

Identificando o termo  $\frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_0(\mathbf{r})}{\partial y^2}$  como componentes transversais do Laplaciano ( $\nabla_t^2$ ) podemos reescrever a equação 1.32 como

$$\nabla_t^2 E_0(\mathbf{r}) - 2ik \frac{\partial E_0(\mathbf{r})}{\partial x} = 0. \quad (1.33)$$

A solução para a equação 1.33 em coordenadas cartesianas é conhecida e sua forma mais geral pode é dada por

$$E_{mn}(x, y, z) = \frac{C_{nm}}{w(z)} H_n \left[ \frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right] H_m \left[ \frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right] \times \left[ -\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right] \times \exp \left[ -\frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)} \right] \exp [-i(n + m + 1)\psi(z)]. \quad (1.34)$$

O termo  $\omega(z)$  é expresso pela equação 1.35 e representa a largura do feixe na posição  $z$  em função da largura do feixe em  $z = 0$ , dada por  $\omega_0$ , e o comprimento de Rayleigh dado pela equação 1.36.

$$\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_R} \right)^2} \quad (1.35)$$

$$z_R = \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda} \quad (1.36)$$

O parâmetro  $R(z)$  é conhecido como raio de curvatura enquanto  $\psi(z)$  é chamada de fase de Gouy. Tanto o raio de curvatura quanto a fase de Gouy são funções  $z$  e  $z_R$  conforme visto nas equações 1.37 e 1.38.

$$R(z) = z + \frac{z_R^2}{z} \quad (1.37)$$

$$\psi(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) \quad (1.38)$$

Os termos  $H_n$  e  $H_m$  são os polinômios de Hermite e os parâmetros  $n$  e  $m$  dizem respeito a ordem do modo em questão. Os polinômios de Hermite formam uma base completa sendo possível escrever qualquer solução para a equação 1.33 a partir de combinações lineares dos mesmos. Em especial, para o modo fundamental  $HG_{00}$  temos a solução dada por

$$E(x, y, z) = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}\omega(z)} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)}\right] \exp\left[-i\frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)} + i\psi(z)\right]. \quad (1.39)$$

O modo fundamental também é chamado de feixe Gaussiano pois, num plano transversal, sua intensidade varia conforme uma gaussiana ao longo da direção radial. De modo geral, o termo da gaussiana limita a distribuição espacial da energia e estes modos são também chamados modos Hermite-Gauss.

Modos Hermite de primeira ordem  $HG_{01}$  e  $HG_{10}$  assumem um papel importante no presente trabalho como base para codificação de q-bits no modo transversal de um feixe laser. Para compreender sua utilidade na codificação de q-bits é necessário conhecer o perfil de intensidades referentes a estes modos exibido na Figura 1.3.

Podemos obter, a partir desta distribuição de intensidades, um sistema de dois níveis a partir do subespaço  $\{HG_{10}, HG_{01}\}$  tornando esse grau de liberdade de grande utilidade para a codificação de q-bits.

Escrevendo um modo Hermite rodado utilizando os modos de primeira ordem de forma que ficamos com

$$HG_{0,1}^\theta = \cos(\theta)HG_{1,0} + \sin(\theta)HG_{0,1}. \quad (1.40)$$

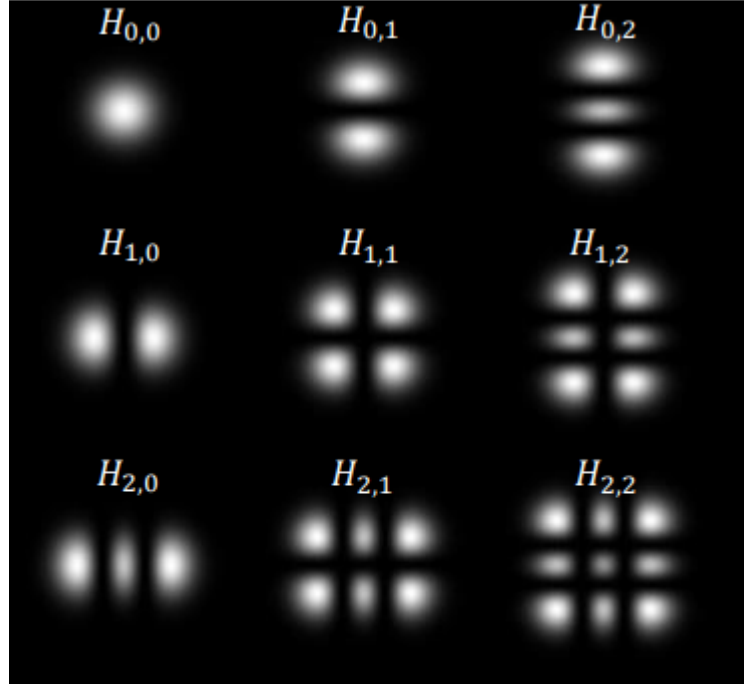


Figura 5 – Perfil de intensidade para os modos Hermite-Gauss. O modo fundamental possui uma distribuição de intensidade gaussiana na direção radial. Os modos hermite  $HG_{10}$  e  $HG_{01}$  constituem um sistema de dois níveis sendo, portanto, úteis na codificação de q-bits. Fonte: (30)

Particularmente, para o caso em que  $\theta = 45^\circ$  ( $\theta = 135^\circ$ ) temos os modos hermites dados por

$$HG_{0,1}^{45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} (HG_{1,0} + HG_{0,1}), \quad (1.41)$$

$$HG_{0,1}^{135^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} (HG_{1,0} - HG_{0,1}). \quad (1.42)$$

Os modos transversos rodados a  $45^\circ$  e  $135^\circ$  são escritos em termos dos modos hermite de primeira ordem da mesma forma que estados de polarização diagonal e anti-diagonal são escritos em termos dos vetores de polarização horizontal e vertical. Estendendo essa analogia, obtém-se um outro modo transverso considerando uma fase relativa de  $\frac{\pi}{2}$  conforme as equação 1.43, tal como estados de polarização circulares são escritos em termos dos vetores de polarização horizontal e vertical.

$$LG_0^{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (HG_{1,0} \pm iHG_{0,1}) \quad (1.43)$$

Os modos expressos na equação 1.43 são conhecidos como modos Laguerre-Gauss(LG) de primeira ordem e podem ser obtidos via solução da equação de Helmholtz paraxial

escrita em coordenadas cilíndricas. A equação de Helmholtz paraxial em coordenadas cilíndricas é dada pela equação 1.44.

$$\frac{1}{r} \left[ r \frac{\partial E}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \phi^2} + 2ik \frac{\partial E}{\partial z} = 0 \quad (1.44)$$

A solução da equação 1.44 é dada em função dos polinômios associados de Laguerre  $L_{lp}$  são dados por

$$E_{lp}(r, z, \phi) = \sqrt{\frac{2p!}{\pi w^2(z)(p + |l|)!}} \left[ \frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right]^{|l|} \exp \left[ -\frac{r^2}{w^2(z)} \right] \times \quad (1.45)$$

$$\times L_{lp} \left( \frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \exp \left( i \left[ kz - (2p + |l| + 1)\psi(z) + \frac{kr^2}{2R(z)} + l\phi \right] \right),$$

onde  $\phi = \arctg \left( \frac{x}{y} \right)$ ,  $\psi(z)$  a fase de Gouy,  $w(z)$  a largura do feixe e  $R(z)$  o raio de curvatura do feixe. A Figura 6 que mostra o perfil de intensidades de modos LG com  $p = 0$  sendo o feixe gaussiano o modo fundamental. Devido à não analiticidade de  $\phi$  na origem, os modos com carga topológica  $l \neq 0$  possuem intensidade nula em seu centro.

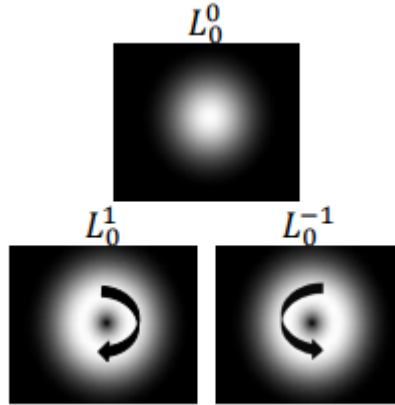


Figura 6 – Perfil de intensidade dos modos Laguerre-Gauss. Observa-se que devido a singularidade na quantidade  $\phi$  para modos com carga topológica  $l \neq 0$  não temos intensidade no centro. Fonte: (30)

Os modos Laguerre-Gauss de primeira ordem possuem momento angular orbital (MAO) não nulo e, em contraste com o modo Gaussiano, o vetor de onda espirala em torno da direção de propagação da frente de onda (36) conforme a ilustração 7-(b).

Por fim, podemos a partir de uma analogia com o grau de liberdade de polarização, construir uma representação análoga à esfera de Poincaré para os modos transversos (37) conforme visto na Figura 8.

Os modos Hermite de primeira ordem se encontram no equador da esfera (analogamente aos estados de polarização linear) enquanto os modos Laguerre de primeira ordem estão nos polos (analogamente aos estados de polarização circular). Entre o equador e os



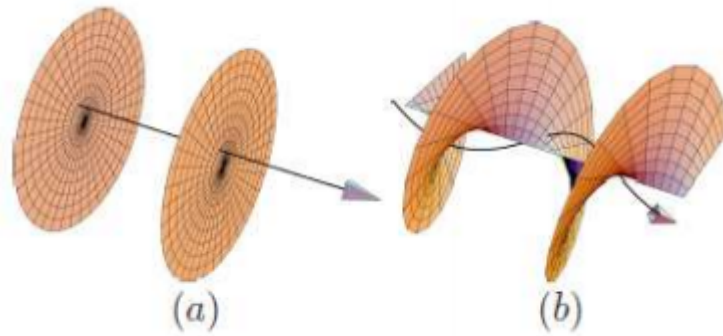


Figura 7 – Na imagem (a) vemos um feixe com frente de onda plana e vetor de onda na direção de propagação do feixe. Na imagem (b) temos um feixe Laguerre-Gauss com frente de onda helicoidal que, por possuir momento angular orbital não nulo, tem o vetor de onda espiralando em torno da direção de propagação. Fonte: (30).

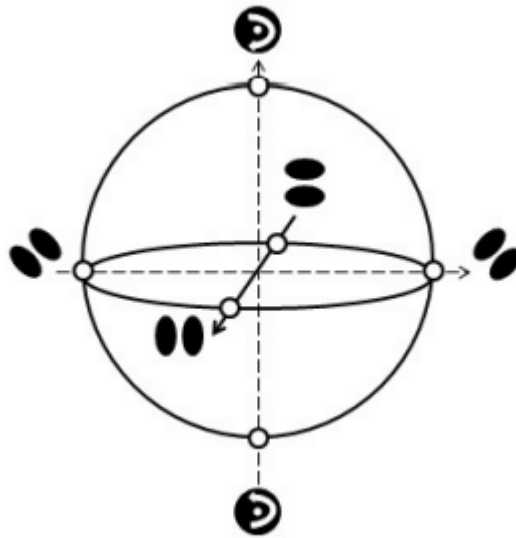


Figura 8 – Análogo da esfera de Poincaré para representação geométrica de modos transversos. Os modos hermite de primeira ordem se encontram no equador da esfera enquanto os modos laguerre de primeira ordem estão nos polos. Entre o equador e os polos estão os modos elípticos. Fonte: (34)

polos estão os modos elípticos formados quando os coeficientes que multiplicam os modos Hermite da equação 1.46 são diferentes (análogamente a estados de polarização elíptica) sendo a solução é dada por

$$LG_l^p = \alpha HG_{1,0} \pm \beta i HG_{0,1}, \quad (1.46)$$

onde  $\alpha \neq \beta$  e  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ .

Após discutir conceitos fundamentais a respeito dos graus de liberdade da luz e sua descrição matemática, temos condições de avançar para discutir a codificação de q-bits em graus de liberdade da luz.

## 2 Codificação de q-bits em graus de liberdade da luz

Nesta seção será discutida a codificação de q-bits em graus de liberdade da luz com base nas referências (38), (1) e (39). Nesta discussão será dado enfoque para formalismo do operador densidade que, por possibilitar a representação de estados mistos, generalizam a representação de estados quânticos feita para estados puros via notação de Dirac. Por esse motivo, tal formalismo assume um papel central no desenvolvimento do presente trabalho.

### 2.1 Q-bits

Dispositivos "clássicos" dedicados ao processamento de dados geralmente funcionam utilizando como base os bits de informação. Um bit pode ser representado por uma função que assume um valor em meio a duas possibilidades: "0" ou "1". Estes valores correspondem a dois estados distinguíveis de um sistema, por exemplo, "ligado" ou "desligado". Desta forma, a codificação de bits pode ser implementada em qualquer sistema físico que possua dois estados distinguíveis. O exemplo mais comum está na codificação de bits de informação em sinais de tensão em um circuito elétrico: associa-se 5 V ao nível lógico "1" e 0 V ao nível lógico "0". Por outro lado, a menor quantidade de informação quântica é armazenada no que se denomina "bit quântico", abreviado como q-bit. Desta forma, sem fazer menção a nenhum sistema físico, a representação do estado mais geral de um q-bit pode ser escrita como

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (2.1)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são números complexos que satisfazem ao vínculo  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ .

A condição de normalização imposta sobre o quadrado dos módulos dos coeficientes decorre da interpretação probabilística que se consolidou como um dos postulados da mecânica quântica. Uma medida na base computacional ( $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ ) tem probabilidade  $|\alpha|^2$  de resultar no estado  $|0\rangle$  e probabilidade  $|\beta|^2$  de resultar no estado  $|1\rangle$  e, portanto, a soma da probabilidade de cada possibilidade resultará em um.

Assim como bits clássicos podem ser codificados em sistemas físicos de dois níveis, um q-bit pode ser codificado em qualquer sistema quântico de dois níveis<sup>1</sup>. Apesar dessa semelhança, existem diferenças significativas entre esses dois objetos. A diferença mais imediata entre o q-bit e o bit clássico está na possibilidade de ocorrência de estados de

<sup>1</sup> Existe uma diversidade de sistemas que dispõem de um espaço (ou subespaço) com dois níveis distinguíveis como, por exemplo, os átomos no que diz respeito aos níveis de energia, partículas de spin 1/2 e estados de polarização de fótons.

superposição quântica. Mais especificamente, os estados de um bit são sempre mutuamente excludentes ("0" ou "1") enquanto q-bits em superposição possuem uma probabilidade de uma medida na base computacional resultar nos estados  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$ . Estados de superposição são previstos pela mecânica quântica e representam um recurso importante para a computação e informação quântica (1).

## 2.2 Descrição de estados quânticos no formalismo do operador densidade

Para abordar o conceito de q-bit e sua codificação em sistemas físicos de uma forma mais geral se faz necessário discutir a idéia de estado quântico e sua representação no formalismo do operador densidade. A descrição de um sistema quântico pode ser feita a partir de objetos conhecidos como operadores (ou matrizes) densidade  $\hat{\rho}$  que possui a forma geral dada por

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (2.2)$$

onde  $P_i$  é o peso estatístico e  $|\psi_i\rangle$  é um ket de estado, ambos associados ao  $i$ -ésimo estado puro da mistura estatística. Este formalismo permite descrever tanto sistemas em estados puros quanto sistemas em estados mistos (39)<sup>2</sup>.

Para que um dado operador densidade represente um sistema físico é necessário e suficiente que seja positivo, tenha traço unitário e seja Hermitiano. A condição de positividade pode ser expressa por

$$\langle \phi | \hat{\rho} | \phi \rangle = \sum_i P_i \langle \phi | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \phi \rangle > 0, \quad (2.3)$$

onde  $|\phi\rangle$  é um ket de estado arbitrário. O traço deve ser unitário que, matematicamente, é expresso por

$$\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1, \quad (2.4)$$

e ser Hermitiano conforme a equação

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger. \quad (2.5)$$

Utilizando o formalismo do operador densidade é possível descrever tanto estados mistos quanto estados puros. Particularmente, o operador densidade de um ensemble puro preparado no estado  $|\psi_0\rangle$  pode ser expresso como

$$\hat{\rho} = |\psi_0\rangle \langle \psi_0|. \quad (2.6)$$

<sup>2</sup> O formalismo do operador densidade é mais geral que a abordagem via kets de estado. Note que o operador densidade também descreve estados puros como visto na equação 2.6.

Dada a generalidade deste novo formalismo, convém enunciar os postulados da MQ em termos do operador densidade (1). Neste formalismo, seguindo a Referência (1), podemos condensar os postulados da MQ da seguinte forma:

**Postulado 1’:** O sistema é completamente caracterizado pelo operador densidade  $\hat{\rho}$ , um operador positivo de traço 1 que atua no espaço do sistema dado por

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (2.7)$$

**Postulado 2’:** A evolução de um sistema quântico fechado é descrita por uma transformação unitária dada por

$$\hat{\rho}(t) = U\hat{\rho}(t_0)U^\dagger, \quad (2.8)$$

sendo a dinâmica do sistema descrita pela chamada equação de von Neumann, dada por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(t) = [H, \hat{\rho}(t)]. \quad (2.9)$$

**Postulado 3’:** Medidas são descritas por um conjunto de operadores de medida  $M_m$ . Estes operadores atuam no espaço do sistema sendo medido e os índices  $m$  se referem a cada possível resultado da medição. Se o estado do sistema é representado por  $\hat{\rho}$ , então, a probabilidade de uma medida resultar no valor  $m$  é dada por

$$p(m) = \text{Tr}(M_m^\dagger M_m \hat{\rho}), \quad (2.10)$$

onde  $\sum_m M_m^\dagger M_m = I$  ( $I$  é o operador identidade) e o operador densidade após a medida é dado por

$$\hat{\rho}' = \frac{M_m \hat{\rho} M_m^\dagger}{\text{Tr}(M_m^\dagger M_m \hat{\rho})}. \quad (2.11)$$

**Postulado 4’:** O espaço de estados de um sistema físico composto é dado pelo produto tensorial do espaço de estados de cada subsistema. Significa que se temos  $n$  subsistemas e o sistema  $i$  é preparado no estado  $\hat{\rho}_i$ , então o produto tensorial dado por

$$\hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2 \otimes \dots \otimes \hat{\rho}_n \quad (2.12)$$

representa uma base para representação do estado do sistema composto pelos  $n$ -subsistemas.

Note que, por se tratar de uma generalização, é possível recuperar os postulados da MQ enunciados a partir da notação de Dirac via formalismo do operador densidade.

Para o estado puro da equação 2.6 o postulado 2’ se resume à evolução temporal dada por um operador unitário que atua em  $|\psi_0\rangle$ . O postulado 3’ se resume à regra de Born no caso em que os operadores de medida  $M_m$  são projetores e  $\rho$  é um estado puro.

Consequentemente valores esperados e possíveis resultados de uma medida serão os mesmos que os obtidos via notação de Dirac.

Após introduzir o conceito de operador densidade, fundamental para uma representação completa de sistemas quânticos, vamos utilizar este formalismo para descrever estados de q-bits de uma forma mais geral.

## 2.3 Q-bits no formalismo do operador densidade

Com base nas informações da seção 2.2 com respeito à descrição de sistemas quânticos, o estado de um q-bit mais geral possível pode ser representado pelo operador densidade (escrito na base computacional:  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ ) como

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 S_i \sigma_i \quad (2.13)$$

onde os termos  $S_i$  são conhecidos como parâmetros de Stokes e caracterizam completamente o estado do sistema. E as matrizes  $\sigma_i$  são dadas por

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

que são os conhecidos operadores de Pauli. Podemos reconhecer as matrizes de spin de Pauli  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ , justificando o termo "operadores de Pauli".

Este procedimento é semelhante à expansão de funções em autofunções ou mesmo na expansão de kets de estado em termos dos kets de base. A diferença é que no caso da representação 2.13 são utilizadas matrizes como base. Multiplicando a equação 2.13 por  $\sigma_j$  e aplicando o operador traço temos

$$\text{Tr}(\sigma_j \hat{\rho}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 S_i \text{Tr}(\sigma_j \sigma_i). \quad (2.15)$$

Como  $\text{Tr}(\sigma_j \sigma_i) = 2\delta_{ij}$ , obtém-se

$$\text{Tr}(\sigma_j \hat{\rho}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 S_i 2\delta_{ij}, \quad (2.16)$$

o que, finalmente, resulta em

$$S_i = \text{Tr}(\sigma_i \hat{\rho}). \quad (2.17)$$

A partir da expressão 2.17, verifica-se que os parâmetros de Stokes para um dado estado nada mais são que o valor esperado dos operadores de Pauli. Assim, ao escrever o valor esperado em termos da decomposição espectral, obtém-se imediatamente que as

relações entre os parâmetros de Stokes e probabilidades associadas às medidas projetivas, realizadas na base de autoestados das  $\{\sigma_i\}$ , são dadas por (38)

$$S_0 = P_{|0\rangle} + P_{|1\rangle}, \quad (2.18)$$

$$S_1 = P_{|+\rangle} - P_{|-\rangle}, \quad (2.19)$$

$$S_2 = P_{|R\rangle} - P_{|L\rangle}, \quad (2.20)$$

$$S_3 = P_{|0\rangle} - P_{|1\rangle}, \quad (2.21)$$

sendo as relações entre a base computacional e as bases de medida  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  e  $\{|R\rangle, |L\rangle\}$  dadas por

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle), \quad (2.22)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle), \quad (2.23)$$

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + i|1\rangle), \quad (2.24)$$

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - i|1\rangle). \quad (2.25)$$

A conexão entre as probabilidades de resultados relativos à medidas projetivas e os parâmetros de Stokes é fundamental para a caracterização dos estados conforme será visto posteriormente no capítulo sobre tomografia de estados quânticos. É conveniente reescrever o operador densidade de um q-bit (equação 2.13) da seguinte forma

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(I + \beta \cdot \sigma), \quad (2.26)$$

onde  $I$  é o operador identidade,  $\beta$  é um vetor com módulo limitado por  $|\beta| \leq 1$ , denominado vetor de Bloch e  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  é um vetor cujas componentes são as matrizes de Pauli. Nesse caso o estado de um sistema quântico pode ser associado a uma representação geométrica em que as coordenadas do vetor de Bloch caracteriza o estado do sistema. Em outras palavras, para representar o estado do sistema basta especificar as coordenadas de  $\beta$ .

Nesta representação existem dois extremos relacionados à pureza dos estados: estados puros estão na casca da esfera ( $|\beta| = 1$ ) enquanto estados maximamente mistos estão na origem ( $|\beta| = 0$ ). Estados parcialmente mistos estão na região intermediária entre a origem e a casca da esfera ( $0 \leq |\beta| \leq 1$ ). Para representar estados puros podemos recorrer à parametrização  $\beta = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  que define a superfície de uma esfera de raio unitário, conhecida como esfera de Bloch (Figura 9). Nessa representação os ângulos  $\theta$  e  $\phi$  são, respectivamente, os ângulos polar e azimutal da Figura 9.

Apesar desta representação não ser muito útil para sistemas com mais de um q-bit, é bastante instrutivo para estudar transformações que podem ser feitas em um único q-bit.

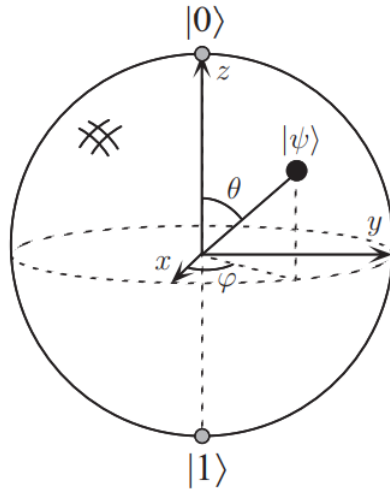


Figura 9 – Esfera de Bloch é uma representação gráfica de q-bits em estados puros ( $|\beta| = 1$ ).  
Fonte:(1).

É possível, por exemplo, representar operações realizadas sobre q-bits (por exemplo, via atuação de portas lógicas quânticas) a partir de transformações no vetor de Bloch.

A representação em termos das matrizes de Pauli pode ser generalizada para sistemas com dimensão maior. Para n q-bits a matriz densidade escrita na parametrização de Fano é dada por (38)

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2^n} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=0}^3 S_{i_1, i_2, \dots, i_n} \sigma_{i_1} \otimes \sigma_{i_2} \otimes \dots \otimes \sigma_{i_n}. \quad (2.27)$$

Pelo mesmo procedimento realizado para um q-bit, expresso pelas equações (2.15 - 2.17), obtêm-se os parâmetros de Stokes na representação de Fano para n q-bits expressos por (38)

$$S_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \text{Tr} [(\sigma_{i_1} \otimes \sigma_{i_2} \otimes \dots \otimes \sigma_{i_n}) \hat{\rho}]. \quad (2.28)$$

Então para 2 q-bits o operador densidade será dado por

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4} \sum_{i, j=0}^3 S_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j. \quad (2.29)$$

Nesse caso a conexão entre os parâmetros de Stokes e as probabilidades de medidas na descrição de sistemas de 2 q-bits possui uma forma parecida com a relação encontrada para um q-bit e é dada por (38)

$$S_{ij} = (P_{|\psi_i\rangle} \pm P_{|\psi_{i\perp}\rangle}) \otimes (P_{|\psi_j\rangle} \pm P_{|\psi_{j\perp}\rangle}). \quad (2.30)$$



Por exemplo, no caso de 2 q-bits o parâmetro de Stokes  $S_{00}$  pode ser obtido via equação 2.32. Nesta notação, primeiro deve-se escrever  $S_{i,j}$  na forma  $S_i \otimes S_j$  e substituindo os parâmetros de Stokes de cada q-bit, com base nas expressões (2.18-2.21), temos

$$S_{00} = (P_{|0\rangle_i} + P_{|1\rangle_i}) \otimes (P_{|0\rangle_j} + P_{|1\rangle_j}), \quad (2.31)$$

para em seguida realizar a distributiva e finalmente obter

$$S_{00} = P_{|00\rangle} + P_{|01\rangle} + P_{|10\rangle} + P_{|11\rangle}. \quad (2.32)$$

Note que o número de parâmetros necessários para representar o sistema cresce drasticamente em comparação a um único q-bit. Após estudar o conceito de q-bit e suas representações, o próximo passo consistirá em estudar a analogia entre sistemas quânticos e sistemas ópticos lineares. Desta forma, a partir do estabelecimento entre a óptica linear e a mecânica quântica, será realizada a codificação de q-bits em graus de liberdade de feixes intensos.

## 2.4 Codificação e analogia clássico-quântica

Existem diversos trabalhos na literatura científica que abordam a utilização de graus de liberdade de feixes clássicos, como modos transversos e polarização, para investigar propriedades de sistemas quânticos (40), (21), (20). A estrutura matemática da óptica linear (formalismo das matrizes de Jones), que descreve a atuação dos elementos ópticos sob o feixe, é semelhante ao formalismo matemático que determina a evolução temporal de sistemas quânticos. Este fato permite a construção de uma analogia entre experimentos utilizando feixe clássico e o caso genuinamente quântico: sistemas quânticos podem ser emulados em circuitos ópticos lineares.

A polarização de um feixe laser descrita pelas equações 1.20 (linearmente polarizada) e 1.19 (circularmente polarizada) pode ser comparada aos kets de estado que caracterizam estados em superposição representados por

$$|\psi_{\pm}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

$$|\phi_{R/L}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Assim como a polarização, descrita por um vetor de Jones, modos transversos também podem ser descritos em uma estrutura matemática semelhante aos kets de estado, permitindo o estabelecimento de uma analogia entre a dinâmica de um sistema óptico e

um sistema quântico. Neste sentido, assim como operações realizadas sob q-bits podem ser interpretadas como rotações na esfera de Bloch, as transformações na polarização e nos modos transversos, via atuação de dispositivos ópticos, são representadas geometricamente por rotações na esfera de Poincaré.

Podemos utilizar, por exemplo, os modos Hermite de primeira ordem como base e estender a analogia feita inicialmente para a polarização, construída considerando estados de polarização vertical (V) e horizontal (H) como base, para os modos transversos. Para exemplificar, um modo Laguerre (Hermite diagonal ou anti-diagonal) de primeira ordem, dado pela equação 1.43 (dados pelas equações 1.41 e 1.42), pode(podem) representar um estado de superposição com fase relativa  $\phi = 90^\circ$  ou  $\phi = 270^\circ$  ( $\phi = 0^\circ$  ou  $\phi = 135^\circ$ ) como no ket de estado da equação 2.34 (2.33). Desta forma, esta analogia permite a investigação de propriedades intrínsecas a sistemas quânticos como, por exemplo, as implicações matemáticas da possibilidade de haver estados em superposição.

Nesta analogia a coerência óptica simula a coerência quântica enquanto que a intensidade normalizada faz o papel de probabilidade (medida, no caso genuinamente quântico, em um regime de foto-contagem). Os elementos ópticos (como placas de onda e lentes) representados por matrizes de Jones (como visto nas equações 1.21, 1.22 para HWP e QWP respectivamente) atuam no estado do feixe clássico como operadores unitários que ditam a evolução dos kets de estado no contexto da MQ. Um PBS atua em feixes intensos como projetores de estados de polarização atuam em kets, estabelecendo uma filtragem entre os auto estados.

Considerando um feixe laser polarizado com um dado perfil transversal, podemos representar, a partir destes dois graus de liberdade, um sistema de dois q-bits. Nesse caso, quando o campo eletromagnético puder ser descrito em termos do produto entre a estrutura transversal e o vetor de polarização, de forma que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})\hat{\mathbf{e}}, \quad (2.35)$$

temos um dito modo separável que é análogo ao estado produto no contexto da mecânica quântica. A codificação dos q-bits na notação de Dirac (utilizando os versores que descrevem a polarização  $\{\hat{e}_H, \hat{e}_V\}$  e os modos Hermite de primeira ordem como base) será dada por

$$\hat{e}_H \rightarrow |H\rangle \rightarrow |0\rangle, \quad (2.36)$$

$$\hat{e}_V \rightarrow |V\rangle \rightarrow |1\rangle, \quad (2.37)$$

$$HG_{01} \rightarrow |h\rangle \rightarrow |0\rangle, \quad (2.38)$$

$$HG_{10} \rightarrow |v\rangle \rightarrow |1\rangle. \quad (2.39)$$

Desta maneira podemos definir uma base para sistemas bipartidos a partir desta

codificação, isto é, definindo um conjunto de kets que geram o espaço de estados para sistemas de q-bits bipartidos. Esta codificação pode ser escritos como

$$\hat{e}_H HG_{01} \rightarrow |H\rangle \otimes |h\rangle = |Hh\rangle \rightarrow |00\rangle, \quad (2.40)$$

$$\hat{e}_H HG_{10} \rightarrow |H\rangle \otimes |v\rangle = |Hv\rangle \rightarrow |01\rangle, \quad (2.41)$$

$$\hat{e}_V HG_{01} \rightarrow |V\rangle \otimes |h\rangle = |Vh\rangle \rightarrow |10\rangle, \quad (2.42)$$

$$\hat{e}_V HG_{10} \rightarrow |V\rangle \otimes |v\rangle = |Vv\rangle \rightarrow |11\rangle, \quad (2.43)$$

em que os kets de base se mostram análogos aos ditos estados produto que descrevem sistemas quânticos independentes.

Note que a partir da combinação linear dos modos descritos nas equações (2.40-2.43) é possível preparar estados que podem ter tanto de momento angular de spin (relacionados com polarização circular e elíptica) como momento angular orbital não nulos e, por este motivo, são chamados de modos spin-órbita.

Nessa codificação o q-bit representado pela polarização pode ser transformado por meio da atuação de dispositivos como HWP, QWP, PBS sem que ocorra transformações no q-bit codificado no modo transversal. Da mesma maneira podemos aplicar operações apenas no modo transversal a partir da atuação de dispositivos como lentes cilíndricas e o prisma de Dove. Este fato permite simular operações locais efetuadas em uma única parte do sistema bipartido codificado no modo transversal e na polarização.

Assim, em meio a possibilidade de simular sistemas bipartidos a partir da codificação de q-bits em modos spin órbita, é interessante considerar as peculiaridades encontradas nesses sistemas como, por exemplo, a possibilidade de apresentar emaranhamento. Tendo em vista estas considerações, o próximo passo consistirá no estudo a respeito da existência de análogos clássicos para estados emaranhados.



## 3 Não separabilidades de modos spin-órbita

### 3.1 Descrição geral dos modos spin-órbita

Terminamos o capítulo anterior definindo os modos spin-órbita nas bases de polarização  $\{H, V\}$  e modos de Hermite de primeira ordem  $\{h, v\}$ , definindo os chamados modos separáveis, a forma mais simples dos modos spin-órbita. Considere o caso mais geral para o vetor do modo spin-órbita no sub-espaço de modos Hermite de primeira ordem de um feixe de laser dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = & c_1 HG_{10}(\mathbf{r})\hat{e}_H + c_2 HG_{10}(\mathbf{r})\hat{e}_V + \\ & c_3 HG_{01}(\mathbf{r})\hat{e}_H + c_4 HG_{01}(\mathbf{r})\hat{e}_V. \end{aligned} \quad (3.1)$$

A partir da equação 3.1, vemos que estruturas mais complexas podem ser obtidas: a estrutura vetorial dos graus de liberdade do campo eletromagnético permite a construção dos ditos “modos não-separáveis” do campo eletromagnético, que podem ser definido como

$$\phi_+(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [HG_{10}(\mathbf{r})\hat{e}_H + HG_{01}(\mathbf{r})\hat{e}_V], \quad (3.2)$$

$$\phi_-(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [HG_{10}(\mathbf{r})\hat{e}_H - HG_{01}(\mathbf{r})\hat{e}_V], \quad (3.3)$$

$$\psi_+(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [HG_{01}(\mathbf{r})\hat{e}_H + HG_{10}(\mathbf{r})\hat{e}_V], \quad (3.4)$$

$$\psi_-(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [HG_{01}(\mathbf{r})\hat{e}_H - HG_{10}(\mathbf{r})\hat{e}_V]. \quad (3.5)$$

Note que estes estados não podem ser fatorados, isto é, não é possível escrevê-los como um produto entre a estrutura transversa e o versor que caracteriza a polarização que, por este motivo, são conhecidos como modos não-separáveis. Com base na codificação dada pelas equações (2.36-2.43) conclui-se que os modos não separáveis são análogos aos estados de Bell, definidos como

$$|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \quad (3.6)$$

$$|\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle), \quad (3.7)$$

$$|\phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad (3.8)$$

$$|\phi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle). \quad (3.9)$$

Estes estados especiais são assim chamados devido ao fato de violarem a desigualdade de Bell. Estados de Bell apresentam emaranhamento máximo e, portanto, exibem correlações entre as medidas associadas a cada subsistema. Essas correlações são fundamentais para a computação e informação quântica justificando o profundo interesse no estudo destes estados.

Usando a codificação da base computacional  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  na equação 3.1, podemos ver que temos o análogo ao estado de dois q-bits mais geral que, dependendo dos coeficientes complexos  $c_i$  podem ser emaranhados ou não. Uma das maneiras de inferir o emaranhamento é através da Concorrência (41), definida como

$$C = 2 |c_1c_4 - c_2c_3|, \quad (3.10)$$

cujo valor varia de 0 (para estados produto) até 1 (para estados maximamente emaranhado).

Desta forma até mesmo o emaranhamento, que é um fenômeno intrínseco a sistemas quânticos, pode ser simulado a partir de uma analogia com a óptica linear em que modos não separáveis são análogos aos estados de Bell.

A Concorrência definida pela equação 3.10 é aplicada diretamente à equação 3.1 e pode ser utilizada como critério de análise para dizer quão separável é o modo em questão. Para os modos spin-órbita, a quantidade  $C$  também possui valor limitado entre 0 e 1: para modos separáveis a quantidade  $C$  é nula enquanto para modos maximamente não separáveis  $C$  assume valor igual a um.

O perfil transversal (distribuição de intensidade e a polarização) dos modos spin-órbita não separáveis pode ser vistos na Figura 3.1. Note que estes modos são ortogonais entre si, sendo uma característica fundamental para sua utilização na codificação de q-bits.

Pela Figura 3.1 percebe-se que modos não separáveis possuem um vórtex de polarização. O modo  $\psi_+$  possui polarização radial enquanto  $\phi_+$  possui polarização azimutal. Por fim  $\psi_+$  e  $\phi_+$  possuem combinações de polarização azimutal e radial.

A questão que naturalmente surge em meio a esta analogia é: se a estrutura matemática dos modos spin-órbita não separáveis são análogas a estados de Bell, será que estes modos violam uma desigualdade tipo Bell? Veremos que sim, na próxima Seção.

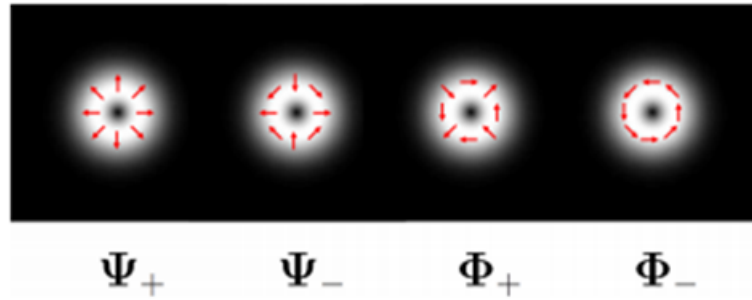


Figura 10 – Perfil transverso dos modos não separáveis. Fonte: (20)

## 3.2 Não separabilidade e emaranhamento em modos bipartidos

Nesta Seção será aprofundada a discussão a respeito dos modos não separáveis da luz e sua analogia com estados quânticos maximamente emaranhados com base na referência (42). Desta forma, serão apresentados mais detalhes sobre modos spin-órbita como o procedimento experimental para sua preparação dos modos spin órbita, a violação da desigualdade de Bell e sua quantização.

### 3.2.1 Preparação estados tipo- Bell

Uma das primeiras técnicas de preparação dos modos maximamente não separáveis usou interferometria (21). Então, a preparação de modos spin-órbita não separáveis pode ser obtida a partir do circuito óptico da Figura 11. O feixe, inicialmente com perfil transverso gaussiano fundamental ( $HG_{00}$ ) e polarização horizontal, é interceptado por uma máscara holográfica que transforma o modo gaussiano no modo Hermite de primeira ordem  $HG_{10}$ . A  $HWP@\theta$  gira a polarização do feixe antes de chegar a um interferômetro de Mach-Zehnder (MZ) modificado, formado por um PBS na entrada e um BS na saída. Assim, a  $HWP@\theta$  possibilita alterar a intensidade transmitida e refletida no PBS na entrada do MZ.

Ajustando o ângulo  $\theta$  da HWP, posicionada antes do interferômetro, para  $22,5^\circ$  têm-se a situação em que a intensidade transmitida e refletida pelo PBS na entrada do Mach-Zehnder são iguais. Em um dos braços do MZ temos um prisma de Dove a  $45^\circ$  que atua no modo transversal transformando  $HG_{10}$  em  $HG_{01}$ . O PZT, uma espécie de cerâmica piezoelétrica que se deforma em resposta a aplicação de uma diferença de potencial elétrico introduzida por uma fonte externa, permite ajustar a diferença de caminho óptico percorrido pelos feixes de cada braço. Assim, ajustando-se a diferença de potencial no PZT para que se tenha uma diferença de caminho nula tem-se a superposição coerente dos feixes de cada braço e o resultado líquido é o modo não separável dado pelas equações 3.2 e 3.3, como pode ser visto na Figura 11.

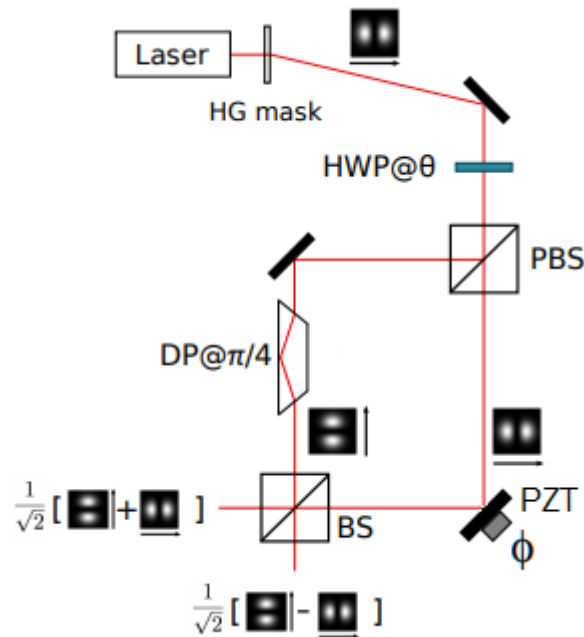


Figura 11 – Circuito para preparação de modos spin órbita. A máscara holográfia produz os modos hermite a partir do feixe laser inicialmente com modo Gaussiano e polarização vertical. O feixe é dividido entre os braços do interferômetro Mach-Zender sendo feitas operações no modo, na atuação do prisma de Dove, e polarização, com a atuação da HWP. O resultado é a produção dos modos não separáveis na saída. Fonte: Adaptado de (42)

O procedimento para preparação de modos não separáveis descrito anteriormente não é único. Atualmente há tecnologias que produzem modos não separáveis a partir de um elemento óptico birrefringente, as chamadas *S-plates*, uma espécie de conversor de polarização que transforma polarizações horizontal (vertical) em polarização radial e azimutal (43).

A busca por análogos de testemunhas de emaranhamento surge espontaneamente em virtude da possibilidade de simular sistemas bipartidos emaranhados a partir da analogia com modos spin-órbita não separáveis. Um dos primeiros testes que possibilitou detectar emaranhamento e estudar as exóticas propriedades dos pares de Bell é conhecido como desigualdade de Bell. Em contraste com sistemas em estados separáveis, pares emaranhados violam a chamada desigualdade de Bell sendo, portanto, uma testemunha de emaranhamento. Dada a sua relevância para o estudo do fenômeno de emaranhamento, na próxima seção será realizada a discussão da desigualdade de Bell e suas implicações no estudo de sistemas quânticos.



### 3.2.2 Desigualdade de Bell

A discussão que conduziu à desigualdade de Bell tem suas origens no famoso paper publicado por Einstein, Podolski e Rosen (EPR) que questionava a completude da Mecânica quântica (44). As exóticas propriedades de estados emaranhados eram aparentemente incompatíveis com a premissa adotada por EPR de que teorias físicas devem obedecer a localidade e, além disso, possuir elementos de realidade. A fim de ilustrar o questionamento proposto, suponha dois fótons que foram direcionados em direções opostas e que se encontram no estado de polarização emaranhado dado por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle). \quad (3.11)$$

Dois analisadores<sup>1</sup> posicionados na direção dos dois fótons que viajam a direções opostas são capazes de registrar dois resultados possíveis aos quais podemos associar os autovalores +1 e -1. Supondo que os analisadores podem estar orientados em duas direções rotuladas pelos ângulos  $a$  e  $b$ , é relativamente simples obter as previsões da MQ para as probabilidades  $P_{\pm}(a)$  e  $P_{\pm}(b)$  e para a distribuição conjunta de probabilidade  $P_{\pm\pm}(a, b)$  dadas, respectivamente, por

$$P_{\pm}(a) = P_{\pm}(b) = \frac{1}{2}, \quad (3.12)$$

$$P_{\pm\pm}(a, b) = \frac{1}{2} \cos^2(b - a). \quad (3.13)$$

Assim, construindo a quantidade conhecida como coeficiente de correlação dada pela expressão (21)

$$M(a, b) = P_{++}(a, b) + P_{--}(a, b) - P_{+-}(a, b) - P_{-+}(a, b), \quad (3.14)$$

e substituindo as previsões da MQ (equações 3.12 e 3.13) obtém-se o resultado expresso como

$$M(a, b) = \cos[2(b - a)]. \quad (3.15)$$

A função de correlação deixa explícito que, apesar dos resultados das medições individuais serem aleatórios, é verificada uma correlação máxima quando os analisadores estão com a mesma orientação ( $a=b$ ). Quando os resultados das medições nos 2 detectores são comparados a correlação se torna evidente.

O trio EPR defendia que essa propriedade de estados emaranhados era uma evidência de que a mecânica quântica era uma teoria incompleta pois não era compatível com os critérios pré estabelecidos que impunha que uma teoria física deveria necessariamente dispor de realidade física e localidade simultaneamente.

<sup>1</sup> O analisador pode ser um filtro polarizador ou até mesmo um PBS.

Em contrapartida o trio forneceu a hipótese de que talvez a natureza não obedeça a leis fundamentalmente probabilísticas e que tal interpretação seria exclusivamente devido a ignorância do experimentador a respeito de variáveis ocultas. Conhecendo esses parâmetros ocultos seria possível recuperar o determinismo que foi abandonado nos postulados da mecânica quântica.

A desigualdade de Bell foi proposta como uma espécie de teste que permite avaliar desvios nas previsões das duas teorias propostas (teoria de variáveis ocultas locais e mecânica quântica). Nesta dissertação, faremos a sua apresentação seguindo a formulação proposta por Clauser, Horne, Shimony and Holt (desigualdade CHSH) (45), conforme referência (21). Consideremos dois observáveis  $A$  e  $B$ , que tem como autovalores  $\pm 1$ . Assumindo a existência de parâmetros ocultos  $\lambda$ , vamos admitir que os resultados das medidas dependem dos parâmetros ocultos e da orientação dos analisadores. Logo,

$$\begin{aligned} A(\lambda, a) &= \pm 1, \\ B(\lambda, b) &= \pm 1. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Considerando que os parâmetros ocultos possuem uma distribuição de probabilidades  $p(\lambda)$ , pode-se imediatamente redefinir a função de correlação dada por

$$M(a, b) = \int p(\lambda) A(\lambda, a) B(\lambda, b) d\lambda. \tag{3.17}$$

Considere a quantidade dada por 3.18. Tendo em vista as restrições nos valores assumidos por  $A(\lambda, a)$  e  $B(\lambda, b)$  (equação 3.16), ocorrerão seis combinações possíveis que resultam nos valores  $\pm 2$  conforme equação 3.19. Considerando quatro direções rotuladas pelas variáveis  $a, a', b$  e  $b'$  define-se a quantidade:

$$s(a, a', b, b') = A(\lambda, a) [B(\lambda, b) - B(\lambda, b')] + A(\lambda, a') [B(\lambda, b) + B(\lambda, b')], \tag{3.18}$$

onde,

$$s(a, a', b, b') = \pm 2. \tag{3.19}$$

O valor médio sobre todos os  $\lambda$  levam à

$$\begin{aligned} S(a, a', b, b') &= \int p(\lambda) s(\lambda, a, a', b, b') d\lambda \\ S(a, a', b, b') &= M(a, b) + M(a', b) + M(a', b') - M(a, b'), \end{aligned} \tag{3.20}$$

onde usamos a definição da função de correlação da equação 3.17. Como os valores de  $s(a, a', b, b')$  estão limitados em  $\pm 2$  seu valor médio também estará limitado, de forma que

$$-2 \leq S(a, a', b, b') \leq 2. \tag{3.21}$$

É importante notar que todas essas ideias foram desenvolvidas sem mencionar mecânica quântica e sem pressupor nenhuma forma particular para a distribuição  $p(\lambda)$ . A única hipótese está no princípio da localidade e do realismo, que servem como base no argumento apresentado por EPR. A questão é que para alguns conjuntos de parâmetros  $a, a', b, b'$  a mecânica quântica prevê a violação da desigualdade CHSH pelos estados emaranhados, sendo a violação máxima obtida a partir da seguinte configuração dos analisadores:

$$\begin{aligned} \theta = \pm \frac{\pi}{8} &\rightarrow S_{máx} = 2\sqrt{2}, \\ \theta = \pm \frac{3\pi}{8} &\rightarrow S_{máx} = -2\sqrt{2}, \end{aligned} \tag{3.22}$$

sendo  $\theta = b - a = a' - b = b' - a'$ . Portanto, a quantidade relevante é a diferença dos ângulos.

A violação da desigualdade CHSH é uma evidência de que qualquer teoria de variáveis ocultas que tente explicar os resultados experimentais não pode apresentar localidade e realismo simultaneamente. Em princípio não localidade implica que a escolha da orientação de um analisador de alguma forma afeta os resultados das medidas no outro analisador e, portanto, qualquer teoria de variáveis ocultas deve ser capaz de explicar este fato. A violação da desigualdade de Bell foi experimentalmente verificada em 1982, no grupo do Prof. Alan Aspect, em Orsay, na França (46) e os resultados obtidos estão de acordo com as previsões da Mecânica Quântica. É importante destacar, no entanto, que a possibilidade de não-localidade, não deve ser interpretada como a possibilidade de comunicação superluminal.

Além das realizações já citadas, a analogia entre óptica linear e mecânica quântica permite a definição de desigualdades tipo Bell que podem ser violadas pelos ditos modos não separáveis e isso foi obtido experimentalmente em 2010, no Grupo de Óptica e Informação Quântica da UFF, liderado pelo Prof. Antônio Zelaquett Khoury (21), e obtido independentemente por Kagawala *et al* (22). Na próxima subseção apresentamos, em linhas gerais, este experimento.

### 3.2.3 Violação de desigualdade tipo-Bell por modos spin-órbita não separáveis

Nessa etapa será discutida a realização experimental encontrada na referência (21) que culminou na verificação desta violação. Considerando a correspondência entre as intensidades normalizadas e probabilidades é possível obter uma desigualdade tipo Bell que é violada por modos spin-órbita não separáveis (21). Podemos definir bases rodadas

para a polarização e o modo transverso

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{e}}_{\alpha+} &= \cos(2\alpha)\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{V}} - \sin(2\alpha)\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{H}}, \\
\hat{\mathbf{e}}_{\alpha-} &= \sin(2\alpha)\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{V}} - \cos(2\alpha)\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{H}}, \\
\psi_{\beta+} &= \cos(2\beta)\psi_{\mathbf{V}}(\mathbf{r}) - \sin(2\beta)\psi_{\mathbf{H}}(\mathbf{r}), \\
\psi_{\beta-} &= \sin(2\beta)\psi_{\mathbf{V}}(\mathbf{r}) - \cos(2\beta)\psi_{\mathbf{H}}(\mathbf{r}),
\end{aligned} \tag{3.23}$$

e reescrever o modo spin-órbita não separável dado pela equação 3.2, em termos da base rodada, como

$$\phi^+(\mathbf{r}) = A [\psi_{\beta+}\hat{\mathbf{e}}_{\alpha+}(\mathbf{r}) + \psi_{\beta-}\hat{\mathbf{e}}_{\alpha+}(\mathbf{r})] + B [\psi_{\beta-}\hat{\mathbf{e}}_{\alpha+}(\mathbf{r}) - \psi_{\beta+}\hat{\mathbf{e}}_{\alpha-}(\mathbf{r})], \tag{3.24}$$

onde

$$\begin{aligned}
A &= \cos(2\alpha)\cos(2\beta) + \sin(2\alpha)\sin(2\beta), \\
B &= \cos(2\alpha)\sin(2\beta) - \sin(2\alpha)\cos(2\beta).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

A função de correlação dada pela equação 3.26 pode ser reformulada como

$$M(\alpha, \beta) = I_{++}(\alpha, \beta) + I_{--}(\alpha, \beta) - I_{+-}(\alpha, \beta) - I_{-+}(\alpha, \beta), \tag{3.26}$$

obtida via substituição das probabilidades pelas intensidades normalizadas  $I_{\pm\pm}(\alpha, \beta)$  associadas aos termos  $\psi_{\beta\pm}(\mathbf{r})\hat{\mathbf{e}}_{\alpha\pm}$ . Com base nas equações (3.20-3.28) obtém-se uma desigualdade tipo Bell a partir das correlações escritas em função das intensidades que é dada por:

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = M(\alpha_1, \beta_1) + M(\alpha_1, \beta_2) + M(\alpha_2, \beta_2) - M(\alpha_2, \beta_1), \tag{3.27}$$

onde usamos a definição da função de correlação da equação 3.17. Como os valores de  $s(a, a', b, b')$  estão limitados em  $\pm 2$  seu valor médio também estará limitado, de forma que

$$-2 \leq S(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \leq 2. \tag{3.28}$$

Nesse caso os ângulos  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  caracterizam a orientação dos analisadores assim como  $a, a', b$  e  $b'$ . O circuito óptico utilizado para investigar a violação da desigualdade tipo Bell proposta pode ser visto na Figura 12.

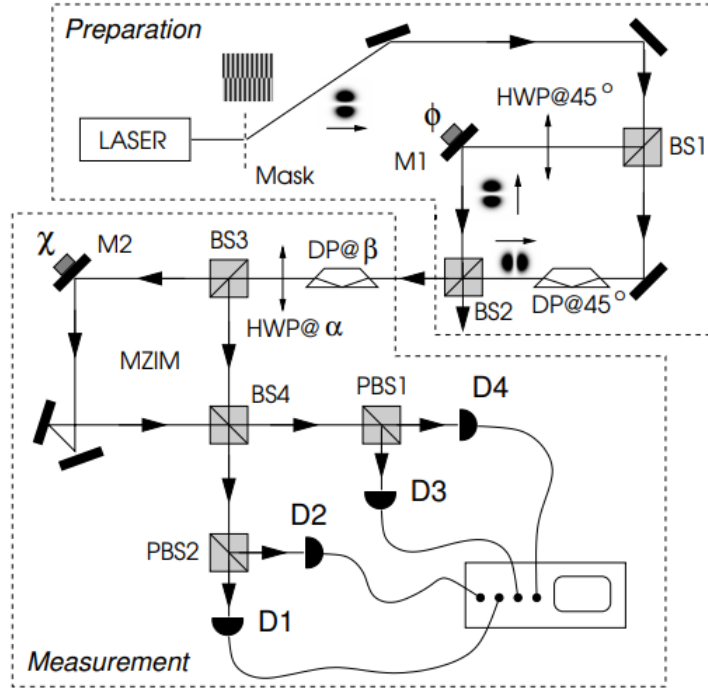


Figura 12 – Circuito óptico empregado para verificar a violação da desigualdade tipo Bell por modos Spin-órbita não separáveis. Fonte: (21)

O circuito óptico pode ser dividido em duas partes: etapa de preparação e etapa de medição. Na preparação utilizou-se um arranjo experimental semelhante ao apresentado na Figura 11. A única diferença está na substituição da  $HWP@\theta$  e o PBS na entrada do MZ por um único BS com coeficientes de transmissão e reflexão iguais. O feixe inicialmente no modo Gaussiano com polarização horizontal. A máscara holográfica atua no modo transversal transformando-o em um modo hermite  $HG_{10}$ . No interferômetro, temos o DP a  $45^\circ$  em um braço no modo e  $HWP@45^\circ$  no outro. O prisma de Dove atua no modo transversal transformando o hermite horizontal em vertical enquanto a  $HWP@45^\circ$  atua transformando polarização horizontal em vertical. O resultado líquido é que o estado na saída do MZ será dado por:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_H(\mathbf{r})\hat{\mathbf{e}}_H + e^{i\phi}\psi_V(\mathbf{r})\hat{\mathbf{e}}_V], \quad (3.29)$$

ou seja, ajustando o PZT para a fase  $\phi = 0$ , obtem-se o modo não separável  $\phi^+$  desejado.

Na etapa de medição o MZIM (MZ com um espelho adicional) funciona como um seletor de paridade que, em conjunto com os PBS na saída, realiza projeções na base  $\{Hh, Hv, Vh, Vv\}$ . O prisma de dove  $DP@\beta$  e a  $HWP@\alpha$  são responsáveis por selecionar a base de medida (nesse caso a base rodada). Para violação máxima, deve-se orientá-los sendo  $\alpha_1 = \pi/16$ ,  $\alpha_2 = 3\pi/16$ ,  $\beta_1 = 0$  e  $\beta_2 = \pi/8$ . Após medir as intensidades e normalizar, basta substituir nas equações 3.26 e 3.27 para verificar a violação da desigualdade. O

resultado experimental obtido foi uma violação com valor médio  $\langle S \rangle = 2,11$  (21). Uma violação ainda maior foi obtida utilizando placa *S-plate* para preparação do modo não separável(20).

Desta forma, vemos como a analogia entre a óptica linear e a mecânica quântica permite estudar artefatos matemáticos de sistemas quânticos utilizando feixes clássicos. Assim, é possível investigar propriedades quânticas a partir de uma montagem experimental mais simples e barata, evitando-se o gasto de tempo com as dificuldades experimentais envolvidas em medições no regime de fotocontagem (21).

### 3.2.4 Quantização dos modos spin-órbita - Emaranhamento de graus de liberdade

Se levarmos em conta que podemos realizar a quantização do campo eletromagnético descrito pelos modos spin-órbita, podemos nos perguntar sobre a sua descrição quântica. Neste subseção apresentamos uma breve discussão baseada nas Referências (47) e (21).

Do ponto de vista da Óptica Quântica o campo eletromagnético é descrito por um operador que pode ser expandido em termos de ondas planas, dado por

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = i \sum_i \sqrt{\frac{\hbar\omega_i}{2\epsilon_0}} \mathbf{f}_i(\mathbf{r}) \hat{a}_i e^{-i\omega_i t}, \quad (3.30)$$

onde  $\hbar$  é a constante de Planck,  $\omega_i$  é a frequência do  $i$ -ésimo modo e  $\epsilon_0$  é a constante de permissividade do vácuo. A amplitude do campo, que caracterizava a máxima intensidade do campo em um dado ponto do espaço no caso clássico, é substituída por um operador de amplitude para cada modo  $\hat{a}_i$ . A quantidade  $\mathbf{f}_i = L^{-\frac{3}{2}} \epsilon_i e^{i\mathbf{k}_i \mathbf{r}}$  é a função de modo espacial normalizada dentro do volume de quantização (cubo cuja aresta mede  $L$ ).

Por simplicidade, considere o caso monomodo em que o campo oscila com uma frequência  $\omega$  específica, de modo que podemos escrever

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\lambda, \sigma} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}} \epsilon_\sigma u_\lambda(\mathbf{r}) \hat{a}_{\lambda, \sigma} e^{-i\omega(t - \frac{z}{c})}. \quad (3.31)$$

O parâmetro  $\sigma$  rotula a polarização do modo enquanto  $\lambda$  rotula a distribuição transversa. Escolhendo como base os modos Hermite-Gauss (HG) teremos  $\lambda = \{m, n\}$  com  $m, n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ . Por outro lado, utilizando os modos Laguerre-Gauss como base tem-se que  $\lambda = \{p, l\}$  com  $p, l = 0, 1, 2, \dots, \infty$ . Desta forma, é possível gerar um espaço com 4 dimensões tomando como base os modos HG de primeira ordem ( $HG_{1,0} \equiv h, HG_{0,1} \equiv v$ ) juntamente com os estados de polarização H e V. Nesse caso, o operador que representa este campo monomodo é dado por

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \psi_h(\mathbf{r}) \epsilon_{\mathbf{H}} \hat{a}_{hH} + \psi_h(\mathbf{r}) \epsilon_{\mathbf{V}} \hat{a}_{hV} + \psi_v(\mathbf{r}) \epsilon_{\mathbf{H}} \hat{a}_{vH} + \psi_v(\mathbf{r}) \epsilon_{\mathbf{V}} \hat{a}_{vV}. \quad (3.32)$$

Outra opção para representar o estado é a base de Bell. A relação entre os operadores do campo escritos na base de Bell e os operadores escritos na base  $\{hH, hV, vH, vV\}$  é dada pela expressão

$$\begin{aligned}\hat{a}_{\psi\pm} &= \frac{\hat{a}_{Hh} \pm \hat{a}_{Vv}}{\sqrt{2}}, \\ \hat{a}_{\phi\pm} &= \frac{\hat{a}_{Hv} \pm \hat{a}_{Vh}}{\sqrt{2}}.\end{aligned}\tag{3.33}$$

Esses operadores de aniquilação estão associados aos modos spin-órbita não separáveis: ao construir o operador deslocamento relativo aos operadores criação  $\hat{a}_{\psi\pm}^\dagger$  e atuar no estado de vácuo, obtêm-se o estado coerente que, para um número macroscópico de fótons, descreve com boa aproximação o campo associado aos modos spin-órbita não separáveis anteriormente estudados via óptica clássica.

A partir dos operadores de aniquilação  $\hat{a}_{\lambda,\sigma}$  e criação  $\hat{a}_{\lambda,\sigma}^\dagger$  de cada modo da base com 4 dimensões são construídos os operadores número  $\hat{n}_{\lambda,\sigma} = \hat{a}_{\lambda,\sigma}^\dagger \hat{a}_{\lambda,\sigma}$  cujo os autovetores geram o espaço de Fock. Em outras palavras, o produto tensorial entre os autoestados do operador número geram um estado de Fock de forma que

$$|\{n\}\rangle = \bigotimes_{\lambda,\sigma} |n_{\lambda,\sigma}\rangle,\tag{3.34}$$

onde o conjunto  $\{n_{\sigma 1, \lambda 1}, n_{\sigma 2, \lambda 1}, \dots\}$  caracteriza o número de ocupação para todos os 4 modos. Assim, como será feito a seguir, autovetores do operador número podem ser utilizados como base na representação de estados do campo.

Nas seções anteriores, um feixe laser foi descrito a partir do eletromagnetismo clássico. Outra possibilidade é descrever um feixe de laser intenso na perspectiva da óptica quântica: no limite do comprimento de coerência, o feixe pode ser tratado como um estado coerente  $|\nu\rangle$  com número médio de fótons macroscópico. A representação da preparação de um estado coerente a partir do vácuo do estado de Fock é

$$|\nu\rangle = e^{-\frac{|\nu|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu^n (a^\dagger)^n |0\rangle}{n!}.\tag{3.35}$$

Podemos utilizar o operador criação dos modos maximamente não separáveis  $a_{\phi^+}^\dagger$ , definidos na equação 3.33, por exemplo, rotulando o operador criação  $a^\dagger \equiv a_{\phi^+}^\dagger$  para representar a criação de um fóton no modo  $\phi^+$ . Assim, considerando a forma de  $a_{\phi^+}^\dagger$  na base  $\{hH, vH, hV, vV\}$ , a geração do modo-spin órbita  $\phi^+$  a partir do estado de vácuo

pode ser representado por

$$\begin{aligned}
|\nu_{\phi+}\rangle &= e^{\frac{|\nu|^2}{2}} \left[ 1 + \nu \hat{a}_{\phi+}^\dagger + \frac{(\nu \hat{a}_{\phi+}^\dagger)^2}{2} + \dots \right] |0\rangle, \\
&= e^{\frac{|\nu|^2}{2}} \left[ 1 + \nu \frac{(\hat{a}_{Hh}^\dagger + \hat{a}_{Vv}^\dagger)}{\sqrt{2}} + \frac{\nu^2}{2} \left( \frac{\hat{a}_{Hh}^\dagger + \hat{a}_{Vv}^\dagger}{\sqrt{2}} \right)^2 + \dots \right] |0\rangle, \\
&= e^{\frac{|\nu|^2}{2}} \left[ |0\rangle + \nu \left( \frac{|1_{Hh}, 0_{Hv}, 0_{Vh}, 0_{Vv}\rangle + |0_{Hh}, 0_{Hv}, 0_{Vh}, 1_{Vv}\rangle}{\sqrt{2}} \right) + \dots \right].
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Pela expressão 3.36, fica evidente que a componente de 1 único fóton do estado coerente exibe emaranhamento. No entanto, um resultado importante diz que, em qualquer decomposição de modos, um estado coerente pode sempre ser escrito com um estado produto (47). Para ilustrar este fato, considere o operador deslocamento que produz o estado coerente  $|u\rangle_{\psi+} |0\rangle_{\psi-}$  conforme a expressão

$$D_{\phi+} = e^{\left( u \hat{a}_{\phi+}^\dagger - u^* \hat{a}_{\phi+} \right)}. \tag{3.37}$$

Dado que os operadores  $\hat{a}_{Hh}$  e  $\hat{a}_{Vv}$  comutam, é possível fatorar o operador deslocamento da equação 3.37 como um produto dos operadores deslocamento relativos aos modos Hh e Vv, de modo que

$$D_{\phi+} = D_{Hh} \left( \frac{u}{\sqrt{2}} \right) D_{Vv} \left( \frac{u}{\sqrt{2}} \right). \tag{3.38}$$

Consequentemente, as duas decomposições dos modos podem ser relacionados via expressão 3.39 que é um estado produto.

$$|\nu_{\psi+}\rangle = |\nu/\sqrt{2}\rangle_{Hh} \otimes |\nu/\sqrt{2}\rangle_{Vv}. \tag{3.39}$$

Apesar de o modo spin órbita não separável violar uma desigualdade tipo Bell, construída em termos da intensidade normalizada (21), não se verifica emaranhamento como visto na expressão 3.39, pois não realizamos medidas no estado de Fock. A coerência é o que permite a violação da desigualdade baseada em intensidades normalizadas: no regime com feixe intenso, cuja distribuição é Poissoniana para o número total de fótons, não se verifica emaranhamento. Para se verificar a violação de tal desigualdade em conjunto com emaranhamento é necessário, além de coerência, dispor de flutuações reduzidas no número de fótons(47).

Vale ressaltar que isso pode ser feito apenas trocando a fonte de luz (uma fonte de fótons único no lugar do laser) e o sistema de detecção (contadores de fótons no lugar de fotodetetores), mantendo-se todo o restante do aparato, uma vez que os elementos ópticos



agem da mesma forma tanto em fótons como em amplitudes clássicas. Por este motivo, muitos trabalhos apontam este cenário de modos não separáveis como plataforma para testes e simulações de protocolos quânticos.

Desta forma, apresentar uma proposta de geração de análogos spin-órbita de diferentes estados quânticos, como os estados-X, é uma contribuição importante para essa área de pesquisa extremamente ativa atualmente.

O estudo e caracterização dos estados-X se dão a partir da sua matriz densidade, obtida apenas por meio da tomografia de estados. Assim, no próximo capítulo, apresentaremos sucintamente a tomografia de estados de 1 e 2 q-bits bem como a particularização desta para os modos spin-órbita.



## 4 Tomografia de modos spin-órbita

Nessa seção será discutido o processo de caracterização de estados quânticos com base na referência (38). A tomografia é um processo de reconstrução de estados quânticos a partir diversas medidas em diferentes bases. Neste sentido, a caracterização de estados quânticos é um procedimento análogo a uma imagem de tomografia em que é registrada a imagem de um objeto em diferentes direções para, posteriormente, construir um modelo tridimensional. O objetivo da tomografia consiste, portanto, na obtenção da matriz densidade de um sistema quântico cujo estado é desconhecido. Para os propósitos desta dissertação será suficiente descrever esse processo para sistemas de um único q-bit e sistemas com dois q-bits.

É importante notar que mesmo para o caso mais simples de um único q-bit em um estado puro, medidas projetivas em uma única base e/ou em um único estado não são capazes de determinar o estado do sistema anterior a medida. De fato, é impossível determinar fases relativas a partir de medida projetivas, visto que este processo implica em perda de informação <sup>1</sup>. Para determinar o estado de um sistema é necessário preparar uma diversidade de sistemas da mesma forma (um ensemble de estados) e submetê-los a medidas projetivas nas diferentes bases convenientemente escolhidas para a tomografia. Os resultados das medidas projetivas nas bases apropriadas permitem o cálculo dos parâmetros de Stokes via equação 2.18. Nesse sentido, determinar os parâmetros de Stokes significa caracterizar o estado em questão.

### 4.1 Tomografia de um q-bit

Para realizar a tomografia de um q-bit precisamos determinar os parâmetros de Stokes que caracterizam seu operador densidade. Esta tarefa é feita utilizando como base as equações (2.18-2.21) que relacionam o conjunto  $\{S_i\}$  com as probabilidades de medida em diferentes bases. Consequentemente, para realizar a caracterização de estados será necessário realizar medidas projetivas nas diferentes bases conforme visto na tabela 1.

Como exemplo considere o caso em que se deseja caracterizar o estado de um q-bit que, apesar do experimentador eventualmente não conhecer qual é o estado do sistema, foi

<sup>1</sup> Para exemplificar, considere um estado em superposição expandido na base de autovetores de um observável A dada por  $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots, |a_i\rangle\}$ . A medição do observável A implica no colapso do estado quântico para um dos autoestados possíveis  $|a_i\rangle$  destruindo o estado de superposição. Assim, a projeção em uma única base é incapaz de determinar a fase relativa entre os kets em superposição impossibilitando ao experimentador conhecer o estado do sistema anterior a medida. Nesse caso diz-se que a informação sobre qual era o estado do sistema anteriormente a medida foi destruída no processo de medição.

Tabela 1 – Síntese dos parâmetros de Stokes e as respectivas bases de medida. Cada base é definida a partir dos estados produto conforme mencionado anteriormente na seção 2.4. Nesse caso  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  é a base computacional, enquanto  $\{|R\rangle, |L\rangle\}$  e  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  são as bases descritas pelas equações (2.22-2.25).

Parâmetro de Stokes	Base de medida
S0	$\{ 0\rangle,  1\rangle\}$
S1	$\{ +\rangle,  -\rangle\}$
S2	$\{ R\rangle,  L\rangle\}$
S3	$\{ 0\rangle,  1\rangle\}$

preparado inicialmente em um estado puro dado por: <sup>2</sup>.

$$|\gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle). \quad (4.1)$$

A previsão para os resultados das medidas projetivas pode ser calculada via regra de Born sendo dados por:

$$P_{|0\rangle} = |\langle 0|\psi\rangle|^2 = 0,5, \quad (4.2)$$

$$P_{|1\rangle} = |\langle 1|\psi\rangle|^2 = 0,5, \quad (4.3)$$

$$P_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+i|1\rangle)} = \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| - i\langle 1|)|\psi\rangle \right|^2 = 0, \quad (4.4)$$

$$P_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-i|1\rangle)} = \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| + i\langle 1|)|\psi\rangle \right|^2 = 1, \quad (4.5)$$

$$P_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)} = \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| + \langle 1|)|\psi\rangle \right|^2 = 0,5, \quad (4.6)$$

$$P_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)} = \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| - \langle 1|)|\psi\rangle \right|^2 = 0,5. \quad (4.7)$$

Os parâmetros de Stokes são calculados a partir das expressões 2.18 - 2.21 resultando em

<sup>2</sup> Note que não foi feita nenhuma menção ao sistema físico utilizado na codificação podendo ser qualquer sistema físico que permita utilizar um subespaço com 2 níveis para codificação de q-bits. Desta forma, o esquema experimental para as medições vai depender do sistema físico em questão.

$$S_0 = P_{|0\rangle} + P_{|1\rangle} = 1, \quad (4.8)$$

$$S_1 = P_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)} - P_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)} = 0, \quad (4.9)$$

$$S_2 = P_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+i|1\rangle)} - P_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-i|1\rangle)} = 1, \quad (4.10)$$

$$S_3 = P_{|0\rangle} - P_{|1\rangle} = 0, \quad (4.11)$$

e, portanto, podemos imediatamente escrever a matriz densidade atribuída ao estado em questão como <sup>3</sup>

$$\rho = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_2) = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Note que as matrizes  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  não aparecem na expressão da matriz densidade obtida visto que os parâmetros de Stokes associados ( $S_1$  e  $S_3$ ) são nulos. Embora o fato de que matrizes densidade de estados mistos não possuem uma representação unívoca <sup>4</sup> (1), este procedimento não está restrito a estados puros. Assim, a tomografia é um procedimento geral que pode ser utilizado para caracterizar, inclusive, estados mistos.

## 4.2 Tomografia de q-bits codificados em graus de liberdade de um feixe laser

É interessante exemplificar a implementação do análogo clássico para o procedimento de tomografia de q-bits codificados na polarização e modos transversos de um feixe laser. O formalismo de Jones (31) permite elaborar um arranjo experimental para simular o processo de tomografia: elementos ópticos com matrizes de Jones apropriadas são utilizados para realizar a projeção nas diferentes bases de interesse.

Como o procedimento de tomografia descrito anteriormente não faz menção a nenhum sistema físico específico, a tomografia de polarização e modos transversos poderá ser tratada em uma mesma estrutura teórica. A diferença está na implementação experimental, mais especificamente, no que diz respeito aos elementos ópticos que devem ser empregados para a escolha das bases de medida.

<sup>3</sup> É importante dar destaque ao fato de que não é necessário que o experimentador conheça o estado do sistema. Na verdade, a utilidade do procedimento de caracterização está na possibilidade de obter a matriz densidade até então desconhecida. Desta forma, ao invés de calcular as probabilidades de medida, estas serão medidas a partir de um esquema experimental apropriado para o sistema físico em questão.

<sup>4</sup> Em contraste com estados puros, há uma certa ambiguidade na representação de matrizes densidade de estados mistos: uma mesma matriz densidade pode representar diferentes ensembles.

### 4.2.1 Tomografia de q-bits codificados na polarização de um feixe laser

Para ilustrar a tomografia de q-bits codificados na polarização considere a codificação estabelecida nas as equações 2.36 e 2.37. Como dito anteriormente, intensidades normalizadas vão cumprir o papel de probabilidade nesta analogia.

A caracterização de q-bits codificados na polarização de um feixe depende da determinação dos parâmetros de Stokes que pode ser realizada via medidas projetivas nas bases  $\{|H\rangle, |V\rangle\}$  (base computacional),  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  e  $\{|R\rangle, |L\rangle\}$ . Sendo assim, o esquema experimental que permite a medição nestas diferentes bases é visto na Figura 13.

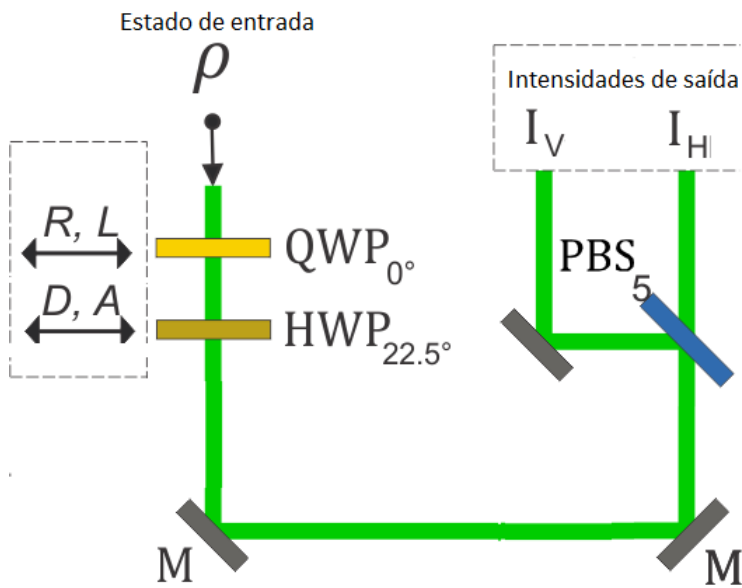


Figura 13 – Esquema experimental para implementação do análogo clássico da tomografia de estados quânticos para q-bits codificados na polarização de um feixe laser.

A QWP e a HWP são necessárias para selecionar a base de medida sendo a seta abaixo destes elementos é indicativo de que estes podem ser introduzidos e retirados dependendo da base de medida escolhida. A tabela 2 relaciona os parâmetros de Stokes, as bases de medida e os respectivos elementos ópticos associados.

Tabela 2 – Relação entre os dispositivos ópticos, bases de medidas e parâmetros de Stokes a serem determinados para tomografia de um sistema com 2 q-bits.

Parâmetro de Stokes	Base de medida	Dispositivos ópticos
S0	$\{ H\rangle,  V\rangle\}$	PBS
S1	$\{ +\rangle,  -\rangle\}$	PBS + HWP@45°
S2	$\{ R\rangle,  L\rangle\}$	PBS + HWP@4° + QWP@22,5°
S3	$\{ H\rangle,  V\rangle\}$	PBS

O elemento PBS estará presente em todas as medidas e sozinho faz medidas projetivas na base computacional  $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ <sup>5</sup>. Assim, para medir na base computacional, deixa-se apenas o PBS no circuito medindo-se as intensidades nas saídas correspondentes a polarização horizontal (equivalente ao estado  $|0\rangle$ ) e vertical (equivalente ao estado  $|1\rangle$ ). Nesse caso as probabilidades serão obtidas indiretamente pelas intensidades normalizadas e, portanto, sendo dadas por:

$$P_{|0\rangle} = \frac{I_H}{I_{total}}, \quad (4.13)$$

$$P_{|1\rangle} = \frac{I_V}{I_{total}}, \quad (4.14)$$

onde  $I_{total} = I_H + I_V$ .

O próximo passo é medir nas bases  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ , a partir da combinação da HWP com eixo rápido a  $45^\circ$  em relação a horizontal<sup>6</sup> e o PBS, e  $\{|R\rangle, |L\rangle\}$ , com a combinação HWP a  $45^\circ$ , QWP a  $22,5^\circ$  e PBS. As placas de onda são fundamentais, cumprindo o papel de estabelecer o mapeamento

$$\begin{aligned} |+\rangle &\rightarrow |H\rangle, \\ |-\rangle &\rightarrow |V\rangle, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} |R\rangle &\rightarrow |H\rangle, \\ |L\rangle &\rightarrow |V\rangle, \end{aligned} \quad (4.16)$$

para medir nas bases  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  e  $\{|R\rangle, |L\rangle\}$ , respectivamente.

Assim, a combinação HWP + PBS é equivalente a uma medida projetiva na base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ , ou seja, este conjunto é capaz de transmitir (refletir) polarização diagonal (polarização anti-diagonal). Em outras palavras a configuração HWP + PBS se comporta como um PBS que seleciona entre polarização diagonal e anti-diagonal. Este mesmo raciocínio se aplica na combinação entre QWP + HWP + PBS para seleção entre polarização circularmente polarizada à direita e circularmente polarizada à esquerda.

As probabilidades de medida nessas bases podem ser obtidas da mesma forma que as medidas na base computacional e são dadas por

$$P_{|+\rangle} = \frac{I_+}{I_{total}}, \quad (4.17)$$

<sup>5</sup> Como visto anteriormente, estados de polarização horizontal (vertical) são transmitidos (refletidos)

<sup>6</sup> Todos os ângulos das placas de onda são tomados em relação a horizontal e a partir de agora este detalhe será omitido.

$$P_{|- \rangle} = \frac{I_-}{I_{total}}, \quad (4.18)$$

$$P_{|R \rangle} = \frac{I_R}{I_{total}}, \quad (4.19)$$

$$P_{|L \rangle} = \frac{I_L}{I_{total}}. \quad (4.20)$$

Tendo obtido as probabilidades medidas basta substituir nas equações 2.18-2.21 e determinar os parâmetros de Stokes. Substituindo os parâmetros de Stokes na expressão 2.13 obtém-se a matriz densidade que caracteriza o estado do q-bit codificado na polarização.

#### 4.2.2 Tomografia de q-bits codificados nos modos transversos de um feixe laser

Nesta etapa será discutido o procedimento de caracterização de q-bits codificados no modo modo transverso. Considerando a codificação expressa nas equações (2.38-2.39) a extrapolação do processo de tomografia para q-bits para os modos é imediata: realizando-se medidas projetivas do modo transverso nas bases  $\{|h\rangle, |v\rangle\}$ ,  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  e  $\{|r\rangle, |l\rangle\}$  obtêm-se os parâmetros de Stokes que caracterizam o estado em questão (tabela 1). O aparato experimental necessário para realizar tais medidas pode ser visto na Figura 14.

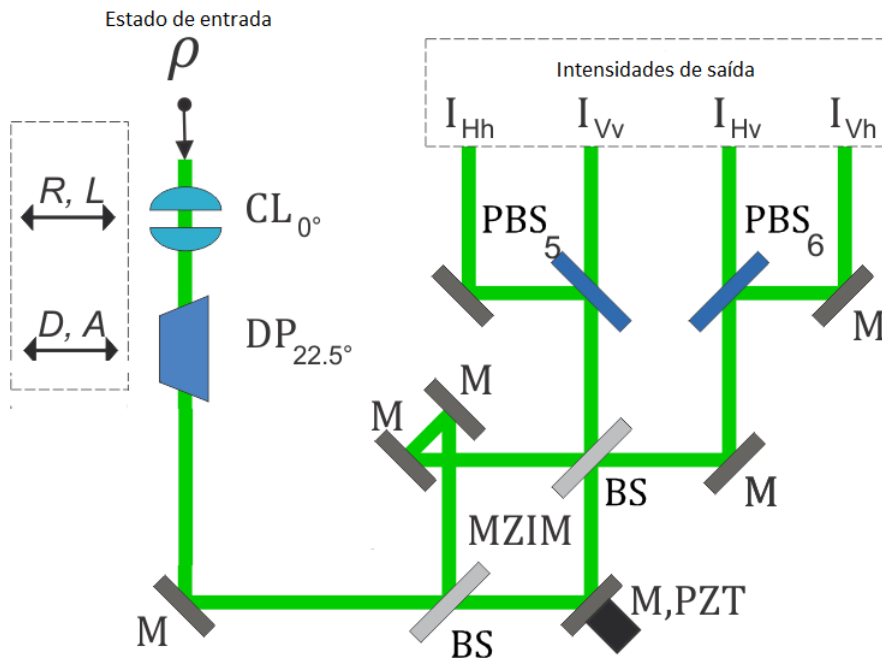


Figura 14 – Esquema experimental para implementação do análogo clássico da tomografia de estados quânticos para o q-bits codificados nos modos transversos de um feixe laser.



O interferômetro Mach-Zehnder com espelho adicional (MZIM) (48) atua como seletor de paridade que, em conjunto de PBS em sua saída, projeta na base computacional  $\{|Hh\rangle, |Hv\rangle, |Vh\rangle, |Vv\rangle\}$ <sup>7</sup>. O conversor de modo formado pelas duas lentes cilíndricas idênticas situadas a uma distância  $d = \sqrt{2}f$  uma da outra, sendo  $f$  a distância focal, em conjunto com o prisma de Dove (DP) formando um ângulo de  $22,5^\circ$  cumprem o papel de selecionar a base de medida assim como a HWP e a QWP no caso da polarização. A atuação do conversor de modo e do prisma de Dove é responsável pelo mapeamento expresso nas equações 4.15 e 4.16 no espaço de q-bits codificados nos modos transversos.

O prisma de Dove (DP) a  $22,5^\circ$  tem sua atuação no modo transversal modelado pela mesma matriz de Jones da HWP a  $45^\circ$  atuando na polarização. Por outro lado, o conversor de modo atua no modo como a QWP a  $22,5^\circ$  possuindo as mesmas matrizes de Jones mas que atuam em espaços distintos.

O conversor de modo e o prisma de Dove serão inseridos e retirados do circuito conforme a escolha da base de medida. A tabela 3 mostra os parâmetros de Stokes a determinar relacionando com a base de medida e os elementos ópticos necessários.

Tabela 3 – Resumo de todas informações relevantes para realização da tomografia de q-bits codificados na polarização.

Parâmetro de Stokes	Base de medida	Dispositivos ópticos
S0	$\{ h\rangle,  v\rangle\}$	MZIM + PBS
S1	$\{ +\rangle,  -\rangle\}$	MZIM + PBS + DP@ $22,5^\circ$
S2	$\{ r\rangle,  l\rangle\}$	MZIM + PBS + DP@ $22,5^\circ$ + CL@ $0^\circ$
S3	$\{ h\rangle,  v\rangle\}$	MZIM + PBS

## 4.3 Tomografia de 2 q-bits

Nesta etapa será realizada a discussão do procedimento de tomografia incluindo sistemas bipartidos. Estados de sistemas com 2 q-bits podem ser representados de forma generalizada a partir da equação 2.29. A essência do procedimento continua a mesma: A partir de medidas projetivas em diferentes bases determina-se os parâmetros de Stokes caracterizando o estado. Desta forma, primeiro precisamos levar em conta as relações entre os parâmetros de Stokes e as probabilidades associadas às bases de medida que podem ser

<sup>7</sup> Note que se trata de uma medida na base  $\{|Hh\rangle, |Hv\rangle, |Vh\rangle, |Vv\rangle\}$  que, em princípio, inclui o grau de liberdade de polarização. Assumindo que, nesse caso, a polarização do feixe não se altera ao longo do circuito, este grau de liberdade pode ser ignorado e a medida pode ser encarada como a projeção do modo transversal na base  $\{|h\rangle, |v\rangle\}$ .

Para realização da tomografia do modo transversal sem que haja projeção na polarização deve-se adicionar a um dos braços do MZIM uma placa HWP com ângulo de  $0^\circ$  (49), ou seja, atua no modo analogamente a um dispositivo PBS atuando no estado de polarização. A HWP em um dos braços do interferômetro é necessária para que o efeito sob a polarização seja nulo dando origem a um processo de filtragem apenas no modo.

vistas na equação 2.30. O índice "i" diz respeito ao primeiro q-bit, "j" ao segundo e ambos assumem valores que vão de 0 a 3. Assim, para 2 q-bits, temos 16 parâmetros de Stokes a determinar para que o estado seja completamente caracterizado. Estes parâmetros e as respectivas bases de medida podem ser vistas na tabela 4.

Tabela 4 – Síntese dos parâmetros de Stokes e as respectivas bases de medida. Cada base é definida a partir dos estados produto conforme mencionado anteriormente na seção 2.4. Nesse caso  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  é a base computacional, enquanto  $\{|R\rangle, |L\rangle\}$  e  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  são as bases descritas pelas equações (2.22-2.25).

(i,j)	Base de medida
(0,0);(3,0)	$\{ 00\rangle,  01\rangle,  10\rangle,  11\rangle\}$
(0,1);(3,1)	$\{ 0+\rangle,  0-\rangle,  1+\rangle,  1-\rangle\}$
(0,2);(3,2)	$\{ 0R\rangle,  0L\rangle,  1R\rangle,  1L\rangle\}$
(0,3);(3,3)	$\{ 00\rangle,  01\rangle,  10\rangle,  11\rangle\}$
(1,0)	$\{ +0\rangle,  +1\rangle,  -0\rangle,  -1\rangle\}$
(1,1)	$\{ ++\rangle,  +-\rangle,  -+\rangle,  --\rangle\}$
(1,2)	$\{ +R\rangle,  +L\rangle,  -R\rangle,  -L\rangle\}$
(1,3)	$\{ +0\rangle,  +1\rangle,  -0\rangle,  -1\rangle\}$
(2,0)	$\{ R0\rangle,  R1\rangle,  L0\rangle,  L1\rangle\}$
(2,1)	$\{ R+\rangle,  R-\rangle,  L+\rangle,  L-\rangle\}$
(2,2)	$\{ RR\rangle,  RL\rangle,  LR\rangle,  LL\rangle\}$
(2,3)	$\{ R0\rangle,  R1\rangle,  L1\rangle,  L1\rangle\}$

A partir do resultado das medidas projetivas nas diferentes bases e as expressões para os parâmetros de Stokes em função das probabilidades de medição para cada resultado, define-se o processo de caracterização de um estado arbitrário de 2 q-bits: medidas projetivas nas diferentes bases fornecem as probabilidades que, por sua vez, são utilizadas para obter os parâmetros de Stokes via equação 2.30. Finalmente, inserindo os parâmetros de Stokes na equação 2.29 determina-se o operador densidade que descreve a estatística de medições do sistema em questão.

## 4.4 Tomografia de modos spin-órbita

Após discutir a tomografia de um sistema de dois q-bits o próximo passo é extrapolar para analogia com a óptica clássica descrevendo o processo de caracterização de estados de q-bits codificados em modos spin-órbita. Para implementação da tomografia de um sistema bipartido codificado na polarização e no modo transversal basta juntar os procedimentos individualmente descritos anteriormente para a polarização e modos transversos. Assim, basta utilizar os mesmos dispositivos citados anteriormente com a mesma associação e configuração de ângulos. O esquema experimental que permite a caracterização de q-bits codificados em modos spin-órbita pode ser visto na Figura 15.

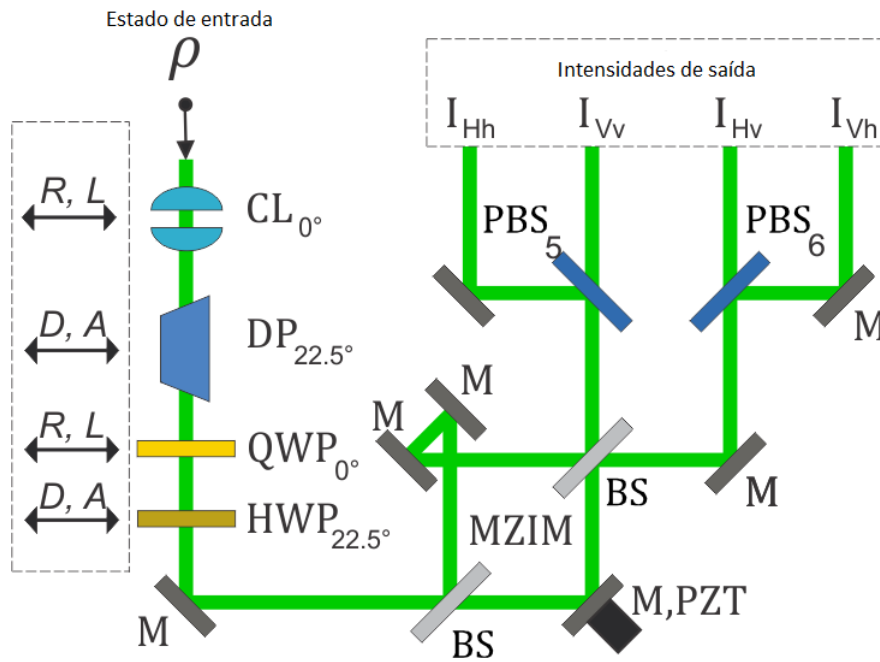


Figura 15 – Esquema experimental para implementação do análogo clássico da tomografia de estados quânticos de dois q-bits codificados na polarização e nos modos transversos de um feixe laser. As setas ao lado dos dispositivos CL, DP, QWP e HWP indicam que estes são inseridos e retirados do circuito conforme a base de medida escolhida.

Portanto, o estado do sistema pode ser obtido a partir de operações locais no modo transversal e na polarização. Nesse caso as probabilidades continuam sendo obtidas via intensidade normalizada medida na saída do PBS após o MZIM e os parâmetros de Stokes serão calculados via equação 2.30. A relação entre os parâmetros de Stokes, as bases de medida e os dispositivos ópticos necessários para a escolha da base é dada pela Tabela 5.

Note que o número de medidas projetivas necessárias cresce consideravelmente e a razão disso reside na necessidade de se realizar medidas nas diferentes bases tanto do modo quanto da polarização.

Medindo a intensidade na saída e normalizando para as diversas configurações do circuito da Figura 15, obtemos as probabilidades associadas à medida projetiva em questão. Com as probabilidades medidas podemos calcular os parâmetros de Stokes via equação 2.30. Para ilustrar este procedimento vamos considerar determinação dos parâmetros  $S_{00}, S_{03}, S_{30}, S_{33}$  que, por meio da equação 2.30, podem ser relacionados com

Tabela 5 – Relação entre os parâmetros de Stokes a ser determinados, as bases de medida e os dispositivos ópticos necessários para a escolha da base. Cada base é definida a partir dos estados produto conforme mencionado anteriormente na seção 2.4. Nesse caso  $\{|H\rangle, |V\rangle\}$  é a base computacional, enquanto  $\{|R\rangle, |L\rangle\}$  e  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  são as bases descritas pelas equações (2.22-2.25). O primeiro q-bit está codificado na polarização enquanto o segundo está codificado no modo transversal. Para facilitar a leitura o q-bit codificado na polarização (modo transversal) está representado com letra maiúscula (minúscula).

(i,j)	Base de medida	
(0,0);(3,0)	$\{ Hh\rangle,  Hv\rangle,  Vh\rangle,  Vv\rangle\}$	MZIM + PBS
(0,1);(3,1)	$\{ H+\rangle,  H-\rangle,  V+\rangle,  V-\rangle\}$	DP + MZIM + PBS
(0,2);(3,2)	$\{ Hr\rangle,  Hl\rangle,  Vl\rangle,  Vl\rangle\}$	MZIM + PBS + CL + DP + MZIM + PBS
(0,3);(3,3)	$\{ Hh\rangle,  Hv\rangle,  Vh\rangle,  Vv\rangle\}$	MZIM + PBS
(1,0)	$\{ +h\rangle,  +v\rangle,  -h\rangle,  -v\rangle\}$	HWP + MZIM + PBS
(1,1)	$\{ ++\rangle,  +-\rangle,  -+\rangle,  --\rangle\}$	DP + HWP + MZIM + PBS
(1,2)	$\{ +r\rangle,  +l\rangle,  -r\rangle,  -l\rangle\}$	CL + DP + HWP + MZIM + PBS
(1,3)	$\{ +h\rangle,  +v\rangle,  -h\rangle,  -v\rangle\}$	HWP + MZIM + PBS
(2,0)	$\{ Rh\rangle,  Rv\rangle,  Lh\rangle,  Lv\rangle\}$	QWP + HWP + MZIM + PBS
(2,1)	$\{ R+\rangle,  R-\rangle,  L+\rangle,  L-\rangle\}$	DP + QWP + HWP + MZIM + PBS
(2,2)	$\{ Rr\rangle,  Rl\rangle,  Lr\rangle,  Ll\rangle\}$	CL + DP + QWP + HWP + MZIM + PBS
(2,3)	$\{ Rh\rangle,  Rv\rangle,  Lh\rangle,  Lv\rangle\}$	QWP + HWP + MZIM + PBS

as probabilidades de saída por

$$\begin{aligned}
S_{00} &= P_{|00\rangle} + P_{|01\rangle} + P_{|10\rangle} + P_{|11\rangle}, \\
S_{03} &= P_{|00\rangle} - P_{|01\rangle} + P_{|10\rangle} - P_{|11\rangle}, \\
S_{30} &= P_{|00\rangle} + P_{|01\rangle} - P_{|10\rangle} - P_{|11\rangle}, \\
S_{33} &= P_{|00\rangle} - P_{|01\rangle} - P_{|10\rangle} + P_{|11\rangle}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Vemos imediatamente que para determiná-los será necessário medir na base computacional  $\{|Hh\rangle, |Hv\rangle, |Vh\rangle, |Vv\rangle\}$  pois tais parâmetros dependem das probabilidades de medida nesta base. Para isso o circuito deverá ser composto por MZIM + PBS conforme consta na primeira linha da Tabela 5. Medindo a intensidade de saída e normalizando, basta substituir na equação 4.21 para determinar os parâmetros de Stokes associados. Essa linha de raciocínio se estende para os demais parâmetros de Stokes.

O procedimento descrito acima permite caracterizar qualquer estado de um sistema bipartido de q-bits codificados no modo transversal e na polarização e, naturalmente, assume um papel fundamental na proposta para caracterização de estados tipo X codificado em modos spin-órbita. Após discutir a caracterização de modos spin-órbita é possível avançar e discutir a proposta para geração e caracterização de Estados X.

## 5 Proposta de circuito óptico para geração do análogo spin-órbita de estados X

Neste capítulo será realizada a discussão dos conceitos fundamentais relacionados aos estados X para, em seguida, apresentar uma proposta experimental para simular sua preparação e caracterização utilizando modos spin-órbita. Serão apresentados também os resultados obtidos na simulação computacional dos circuitos de preparação e caracterização para o estado de Werner, um estado X particular.

### 5.1 Estados X

Os estados tipo X formam um conjunto que abrange uma variedade de estados quânticos mistos para sistemas bipartidos que são protagonistas em investigações na área de informação e computação quântica. Nesta classe estão contidos estados separáveis, estados maximamente emaranhados (como os estados de Bell) e estados correlacionados parcialmente mistos (por exemplo, os estados de Werner). Dada sua importância para o presente trabalho, neste capítulo serão discutidas algumas das propriedades fundamentais dos estados X com base nas referências (50) e (10).

A matriz densidade associada a estados tipo X, escrita na base computacional  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$  possui um formato que lembra uma letra "X", com elementos não nulos apenas na diagonal principal e na anti-diagonal sendo dada por

$$\rho_X = \begin{bmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14}^* \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{23}^* & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{14}^* & 0 & 0 & \rho_{44} \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Para que a matriz densidade expressa na equação 5.1 represente um estado físico é necessário que a condição de traço unitário e positividade representados por  $\sum_{i=1}^4 \rho_{ii} = 1$ ,  $\rho_{11}\rho_{44} \geq |\rho_{14}|^2$  e  $\rho_{22}\rho_{33} \geq |\rho_{23}|^2$ , respectivamente, sejam respeitadas. Os elementos da diagonal são reais enquanto  $\rho_{14}$  e  $\rho_{23}$  são geralmente complexos. Uma parametrização conveniente, conhecida como parametrização de Fano, consiste em escrever a matriz densidade de estados X em função dos operadores de Pauli que será dada por

$$\hat{\rho}_X = \frac{1}{4}(I \otimes I + \sum_{i=1}^3 c_i \sigma_i \otimes \sigma_i + c_4 I \otimes \sigma_3 + c_5 \sigma_3 \otimes I). \quad (5.2)$$

As relações entre os coeficientes  $\{c_i\}$  e os elementos da matriz densidade expressa na equação 5.1 são dadas por

$$c_1 = Tr(\sigma_1 \otimes \sigma_1 \rho_X) = 2(\rho_{32} + \rho_{41}), \quad (5.3)$$

$$c_2 = Tr(\sigma_2 \otimes \sigma_2 \rho_X) = 2(\rho_{32} - \rho_{41}), \quad (5.4)$$

$$c_3 = Tr(\sigma_3 \otimes \sigma_3 \rho_X) = 1 - 2(\rho_{22} - \rho_{33}), \quad (5.5)$$

$$c_4 = Tr(I \otimes \sigma_3 \rho_X) = 2(\rho_{11} + \rho_{33}) - 1, \quad (5.6)$$

$$c_5 = Tr(\sigma_3 \otimes I \rho_X) = 2(\rho_{11} + \rho_{22}) - 1. \quad (5.7)$$

Note que com esta parametrização as matrizes reduzidas, que dizem respeito a estatística de medições de cada subsistema individualmente, podem ser obtidas facilmente tomando-se o traço parcial: nesse caso para obter a matriz reduzida associada ao subsistema A(B) basta tomar o traço do operador de Pauli associado ao sistema B(A). O traço das matrizes de Pauli são nulos enquanto a da matriz identidade vale 2. Assim os operadores densidade reduzido serão dados por

$$\begin{aligned} \rho_A &= tr_B(\rho_X) = \frac{1}{2}(I + c_5\sigma_3), \\ \rho_B &= tr_A(\rho_X) = \frac{1}{2}(I + c_4\sigma_3). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Outra vantagem que pode ser verificada imediatamente consiste no fato de as matrizes reduzidas obtidas já serem diagonais na base computacional. A partir da escolha dos coeficientes são obtidos diversos estados de interesse físico. Por exemplo, escolhendo-se  $c_5 = c_4 = 0$  temos os estados Bell Diagonal que, na representação de Fano, é expresso por

$$\rho^{Bell} = \frac{1}{4}[I \otimes I + \mathbf{c} \cdot (\sigma \otimes \sigma)], \quad (5.9)$$

e possui representação matricial conforme equação 5.10 dada por

$$\rho_X^{Bell} = \begin{bmatrix} 1 + c_3 & 0 & 0 & c_1 - c_2 \\ 0 & 1 - c_3 & c_1 + c_2 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 & 1 - c_3 & 0 \\ c_1 - c_2 & 0 & 0 & 1 + c_3 \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

onde  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  e  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ . Estados Bell diagonal são assim chamados por serem diagonais na base de Bell.

Outro caso particular de interesse para informação e computação quântica são os ditos estados de Werner (51), obtidos via mistura entre um estado completamente misto e estados de Bell. O operador densidade associado ao estado de Werner é dado por

$$\rho_W = (1 - a)\frac{I}{4} + a|\phi_i\rangle\langle\phi_i|, \quad (5.11)$$

onde  $|\phi_i\rangle$  é um estado de Bell dado por

$$|\psi_i\rangle = (I \otimes \sigma_i) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) \right), \quad (5.12)$$

sendo  $\sigma_i$  o operador de Pauli associado ao estado de Bell  $|\psi_i\rangle$ . Note, portanto, que todos os estados de Bell podem ser obtidos aplicando-se operações locais em um dos subsistemas de um sistema bipartido que se encontra no estado  $|\phi_+\rangle$  dado pela equação 3.8. Neste caso o parâmetro "a" pode ser variado no intervalo  $0 \leq a \leq 1$  a fim de obter um contínuo de estados que varia desde um estado completamente misto ( $a = 0$ ) até um estado maximamente emaranhado ( $a = 1$ ).

Os estados de Werner, por se tratar de uma mistura estatística entre um estado completamente misto com um estado de Bell, podem ser codificados em modos spin-órbita. Podemos, por exemplo, explorar a analogia entre estados de Bell e os modos não separáveis e preparar estados completamente mistos a partir da superposição incoerente de feixes laser oriundos de fontes independentes. Nessa analogia a coerência óptica faz o papel da coerência quântica: por não haver correlação de fase entre os dois feixes (são provenientes de fontes independentes) o resultado líquido desta soma é a uma mistura estatística.

Fazendo a superposição do estado completamente misto com o estado de Bell, ambos codificados em modos spin-órbita, obtemos um estado de Werner. Note que podemos ajustar o parâmetro "a" da equação 5.11 ao variar as intensidades a fim de controlar as populações em cada estado.

Desta forma, após definir os estados tipo X e discutir casos particulares de relevância para informação e computação quântica, vamos avançar e discutir na próxima seção uma proposta de preparação para estados X via codificação de q-bits em modos spin órbita de um feixe laser intenso.

## 5.2 Preparação de estados X a partir de modos spin-órbita

Para a preparação do análogo de um estado tipo X geral (Equação 5.1) utilizando modos spin-órbita serão necessário 8 feixes de laser independentes conforme exposto na

Figura 16. Como já visto anteriormente, a necessidade de serem independentes decorre do fato de que uma mistura estatística não dispõe de correlação de fase e, portanto, para simular esses estados é necessário que os feixes sejam oriundos de fontes independentes. Estes estados são simulados a partir da codificação de q-bits na polarização e no modo transversal de um feixe laser sendo a base computacional a mesma expressa nas equações (2.36-2.43).

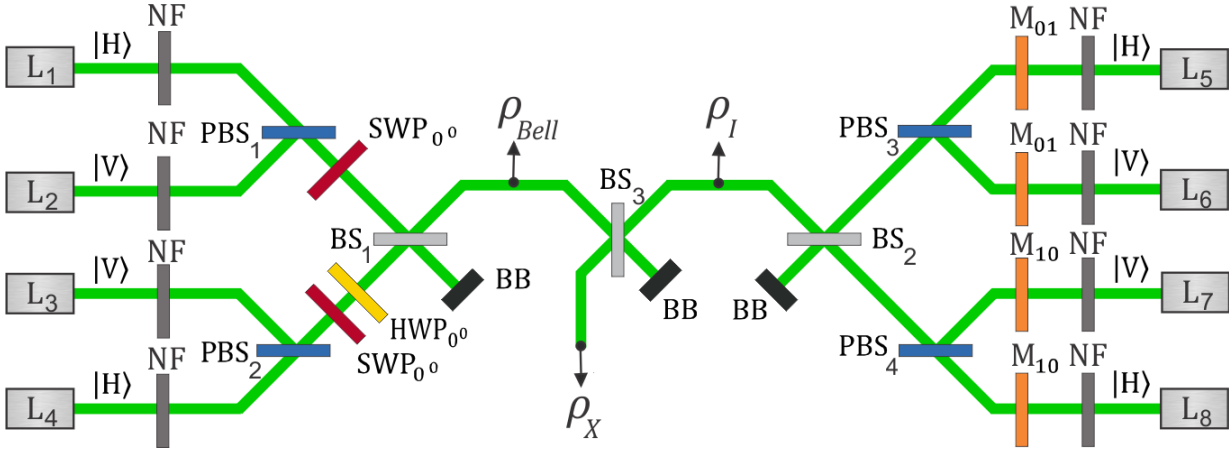


Figura 16 – Esquema experimental para preparação do caso geral de estados tipo X. Nesse caso os q-bits são codificados na polarização e nos modo transversal de um feixe laser.

A presença de filtros neutros (NF) se faz necessária para o controle de população de cada estado. Após passar pelos filtros, os feixes laser  $L_1$  e  $L_2$  com polarização horizontal e vertical, respectivamente, são combinados na atuação do  $PBS_1$ . Em seguida os 2 feixes combinados passam por uma placa *S-plate* (43) gerando os modos spin órbita não separáveis com polarização radial ( $\psi^+$ ) e azimutal ( $\phi^+$ ) dados pelas equações 3.2 e 3.4. Um processo semelhante ocorre para os feixes  $L_3$  e  $L_4$ : nesse caso a única diferença está na atuação da HWP com ângulo de  $0^\circ$  que introduz uma fase relativa de  $\pi$  entre os kets de base para preparar os estados  $\psi^-$  e  $\phi^-$  expresso pelas equações 3.3 e 3.5. Por fim, os 4 feixes do lado esquerdo do diagrama da Figura 16 são combinados via atuação de um BS resultando num estado análogo ao estado Bell diagonal dado pela equação 5.9.

No que diz respeito ao lado direito do circuito mostrado na Figura 16, os feixes  $L_5$ - $L_8$  estão inicialmente preparados nos estados polarização  $|H\rangle$ ,  $|V\rangle$ ,  $|V\rangle$ , e  $|H\rangle$ , respectivamente. A atuação das máscaras holográficas  $M_{10}$  and  $M_{01}$  geram os modos transversos  $HG_{10}$  ( $|h\rangle$ ) e  $HG_{10}$  ( $|v\rangle$ ). Temos portanto estados produtos  $|H\rangle \otimes |h\rangle$ ,  $|H\rangle \otimes |v\rangle$ ,  $|V\rangle \otimes |h\rangle$ , e  $|V\rangle \otimes |v\rangle$  que, como no caso dos feixes do lado esquerdo circuito, são combinados mediante a atuação dos elementos ópticos  $PBS_3$ ,  $PBS_4$ , e  $BS_2$ . O resultado líquido é a preparação do estado  $\rho = \frac{1}{4}(I \otimes I)$ . Finalmente, os feixes provenientes do lado esquerdo e direito do circuito são combinados via atuação do beam splitter ( $BS_3$ ) resultando no estado tipo X mais geral possível. Os coeficientes vistos na equação 5.1 caracterizam o estado X em questão e sua



respectiva preparação pode ser realizada a partir do controle de população via atuação dos filtros neutros. Assim, qualquer estado X pode ser acessado com o controle das intensidades pelos filtros. Após a etapa de preparação dos estados tipo X convém caracterizá-los a fim de comprovar experimentalmente a produção destes estados especiais. Para caracterização basta recorrer ao procedimento de tomografia descrito anteriormente utilizando o circuito óptico visto na Figura 15.

### 5.3 Simulação de circuito óptico de preparação e caracterização de estados de Werner

Para exemplificar a atuação do circuito de preparação (Figura 16) e a caracterização/tomografia (Figura 15) foi realizada, utilizando o formalismo das matrizes de Jones, a simulação computacional da preparação e tomografia de um estado de Werner (equação 5.11). Para preparar estados de Werner é necessário manter ligado apenas o laser  $L_4$  do lado esquerdo em conjunto com todos os demais do lado direito (Figura 16). O laser  $L_4$  é utilizado para preparar o estado  $|\phi_+\rangle\langle\phi_+|$ , enquanto o conjunto  $(L_5 - L_8)$  que, após ser combinado pelo  $BS_2$ , contribuirá com o termo maximamente misto representado pelo operador  $\frac{1}{4}(\sigma_0 \otimes \sigma_0) = \frac{1}{4}I$ . Basta juntar todos esses feixes, via atuação do  $BS_3$ , para obter o estado de Werner expresso pela equação 5.11. Note que a preparação do termo de identidade se baseia na relação de completude da base computacional expressa por<sup>1</sup>

$$|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11| = I. \quad (5.13)$$

É importante destacar que as populações de cada estado podem ser definidas pelo parâmetro "a" que experimentalmente pode ser controlado pelos filtros neutros (NF) na entrada do circuito de preparação. Após a preparação, o feixe deverá passar pelo circuito de tomografia que, como descrito anteriormente, pode ser modelado com base no formalismo de matrizes de Jones. Para exemplificar escolhemos três valores dentro do intervalo disponível:  $a = 0$ ,  $a = \frac{1}{2}$  e  $a = 1$ . Esta situação define três estados entradas peculiares sendo um estado puro e maximamente emaranhado ( $a = 1$ ), um parcialmente misto ( $a = 1/2$ ) e um maximamente misto ( $a=0$ ). A Figura 17 mostra as intensidades de saída do circuito para diferentes valores de  $a$ . Note que as intensidades estão associadas as probabilidades de medida nas diferentes bases e, conseqüentemente, aos parâmetros de Stokes.

Para a entrada  $a = 0$  o estado é completamente misto e temos, portanto, apenas o parâmetro de Stokes  $S_{00} = 1 \neq 0$ . Na primeira coluna da Figura 17 verifica-se que todas as saídas possuem a mesma intensidade para todas as medidas projetivas, concordando

<sup>1</sup> Perceba que o termo  $\frac{1}{4}$  decorre da condição de normalização.

a=0			a=1/2			a=1		
$S_{00}=1.000$	$S_{11}=0.000$	$S_{32}=0.000$	$S_{00}=1.000$	$S_{11}=-0.500$	$S_{32}=0.000$	$S_{00}=1.000$	$S_{11}=-1.000$	$S_{32}=0.000$
$P_{Hh}=0.250$	$P_{Dd}=0.250$	$P_{Hr}=0.250$	$P_{Hh}=0.125$	$P_{Dd}=0.125$	$P_{Hr}=0.250$	$P_{Hh}=0.000$	$P_{Dd}=0.000$	$P_{Hr}=0.250$
$P_{Hv}=0.2500$	$P_{Da}=0.250$	$P_{Hl}=0.250$	$P_{Hv}=0.375$	$P_{Da}=0.375$	$P_{Hl}=0.250$	$P_{Hv}=0.500$	$P_{Da}=0.500$	$P_{Hl}=0.250$
$P_{Vh}=0.2500$	$P_{Ad}=0.250$	$P_{Vr}=0.250$	$P_{Vh}=0.375$	$P_{Ad}=0.375$	$P_{Vr}=0.250$	$P_{Vh}=0.500$	$P_{Ad}=0.500$	$P_{Vr}=0.250$
$P_{Vv}=0.250$	$P_{Aa}=0.250$	$P_{Vl}=0.250$	$P_{Vv}=0.125$	$P_{Aa}=0.125$	$P_{Vl}=0.250$	$P_{Vv}=0.000$	$P_{Aa}=0.000$	$P_{Vl}=0.250$

Figura 17 – Intensidades de saída obtidos na simulação da tomografia de estados de Werner codificados em modos spin-órbita a partir do circuito da Figura 11.

com o fato de se tratar de um estado completamente misto. A entrada  $a = \frac{1}{2}$  leva a um estado parcialmente misto que, se tratando de um estado de Werner, é também parcialmente emaranhado. A segunda coluna da Figura 17 mostra que todas as saídas possuem intensidade não nula, demonstrando que há uma mistura estatística. Por se tratar de um estado parcialmente misto as intensidades se encontram desbalanceadas mudando conforme a escolha da base de medida. Por fim, a entrada  $a = 1$  resulta em um estado puro  $|\phi_+\rangle$  maximamente emaranhado (estado de Bell). A pureza do estado é evidenciada pelo fato de só haver intensidade não nula nas saídas referentes a  $|Hv\rangle$  e  $|Vh\rangle$  quando ocorre a projeção na base computacional para determinação dos parâmetros de Stokes  $S_{00}$ ,  $S_{03}$ ,  $S_{30}$  e  $S_{33}$ .

As matrizes densidade obtidas via simulação do circuito óptico proposto para tomografia de q-bits codificados em modos spin-órbita está em acordo com as previsões teóricas. Assim, matrizes obtidas na simulação do circuito de tomografia para entradas  $a = 0$ ,  $a = \frac{1}{2}$  e  $a = 1$  são expressas, respectivamente, por

$$\rho_W(a = 0) = \begin{bmatrix} 0.250 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.250 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.250 \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

$$\rho_W(a = 1/2) = \begin{bmatrix} 0.125 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.375 & -0.250 & 0 \\ 0 & -0.250 & 0.375 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.125 \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

$$\rho_W(a = 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.500 & -0.500 & 0 \\ 0 & -0.500 & 0.500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Para  $a=0$  a matriz da equação 5.14 mostra um estado completamente misto caracterizado por só possuir termos na diagonal principal e com as populações igualmente distribuídas. Com o crescimento do termo "a" temos um crescimento na pureza do estado evidenciado pelo surgimento de termos não nulos fora da diagonal principal (Equações 5.15 e 5.16).



# Conclusão

Neste trabalho, ampliamos o uso de modos spin-órbita de um feixe laser intenso na simulação de estados quânticos. Ao longo do trabalho, revisitamos importantes cenários nesta área. Vimos que a codificação de q-bits em graus de liberdade da luz é uma possibilidade amplamente explorada no estudo de sistemas quânticos e potenciais aplicações na computação e informação quântica. Discutimos a utilidade do formalismo do operador densidade como uma representação mais geral para q-bits ao incluir a possibilidade de misturas estatísticas. Além disso foi destacada a semelhança entre a estrutura matemática da óptica linear (formalismo de Jones) e a mecânica quântica. Neste cenário os q-bits são codificados nos graus de liberdade de um feixe laser intenso e os elementos ópticos atuam no feixe ditando uma evolução unitária, isto é, como operadores unitários que descrevem a evolução de sistemas quânticos. As probabilidades são substituídas pelas intensidades normalizadas e a coerência óptica assume o papel da coerência quântica.

Apresentamos uma breve discussão de trabalhos que exploraram a analogia entre Mecânica Quântica e óptica linear, que inclui até mesmo o fenômeno do emaranhamento: os modos spin-órbita, descritos pela estrutura transversa e a polarização, possuem como subespaço os modos não separáveis do campo que são análogos clássicos dos estados de Bell. Esses modos não separáveis não podem ser fatorados e violam uma desigualdade tipo Bell, construída a partir das intensidades normalizadas. A violação desta desigualdade, no entanto, não deve ser interpretada como presença de emaranhamento como no caso genuinamente quântico: já foi demonstrado que a origem da violação está na presença de coerência óptica. Apesar disso, descrevendo o feixe de laser como aproximadamente um estado coerente, a componente de um fóton da expansão na base de Fock apresenta emaranhamento nos graus de liberdade de modo transversa e polarização. Assim, o emaranhamento seria detectado caso o feixe, além da coerência, dispuser de uma flutuação reduzida no número de fótons.

A caracterização de estados quânticos assumiu um papel importante nesta proposta justificando a atenção dada ao processo de tomografia. A partir de um conjunto de medidas projetivas em diferentes bases podemos reconstruir a matriz densidade que descreve a estatística de medições de um sistema quântico arbitrário. Essa caracterização pode ser realizada no regime de feixes intensos como mostrado para o caso da tomografia de q-bits codificados nos modos spin-órbita. É importante destacar que o protocolo proposto permite caracterizar um sistema bipartido geral codificado nos modos spin-órbita.

A generalidade no protocolo de tomografia apresentado oportuniza explorar esta plataforma para a preparação e caracterização de q-bits codificados em modos spin-órbita.

Os estados  $X$ , por assumir um protagonismo na pesquisa em informação e computação quântica, são naturalmente estados de interesse em meio a tais possibilidades. Esta classe de estados inclui, por exemplo, os estados de Bell que são amplamente utilizados em protocolos de informação e computação quântica. Desta forma, propor um circuito para a preparação e caracterização de estados  $X$ , codificados em modos spin órbita, representa uma importante contribuição nesta área de pesquisa.

Como exemplo foi realizada a simulação da preparação e caracterização de um estado de Werner, um caso particular do estado  $X$ , codificado em modos spin órbita. A partir do ajuste do parâmetro de peso foi possível estudar três casos especiais  $a = 0$  (completamente misto),  $a = 1/2$  (parcialmente misto) e  $a = 1$  (estado de Bell). Os parâmetros de Stokes obtidos na simulação da tomografia estão de acordo com as expectativas teóricas, demonstrando a viabilidade da proposta.

Em termos de perspectivas futuras o próximo passo para o presente trabalho consistiria, naturalmente, na implementação experimental do circuito proposto. Esta proposta, ao possibilitar a preparação e caracterização de diversos casos de estados tipo  $X$ , abre caminho para novos trabalhos como, por exemplo, o estudo de correlações tal qual o emaranhamento e a discórdia. A motivação principal para uma futura implementação experimental reside no fato de os dados experimentais se apresentarem como importantes evidências para confirmação das previsões teórica e das simulações computacionais. Por estes motivos tal realização representaria uma contribuição importante para essa área de pesquisa.

# Referências

- 1 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. *Quantum computation and quantum information*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 2002.
- 2 MANDEL, L.; WOLF, E. *Optical coherence and quantum optics*. [S.l.]: Cambridge university press, 1995.
- 3 GIOVANNETTI, V.; LLOYD, S.; MACCONE, L. Quantum metrology. *Physical review letters*, APS, v. 96, n. 1, p. 010401, 2006.
- 4 FEYNMAN, R. P. Simulating physics with computers. *Int. J. Theor. Phys*, v. 21, n. 6/7, 1982.
- 5 SHOR, P. W. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. In: IEEE. *Proceedings 35th annual symposium on foundations of computer science*. [S.l.], 1994. p. 124–134.
- 6 GROVER, L. K. A fast quantum mechanical algorithm for database search. In: *Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing*. [S.l.: s.n.], 1996. p. 212–219.
- 7 DEUTSCH, D.; JOZSA, R. Rapid solution of problems by quantum computation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 439, n. 1907, p. 553–558, 1992.
- 8 MONTEALEGRE, J. et al. One-norm geometric quantum discord under decoherence. *Physical Review A*, APS, v. 87, n. 4, p. 042115, 2013.
- 9 STRELTSOV, A.; KAMPERMANN, H.; BRUSS, D. Behavior of quantum correlations under local noise. *Physical review letters*, APS, v. 107, n. 17, p. 170502, 2011.
- 10 QUESADA, N.; AL-QASIMI, A.; JAMES, D. F. Quantum properties and dynamics of x states. *Journal of Modern Optics*, Taylor & Francis, v. 59, n. 15, p. 1322–1329, 2012.
- 11 XU, J.-S. et al. Experimental investigation of classical and quantum correlations under decoherence. *Nature communications*, Nature Publishing Group, v. 1, n. 1, p. 1–6, 2010.
- 12 MAZIERO, J. et al. Classical and quantum correlations under decoherence. *Physical Review A*, APS, v. 80, n. 4, p. 044102, 2009.
- 13 BARBIERI, M. et al. Generation and characterization of werner states and maximally entangled mixed states by a universal source of entanglement. *Physical Review Letters*, APS, v. 92, n. 17, p. 177901, 2004.
- 14 JENNEWEIN, T. et al. Quantum cryptography with entangled photons. *Physical Review Letters*, APS, v. 84, n. 20, p. 4729, 2000.
- 15 FIURÁŠEK, J. Linear-optics quantum toffoli and fredkin gates. *Physical Review A*, APS, v. 73, n. 6, p. 062313, 2006.

- 16 SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, M. Quantum optical implementation of grover's algorithm. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 98, n. 17, p. 9490–9493, 2001.
- 17 GOLDIN, M. A.; FRANCISCO, D.; LEDESMA, S. Simulating bell inequality violations with classical optics encoded qubits. *JOSA B*, Optical Society of America, v. 27, n. 4, p. 779–786, 2010.
- 18 SOUZA, C.; KHOURY, A. A michelson controlled-not gate with a single-lens astigmatic mode converter. *Optics express*, Optical Society of America, v. 18, n. 9, p. 9207–9212, 2010.
- 19 LUIS, A. Coherence, polarization, and entanglement for classical light fields. *Optics Communications*, Elsevier, v. 282, n. 18, p. 3665–3670, 2009.
- 20 PASSOS, M. et al. Classical analog of quantum contextuality in spin-orbit laser modes. *Physical Review A*, APS, v. 98, n. 6, p. 062116, 2018.
- 21 BORGES, C. et al. Bell-like inequality for spin-orbit separability of a classical laser beam. *arXiv preprint arXiv:0911.2440*, 2009.
- 22 KAGALWALA, K. H. et al. Bell's measure in classical optical coherence. *Nature Photonics*, Nature Publishing Group, v. 7, n. 1, p. 72–78, 2013.
- 23 WALBORN, S. et al. Quantum key distribution with higher-order alphabets using spatially encoded qudits. *Physical review letters*, APS, v. 96, n. 9, p. 090501, 2006.
- 24 BALTHAZAR, W.; HUGUENIN, J. Conditional operation using three degrees of freedom of a laser beam for application in quantum information. *JOSA B*, Optical Society of America, v. 33, n. 8, p. 1649–1654, 2016.
- 25 MAXWELL, J. C. *A treatise on electricity and magnetism*. [S.l.]: Clarendon press, 1873. v. 1.
- 26 JACKSON, J. D. *Classical electrodynamics*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1999.
- 27 HECHT, E. et al. *Optics*. [S.l.]: Addison Wesley San Francisco, 2002. v. 4.
- 28 NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica: Ótica, relatividade, física quântica (vol. 4)*. [S.l.]: Editora Blucher, 2014.
- 29 GERRARD, A.; BURCH, J. M. *Introduction to matrix methods in optics*. [S.l.]: Courier Corporation, 1994.
- 30 BALTHAZAR, W. *Não-separabilidade de graus de liberdade de um feixe laser e aplicações em informação quântica*. [S.l.]: Tese (Doutorado) — Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Fluminense, Rio De Janeiro, Brasil, 2016., 2016.
- 31 JONES, R. C. A new calculus for the treatment of optical systems. iv. *Josa*, Optical Society of America, v. 32, n. 8, p. 486–493, 1942.
- 32 PADGETT, M. J.; COURTIAL, J. Poincaré-sphere equivalent for light beams containing orbital angular momentum. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 24, n. 7, p. 430–432, 1999.



- 33 NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica: Eletromagnetismo (vol. 3)*. [S.l.]: Editora Blucher, 2015. v. 3.
- 34 PASSOS, M. H. M. *Padrões de Speckles produzidos por Vórtices Óticos e sua Aplicação na Medida de Rugosidade*. [S.l.]: Dissertação (Mestrado) — Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Fluminense, Rio De Janeiro, Brasil, 2016., 2016.
- 35 HECHT, E. *Óptica. 2ª edição*. [S.l.: s.n.], 2002.
- 36 ALLEN, L. et al. Orbital angular momentum of light and the transformation of laguerre-gaussian laser modes. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 45, p. 8185–8189, Jun 1992. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.45.8185>>.
- 37 NIENHUIS, G.; ALLEN, L. Paraxial wave optics and harmonic oscillators. *Physical Review A*, APS, v. 48, n. 1, p. 656, 1993.
- 38 ALTEPETER, J. B.; JEFFREY, E. R.; KWIAT, P. G. Photonic state tomography. *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, Elsevier, v. 52, p. 105–159, 2005.
- 39 SAKURAI, J. Modern quantum mechanics 2nd edition. *Person New International edition*, 2014.
- 40 TÖPPEL, F. et al. Classical entanglement in polarization metrology. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 16, n. 7, p. 073019, 2014.
- 41 WOOTTERS, W. K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Physical Review Letters*, APS, v. 80, n. 10, p. 2245, 1998.
- 42 BORGES, C. V. dos S. *Bell inequalities with Orbital Angular Momentum of Light*. Tese (Doutorado), 2012.
- 43 MATIJOSIĆ, A. et al. Formation of optical vortices with topological charge  $|l|=1$  and  $|l|=1/2$  by use of the s-waveplate. *Optics Communications*, Elsevier, v. 324, p. 1–9, 2014.
- 44 EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical review*, APS, v. 47, n. 10, p. 777, 1935.
- 45 CLAUSER, J. F. et al. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Physical review letters*, APS, v. 23, n. 15, p. 880, 1969.
- 46 ASPECT, A.; GRANGIER, P.; ROGER, G. Experimental realization of einstein-podolsky-rosen-bohm gedankenexperiment: a new violation of bell's inequalities. *Physical review letters*, APS, v. 49, n. 2, p. 91, 1982.
- 47 PEREIRA, L.; KHOURY, A.; DECHOUM, K. Quantum and classical separability of spin-orbit laser modes. *Physical Review A*, APS, v. 90, n. 5, p. 053842, 2014.
- 48 SASADA, H.; OKAMOTO, M. Transverse-mode beam splitter of a light beam and its application to quantum cryptography. *Physical Review A*, APS, v. 68, n. 1, p. 012323, 2003.
- 49 PASSOS, M. et al. Spin-orbit implementation of solovay-kitaev decomposition of single-qubit channels. *arXiv preprint arXiv:2008.02631*, 2020.

50 OBANDO, P. A. C. Quantum correlations and quantum coherence in open quantum systems. *Universidade Federal Fluminense*, 2018.

51 WERNER, R. F. Quantum states with einstein-podolsky-rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Physical Review A*, APS, v. 40, n. 8, p. 4277, 1989.