



Universidade Federal Fluminense
Programa de Pós-Graduação em Física

Estrelas de Nêutrons com Rotação em Teorias Modificadas da Gravidade

Tulio Ottoni Ferreira da Costa

Niterói-RJ, Abril de 2020

Tulio Ottoni Ferreira da Costa

Estrelas de Nêutrons com Rotação em Teorias Modificadas da Gravidade

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Física.

Universidade Federal Fluminense – UFF

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Raissa Fernandes Pessoa Mendes

Niterói-RJ

Abril de 2020

Ficha catalográfica automática - SDC/BIF
Gerada com informações fornecidas pelo autor

F383e Ferreira da costa, Tulio Ottoni
Estrelas de Nêutrons com Rotação em Teorias Modificadas
da Gravidade / Tulio Ottoni Ferreira da costa ; Raissa
Fernandes Pessoa Mendes, orientadora. Niterói, 2020.
100 p. : il.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,
Niterói, 2020.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22409/PPGF.2020.m.16120591710>

1. Teoria Tensor-Escalar da Gravidade. 2. Estrelas de
Nêutrons. 3. Pulsares. 4. Testes Astrofísicos. 5. Produção
intelectual. I. Pessoa Mendes, Raissa Fernandes, orientadora.
II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Física.
III. Título.

CDD -

Tulio Ottoni Ferreira da Costa

Estrelas de Nêutrons com Rotação em Teorias Modificadas da Gravidade

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Física.

Trabalho aprovado. Niterói-RJ, 01 de janeiro de 2014:

Raissa Fernandes Pessoa Mendes

Orientador

Professor

Convidado 1

Professor

Convidado 2

Professor

Convidado 3

Niterói-RJ
Abril de 2020

Dedico essa dissertação à todos os seres que sentem o Cosmos vibrar dentro de si.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha orientadora pelos valiosos ensinamentos, paciência e conselhos nesses dois anos de mestrado. Obrigado pela confiança, onde mesmo sem nos conhecermos previamente, me possibilitou um ótimo período de pesquisas em uma área fascinante, na fronteira do conhecimento científico. Agradeço também ao CNPQ e à FAPERJ por apoiarem financeiramente minha pesquisa: obrigado por acreditarem na ciência brasileira !

Agradeço aos meus pais e familiares por sempre me fornecer todo o suporte e amor de que precisei em toda minha jornada como ser humano.

Agradeço aos meus amigos pelas conversas, trilhas e todo o carinho que tornou mais agradável minha caminhada. Um agradecimento especial às minhas companheiras de apartamento, que durante meu último e decisivo ano tornaram minha estadia na cidade sepulcral tão mais leve. Pode não parecer mas vocês fizeram toda a diferença.

Por último um agradecimento do fundo do coração à minha querida companheira. Obrigado por me apoiar sempre; caminhar junto de quem amamos torna a realidade mais rica e colorida, nos fornece um meio de suportar a vastidão do Cosmos.

*"A grande revelação nunca chegara. A grande revelação talvez nunca chegasse.
Em vez disso, havia pequenos milagres cotidianos, iluminações,
fósforos inesperadamente riscados na escuridão;
aqui estava um deles..."*

Virginia Woolf em Ao Farol, Editora Autêntica, 1. ed, Tradução de Tomaz Tadeu.

Resumo

Nessa dissertação é investigada uma classe de Teorias Tensor-Escalar da gravidade com um acoplamento não mínimo entre o campo escalar e a geometria, onde focamos na região positiva da constante de acoplamento (ξ). Calculamos as cargas escalares que estrelas de nêutrons com rotação desenvolvem considerando essa teoria e analisamos sua implicação nas variáveis que descrevem pulsares em sistemas binários, mostrando que mesmo na presença de escalarização espontânea, a teoria é capaz de passar nos testes gravitacionais fornecidos pela cronometragem de pulsares.

Palavras-chaves: Teorias Alternativas da Gravidade, Estrelas de Nêutrons, Testes da Relatividade Geral, Cronometragem de Pulsares

Abstract

In this work we investigate a class of Scalar-Tensor theory with a non-minimal coupling between the scalar field and the geometry of space-time, where we focus in a positive region of the non-minimal coupling constant (ξ). We calculate the scalar charges that rotating neutron stars developed in this context and investigate its implications in the variables that describe pulsars in binary systems, showing that even in the presence of spontaneous scalarization, the theory is able to evade the sharp knife of pulsar-timing tests.

Keywords: Alternative Theories of Gravity, Neutron Stars, Testing General Relativity, Pulsar-Timing

Sumário

	Introdução	1
1	GRAVITAÇÃO	5
1.1	Relatividade Geral e o Princípio da Equivalência	5
1.2	Teorema de Lovelock e Teorias Alternativas	8
1.3	Teorias Tensor-Escalar	10
1.4	Teorias Tensor-Escalar em diferentes representações	11
1.4.1	Representação de Jordan	12
1.4.2	Representação de Einstein	12
1.5	Acoplamento e vínculos experimentais	14
1.5.1	Formalismo Pós-Newtoniano Parametrizado	15
2	ESTRELAS DE NÊUTRONS	17
2.1	Equilíbrio de Estrelas de Nêutrons Sem Rotação em Relatividade Geral	17
2.2	Equação de Estado	20
2.3	Resultados da Estrutura da Estrela	23
2.4	Equilíbrio de Estrelas de Nêutrons Sem Rotação em Teorias Tensor-Escalar	26
2.5	Resultado para a Estrutura da Estrela e a Escalarização Espontânea	29
3	ESTRELAS DE NÊUTRONS COM ROTAÇÃO	37
3.1	Equilíbrio de Estrelas de Nêutrons com rotação	37
3.1.1	Equações em Primeira Ordem: Arrasto dos Referenciais Inerciais	38
3.1.2	Equações em segunda ordem: Momento de Quadrupolo e a Deformação da Estrela	42
3.1.2.1	Resultados $l=0$	43
3.1.2.2	Resultados $l=2$	44
3.2	Efeitos em Primeira Ordem no Contexto de Teorias Tensor-Escalar	46
4	PULSARES	49
4.1	Cronometragem de Pulsares	50
4.2	Problema de dois corpos e testes gravitacionais	54
4.3	Cargas Escalares em Teoria Tensor-Escalar com constante de acoplamento positiva	58
4.3.1	Implicações para as variáveis de pulsares	59

Conclusão 61

REFERÊNCIAS 63

ANEXOS 69

Introdução

Talvez, das quatro interações fundamentais da Natureza, a Gravidade seja aquela com que temos mais experiência cotidiana. Sentimos sua constante presença quando levantamos da cama ou quando escalamos uma montanha. Sua atração faz com que o sol se mantenha coeso e os planetas e suas luas possam completar suas órbitas ao longo das eras, permitindo o desenvolvimento de vida inteligente capaz de questionar a natureza dessa estranha atração, modeladora do Universo.

No nível clássico, a Gravidade é atualmente explicada pela belíssima Teoria da Relatividade Geral, desenvolvida basicamente pelo esforço intelectual de Albert Einstein (1879-1955) nos primeiros vinte anos do século XX. Essa teoria, podemos chamá-la de "Modelo Padrão de Gravitação e Cosmologia", reside sobre fortes bases conceituais e, junto com a Mecânica Quântica, forma um dos pilares do entendimento moderno do mundo físico.

Por mais que teorias sejam sempre subordinadas aos experimentos, elas não necessariamente precisam deles na sua gênese. A Relatividade Geral pode ser considerada um exemplo disso, pois foi desenvolvida puramente por uma aventura do intelecto de Einstein, que sem ter nenhum, ou quase nenhum, indício experimental, foi capaz de dar à luz uma teoria que não só diz como a gravidade se comporta, como prevê fenômenos extravagantes, que só depois de um século foram de fato observados.

A Teoria da Relatividade e algumas de suas previsões serão discutidas com cuidado ao longo da dissertação. Mas, de forma simples, ela explica a gravidade como sendo uma condição geométrica do próprio espaço-tempo, que compõe o Universo. A presença de matéria faz com que o espaço-tempo se deforme, se curve; e o movimento de objetos nessa geometria curva é o que percebemos como o movimento devido à gravidade.

Como já foi dito, a Relatividade Geral nasceu sem motivação experimental. Porém, logo nos primeiros anos de sua infância, alguns experimentos na escala do nosso sistema solar vieram confirmar algumas de suas previsões. Esses experimentos foram: o desvio da luz de estrelas distantes, provocado pela geometria curva do sol, que pôde ser observado no Brasil durante um eclipse solar em 1919; e o fenômeno do avanço do periélio de Mercúrio, que não era explicado pela Teoria Newtoniana.

Com esses experimentos, Einstein ficou imediatamente famoso e as pessoas passaram a levar a sério sua teoria gravitacional. Apesar disso, as pesquisas na área ficaram dormentes por praticamente 40 anos, devido principalmente à falta de testes e experimentos gravitacionais precisos e à observação de fenômenos astrofísicos diretamente relacionados com a gravidade.

A situação mudou após os desenvolvimentos teóricos e tecnológicos provocados pela Segunda Guerra (1939-1945). Durante esse período, foi aprimorado, por exemplo, o radiotelescópio. Quando as pessoas deixaram, um pouco, de matar umas as outras, e passaram a usar as técnicas desenvolvidas nesse período no meio científico, várias descobertas importantes foram feitas.

Uma dessas descobertas foi a observação dos Pulsares em 1967 [1], feita por Jocelyn Bell (1943-) e Antony Hewish (1924-). O que Jocelyn, estudante de Hewish na época, observou, foram pulsos de rádio separados por 1.33 segundos vindo de um ponto fixo no céu, na direção da tênue constelação boreal da raposa. Mais tarde, esses pulsos foram associados a uma estrela de nêutrons magnetizada com rotação. Essas estrelas foram previstas de forma especulativa na década de 30 por Walter Baade (1893-1960) e Fritz Zwicky (1898-1974) como resultado final da explosão de uma supernova [2] e, mais tarde, foram estudadas com mais detalhes, no contexto relativístico, por Robbert Oppenheimer (1904-1967), George Volkoff (1914-2000) e Richard Tolman (1881-1948) [3, 4].

Comparadas com o sol, apesar de as estrelas de nêutrons terem uma massa equivalente, elas são muito mais densas, pois possuem um raio da ordem de dezenas de quilômetros, podendo hipoteticamente caber no meio da Baía da Guanabara, entre as cidades do Rio de Janeiro e Niterói. Na verdade, as estrelas de nêutrons são a manifestação mais densa que a matéria apresenta no Universo, e sua descrição microscópica é alvo de intensa pesquisa atual. Para descrever seu campo gravitacional precisamos necessariamente usar uma teoria precisa e completa da gravitação, pois estamos falando do regime de gravidade forte.

Para definir de forma mais precisa o que significa gravidade forte, podemos comparar certas grandezas adimensionais, para ter uma ideia da escala dos fenômenos. Por exemplo $\epsilon = GM/Rc^2$ e $\beta = v/c$, onde G é a constante de Newton, c é a velocidade da luz no vácuo e M, R, v são as escalas de massa, distância e velocidades do fenômeno gravitacional em questão. No sistema solar, temos que $\epsilon, \beta \leq 10^{-5}$ e os efeitos relativísticos são difíceis de serem observados. De fato, a teoria de gravitação Newtoniana, desenvolvida há mais de 300 anos, explica de maneira satisfatória a estrutura do sol e do sistema solar.

Porém a história muda quando vamos para ambientes astrofísicos dominados pelas estrelas de nêutrons, onde $\epsilon \approx 0.2$. Nesse caso, temos a chance de observar efeitos que provêm exclusivamente de fenômenos gravitacionais extremos, o que nos permite fazer uma outra classes de testes da Relatividade Geral, no seu regime mais não linear.

A maioria dos sistemas estelares observados são compostos por mais de uma estrela, não raro em sistemas binários. O primeiro pulsar descoberto em um sistema desse tipo, o Hulse-Taylor [5], rendeu o Prêmio Nobel aos seus descobridores e permitiu testar fenômenos relativísticos previstos na dinâmica de tais sistemas. Em particular, foi observada de forma indireta, através da diminuição da órbita das estrelas ao longo dos anos, a existência de

ondas gravitacionais, outra previsão da Relatividade Geral que só teria uma observação direta em 2015, com a colaboração LIGO/Virgo [6]. Sendo assim, vivemos na era de testes de teorias gravitacionais através de fenômenos de campos intensos, como sistemas de estrelas de nêutrons e buracos negros.

Uma importante técnica para o estudo de pulsares consiste em medir com precisão o tempo de chegada dos pulsos eletromagnéticos, e observar por variações na frequência e na forma desses pulsos ao longo de grandes períodos de tempo. Essa técnica é chamada de *pulsar timing* (ou cronometragem de pulsares) e permitiu, por exemplo, a detecção dos primeiros exoplanetas, ao redor de um pulsar localizado a 2.300 anos luz de distância, na direção da constelação da Virgem [7]. Essa descoberta, feita em 1992, por mais interessante que seja por si mesma, ganha nova relevância com o anúncio do último Prêmio Nobel para pesquisadores da área.

O que a técnica de cronometragem de pulsares também permite fazer são testes dos parâmetros relativísticos que descrevem o sistema. Esses parâmetros são previstos de maneira precisa pela teoria da gravitação e nos fornecem meios de procurar por uma física além da Relatividade Geral. Por mais que a bela teoria de Einstein tenha passado por todos os testes experimentais até hoje, certas considerações teóricas, envolvendo teorias de gravidade quântica e observações cosmológicas, indicam que essa ainda pode não ser a palavra final.

De fato, ao longo dos anos, desde a formulação original de Einstein, várias foram as tentativas de modificar a Relatividade Geral. O grande desafio é que a teoria resultante deve se reduzir à Relatividade Geral na escala em que ela é bem testada, como no sistema solar por exemplo. Sendo que modificações advindas dessas teorias modificadas de gravitação podem se manifestar em regimes de campos fortes, como em estrelas de nêutrons e buracos negros, e/ou em escala cosmológica, afetando a evolução do Universo como um todo.

Talvez a mais simples e natural, e certamente a mais famosa, teoria modificada da gravidade seja a Teoria Tensor-Escalar. Sua origem remonta aos anos 50, onde os pioneiros Carl Brans (1935-), Robert Dicke (1916-1997) e Pascual Jordan (1902-1980) introduziram um campo escalar fundamental que mediará a interação gravitacional, juntamente com a métrica do espaço-tempo [8, 9]. Os desdobramentos mais modernos dessa teoria-protótipo foram estudados extensivamente ao longo dos anos, e interessantes efeitos foram previstos, caso a teoria se demonstre correta, na física gravitacional de estrelas de nêutrons e sistemas binários. Sendo que em regimes de campos fracos, como no sistema solar, a teoria é capaz de passar nos testes experimentais, com previsões similares à Relatividade Geral.

Assim, o objetivo dessa dissertação consiste em explorar a fenomenologia de estrelas de nêutrons com rotação, em certa classe dessas Teorias Tensor-Escalar. Primeiramente será discutido com detalhes o que é uma teoria gravitacional e que física nova essas teorias modificadas acrescentam à Relatividade Geral. Em seguida será feito um estudo

das propriedades de equilíbrio de estrelas de nêutrons estáticas, tanto em Relatividade Geral quanto em Teorias Tensor-Escalar, para em seguida tratarmos a rotação da estrela como uma perturbação da solução estática e entendermos as diferenças entre os dois casos, enfatizando os efeitos previstos por teorias modificadas que estão ausentes na Relatividade Geral.

Por fim, vamos discutir um pouco da física dos pulsares e da dinâmica de um sistema binário, onde o pulsar possui uma estrela companheira. Iremos discutir a técnica de cronometragem dos pulsos, que permite a comparação de diferentes teorias gravitacionais com as medidas obtidas e como são os testes gravitacionais que podem ser feitos nesse contexto. Nesse ponto, seremos capazes de apresentar a contribuição original da dissertação [10], onde calculamos certas quantidades previstas em uma região pouco explorada do espaço de parâmetros de teorias Tensor-Escalar, que podem ser usadas nos testes relativísticos de pulsares para distinguir a teoria gravitacional vigente. O artigo publicado oriundo dessa pesquisa segue como Anexo para detalhes que possam ter escapado do texto.

1 Gravitação

O objetivo desse primeiro capítulo é colocar em termos precisos o que é uma teoria da gravidade e sobre quais princípios ela se sustenta. Em particular, exploramos a formulação da Relatividade Geral e do Princípio da Equivalência, mostrando quais experimentos o comprovam e a necessidade de uma teoria da gravidade relativística ser necessariamente uma teoria métrica. Em seguida, introduzimos as teorias Tensor-Escalar, discutindo quais modificações essa classe de teorias acarreta, seus novos graus de liberdade e de que forma ela viola o Princípio da Equivalência. Nesse capítulo usaremos unidades em que $c = 1$.

1.1 Relatividade Geral e o Princípio da Equivalência

A primeira teoria gravitacional com uma formulação matemática moderna foi a teoria de Newton. Suas previsões se mostraram corretas dentro do regime de campos gravitacionais fracos e baixas velocidades, de forma que toda teoria viável da gravidade deve se reduzir à teoria newtoniana nesse limite. Assim, é válido lembrar sobre quais princípios ela se baseia.

A gravidade Newtoniana é descrita por um potencial escalar $\Phi(\vec{x}, t)$ que obedece a equação de Poisson

$$\nabla^2\Phi(\vec{x}, t) = 4\pi G\rho, \quad (1.1)$$

onde G é a constante Newtoniana e ρ a densidade de matéria que faz o papel de fonte do campo gravitacional.

Partículas dotadas de uma massa inercial m_i obedecem a equação de movimento

$$m_i\ddot{\vec{x}}(t) = -m_g\nabla\Phi, \quad (1.2)$$

onde $\vec{x}(t)$ é a posição da partícula no tempo t e m_g é a massa gravitacional, que expressa como a partícula sente a força gravitacional produzida pelo campo Φ .

A princípio as massas m_i e m_g expressam propriedades diferentes da partícula e não necessariamente devem ser iguais. Experimentos, porém, mostram que $m_i = m_g$ com alto nível de precisão, de forma que não importam as propriedades específicas da matéria, seu movimento no campo gravitacional será o mesmo. Esse é o Princípio da Equivalência Fraco, que demonstra um caráter universal da atração gravitacional: não importa o tipo específico de matéria ou energia que formam o corpo, seu movimento em um campo gravitacional será independente dessas propriedades internas.

Experimentalmente, o Princípio da Equivalência Fraco é comprovado de maneira mais precisa pelo experimento de Eötvös e suas encarnações mais modernas. O experimento consiste em usar uma balança de torção para determinar a aceleração relativa entre dois materiais distintos no mesmo campo gravitacional. Em um experimento desse tipo usando berílio e titânio [11, 12], a diferença relativa entre as acelerações a_1 e a_2 dos dois corpos foi medida em

$$\eta = 2 \frac{|a_1 - a_2|}{|a_1 + a_2|} = (0.3 \pm 1.8) \times 10^{-13}, \quad (1.3)$$

o que mostra a veracidade do Princípio com grande acurácia.

Com a formulação da Relatividade Restrita em 1905, Einstein resolveu a inconsistência que existia na época entre os fenômenos eletromagnéticos e a dinâmica Newtoniana. O que ele percebeu também é que a gravitação Newtoniana precisava ser modificada, uma vez que ela não respeita os princípios de causalidade da Relatividade Restrita.

Inspirado pela universalidade da atração gravitacional expressa pelo Princípio da Equivalência Fraco, Einstein formulou uma nova versão do Princípio, onde além da igualdade entre as massas inercial e gravitacional, deve-se somar que as leis da física, localmente, devem se reduzir às leis da Relatividade Restrita. Ou seja, em uma região suficientemente pequena do espaço-tempo, de tal forma que podemos desconsiderar forças de marés, é possível encontrar um referencial onde a métrica passa a ter a forma de Minkowski $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, independente da posição ou velocidade. Essa formulação é conhecida como Princípio da Equivalência de Einstein.

O fato de que localmente a estrutura do espaço-tempo deve ter a forma plana de Minkowski não diz nada a respeito da sua estrutura global. Na verdade, essa é a ideia chave da Gravitação de Einstein. O caráter universal da atração é atribuído à geometria, onde o movimento das partículas independe de sua estrutura interna, sendo resultado somente da estrutura geométrica do espaço-tempo. E o que produz essa geometria global é a presença de grandes concentrações de matéria, que curvam o espaço-tempo, tornando a geometria globalmente diferente de Minkowski.

O Princípio da Equivalência de Einstein está no âmago da formulação da Relatividade Geral. Os experimentos para sua comprovação, porém, são mais sutis que os experimentos tipo Eötvös para comprovar o Princípio da Equivalência Fraco, pois além de mostrar que diferentes partículas se comportam da mesma forma em um campo gravitacional externo, também deve-se mostrar a validade de todo um conjunto de leis da Relatividade Especial no referencial dessas partículas.

Os experimentos mais precisos desse tipo são conhecidos como Hughes-Drever, e a ideia básica é buscar por anisotropias espaciais, analisando a forma e o espaçamento de linhas espectrais atômicas, e dessa forma mostrar que a relatividade restrita é válida localmente [13, 14, 15]. A conclusão desses experimentos é que a matéria se acopla somente

com um tensor de ordem 2, a métrica $g_{\mu\nu}$, que se reduz localmente à métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. A validação experimental do Princípio da Equivalência de Einstein implica que teorias gravitacionais devem ser necessariamente métricas [16, 17], no sentido de que toda forma de matéria se acopla à métrica $g_{\mu\nu}$.

Ao assumirmos que o espaço-tempo possui uma estrutura geométrica dada por um tensor métrico, estamos automaticamente o considerando uma variedade diferenciável, onde são válidas as regras da matemática Riemanniana padrão, com a conexão de Levi-Civita; sendo a métrica o único grau de liberdade oriundo dessa geometria.

O principal exemplo de teoria métrica é a Relatividade Geral, que pode ser formulada através de uma ação, assim como a maioria das teorias de campo. A ação da Relatividade Geral, conhecida como ação de Einstein-Hilbert, é dada por

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + S^{(m)}[g_{\mu\nu}, \Psi], \quad (1.4)$$

onde g é o determinante da métrica, R o escalar de Ricci e $S^{(m)}$ é a parte da ação que representa a matéria descrita coletivamente pelo campo Ψ acoplado à métrica $g_{\mu\nu}$.

Variando a ação 1.4 com respeito à métrica $g_{\mu\nu}$, obtemos as famosas equações de campo de Einstein, a menos de uma constante cosmológica

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.5)$$

sendo que o tensor energia-momento é definido por meio da variação da ação de matéria $T_{\mu\nu} \equiv -(2/\sqrt{-g})\delta S^{(m)}/\delta g^{\mu\nu}$.

O movimento de partículas teste de massa m na geometria descrita por $g_{\mu\nu}$ pode ser obtido minimizando a distância nessa geometria, através da ação

$$I = m \int \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}, \quad (1.6)$$

onde a massa aparece somente como uma constante multiplicativa, não influenciando as trajetórias, em acordo com o Princípio da Equivalência. Essas trajetórias assim definidas são chamadas de geodésicas, e também podem ser derivadas da identidade $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$, que expressa a conservação do tensor energia-momento.

Um importante desdobramento do Princípio da Equivalência de Einstein é abrirmos mão do vínculo com partículas teste e incluirmos objetos auto-gravitantes, como planetas e estrelas, ou seja, objetos em que a energia gravitacional tem um papel fundamental em sua estrutura. Dessa forma, dizemos que toda a forma de energia, incluindo a gravitacional, responde à curvatura do espaço-tempo da mesma forma; na literatura esse é conhecido como Princípio de Equivalência Forte.

Do ponto de vista experimental, violações do Princípio da Equivalência Forte são conhecidas como Efeito Nordtvedt [18, 19]. O teste mais bem sucedido em busca desse

efeito consiste em usar o sistema Terra-Lua no campo gravitacional do Sol como um experimento de Eötvös gigante [20, 21, 22]. Ao medir precisamente a separação Terra-Lua, usando lasers e os espelhos que os astronautas da Apollo 11 deixaram na Lua em 1969, é possível obter o vínculo

$$\eta = (-1.0 \pm 1.4) \times 10^{-13} \quad (1.7)$$

entre as acelerações relativas entre Terra e Lua, conforme a definição 1.3, mostrando que o movimento desses corpos é independente de suas energias internas particulares. Uma outra forma de testar esse efeito é observar o movimento de corpos estelares, onde a energia gravitacional tem um papel bem maior, como por exemplo, em sistemas binários de estrelas compactas.

É inteiramente possível satisfazer o Princípio da Equivalência de Einstein com uma teoria métrica e ainda assim violar o Princípio da Equivalência Forte. Essa violação não é prevista pela Relatividade Geral, porém é prevista em teorias alternativas, como é o caso da teoria Tensor-Escalar.

1.2 Teorema de Lovelock e Teorias Alternativas

A força da Relatividade Geral reside em sua simplicidade conceitual. Ao geometrizar o espaço-tempo dando uma dinâmica à sua métrica $g_{\mu\nu}$, o caráter universal da gravidade é naturalmente incorporado na teoria, onde todos os objetos sentem da mesma forma o "cenário" no qual se deslocam. Nenhum campo externo entra na formulação da teoria; somente geometria.

Tal era o prestígio que a Relatividade de Einstein tinha nos anos 60 e 70, conhecidos como anos de ouro da pesquisa gravitacional, que S. Chandrasekhar (1920-1995), um eminente pesquisador da área, disse ao colega C. M. Will (1946-) cujo trabalho era pensar em como testar a teoria, a seguinte frase em tom de provocação: "Por que você gasta tanto tempo e energia tentando testar a Relatividade Geral? Nós sabemos que está correta!"

Teorias que tentam modificar a Relatividade Geral inevitavelmente irão violar o Princípio da Equivalência ou algum outro dos conceitos fundamentais da teoria. A grande questão é: por que então modificá-la?

A Relatividade Geral, por ser uma teoria clássica, não leva em conta efeitos quânticos, em escalas de comprimentos da ordem da distância de Planck, $l_p \approx 10^{-35}m$, o que gera uma incompletude na teoria gravitacional, uma vez que efeitos quânticos podem, por exemplo, evitar o surgimento de singularidades, inevitáveis no contexto relativístico [23]. De fato, a Relatividade Geral ainda não foi testada em distâncias $l \lesssim \mu m$ e teorias de gravidade quântica que partem de primeiros princípios, como a Teoria de Cordas, preveem o surgimento de outros campos fundamentais escalares que mediarão a gravidade [24]. Assim, uma modificação da teoria no nível clássico pode ser vista como uma teoria de

campos quântica efetiva, e o estudo de sua fenomenologia passa a ter um papel importante no entendimento dessas teorias mais fundamentais.

Por outro lado, observações cosmológicas, entendidas à luz da Relatividade Geral, predizem que deve existir um conteúdo de matéria e energia "escuras", que só interagem gravitacionalmente, em escalas de comprimento cosmológico $l \gg 1\text{AU}$. Tais componentes "escuras" do universo ainda não foram detectados diretamente e são alvo de intensos estudos, onde muitos grupos tentam entender as observações com base em alguma modificação da Relatividade Geral que se manifestaria em escalas cosmológicas [25].

Sendo assim, é de considerável importância entendermos, de uma maneira geral, o que teorias alternativas modificam na Relatividade Geral. Uma boa ferramenta para isso é o Teorema de Lovelock [26, 27], que diz respeito à unicidade das equações de Einstein e para nossos propósitos pode ser enunciado da seguinte forma:

Teorema: *Em um espaço-tempo quadridimensional, o único tensor de segunda ordem, simétrico e com divergência nula, construído somente com a métrica $g_{\mu\nu}$ e suas derivadas até segunda ordem, é o tensor de Einstein, a menos de uma constante cosmológica.*

Para modificar a física da Relatividade Geral, devemos então abrir mão de uma ou mais hipóteses do Teorema de Lovelock. De uma maneira geral, quando isso é feito, outros graus de liberdade são inevitavelmente introduzidos no setor gravitacional. No caso aqui estudado, vamos assumir que exista um outro campo dinâmico, escalar, que entre no setor gravitacional junto com a métrica $g_{\mu\nu}$.

De certa forma, essa é a maneira mais natural de escapar do Teorema de Lovelock, uma vez que não percebemos dimensões extras, além das espaciais e da dimensão temporal. Além disso, equações diferenciais com ordem maior do que a segunda sofrem de problemas de instabilidade e são geralmente difíceis de formular como um problema de valor inicial. Considerações envolvendo geometrias que fogem da Riemmaniana padrão geralmente são mais difíceis de extrair princípios físicos testáveis, e não serão abordadas nessa dissertação.

Um campo escalar é a estrutura mais simples que um físico pode conceber, uma vez que seu valor não muda de um referencial para outro. É excitante pensar que tal estrutura simplista venha a desempenhar um papel na física gravitacional, tomada normalmente como sendo uma área complicada, envolvendo tensores de curvatura e estruturas geométricas nada triviais. Atualmente, o único campo escalar detectado é o campo de Higgs, que foi descoberto em 2012 no LHC [28]. Campos escalares são usados em vários ramos da física, no intuito de descrever um campo de matéria com o mínimo de graus de liberdade.

1.3 Teorias Tensor-Escalar

Historicamente, a ideia de um campo escalar atuando no setor gravitacional foi primeiramente motivada por Paul Dirac (1902-1984) e sua hipótese dos números grandes. Dirac, tentando buscar uma explicação para os valores de constantes da natureza, introduziu a ideia de que constantes adimensionais não devem ser puros números matemáticos que aparecem nas leis fundamentais da física, mas sim variáveis que caracterizam o estado atual do universo [29].

Na teoria gravitacional, temos a constante Newtoniana G , que aparece a princípio como um parâmetro livre na ação e cujo valor é medido experimentalmente. Na ação da Relatividade Geral, temos

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + S^{(m)}[g_{\mu\nu}, \Psi], \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{\kappa} + L_m \right), \end{aligned} \quad (1.8)$$

sendo $\kappa = 16\pi G$ e L_m a densidade lagrangiana dos campos de matéria, que integrada com o elemento de volume invariante $\sqrt{-g}d^4x$ resulta em $S^{(m)}[g_{\mu\nu}, \Psi]$.

Podemos então explorar a ideia de Dirac e promover κ a um campo escalar dinâmico, que varia espacialmente e também com o tempo $\kappa \Rightarrow \kappa(\vec{x}, t)$. Dessa forma estamos dizendo que, efetivamente, teremos uma variação do acoplamento gravitacional com a matéria. Assim, definimos $\kappa \equiv 1/\phi$

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (\phi R + L_m). \quad (1.9)$$

Precisamos agora incluir termos dinâmicos para o campo ϕ , pois do contrário ele será somente um campo auxiliar da teoria [30]. Sua densidade lagrangiana deve conter somente o campo e suas derivadas primeiras, da forma $L_\phi = L(\phi, \nabla_\mu \phi)$ para que as equações de movimento sejam de segunda ordem. Incluímos, então, um termo cinético

$$L_\phi = -\frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi, \quad (1.10)$$

sendo que dividimos pelo próprio campo para não termos nenhuma constante com dimensão na teoria, conforme a ideia original de Dirac.

Sendo assim, nossa ação assume a forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + L_m \right). \quad (1.11)$$

Vemos que agora o campo ϕ se acopla diretamente com a geometria, e como a gravidade se acopla com toda a física, ϕ deve entrar nessa universalidade de alguma

forma. Esse acoplamento através do produto direto ϕR é conhecido como acoplamento não mínimo.

Segundo o Princípio da Equivalência, localmente a Relatividade Restrita é válida, o que significa que matematicamente devemos fazer a substituição $g^{\mu\nu} \rightarrow \eta^{\mu\nu}$, $\nabla_\mu \rightarrow \partial_\mu$. O termo cinético do campo escalar, no contexto da Relatividade Restrita, se reduz à forma usual $L_\phi \approx \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$. Assim, dizemos que o termo cinético se acopla minimamente com a métrica, somente através de $\sqrt{-g}g^{\mu\nu}$.

Já o termo que contém o produto ϕR não pode ser obtido dessa forma, pois no limite da Relatividade Restrita ele simplesmente não existe, pois $R = 0$. Dizemos então que o campo ϕ se acopla de maneira não mínima à métrica.

A teoria descrita pela ação 1.11 é conhecida como Teoria de Brans-Dicke e possui ω como único parâmetro livre. Atualmente essa é uma Teoria Tensor-Escalar protótipo, com grande relevância histórica [31] e que serve como base para desdobramentos mais modernos.

1.4 Teorias Tensor-Escalar em diferentes representações

A ação mais geral de uma classe de Teorias Tensor-Escalar com um acoplamento não mínimo de um único campo escalar com a geometria, que generaliza a ação de Brans-Dicke 1.11, pode ser escrita como

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left(F(\Phi)R - \frac{Z(\Phi)}{2} \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi - V(\Phi) \right) + S^m[e^{2a(\Phi)}g_{\mu\nu}, \Psi_m], \quad (1.12)$$

onde permitimos que os fatores que multiplicam o escalar de curvatura R e o termo cinético sejam funções genéricas $F(\Phi)$ e $Z(\Phi)$ do campo. Adicionamos também um possível termo potencial $V(\Phi)$ na dinâmica do campo escalar e também permitimos um acoplamento direto com a matéria através do termo $e^{2a(\Phi)}g_{\mu\nu}$.

A ação 1.12 leva em conta a ideia de variar a constante gravitacional, na medida que podemos interpretar $G_{eff} = G/F(\Phi)$ como um novo acoplamento gravitacional, não mais constante, mas dependente do campo Φ , que por sua vez varia no espaço e no tempo. O termo potencial $V(\Phi)$ indica que existe uma auto-interação do campo.

Podemos agora usar a liberdade de transformar a métrica e redefinir o campo escalar, na forma

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2(\Phi)g_{\mu\nu}, \quad (1.13)$$

$$\Phi \rightarrow f(\Phi), \quad (1.14)$$

para transformarmos a ação 1.12 e eliminarmos duas das quatro funções livres. Ao

fazermos isso, a ação permanece invariante ¹. Quando escolhemos uma definição do campo e uma transformação específica da métrica, no fundo o que estamos escolhendo é uma representação da teoria e experimentos não são sensíveis à representação, sendo portanto, puramente uma convenção [16]. A seguir exploramos duas representações mais usadas.

1.4.1 Representação de Jordan

Na representação de Jordan, escolhemos $a = 0$ e $Z = 1$ e a ação assume a forma

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left(F(\Phi)R - \frac{1}{2} \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi - V(\Phi) \right) + S^m[g_{\mu\nu}, \Psi_m], \quad (1.15)$$

onde o acoplamento não mínimo com a geometria é determinado pela função $F(\Phi)$.

Como a parte da ação que descreve a matéria é a mesma da Relatividade Geral, concluímos que $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$, e partículas irão seguir geodésicas da métrica $g_{\mu\nu}$, em acordo com o Princípio da Equivalência de Einstein.

Para obtermos as equações de campo, que generalizam as equações de Einstein da Relatividade Geral, agora com a presença do campo escalar, devemos variar a ação 1.15 tratando $g_{\mu\nu}$ e Φ como campos independentes, isto é, devemos fazer $\delta S/\delta g_{\mu\nu} = 0$ e $\delta S/\delta \Phi = 0$. O resultado é

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \frac{1}{F(\Phi)} = 8\pi G T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \partial_\alpha \Phi \partial^\alpha \Phi + \nabla_\mu \nabla_\nu F(\Phi) - g_{\mu\nu} \square F(\Phi) - g_{\mu\nu} V(\Phi)/2, \quad (1.16)$$

$$\square \Phi = - \frac{dF(\Phi)}{d\Phi} R + \frac{dV(\Phi)}{d\Phi}. \quad (1.17)$$

Vemos que as equações de Einstein são modificadas com a inclusão de novos termos dependentes do campo escalar, que irão atuar como fonte de curvatura. Já o campo escalar tem uma dinâmica regida por uma equação tipo Klein-Gordon, onde podemos interpretar termos lineares no campo, da derivada do potencial, como a massa. Vemos que o campo escalar e a curvatura estão acoplados com a matéria em sua dinâmica.

1.4.2 Representação de Einstein

Para obtermos a representação de Einstein, fazemos $F = 1$ e $Z = 1$, usando a invariância da ação 1.12 por transformações conformes da métrica. A ação nessa representação pode ser escrita como

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R - \frac{1}{2} \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi - V(\Phi) \right) + S^m[e^{2a(\Phi)} g_{\mu\nu}, \Psi_m]. \quad (1.18)$$

¹ Ao fazermos a transformação conforme 1.13 na métrica, seu determinante muda como [32] $g \rightarrow \Omega^2(\Phi)g$ e o escalar de Ricci $R \rightarrow \Omega^{-2}(\Phi)(R - 6g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \log \Omega(\Phi) - 6g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \log \Omega(\Phi)) \nabla_\nu \log \Omega(\Phi))$. A ação permanece invariante na medida que podemos englobar os termos com o fator conforme $\Omega^2(\Phi)$ e suas derivadas nas funções arbitrárias $F(\Phi)$, $Z(\Phi)$, $V(\Phi)$ e $\alpha(\Phi)$.

Vemos que na ação da representação de Einstein, temos o termo usual da Relatividade Geral com o escalar de Ricci, e o campo escalar agora está minimamente acoplado com a geometria através dos termos cinético e potencial. Porém aparece um acoplamento direto com a matéria, a partir da nova métrica que depende do campo escalar. Transferimos o acoplamento direto, não mínimo, com a geometria, para um acoplamento direto com a matéria.

Como alteramos a parte da ação que descreve a matéria, partículas não irão mais seguir geodésicas da nova métrica. Apesar de parecer uma violação do Princípio da Equivalência, a representação de Einstein é fisicamente equivalente à representação de Jordan, onde só estamos usando variáveis diferentes para representar os observáveis. Assim, o movimento descrito por partículas será o mesmo nos dois casos, porém só será uma geodésica da métrica de Jordan, que muitos autores chamam de métrica física. Essa equivalência entre as representações é motivo de debate. Para mais detalhes ver [16] e as referências citadas no trabalho.

Para definirmos uma notação que evidencia o intercambiamento entre as duas representações, vamos chamar a métrica na representação de Einstein de $g_{\mu\nu}^*$ e todas as quantidades calculadas a partir dela serão denotadas com *. Além disso, denotamos o campo escalar nessa representação por φ e o potencial por $U(\varphi)$.

De fato, existe uma transformação particular que leva a ação de Jordan 1.15 na ação de Einstein 1.18, onde simplesmente particularizamos a classe de transformações 1.13 e 1.14 na forma

$$g_{\mu\nu}^* \equiv F(\Phi)g_{\mu\nu}, \quad (1.19)$$

$$\left(\frac{d\varphi}{d\Phi}\right)^2 \equiv \frac{3}{4F(\Phi)^2} \left(\frac{dF(\Phi)}{d\Phi}\right)^2 + \frac{1}{4F(\Phi)}, \quad (1.20)$$

Agora, reescrevemos a ação usando as novas definições e o conhecido resultado de que a derivada covariante coincide com a derivada usual para campos escalares. Assim,

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g^*} \left(R^* - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^{*\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - U(\varphi) \right) + S^m[g_{\mu\nu}^*/F(\Phi(\varphi)), \Psi_m], \quad (1.21)$$

onde $U(\varphi) \equiv V(\Phi)F^{-2}(\Phi)/4$.

As equações de campo, derivadas da ação 1.21, assumem uma forma matemática mais simples, própria para um tratamento numérico, dada por

$$R_{\mu\nu}^* - \frac{1}{2} R^* g_{\mu\nu}^* - 2\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + g_{\mu\nu}^* g_{\alpha\beta}^* \partial_\beta \varphi \partial_\alpha \varphi = 8\pi G T_{\mu\nu}^* - 2U(\varphi)g_{\mu\nu}^*, \quad (1.22)$$

$$\square^* \varphi = -4\pi G \alpha(\varphi) T^* + \frac{dV(\varphi)}{d\varphi}, \quad (1.23)$$

onde

$$\alpha(\varphi) \equiv -\frac{1}{2} \frac{d \ln F(\Phi(\varphi))}{d\varphi}. \quad (1.24)$$

Como na representação de Einstein temos um acoplamento direto com a matéria, ao mantermos a definição do Tensor Energia-Momento como sendo $T_{\mu\nu}^* \equiv -(2/\sqrt{-g^*})\delta S^{(m)}/\delta g_{\mu\nu}^*$ temos que a equação de movimento não terá a mesma forma, uma vez que $T_{\mu\nu}^* = F^{-3}T_{\mu\nu}$.

Vemos, assim, que o que falta agora é especificar a forma do acoplamento $F(\phi(\varphi))$ e a forma do potencial $V(\varphi)$, para escolhermos uma teoria, dentro dessa classe geral de Teorias Tensor-Escalar. Usualmente temos essas duas avenidas para explorar a física dessas teorias. Nessa dissertação vamos seguir o caminho do acoplamento direto com a geometria, ou seja, explorar a liberdade expressa pelas funções $F(\Phi(\varphi))$ e $\alpha(\varphi)$, relacionadas por 1.24. Descartamos portanto o termo potencial $V(\varphi) = 0$, o que fisicamente significa que estamos tratando de um campo escalar sem auto-interação, sem massa, que está mediando uma interação de longo alcance.

1.5 Acoplamento e vínculos experimentais

Uma forma bem motivada para o acoplamento do campo escalar com a geometria, através da função $F(\Phi)$, que leva em conta um acoplamento não mínimo, é

$$F(\Phi) = 1 - 8\pi\xi\Phi^2 \quad (1.25)$$

onde $\xi \in \mathfrak{R}$. As motivações para essa forma do acoplamento vão de considerações fundamentais, que surgem, por exemplo, da quantização de campos clássicos em espaços curvos [33], até cenários cosmológicos como modelos de inflação [34, 35].

Com a forma específica do acoplamento dada por 1.25, a relação entre os campos, na representação de Jordan e de Einstein, definida em 1.20, passa a ser

$$\frac{d\varphi}{d\Phi} = 2\sqrt{\pi} \frac{\sqrt{1 - 8\pi\xi(1 - 6\xi)\Phi^2}}{1 - 8\pi\xi\Phi^2}. \quad (1.26)$$

Do ponto de vista experimental, vínculos são colocados ao expandirmos a função de acoplamento em torno de um valor de fundo do campo escalar. Outros dois modelos mais comumente usados para a função de acoplamento, definidos já na representação de Einstein, são

$$F^I(\varphi) = e^{\xi\varphi^2}, \quad (1.27)$$

$$\alpha^I(\varphi) = -\xi\varphi, \quad (1.28)$$

e

$$F^{II}(\varphi) = [\cosh(2\sqrt{3}\xi\varphi)]^{-1/(3\xi)}, \quad (1.29)$$

$$\alpha^{II}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{3}} \tanh(2\sqrt{3}\xi\varphi). \quad (1.30)$$

O primeiro acoplamento, mais simples, foi usado no início da década de 90 no estudo de estrelas de nêutrons em Teorias Tensor-Escalar [36]. Já o segundo tem como motivação uma aproximação analítica do acoplamento não mínimo 1.25 [37], conforme ilustrado na Figura 1.

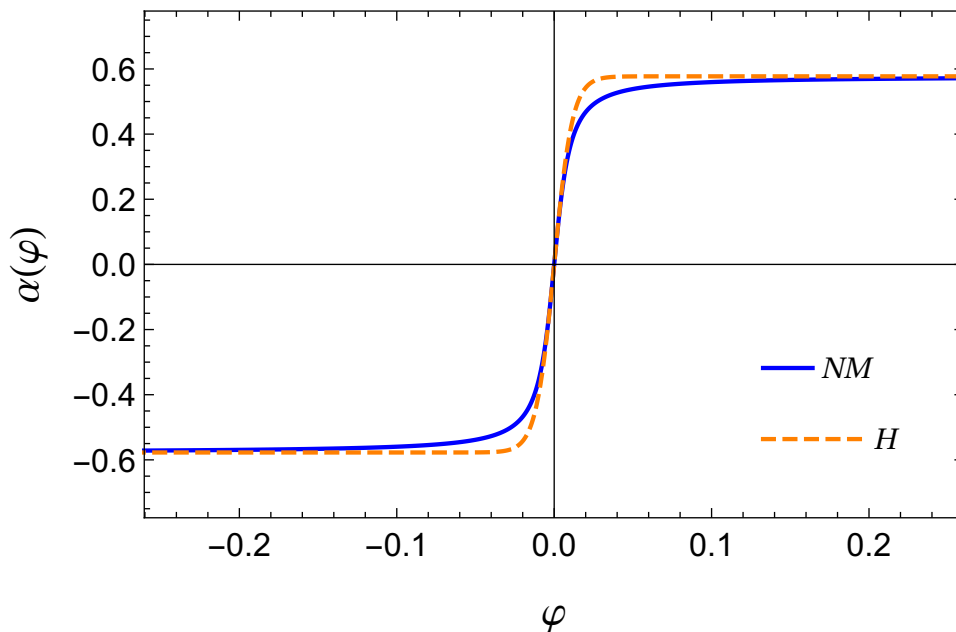


Figura 1 – Acoplamento efetivo $\alpha(\varphi)$ em termos do campo escalar na representação de Einstein, considerando o acoplamento não mínimo (NM) em azul e o acoplamento hiperbólico (H) em laranja pontilhado, ambos para $\xi = 25$. Vemos que o acoplamento hiperbólico reproduz as características do acoplamento não mínimo, aumentando quantitativamente a concordância na medida que $|\xi|$ cresce.

1.5.1 Formalismo Pós-Newtoniano Parametrizado

Com o objetivo de medir desvios da Relatividade Geral, e assim poder comparar as previsões de diferentes teorias alternativas da gravidade, foi desenvolvido um formalismo baseado em uma expansão pós-newtoniana da métrica; válida para campos fracos e baixas velocidades, como no regime do sistema solar, por exemplo [38].

Apesar da Teoria Tensor-Escalar discutida anteriormente adicionar um campo escalar fundamental na dinâmica gravitacional, a métrica continua tendo um papel primário, na medida que toda forma de matéria se acopla a ela. O campo escalar tem assim o papel de mediar a maneira com que a matéria gera a curvatura do espaço-tempo.

A ideia então, é tomar o limite em que podemos fazer uma expansão da métrica em torno da métrica plana de Minkowski $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, onde usamos a velocidade da fonte como parâmetro para a expansão $\epsilon \sim v^2$. Para nossos propósitos, a métrica pode

ser escrita como [39]

$$g_{00} = -1 + (2U - 2\beta U^2 + (2\gamma + 2)\Phi_1 + (6\gamma - 4\beta + 2)\Phi_2 + 2\Phi_3 + 6\gamma\Phi_4) + O(\epsilon^3), \quad (1.31)$$

$$g_{0i} = -(2\gamma + 3/2)V_i - W_i/2 + O(\epsilon^{5/2}), \quad (1.32)$$

$$g_{ij} = (1 + 2\gamma U)\delta_{ij} + O(\epsilon^2). \quad (1.33)$$

onde escrevemos os termos usando potenciais U, Φ_i, V_i, W_i , que são potenciais tipo newtoniano

$$U = \int \frac{\rho'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'. \quad (1.34)$$

Para mais detalhes do formalismo, ver [38]. A ideia dos potenciais é escrever uma métrica geral, com potenciais de caráter escalar, vetorial ou tensorial, de acordo com as simetrias das componentes de métrica, que dependem de quantidades associadas à matéria. Com essa métrica geral escrita, o que muda entre uma teoria e outra são os coeficientes que multiplicam os potenciais, que no nosso caso de interesse são γ e β .

De forma análoga, podemos fazer uma expansão do campo escalar, em torno de um valor de fundo, que denotamos por φ_∞ . Assim o acoplamento pode ser escrito como

$$F(\varphi) = F(\varphi_\infty) + (dF/d\varphi)_{\varphi_\infty}(\varphi - \varphi_\infty) + O[(\varphi - \varphi_\infty)^2]. \quad (1.35)$$

Os parâmetros γ e β , chamados parâmetros de Eddington, são os mais importantes, se tratando de experimentos realizados no sistema solar. O primeiro mede o quanto de curvatura é produzido em uma distância r por uma massa M , já o segundo mede o desvio da linearidade na lei de superposição gravitacional. Na classe de teorias Tensor-Escalar que estamos tratando eles assumem a forma [40]

$$1 - \gamma = 2 \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} = \frac{(dF/d\Phi)^2}{F/2 + 2(dF/d\Phi)^2}, \quad (1.36)$$

$$1 - \beta = -\frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha^2)^2} \frac{d\alpha}{d\varphi} = -\frac{1}{4} \frac{F(dF/d\Phi)}{F + 3(dF/d\Phi)^2} \frac{d\gamma}{d\Phi}, \quad (1.37)$$

onde α, F e suas derivadas são avaliadas em $\varphi = \varphi_\infty$.

O parâmetro γ foi medido através do atraso de Shapiro feito pela nave Cassini [41], e possui um valor $1 - \gamma \lesssim 2.3 \times 10^{-5}$. Já o parâmetro β é medido através de observações do avanço do periélio de Mercúrio [42] e possui um vínculo de $1 - \beta \lesssim 8 \times 10^{-5}$. Considerando o vínculo da Cassini em γ e usando a expressão do acoplamento do modelo hiperbólico 1.30, vemos que vínculo se manifesta como $|\xi\varphi_\infty| < 0.0017$, ou seja, o valor assintótico do campo deve ser pequeno, se tornando menor à medida que $|\xi|$ aumenta. Dessa forma, consideramos daqui para frente o valor assintótico do campo fixo $\varphi_\infty = 0$, com isso os vínculos no sistema solar são automaticamente satisfeitos.

2 Estrelas de Nêutrons

Estrelas de nêutrons são um dos objetos mais extremos do Universo. Podem intuitivamente ser visualizadas como um gigantesco núcleo atômico rico em nêutrons (além de, possivelmente, partículas mais exóticas como híperons e quarks livres [43, 44]) que gera uma deformação geométrica no espaço-tempo em suas redondezas, levando à observação de fenômenos bastante únicos, não encontrados em nenhum outro lugar do Cosmos.

Tomadas como um dos pontos finais da evolução estelar (outras possibilidades são anãs brancas e buracos negros [45]), estrelas de nêutrons são formadas durante o colapso do núcleo de estrelas massivas (pelo menos $8\times$ mais massivas que o Sol) durante os estágios finais de sua vida, em que a pressão gerada pelas reações nucleares em seu interior não é suficiente para deter a força de sua própria gravidade.

As propriedades globais dessas estrelas, como sua massa e o seu tamanho, são determinadas resolvendo as equações de equilíbrio hidrostático, no contexto relativístico. A massa típica de uma estrela de nêutrons é da ordem da massa solar, $M \approx 1.4M_{\odot}$, porém seu raio é substancialmente menor $R \approx 10\text{km}$, ou seja, em torno de 10^5 vezes menor que o raio solar, $R_{\odot} = 6,960 \times 10^5\text{km}$. De fato, essas são as estrelas mais densas conhecidas e possivelmente a mais densa manifestação que a matéria assume no Universo.

A energia gravitacional de uma estrela de nêutrons é da ordem de sua energia de repouso $\epsilon = 2GM/rc^2 \approx 0.3$, o que faz com que o campo gravitacional desses objetos seja necessariamente determinado no contexto relativístico, uma vez que efeitos da curvatura do espaço-tempo devem ser levados em conta.

O objetivo desse capítulo é discutir as propriedades de equilíbrio de estrelas de nêutrons estáticas, juntamente com a definição da equação de estado usada e os resultados para a estrutura da estrela, tanto no contexto da Relatividade Geral, quanto na Teoria Tensor-Escalar descrita no primeiro capítulo. Em particular, serão discutidos em detalhes os novos efeitos que o campo escalar produz na estrutura da estrela, por meio do fenômeno da escalarização espontânea. Nesse capítulo usaremos unidades em que $G = c = 1$.

2.1 Equilíbrio de Estrelas de Nêutrons Sem Rotação em Relatividade Geral

Para obtermos propriedades globais de equilíbrio de estrelas de nêutrons, precisamos resolver as equações de Einstein em seu interior. Inicialmente, vamos supor que a distribuição de matéria da estrela é esfericamente simétrica e estática (sem rotação e

oscilações). Fisicamente, isso significa que existe pelo menos um sistema de coordenadas em que a métrica é invariante sob rotações e inversões temporais, além de ser independente da variável temporal.

Com essas suposições, podemos escrever o elemento de linha gerado pela métrica como

$$ds^2 = -e^{\nu(r)}dt^2 + e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.1)$$

onde $\nu(r)$ e $\lambda(r)$ são as únicas funções livres a serem determinadas, de acordo com a simetria imposta. Essas funções dependem da variável r , que foi escolhida de tal forma que se relacione com a área da esfera de maneira usual $A = 4\pi r^2$. Porém r não deve ser entendida como sendo a "distância até o centro", uma vez que a geometria descrita por 2.1 não é a Euclidiana usual.

Consideramos a matéria da estrela como sendo composta de um fluido perfeito, ou seja, um fluido sem viscosidade, sem fluxos de energia, de densidade de energia total ϵ , com uma única pressão isotrópica P . Podemos escrever então o tensor energia-momento da estrela, que servirá como fonte nas equações de Einstein, como

$$T_{\mu\nu} = \epsilon U_\mu U_\nu + P(g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu), \quad (2.2)$$

onde U_μ é a 4-velocidade do fluido, o que indica que as quantidades ϵ e P são medidas no referencial de repouso do fluido.

Como estamos em busca de soluções estáticas, a 4-velocidade deve ter somente uma componente temporal, onde, impondo a normalização $U^\mu U_\mu = -1$, vemos que $U_\mu = (e^{\nu/2}, 0, 0, 0)$ e o tensor energia-momento fica com uma forma diagonal, cujas componentes covariantes são $T = \text{diag}(e^{\nu(r)}\epsilon, e^{\lambda(r)}P, r^2P, r^2(\sin^2\theta)P)$.

Fora da estrela, temos vácuo ($T_{\mu\nu} = 0$) e as equações de Einstein podem ser resolvidas analiticamente, resultando em [46]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.3)$$

que é a conhecida solução de Schwarzschild, onde M é a massa gravitacional total da estrela, dada pela integral de sua densidade do centro até o raio R

$$M = 4\pi \int_0^R \epsilon(r)r^2 dr. \quad (2.4)$$

A componente (tt) das equações de Einstein para a estrela é dada por

$$G_{tt} = \frac{e^{-\lambda(r)+\nu(r)}(-1 + e^{\lambda(r)} + r\partial_r\lambda(r))}{r^2} = 8\pi T_{tt} = 8\pi e^{\nu(r)}\epsilon, \quad (2.5)$$

$$e^{-\lambda(r)}(-1 + e^{\lambda(r)} + r\partial_r\lambda(r)) = 8\pi\epsilon r^2, \quad (2.6)$$

onde obtemos simplesmente uma generalização do caso de Schwarzschild, quando identificamos

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2M(r)}{r}, \quad \frac{dM(r)}{dr} = 4\pi\epsilon r^2. \quad (2.7)$$

Apesar da semelhança com a expressão da massa Newtoniana, o elemento de volume próprio nesse espaço-tempo é $dV = e^{\lambda/2} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$, que resulta em uma massa própria

$$M_p = 4\pi \int_0^R \left(\frac{\epsilon r^2}{\sqrt{1 - \frac{2M(r)}{r}}} \right) dr, \quad (2.8)$$

onde a diferença entre as duas massas, interpretamos como sendo a energia de ligação gravitacional da estrela

$$E_g = M_p - M > 0. \quad (2.9)$$

A componente (rr) das equações de Einstein é

$$G_{rr} = \frac{1 - e^\lambda + r\partial_r\nu(r)}{r^2} = 8\pi T_{rr} = 8\pi e^\lambda P, \quad (2.10)$$

$$\frac{d\nu(r)}{dr} = 2 \frac{M(r) + 4\pi r^3 P}{r(r - 2M(r))}, \quad (2.11)$$

onde usamos nossas definições 2.7. Vemos então que a função $\nu(r)$ não é uma simples generalização do caso de Schwarzschild como foi $\lambda(r)$.

Precisamos de mais uma equação de campo, agora para a pressão P . Por uma questão de simplicidade, é usada a conservação do tensor energia-momento $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ [32]. Temos somente a componente $\nu = r$ não trivial, de forma que somos capazes de escrever

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(\epsilon + P)}{2} \frac{d\nu(r)}{dr}, \quad (2.12)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\epsilon M(r)}{r^2} \left(1 + \frac{P}{\epsilon}\right) \left(1 + \frac{4\pi P r^3}{M(r)}\right) \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right)^{-1}. \quad (2.13)$$

A equação 2.13 é conhecida como equação de Tolman-Oppenheimer-Volkov [3, 4]. No limite Newtoniano, temos $P \ll \epsilon$, $P r^3 \ll M(r)$ e $2M(r) \ll r$, de tal forma que recuperamos as expressões Newtonianas para a estrutura de uma estrela não relativística

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\epsilon M(r)}{r^2}, \quad \frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon, \quad \frac{d\nu(r)}{dr} = \frac{M(r)}{r^2}. \quad (2.14)$$

Vemos então que a equação relativística para a pressão generaliza a expressão Newtoniana, com a inclusão de três termos positivos, de forma que uma estrela relativística precisa de uma pressão maior em seu interior para se manter em equilíbrio, comparado com uma estrela Newtoniana. E também, a função $\nu(r)$ generaliza o potencial Newtoniano usual que obedece a equação de Poisson.

O que falta agora para fechar o sistema de equações para uma estrela estática em equilíbrio é determinar o comportamento termodinâmico do fluido, através de uma equação de estado que relacione a pressão com a densidade e a temperatura $P = P(\epsilon, T)$.

Uma vez especificada a equação de estado, temos um sistema completo de equações, onde começamos a integração em $r = 0$ com as condições $M(0) = 0$ e $P(0) = P_c$, sendo que assim teremos uma família de soluções parametrizadas pela escolha da pressão central. A superfície da estrela é alcançada quando $P = 0$, pois devemos impor que as funções sejam contínuas com a solução exterior. Assim na superfície $r = R$,

$$e^{\nu(R)} = e^{-\lambda(R)} = 1 - \frac{2M}{R}, \quad (2.15)$$

que fornece a condição de contorno apropriada para $\nu(r)$.

2.2 Equação de Estado

A estabilidade de uma estrela normal adulta (sequência principal) é resultado do equilíbrio entre a pressão gerada pelas reações nucleares em seu interior e sua própria gravidade. Quando a fonte de combustível da estrela começa a se esgotar, seu interior é comprimido e pressões de origem não térmica começam a aparecer à medida que a densidade aumenta [47].

Em densidades da ordem de $10^8 - 10^{11} \text{kg/m}^3$, os elétrons são forçados a ocupar uma região cada vez menor e, pelo Princípio de Incerteza de Heisenberg, seu momento, logo sua energia, conseqüentemente aumentam. Porém elétrons são férmions e obedecem ao princípio de Exclusão de Pauli, que afirma que dois elétrons podem ocupar o mesmo nível de energia somente se tiverem spins opostos. Assim, a gravidade é sustentada por meio dessa pressão "claustrofóbica" dos elétrons, cuja origem é puramente quântica. Dizemos que nessa situação os elétrons são altamente degenerados e a matéria é dita fria e gravitacionalmente catalisada.

A estrela em questão é chamada de anã branca, sendo o produto final da evolução de estrelas com massas similares ao sol. Porém se a estrela progenitora for massiva o suficiente, a gravidade faz com que os elétrons se combinem com os prótons e gerem nêutrons, liberando energia na forma de neutrinos nessa reação, conhecida como decaimento beta inverso [47]



Nêutrons também obedecem à estatística de férmions e geram uma pressão similar à pressão exercida pelos elétrons.

Vamos calcular a equação de estado para um gás de férmions (elétrons ou nêutrons) livres e não interagentes com uma temperatura $T = 0$. Como no caso degenerado a energia

de Fermi é superior à energia média das partículas, a temperatura tem pouca influência na equação de estado. Além disso, estrelas de nêutrons "velhas" ($\sim 10^5$ anos) possuem uma temperatura baixa devido à emissão de neutrinos e $T = 0$ se mostra uma boa aproximação.

Suponha que confinamos os férmions em uma caixa de volume V . Pelo Princípio da Incerteza, teremos uma incerteza no momento da ordem $\delta p = hV^{-1/3}$, onde h é a constante de Planck. Assim, o número de estados ocupados, no espaço de momento, pode ser escrito como

$$dN = \frac{4\pi p^2 V}{h^3} dp, \quad (2.17)$$

mas como estamos tratando de férmions com spin $1/2$, devemos multiplicar o número acima por 2, pois, para cada valor do momento, temos duas possibilidades de spin. Assim,

$$dN = \frac{8\pi p^2 V}{h^3} dp, \quad (2.18)$$

é o número máximo de férmions que podem ocupar um estado com momento p . Agora, vamos tomar o limite em que abaixamos a temperatura o máximo possível. Isso implica que iremos reduzir o momento das partículas de forma que os estados ocupados formem um contínuo, de $p = 0$ até um certo p_F , chamado momento de Fermi

$$\frac{N}{V} = \int_0^{p_F} \frac{8\pi p^2 dp}{h^3} = \frac{8\pi p_F^3}{3h^3}. \quad (2.19)$$

A expressão relativística da energia de cada férmion é $E = (p^2 + m^2)^{1/2}$, onde m é a massa do elétron ou do nêutron. Assim, a densidade de energia total do gás é dada por

$$\epsilon = \frac{E}{V} = \int_0^{p_F} \frac{8\pi p^2 dp}{h^3} (p^2 + m^2)^{1/2}. \quad (2.20)$$

A pressão é obtida agora por meio da Primeira Lei da Termodinâmica sem a dependência na temperatura e com o número de partículas fixo,

$$P = -\frac{d\epsilon}{dV} = -V \frac{8\pi p_F^2}{h^3} (m^2 + p_F^2)^{1/2} \frac{dp_F}{dV} - \epsilon = \left(\frac{8\pi}{3h^3} \right) p_F^3 (m^2 + p_F^2)^{1/2} - \epsilon, \quad (2.21)$$

de forma que para um gás altamente relativístico, onde $p_F \gg m$ temos

$$\epsilon \approx \frac{2\pi p_F^4}{h^3}, \quad P \approx \frac{1}{3}\epsilon. \quad (2.22)$$

Onde verificamos uma proporção simples entre a pressão e a densidade, mesmo em baixas temperaturas.

A forma da equação de estado 2.22 é conhecida como forma politrópica, e assume a expressão genérica

$$P = K\rho^\Gamma, \quad (2.23)$$

onde K é uma constante de proporcionalidade, Γ o índice adiabático e aqui ρ é a densidade de massa, que se relaciona com a densidade total de energia por meio da Primeira Lei

da Termodinâmica. Uma equação politrópica é uma boa aproximação efetiva para o comportamento termodinâmico da matéria de uma estrela, onde ajustamos os parâmetros livres da equação para reproduzir propriedades globais observadas.

No núcleo das estrelas de nêutrons, a densidade pode chegar a $3 - 10\rho_0$, onde $\rho_0 = 2.7 \times 10^{14} \text{g/cm}^3$ é a densidade média do núcleo atômico. Nessas condições extremas, nossa primeira aproximação de um gás de férmions livres deixa de valer e precisamos levar em conta a física das interações fortes, que são pouco conhecidas nessas condições. Na Figura 2 temos um gráfico da pressão pela densidade das três equações de estado usadas nesse trabalho. A equação SLy é baseada em um método que usa dois potenciais para modelar as interações entre os núcleons presentes na estrela [48]. Já as equações ENG [49] e MPA1 [50] são baseadas no modelo Brueckner-Hartree-Fock relativístico.

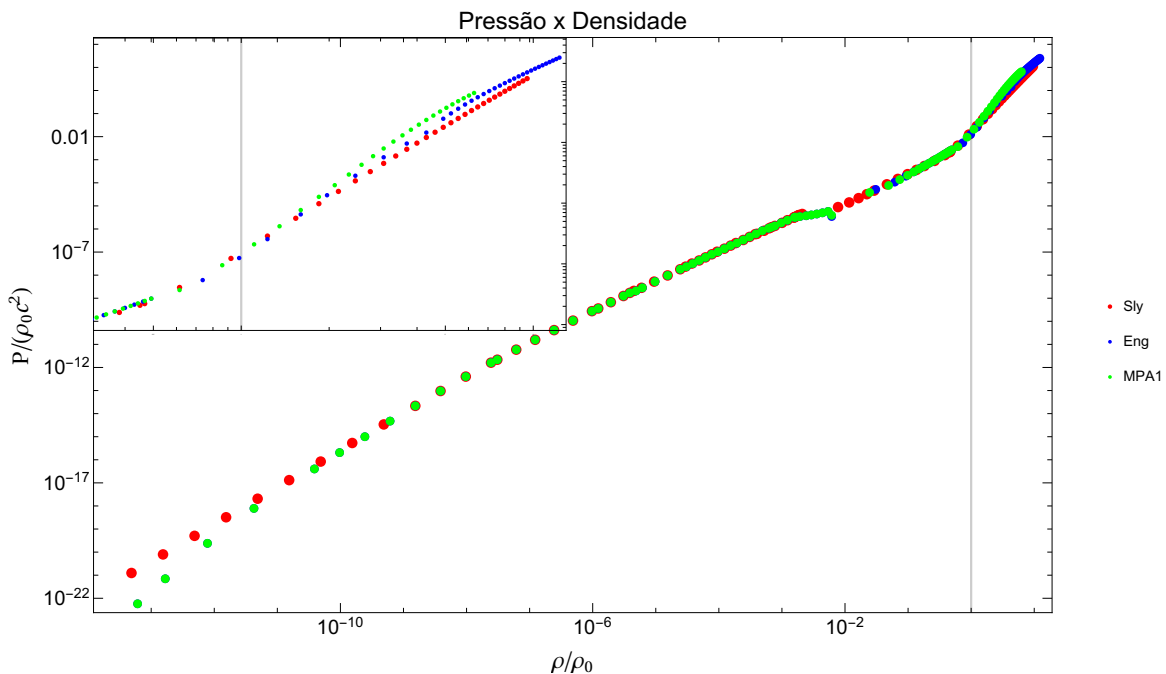


Figura 2 – As diferentes equações de estado usadas no trabalho, onde está marcada a densidade de saturação nuclear ρ_0 . No canto superior esquerdo está mostrado de maneira qualitativa os diferentes comportamentos das equações usadas na região de densidades supranucleares.

Um forma de captar os diferentes estados que a matéria assume no interior de uma estrela de nêutrons é usar uma equação politrópica para cada "pedaço" da estrela, tendo assim uma equação politrópica por partes, de forma que podemos variar a "rigidez" da equação e reproduzir de maneira qualitativa as nuances do comportamento termodinâmico que a matéria apresenta no interior da estrela [51].

A partir da equação de estado politrópica 2.23, obtemos a densidade de energia total por meio da primeira lei da termodinâmica $d(\epsilon/\rho) = -Pd(1/\rho)$, cuja integral é

$$\frac{\epsilon}{\rho} = (1 + c) + \frac{1}{\Gamma - 1} K \rho^{\Gamma-1}, \quad (2.24)$$

onde fazemos a constante $c = 0$ pois $\lim_{\rho \rightarrow 0}(\epsilon/\rho) = 1$ de forma que temos a relação padrão

$$\epsilon = \rho + \frac{1}{\Gamma - 1}P. \quad (2.25)$$

Fazemos então uma divisão da estrela, acima de uma certa densidade ρ_0 , $\rho_0 < \rho_1 < \rho_2 \dots$, onde são satisfeitas as relações

$$P(\rho) = K_i \rho^{\Gamma_i}, \quad d\left(\frac{\epsilon}{\rho}\right) = -P \frac{1}{\rho}, \quad \rho_{i-1} \leq \rho \leq \rho_i. \quad (2.26)$$

Logo, para que tenhamos a continuidade da equação de estado, devemos ter

$$\epsilon(\rho) = (1 + a_i)\rho + \frac{K_i}{\Gamma_i - 1}\rho^{\Gamma_i} \quad (2.27)$$

$$a_i = \frac{\epsilon(\rho_{i-1})}{\rho_{i-1}} - 1 - \frac{K_i}{\Gamma_i - 1}\rho_{i-1}^{\Gamma_i-1}. \quad (2.28)$$

No modelo que usamos para a aproximação politrópica, introduzido em [51], consideramos fixa a equação de estado para a crosta da estrela, em baixas densidades, aproximadamente entre $\rho = 10^3$ g/cm³ e $\rho = 10^{14}$ g/cm³, que no caso tomamos como sendo a equação SLy [51]. Como as propriedades globais da estrela são pouco sensíveis à equação de estado para baixas densidades, essa é uma aproximação bastante razoável. Dividimos então a crosta em quatro regiões, caracterizadas pelos parâmetros da Tabela 1, que correspondem a aproximações de um gás não relativístico de elétrons, um gás relativístico de elétrons e um gás de nêutrons até um valor correspondente a densidade de saturação nuclear.

K_i [dyne cm/g]	Γ_i	ρ_i [g/cm ³]
6.80110×10^{-9}	1.58425	2.44034×10^7
1.06186×10^{-6}	1.28733	3.78358×10^{11}
5.32697×10^1	0.62223	2.62780×10^{12}
3.99874×10^{-8}	1.35692	-

Tabela 1 – Parâmetros para a equação de estado por partes da crosta. A última densidade irá depender da equação usada para altas densidades.

Para o domínio de altas densidades temos agora três parâmetros livres para três regiões, determinadas pela equação de estado escolhida. No nosso caso usaremos as equações já discutidas, SLy, ENG e MPA1, cujos parâmetros estão na Tabela 2.

2.3 Resultados da Estrutura da Estrela

A solução numérica das equações relativísticas de equilíbrio hidrostático está ilustrada abaixo. Na Figura 4 temos a variação da massa com a densidade central, para as

Equação	$\log(p_1)$	Γ_1	Γ_2	Γ_3
Sly	34.384	2.227	2.189	2.159
ENG	34.437	3.514	3.130	3.168
MPA1	34.495	3.446	3.572	2.887

Tabela 2 – Parâmetros para a equação de estado politrópica por partes na região de densidades supranucleares.

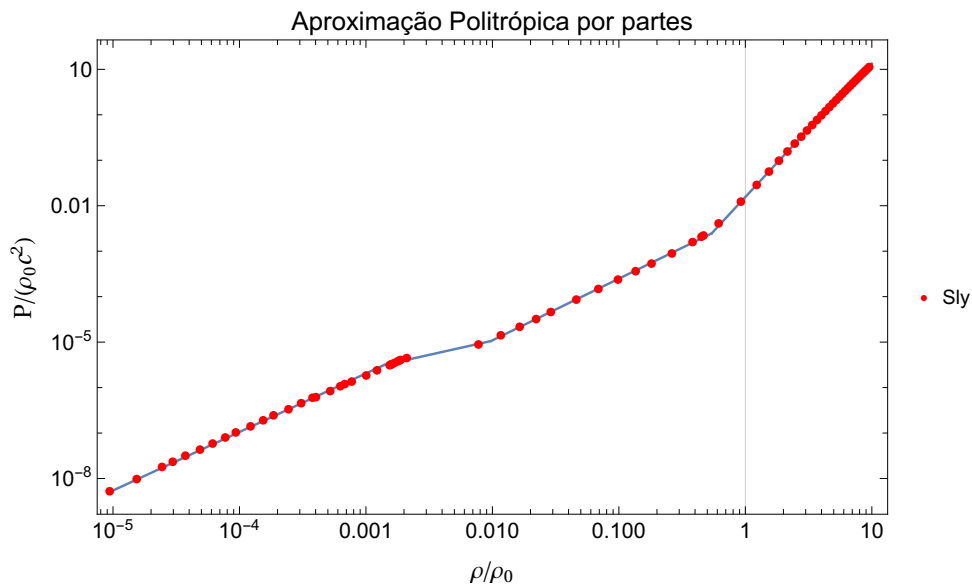


Figura 3 – Aproximação politrópica por partes para a equação de estado SLy (azul), nas vizinhanças da densidade ρ_0 , em comparação com valores tabelados (vermelhos).

equações de estado mostradas anteriormente. Vemos que o comportamento para densidades baixas é similar, porém à medida que a densidade central ultrapassa a densidade de saturação nuclear, as massas variam de acordo com o modelo usado para descrever a matéria nessas condições de densidades supranucleares, onde para as três equações de estado utilizadas, a massa máxima se encontra próxima a $2M_\odot$, em concordância com as últimas observações de estrelas de nêutrons mais massivas [52].

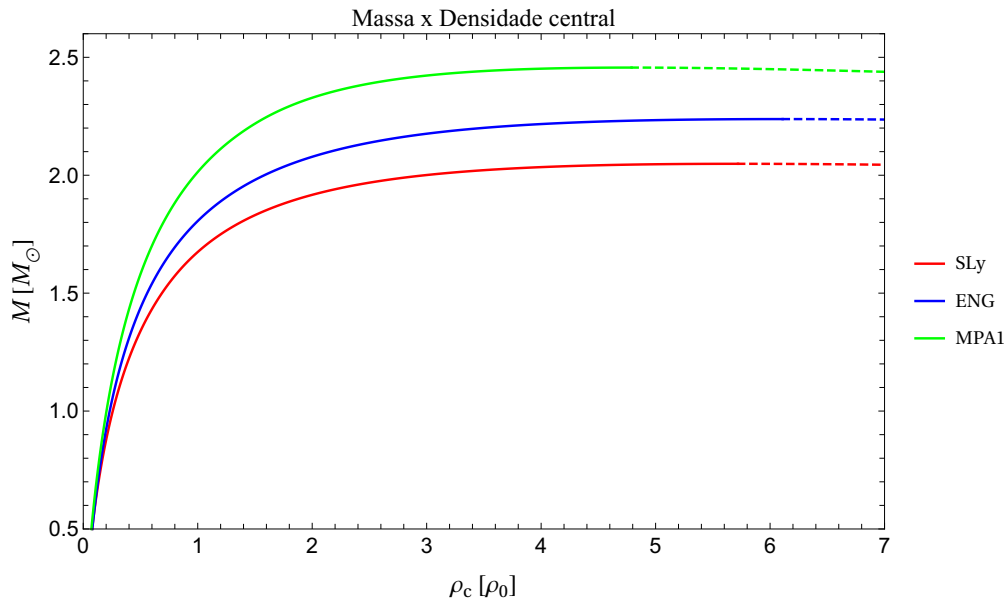


Figura 4 – Variação da massa com a densidade central para as diferentes equações de estado. A densidade central está expressa em função da densidade de saturação nuclear $\rho_0 = 2.7 \times 10^{14} \text{g/cm}^3$. Soluções instáveis com densidades centrais superiores à densidade correspondente à massa máxima são representadas pela parte pontilhada do gráfico.

Na Figura 5 temos o diagrama massa-raio resultante para as equações de estado usadas. A massa máxima é identificada como a última solução de equilíbrio onde $dM/d\rho_c = 0$. Esse ponto máximo indica a mudança de estabilidade expressa pelo modo de oscilação radial fundamental, que se torna negativo $\omega_0^2 < 0$, de forma que para pressões centrais maiores, as soluções serão instáveis frente a perturbações radiais, sendo, portanto, fisicamente inviáveis [45].

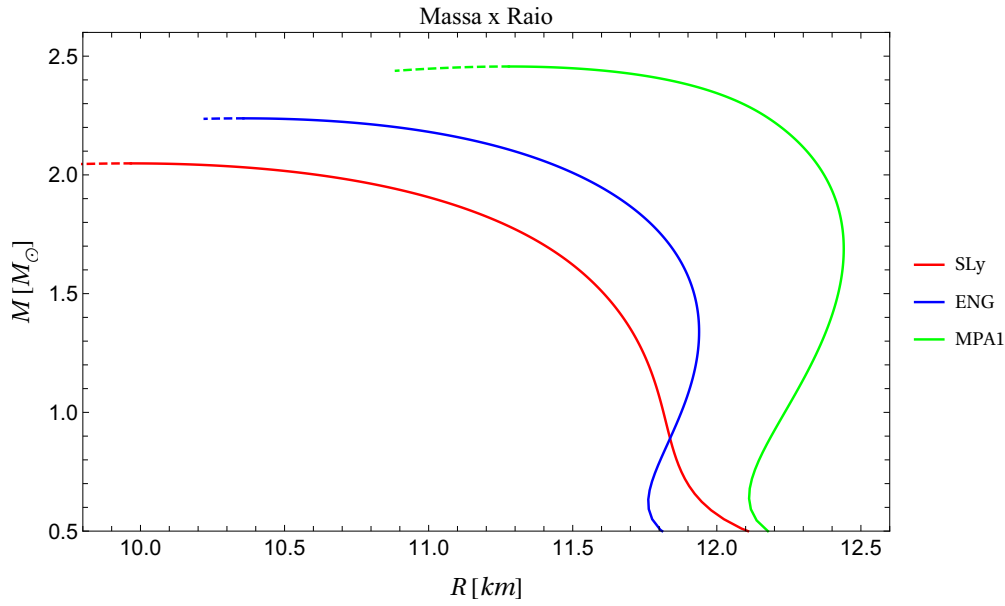


Figura 5 – Diagrama massa-raio para as equações de estado discutidas na seção anterior. Os valores de equilíbrio estão de acordo com as observações mais recentes. Soluções instáveis estão marcadas na parte pontilhada do gráfico.

2.4 Equilíbrio de Estrelas de Nêutrons Sem Rotação em Teorias Tensor-Escalar

Quando consideramos agora a gravitação regida também por um campo escalar não massivo, conforme discutido no primeiro capítulo, temos o aparecimento de efeitos novos e característicos, que resultam em estruturas estelares distintas da Relatividade Geral.

Para verificarmos tais efeitos, continuamos considerando um espaço-tempo estático e esféricamente simétrico dado por

$$ds_*^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.29)$$

Porém lembrando que agora as equações de campo são as equações de Einstein modificadas com a dinâmica do campo escalar, que por conveniência vamos reescrever aqui na representação de Einstein, onde lembramos que as quantidades nessa representação são denotadas por um asterisco. Assim,

$$R_{\mu\nu}^* - \frac{1}{2}R^*g_{\mu\nu}^* - 2\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + g_{\mu\nu}^*g_*^{\alpha\beta}\partial_\beta\varphi\partial_\alpha\varphi = 8\pi GT_{\mu\nu}^*, \quad (2.30)$$

$$\square^*\varphi = -4\pi G\alpha(\varphi)T^*, \quad (2.31)$$

onde descartamos o termo potencial para explorarmos os efeitos do acoplamento expresso por $\alpha(\varphi)$.

Ao impor a simetria esférica estática, os campos passam a depender somente da variável radial (cuja derivada denotamos por \prime), o que representa uma simplificação considerável das equações. A forma de obter as equações é similar ao caso da Relatividade Geral discutido nas seções anteriores. As equações de campo passam a ter a forma

$$M' = 4\pi r^2 F^{-2} \epsilon + \frac{1}{2} r(r - 2M)(\varphi')^2, \quad (2.32)$$

$$\nu' = \frac{8\pi r^2 F^{-2} P}{r - 2M} + r(\varphi')^2 + \frac{2M}{r(r - 2M)}, \quad (2.33)$$

$$P' = -(\epsilon + P) \left[\frac{4\pi r^2 F^{-2} P}{r - 2M} + \frac{r(\varphi')^2}{2} + \frac{M}{r(r - 2M)} + \alpha \varphi' \right], \quad (2.34)$$

$$\varphi'' = \frac{4\pi r F^{-2}}{r - 2M} [\alpha(\epsilon - 3P) + r\varphi'(\epsilon - P)] - \frac{2(r - M)}{r(r - 2M)} \varphi'. \quad (2.35)$$

Vemos então que as equações de equilíbrio hidrostático relativísticas foram generalizadas, com a inclusão de termos dependentes do campo escalar. A massa, por exemplo, passa a depender da derivada do campo ao quadrado, além da dependência com a densidade de energia, de forma que mesmo fora da estrela, onde $\epsilon = 0$, a equação ainda precisa ser integrada caso o campo escalar tenha um perfil não trivial, de forma que a massa gravitacional da estrela continua aumentando.

O comportamento assintótico dos campos é importante para extrair certas informações globais relevantes. Por exemplo, a massa é obtida pelo comportamento assintótico da componente g_{tt} da métrica, $e^{\nu(r)} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1 - 2M/r + O(1/r^2)$. No caso do campo escalar, seu comportamento assintótico dominante é dado por

$$\varphi(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \varphi_\infty + \omega/r + O(1/r^2), \quad (2.36)$$

onde a quantidade importante ω é conhecida como "carga" escalar, em analogia com o campo elétrico de uma carga pontual. Essa carga é energeticamente conjugada com relação ao campo escalar externo, no sentido de que [53]

$$\omega = -\frac{\partial M}{\partial \varphi_\infty}. \quad (2.37)$$

Quando formos discutir os experimentos com pulsares no último capítulo, vamos usar a forma da carga α , que está diretamente relacionada com a carga 2.37 acima por meio de

$$\alpha = -\frac{\omega}{M} = \frac{\partial \log M}{\partial \varphi_\infty}. \quad (2.38)$$

Ao analisarmos as equações de campo 2.30 e 2.31, vemos que um perfil de campo trivial $\varphi = 0$, juntamente com a métrica e a configuração de matéria puramente relativísticas formam um conjunto de solução para as equações. Porém essa solução nem sempre é estável, o que pode ser visto ao expandirmos a equação de movimento para o campo escalar

2.31 em torno de uma solução de fundo trivial $\varphi^{(0)} = 0$, onde retemos somente termos lineares

$$\square^{(0)}\delta\varphi = -8\pi\xi T^{(0)}\delta\varphi. \quad (2.39)$$

Temos que o lado direito da equação 2.39 pode ser visto como contendo uma massa efetiva ao quadrado $m_{eff}^2 \equiv -8\pi\xi T^{(0)}$, onde a possibilidade dessa massa efetiva ser negativa indica o surgimento de uma instabilidade do tipo taquiônica [54].

O desenvolvimento dessa instabilidade indica a presença do fenômeno conhecido como escalarização espontânea, que é o desenvolvimento de uma nuvem de campo escalar ao redor da estrela, ou seja, o campo deixa de ter um perfil trivial e passa a ter influência direta na estrutura da estrela [36, 55, 56].

O nome escalarização espontânea remonta ao fenômeno da magnetização espontânea em materiais ferromagnéticos abaixo da temperatura de Curie. O que ocorre é que a configuração gravitacional com um perfil de campo escalar não trivial é energeticamente favorável à configuração com $\varphi = 0$ e a métrica idêntica à da Relatividade Geral [55]. Para uma sequência de estrelas de nêutrons com massa gravitacional M , o fenômeno da escalarização indica que para determinada massa, a carga escalar α em 2.37 subitamente deixa de ser zero, indicando a ativação do campo. Essa ativação do campo escalar produz desvios na estrutura da estrela, com relação à Relatividade Geral, tornando as quantidades globais diferentes.

Pela expressão da massa efetiva $m_{eff}^2 \equiv -8\pi\xi T^{(0)}$, para que haja escalarização, a combinação $\xi T^{(0)}$ deve ser positiva em alguma região no interior da estrela. Normalmente o traço do tensor energia-momento, $T = 3p - \epsilon$, é negativo, pois na maioria das situações a densidade de energia domina sobre a pressão, de forma que a escalarização espontânea ocorre para a constante de acoplamento $\xi < 0$. Historicamente essa é a janela mais estudada do fenômeno.

Entretanto, recentemente, equações de estado mais realistas que preveem estrelas de nêutrons bem massivas, em concordância com as últimas observações, indicam que a pressão pode dominar sobre a densidade de energia, de forma que o traço do tensor energia-momento passa a ser positivo na região central da estrela e a escalarização passa a ocorrer para a constante de acoplamento positiva $\xi > 0$, o que abre uma nova janela para explorar o fenômeno e comparar com experimentos. Essa nova janela de escalarização é justamente o principal foco da dissertação, onde exploramos com cuidado seus efeitos com a discussão dos resultados numéricos.

Ao integrarmos as equações de campo, a superfície da estrela é obtida da mesma maneira que no caso puramente relativístico, ou seja, quando a pressão se anula $P(R) = 0$. Dessa forma, começamos a resolver as equações no centro da estrela, onde $M(0) = 0$ e $P(0) = P_c$ é o valor da pressão central que irá definir uma família de soluções. Para o

campo escalar a condição de contorno é imposta no infinito, onde exigimos que o campo assuma seu valor cosmológico. Como os vínculos experimentais demandam que esse valor seja bem pequeno, escolhemos $\varphi_\infty = 0$, conforme salientado no final do capítulo 1.

2.5 Resultado para a Estrutura da Estrela e a Escalarização Espontânea

De forma ingênua, poderíamos pensar que as equações ainda precisam ser integradas fora da estrela, até um raio arbitrariamente grande. Porém, assim como em Schwarzschild, existe uma solução exata das equações na região exterior da estrela, onde o tensor energia-momento se anula e escrevemos essa solução com o uso de uma nova variável radial \tilde{r} . Essa solução é escrita como [53]

$$ds^2 = -e^\nu dt^2 + e^{-\nu} [d\tilde{r}^2 + (\tilde{r}^2 - a\tilde{r})(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)], \quad (2.40)$$

onde $e^\nu = (1 - a/\tilde{r})^{b/a}$ e o campo escalar pode ser escrito como

$$\varphi(\tilde{r}) = \varphi_\infty + \frac{d}{a} \log \left(1 - \frac{a}{\tilde{r}} \right), \quad (2.41)$$

sendo a , b e c constantes de integração que podem ser escritas em função da massa e da carga escalar

$$b = 2M, \quad \frac{a}{b} = \sqrt{1 + \alpha}, \quad \frac{d}{b} = \frac{\alpha}{2}. \quad (2.42)$$

Para juntarmos a solução interior com a solução analítica exterior, precisamos da forma com que as coordenadas radiais se relacionam, o que pode ser obtido comparando os elementos de linha 2.29 e 2.40, de forma que

$$r = \tilde{r} \left(1 - \frac{a}{\tilde{r}} \right)^{\frac{a-b}{2a}}, \quad e^{\lambda(r)} = \left(1 - \frac{a}{\tilde{r}} \right) \left(1 - \frac{a+b}{2\tilde{r}} \right)^{-2}. \quad (2.43)$$

Assim, integramos numericamente as equações de equilíbrio até a superfície da estrela e usamos a solução externa para obter as propriedades globais relevantes. Para facilitar a notação, definimos a derivada do campo escalar como $\psi(r) = \varphi'(r)$. Assim,

podemos escrever as seguintes relações [53]

$$\nu'(R) \equiv R\psi^2(R) + \frac{2M}{R(R - 2m(R))}, \quad (2.44)$$

$$\alpha \equiv \frac{2\psi(R)}{\nu'(R)}, \quad (2.45)$$

$$Q_1 \equiv \sqrt{1 + \alpha^2}, \quad (2.46)$$

$$Q_2 \equiv \sqrt{1 - 2m(R)/R}, \quad (2.47)$$

$$\hat{\nu}(R) \equiv -\frac{2}{Q_1} \tanh^{-1} \left(\frac{Q_1}{1 + 2/(R\nu'(R))} \right), \quad (2.48)$$

$$\varphi_\infty \equiv \varphi(R) - \frac{1}{2}\alpha\hat{\nu}(R), \quad (2.49)$$

$$M \equiv \frac{1}{2}\nu'(R)Q_2R^2e^{\hat{\nu}(R)/2}. \quad (2.50)$$

Para simplificar a apresentação dos resultados, as equações foram resolvidas usando a equação de estado ENG e o acoplamento II, onde lembramos que ele é dado por

$$F^{II}(\varphi) = \left[\cosh(2\sqrt{3}\xi\varphi) \right]^{-1/(3\xi)}, \quad (2.51)$$

$$\alpha^{II}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{3}} \tanh(2\sqrt{3}\xi\varphi). \quad (2.52)$$

Como é pequena a diferença entre esse acoplamento e o acoplamento não mínimo usual, os resultados serão semelhantes.

Para a constante de acoplamento $\xi < 0$, vemos que as relações de equilíbrio começam a se modificar bem antes da massa máxima, como pode ser visto nas Figuras 6 e 7. Isso acontece pois para a escalarização ocorrer é necessário o traço do tensor energia-momento ser negativo, o que ocorre na maior parte da sequência de equilíbrio.

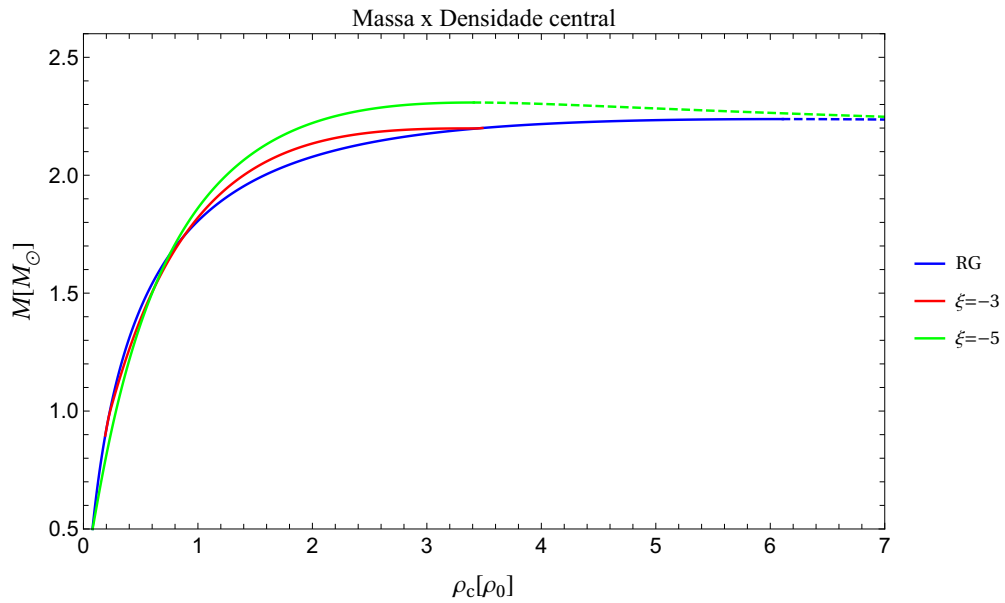


Figura 6 – Relação entre a massa e a densidade central para teorias Tensor-Escalar. A curva é modificada em relação ao resultado puramente relativístico na medida em que a escalarização espontânea passa a ocorrer. Foi usado o acoplamento hiperbólico II. Soluções instáveis estão marcadas na parte pontilhada do gráfico.

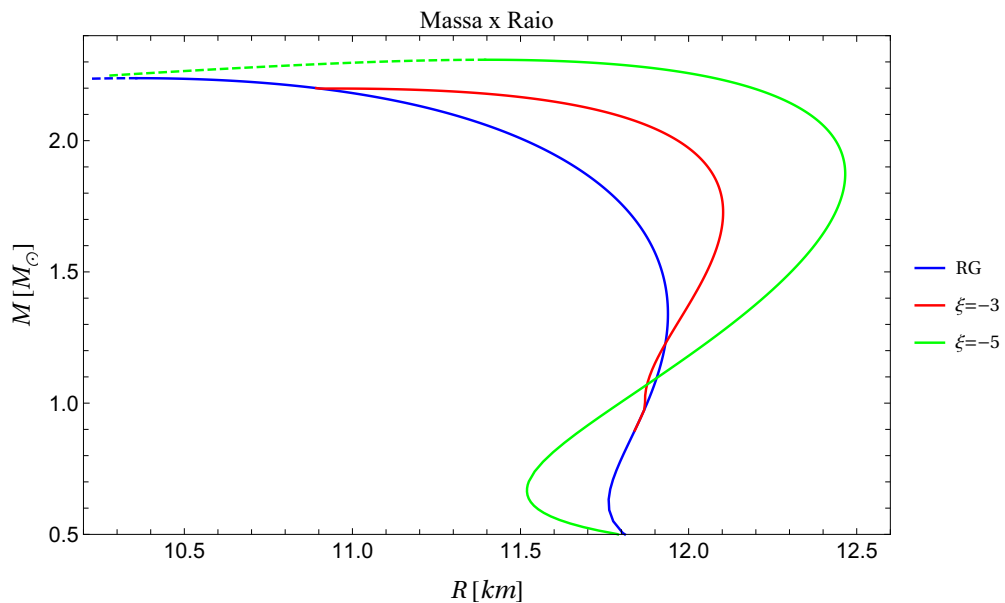


Figura 7 – Relação massa-raio para teorias Tensor-Escalar com o acoplamento hiperbólico e constante de acoplamento negativa $\xi < 0$.

Já para o caso com a constante de acoplamento positiva $\xi > 0$, vemos que a escalarização começa a ocorrer somente para as massas mais altas, próximas da massa máxima, justamente pelo fato de somente com as estrelas mais massivas o traço do tensor energia-momento ser capaz de se tornar positivo na região central da estrela. Isso pode ser visto nas Figuras 8 e 9.

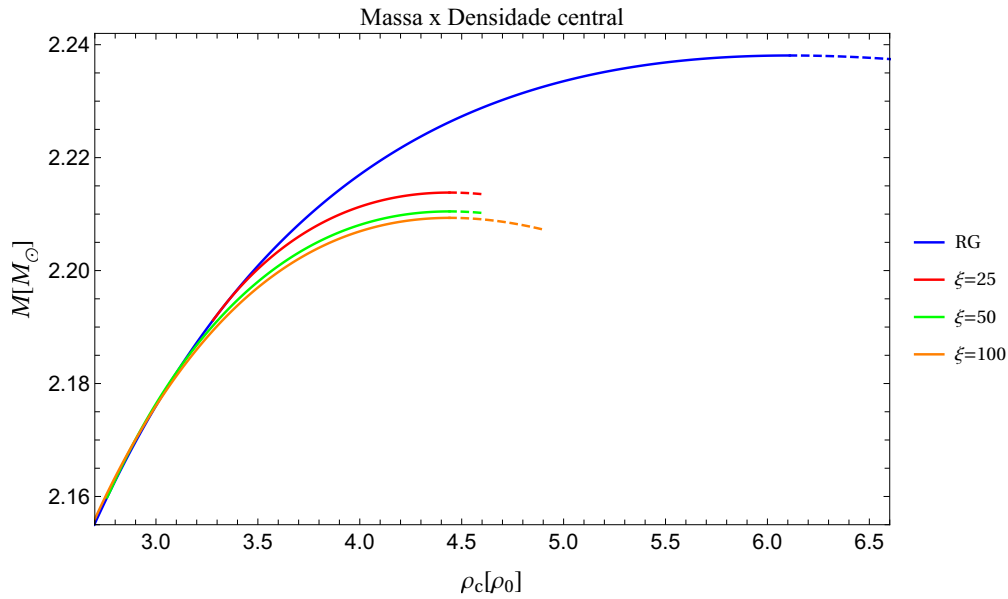


Figura 8 – Relação entre a massa e a densidade central para teorias Tensor-Escalar. A curva é modificada em relação ao resultado puramente relativístico na medida em que a escalarização espontânea passa a ocorrer. Foi usado o acoplamento hiperbólico II e uma constante positiva $\xi > 0$. Soluções instáveis estão marcadas na parte pontilhada do gráfico.

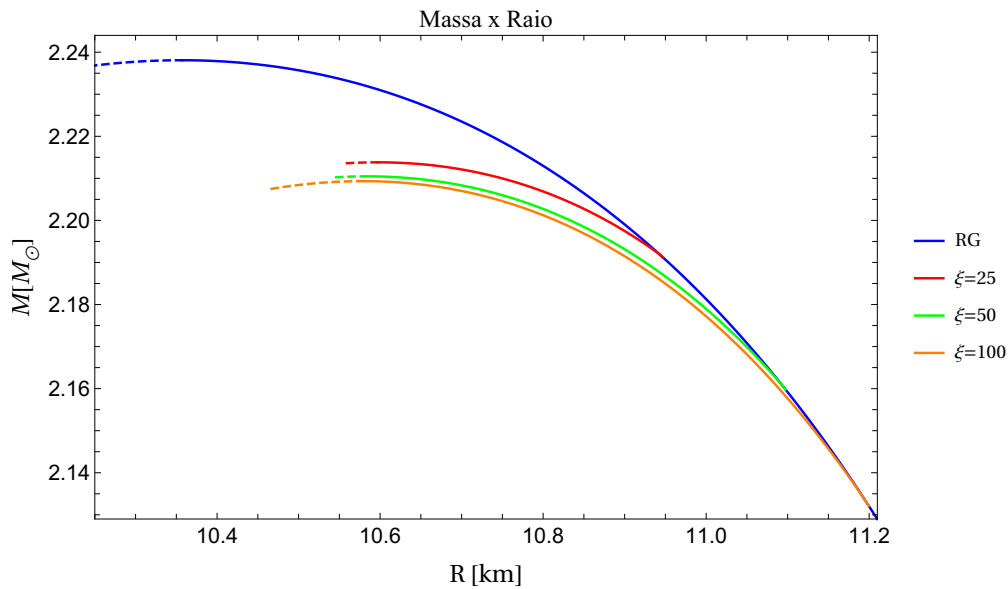


Figura 9 – Relação massa-raio para teorias Tensor-Escalar. No caso para o acoplamento positivo, somente a parte final da curva da Relatividade Geral sofre modificações.

Em relação às cargas escalares, que são extraídas do comportamento assintótico do campo, temos um comportamento bem diferente entre as duas regiões de escalarização. No caso da constante negativa, temos que à medida que ξ se torna mais negativo, a carga tende a aumentar, juntamente com a região de escalarização, conforme a Figura 10 mostra.

Já no caso da constante ser positiva, à medida que ξ aumenta, a carga escalar tende a ser suprimida, tendo também um valor absoluto bem menor que no caso negativo, conforme fica claro pela Figura 11.

Outra conclusão que podemos chegar ao compararmos os dois regimes, com a constante ξ negativa e positiva, é que no primeiro caso, quando $|\xi|$ aumenta, a massa máxima da solução escalarizada também aumenta, acontecendo o oposto quando $\xi > 0$. Isso está consistente com o fato de interpretarmos $G_{eff} = G/F(\Phi(\varphi))$ como uma constante gravitacional efetiva. Quando $\xi > 0$ cresce, o mesmo acontece com G_{eff} : a gravidade se torna mais forte na presença do campo escalar e apenas estrelas escalarizadas menos massivas conseguem se manter frente ao colapso gravitacional eminente.

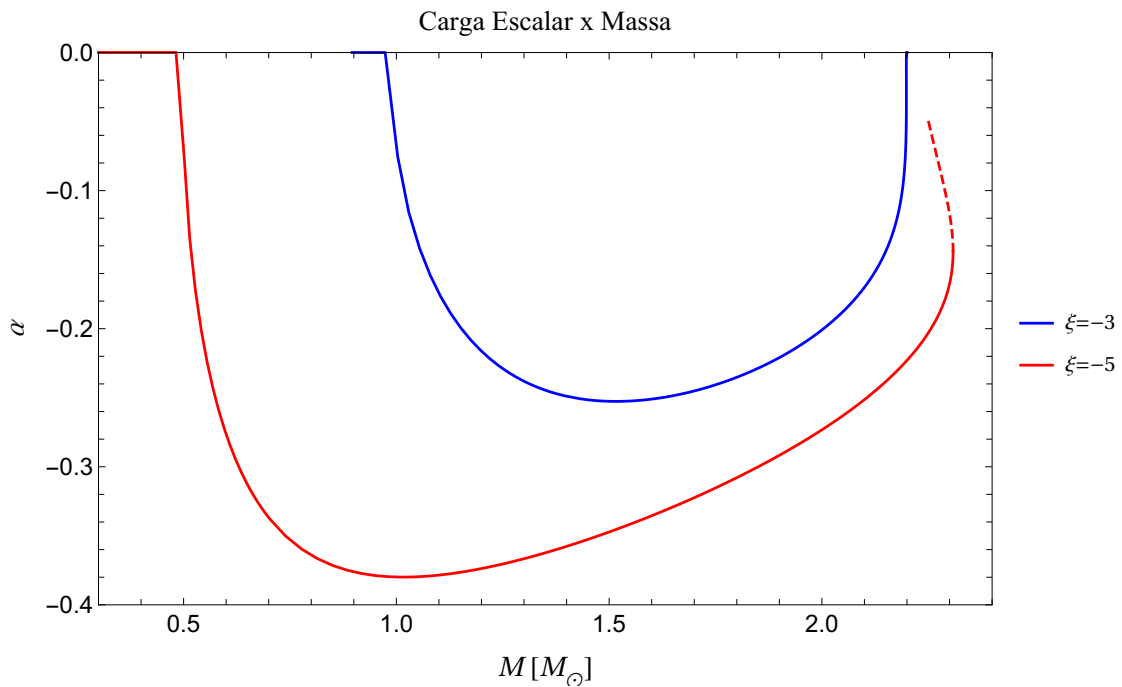


Figura 10 – Relação entre a carga escalar e a massa para o acoplamento positivo. Soluções instáveis estão marcadas na parte pontilhada do gráfico.

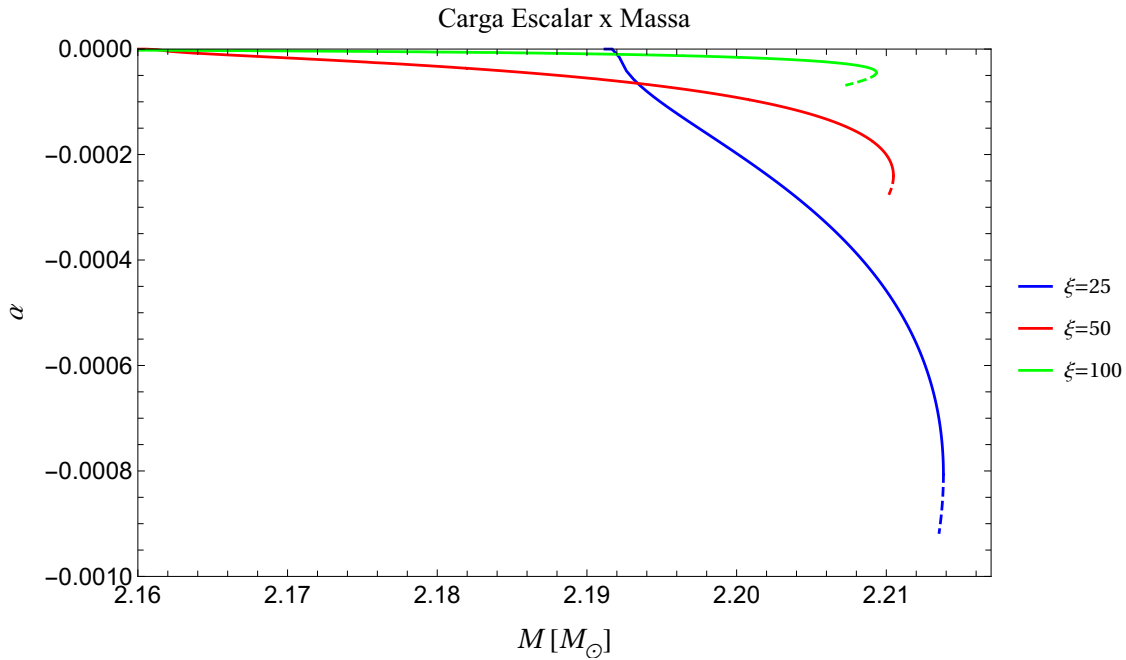


Figura 11 – Relação entre a carga escalar e a massa para o acoplamento positivo.

A grande diferença de comportamento entre os dois domínios de escalarização pode ser entendida melhor ao analisarmos a Figura 12, onde temos dois perfis de campo típicos. Ambos os casos correspondem a uma estrela de $M = 2.2M_{\odot}$. Para a constante negativa $\xi = -5$, temos um valor central do campo mais alto comparado ao caso positivo $\xi = 25$, o que resulta em um valor ainda apreciável do campo na região exterior. Assim, a carga, sendo caracterizada pela constante que caracteriza o comportamento $1/r$ do campo, será mais alta que no caso positivo, onde temos um valor central de campo mais baixo, que logo é suprimido pelo fato do traço do tensor energia-momento ser positivo somente na região central da estrela.

Um ponto importante de se destacar é que pelo fato das equações de campo 2.32-2.35 serem invariantes por uma transformação do campo escalar na forma de uma inversão de sinal, $\varphi \rightarrow -\varphi$, para as funções de acoplamento que discutimos, sempre teremos duas soluções gêmeas para o campo escalar, com cargas opostas. Isso acontece desde que $\varphi_{\infty} = 0$, caso contrário a condição de contorno quebra a simetria de reflexão da solução.

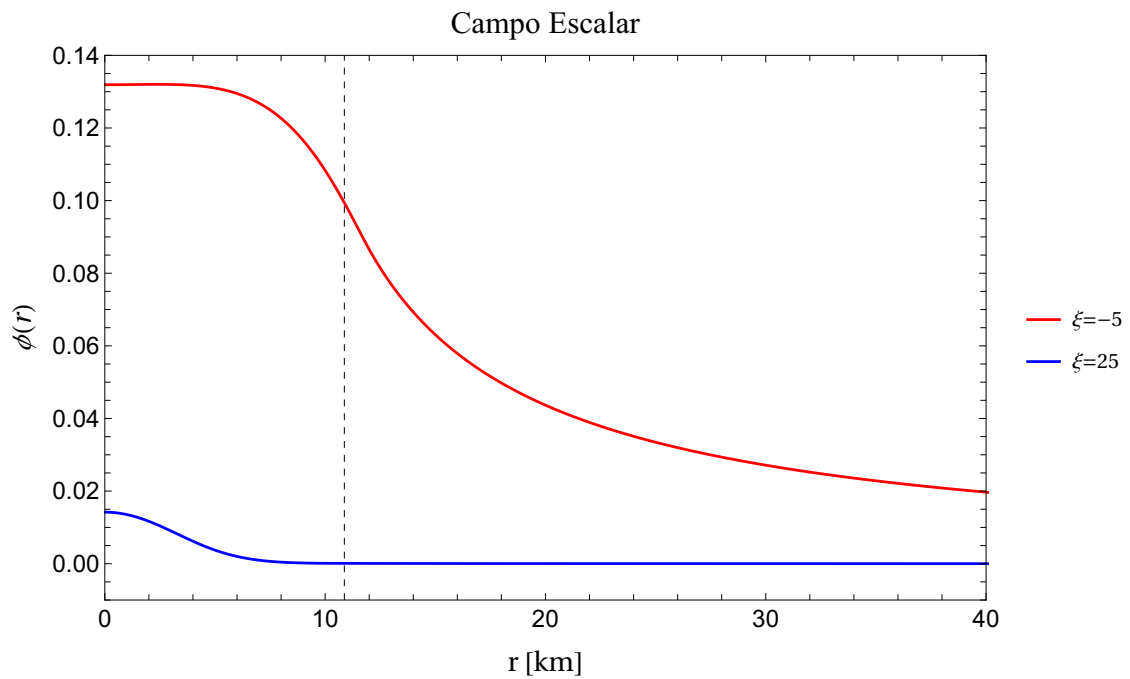


Figura 12 – Dois perfis típicos de campo escalar para uma estrela de $M = 2.2M_{\odot}$. O raio aproximado da superfície da estrela está marcada com uma linha pontilhada.

3 Estrelas de Nêutrons com Rotação

Vamos tratar agora da estrutura de estrelas relativísticas com rotação. Para isso, vamos revisar o formalismo de Hartle-Thorne desenvolvido em uma série de artigos semanais no final da década de 60 [57, 58], onde resolvemos as equações de Einstein até segunda ordem, tratando a velocidade angular da estrela como uma perturbação da solução estática. Em seguida exploramos alguns resultados do formalismo estendido para teorias tensor-escalar.

3.1 Equilíbrio de Estrelas de Nêutrons com rotação

Em segunda ordem na velocidade angular, a estrutura de objetos compactos pode ser aproximadamente descrita pela massa, momento angular e momento de quadrupolo. Já temos a configuração de equilíbrio da estrela sem rotação, calculada numericamente no capítulo anterior, e vamos tratar a rotação como uma perturbação dessa configuração. Além disso, para que nosso tratamento perturbativo seja válido, exigimos que a velocidade angular seja baixa, no sentido que

$$\Omega^2 \ll \left(\frac{c}{R}\right)^2 \frac{GM}{Rc^2} \quad \longrightarrow \quad \Omega R \ll c, \quad (3.1)$$

onde essa velocidade angular é considerada uniforme em toda a estrela. Fisicamente, a condição 3.1 significa que as partículas que formam a estrela estão se movendo em velocidades não relativísticas, de forma que as perturbações na pressão, na energia e no campo gravitacional sejam pequenas. Mesmo para o pulsar mais rápido descoberto, o PSR J1748-2446ad [59], cuja frequência é de 716 revoluções por segundo, temos $\Omega R/c \approx 0.15$, o que justifica nosso tratamento perturbativo.

Vamos escrever a métrica usando um sistema de coordenadas adaptado a uma estrela relativística com rotação. Para isso devemos levar em conta a simetria axial e o fato de o espaço-tempo ser estacionário e assintoticamente plano. Matematicamente, isso significa que temos dois campos vetoriais de Killing [60], que podemos tomar como sendo geradores das coordenadas (t, ϕ) usuais, de forma que

$$ds^2 = -H^2 dt^2 + g_{\phi\phi}(d\phi - Ldt)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}dx^1 dx^2 + g_{22}(dx^2)^2. \quad (3.2)$$

Além disso, podemos simplificar ainda mais a métrica escolhendo coordenadas ortogonais ($x^1 = r, x^2 = \theta$) de forma que $g_{r\theta} = 0$, $g_{\theta\theta} = g_{\phi\phi}/\sin^2 \theta$ e podemos escrever a métrica como

$$ds^2 = -H^2 dt^2 + Q^2 dr^2 + r^2 K^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta (d\phi - Ldt)^2], \quad (3.3)$$

onde H^2 , Q^2 , K^2 e L são funções de r e θ . Vemos que a grande diferença entre essa métrica e a métrica sem rotação 2.1 é o aparecimento de um termo cruzado $g_{t\phi}$ proporcional a $L(r, \theta)$ que não pode ser eliminado por meio de uma mudança de coordenadas e é característico de um espaço-tempo com as simetrias que impusemos.

Para interpretarmos o significado físico do termo cruzado $L(r, \theta)$, suponha um observador assintótico (longe da estrela) que libera uma partícula cujo movimento é puramente radial, de forma que $p_\phi = 0$. Como a métrica independe da coordenada ϕ , o momento p_ϕ associado será conservado ao longo de sua trajetória, considerando que o movimento é uma geodésica. Mas devido ao termo cruzado, teremos

$$\frac{p^\phi}{p^t} = \frac{md\phi/d\tau}{m dt/d\tau} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{g^{\phi t}}{g^{tt}} \neq 0. \quad (3.4)$$

Assim, a partícula caindo radialmente em direção a uma estrela com rotação será arrastada na direção de rotação da estrela, de forma que interpretamos $L(r, \theta)$ como sendo a velocidade angular com relação a um observador assintótico, de uma partícula que parte do repouso em um ponto $r \gg R$ até o ponto representado por (r, θ) .

Ao analisarmos os efeitos que a rotação provoca na estrela, como forças centrífugas, precisamos usar um referencial inercial local para descrever os fenômenos. Tais referenciais não são afetados pela rotação na gravitação Newtoniana; porém, na Relatividade Geral, a própria rotação contribui como fonte de campo gravitacional, gerando um arrasto do próprio espaço nas vizinhanças da estrela, descrito pelo aparecimento do termo cruzado $g_{t\phi}$ na métrica 3.3. Dessa forma, os próprios referenciais serão arrastados, ou tragados pela rotação da estrela, o que deve necessariamente ser levado em conta no cálculo de sua estrutura.

Como a estrela com rotação se deforma e perde a simetria esférica, coordenadas esféricas usuais não são apropriadas para descrever a configuração com rotação. Para isso, definimos uma nova coordenada radial que mapeia as superfícies de densidade constante entre as duas configurações, de tal forma que

$$r = r^{(0)} + \xi(r^{(0)}, \theta) + O(\Omega^4), \quad (3.5)$$

onde denotamos aqui $r^{(0)}$ como a coordenada da configuração esférica e $\xi(r^{(0)}, \theta)$ é a diferença radial entre superfícies com densidade constante nas duas configurações, que vamos considerar $\xi(r^{(0)}, \theta)/r^{(0)} \ll 1$, para que o procedimento perturbativo seja válido.

3.1.1 Equações em Primeira Ordem: Arrasto dos Referenciais Inerciais

A métrica que descreve a estrela com rotação, 3.3, permanece invariante ao invertermos juntamente o tempo e a direção da rotação ($dt \rightarrow -dt$, $d\phi \rightarrow -d\phi$). De forma que a expansão das funções H , Q e K deve conter potências pares da velocidade angular Ω , ao

passo que a função L deve conter potências ímpares, uma vez que $g_{t\phi}$ é sensível ao sentido de rotação da estrela. Dessa forma, podemos escrever, consistente com nosso formalismo até segunda ordem,

$$L(r, \theta) = \omega(r, \theta) + O(\Omega^3). \quad (3.6)$$

Então, para calcular a função $L(r, \theta)$ podemos usar somente a componente fora da diagonal ($t\phi$) das equações de Einstein, que escrevemos na forma

$$R_{\phi}^t = 8\pi T_{\phi}^t. \quad (3.7)$$

Como Ω é a velocidade angular da estrela vista por um observador assintótico, sua 4-velocidade deve ter componentes temporais e azimutais não nulas, de forma que a relação entre elas deve ser $U^{\phi} = \Omega U^t$. Pela normalização $U^{\mu}U_{\mu} = -1$, criamos um vínculo na componente temporal

$$U^t = \left[-(g_{tt} + 2\Omega g_{t\phi} + \Omega^2 g_{\phi\phi}) \right]^{1/2}, \quad (3.8)$$

de forma que podemos escrever o tensor energia-momento da estrela, até primeira ordem em Ω , como

$$T_{\phi}^t = (\varepsilon + P)U^tU_{\phi} = (\varepsilon + P)(U^t)^2(g_{t\phi} + \Omega g_{\phi\phi}) \quad (3.9)$$

$$= (\varepsilon + P)e^{-\nu}(\Omega - \omega)r^2 \sin^2 \theta, \quad (3.10)$$

definimos a diferença $\Omega - \omega \equiv \bar{\omega}$, como sendo a velocidade angular do fluido vista por um observador local, que experimenta o efeito de arrasto nas vizinhanças da estrela. Essa é exatamente a quantidade que nos permite descrever de maneira satisfatória a rotação da estrela (até primeira ordem).

Agora que temos a forma do tensor energia-momento, o que falta é computar o tensor de Ricci, até primeira ordem na velocidade angular, usando a métrica 3.3. A expressão para a componente R_{ϕ}^t é [57]

$$-2r^2 \sin \theta e^{(\nu+\lambda)/2} R_{\phi}^t = \frac{\partial}{\partial r} \left[e^{-(\nu+\lambda)/2} r^4 \sin^3 \theta \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[e^{(\lambda-\nu)/2} r^2 \sin^3 \theta \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right], \quad (3.11)$$

sendo que obtemos assim a equação

$$\frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 j \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial r} \right) + \frac{4}{r} \frac{dj}{dr} \bar{\omega} + \frac{e^{(\lambda-\nu)/2}}{r^2} \frac{1}{\sin^3 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^3 \theta \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (3.12)$$

onde

$$j(r) = e^{-(\nu+\lambda)/2}. \quad (3.13)$$

Temos então que a equação para a perturbação, descrita por $\bar{\omega}$, depende somente da solução estática conhecida. A princípio temos uma dependência tanto radial quanto angular em $\bar{\omega}(r, \theta)$. Porém podemos separar a dependência angular usando harmônicos

esféricos vetoriais, de acordo com o comportamento dos coeficientes g_{0i} da métrica, que se transformam como um vetor. Assim, usamos a decomposição

$$\bar{\omega}(r, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} \bar{\omega}_l(r) \left(-\frac{1}{\sin \theta} \frac{dP_l(\theta)}{d\theta} \right), \quad (3.14)$$

onde P_l são os polinômios de Legendre usuais.

Dessa forma, a função radial obedece a equação

$$\frac{1}{r^4} \frac{d}{dr} \left(r^4 j \frac{d\bar{\omega}_l}{dr} \right) + \left(\frac{4}{r} \frac{dj}{dr} - e^{(\lambda-\nu)/2} \frac{l(l+1)-2}{r^2} \right) \bar{\omega}_l = 0. \quad (3.15)$$

Agora, temos que fora da estrela $j = 1$, e a solução é proporcional a $Ar^{-l-2} + Br^{l-1}$. Ao fixarmos que a métrica deve ser assintoticamente plana vemos que somente o primeiro termo da equação $l = 1$ deve ser não nulo, uma vez que fora da estrela a solução deve decrescer com r . Dessa forma $\bar{\omega}$ é uma função puramente radial que obedece a equação

$$\frac{1}{r^4} \frac{d}{dr} \left(r^4 j \frac{d\bar{\omega}}{dr} \right) + \frac{4}{r} \frac{dj}{dr} = 0, \quad (3.16)$$

onde fora da estrela ($j = 1$) a solução pode ser integrada facilmente, resultando em

$$\bar{\omega}(r) = \Omega - \frac{2J}{r^3}, \quad (3.17)$$

onde identificamos a constante de integração J como o momento angular total da estrela. Além disso, como a equação 3.16 é linear e homogênea fora da estrela, temos uma proporção simples entre o momento angular e a velocidade angular, cujo coeficiente é o momento de inércia da estrela

$$J = I \Omega. \quad (3.18)$$

É interessante ver que a métrica de Kerr, que descreve um buraco negro com rotação, escrita nas coordenadas de Boyer-Lindquist, possui uma expressão exata para o arrasto dos referenciais [61]

$$\omega_{Kerr} = \frac{g^{\phi t}}{g^{tt}} = \frac{2Mra}{(r^2 + a^2)^2 - a^2(r^2 - 2Mr + a^2) \sin^2 \theta}, \quad (3.19)$$

onde $a = J/M$ descreve a rotação da estrela. Se tratarmos a como um parâmetro infinitesimal e retivermos somente os termos em primeira ordem, obtemos

$$g_{t\phi} \approx \frac{2J}{r^3}, \quad (3.20)$$

que é exatamente o comportamento que obtemos em 3.17.

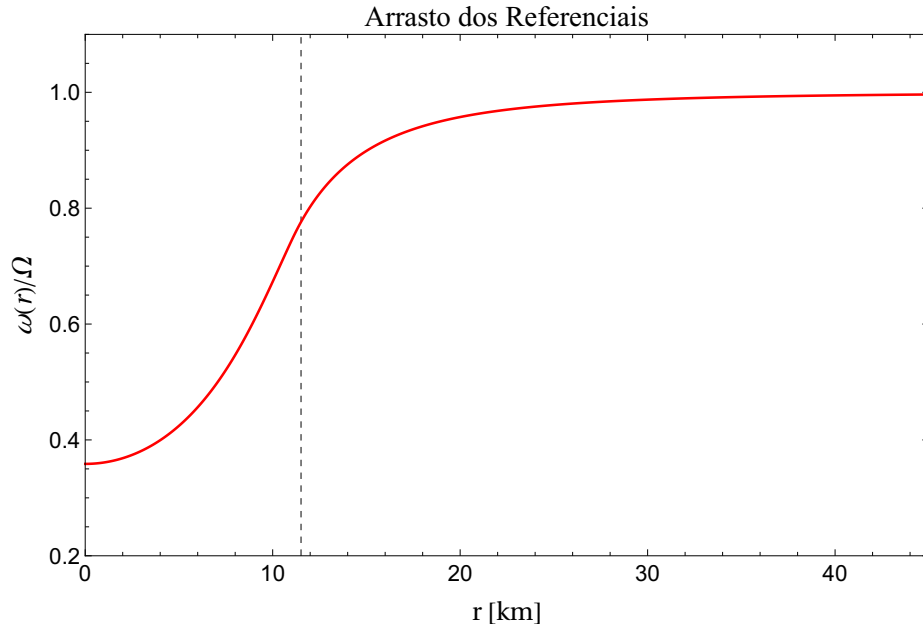


Figura 13 – Arrasto dos Referenciais usando a equação de estado ENG para uma estrela de massa $M = 2M_{\odot}$ e uma velocidade angular correspondente a 10% da velocidade angular máxima. O gráfico indica que o arrasto é máximo no centro da estrela.

Vemos na Figura 13 o resultado numérico para a função $\bar{\omega}(r)/\Omega$, onde está marcada com uma linha vertical a posição do raio da estrela. Vemos que a função assume um mínimo no centro da estrela, indicando que ali o arrasto é máximo. Assintoticamente temos que a velocidade angular medida será igual à velocidade angular de rotação da estrela.

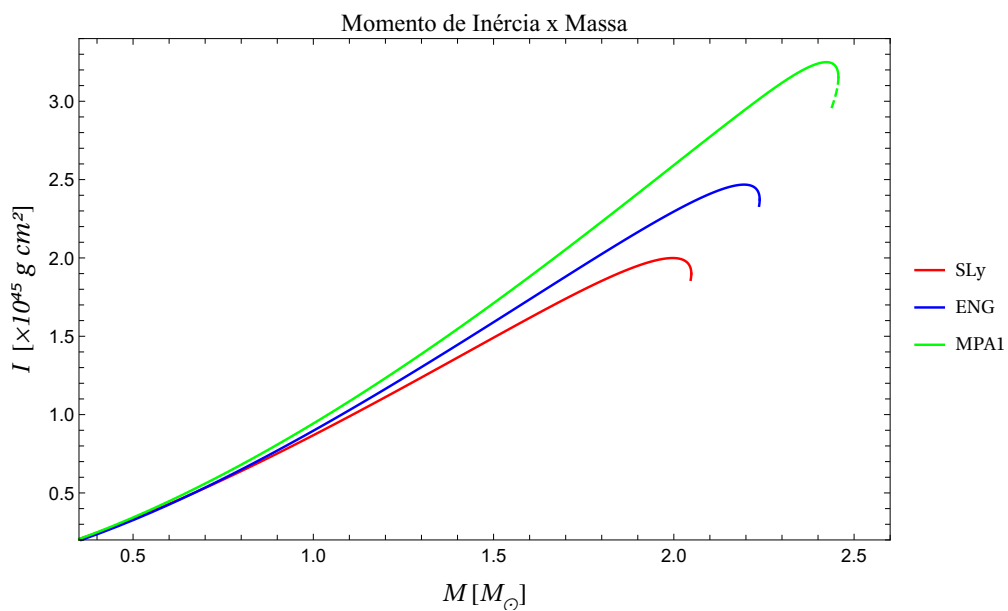


Figura 14 – Momento de Inércia para as equações de estado discutidas. A função assume um máximo um pouco antes da massa máxima. A parte instável está marcada com a linha pontilhada

Já na Figura 14 temos a dependência do momento de inércia com a massa, para cada equação de estado. Vemos que, à medida que a massa aumenta, o valor do momento de inércia se torna bastante dependente da "dureza" da equação de estado, onde temos um máximo para uma massa um pouco menor que a massa máxima.

3.1.2 Equações em segunda ordem: Momento de Quadrupolo e a Deformação da Estrela

Até segunda ordem na velocidade angular da estrela, escrevemos as perturbações da métrica como [58]

$$ds^2 = -e^\nu(1+2h)dt^2 + e^\lambda \left[1 + \frac{2m}{(r-2M)} \right] dr^2 + r^2(1+2k)[d\theta^2 + \sin^2\theta(d\phi - \omega dt)^2] + O(\Omega^3), \quad (3.21)$$

onde podemos usar a versão usual escalar dos harmônicos esféricos para separar as variáveis (r, θ) , dado o comportamento dessas componentes da métrica

$$h(r, \theta) = h_0(r) + h_2(r)P_2(\theta) + \dots \quad (3.22)$$

$$m(r, \theta) = m_0(r) + m_2(r)P_2(\theta) + \dots \quad (3.23)$$

$$k(r, \theta) = k_2(r)P_2(\theta) + \dots, \quad (3.24)$$

onde $P_2(\theta) = 1/2(3\cos^2\theta - 1)$. Usamos a expansão somente com os termos pares $l = 0, 2$ por causa da simetria de reflexão com o plano equatorial e pela forma das equações perturbadas em segunda ordem, que dependem de forma quadrática da solução em primeira ordem, que já vimos conter somente o termo $l = 1$. É notória a simplificação do problema nessa aproximação perturbativa, onde temos somente as dependências mais simples na variável θ . Além disso, usamos a liberdade de redefinição da variável radial $r \rightarrow f(r)$ para eliminarmos uma possível contribuição puramente radial na função $k(r, \theta)$ em 3.24.

Para encontrarmos a forma das perturbações na pressão e na densidade da estrela, precisamos usar a coordenada radial definida em 3.5, por causa das deformações próximas à superfície, onde as coordenadas esféricas usuais com que descrevemos a métrica se tornam inapropriadas.

Dessa forma, podemos fazer uma decomposição similar na coordenada que descreve o raio da estrela deformada

$$\begin{aligned} r &= r^{(0)} + \xi(r^{(0)}, \theta) \\ &= r^{(0)} + \xi_0(r^{(0)}) + \xi_2(r^{(0)})P_2(\theta) + \dots, \end{aligned}$$

de forma que a perturbação na pressão pode ser escrita como

$$\mathcal{P} = P_0^*(r) + P_2^*(r)P_2(\theta). \quad (3.25)$$

Em seguida discutimos alguns resultados interessantes sem nos atentar aos detalhes matemáticos do formalismo, que pode ser encontrado em [58].

3.1.2.1 Resultados $l=0$

A massa da estrela é determinada através de sua influência gravitacional assintótica $\lim_{r \rightarrow \infty} g_{tt} = -(1 - 2M/r)$ de forma que podemos usar somente a perturbação puramente radial, $l = 0$, para obtê-la. As equações de campo relevantes para a resolução completa do problema são [57]

$$\frac{dm_0}{dr} = 4\pi r^2 \frac{d\varepsilon}{dP} (\varepsilon + P) P_0^* + \frac{1}{12} j^2 r^4 \left(\frac{d\bar{\omega}}{dr} \right)^2 - \frac{1}{3} \frac{dj^2}{dr} r^3 \bar{\omega}^2, \quad (3.26)$$

$$\frac{dP_0^*}{dr} = -\frac{m_0(1 + 8\pi r^2 P)}{(r - 2M)^2} - \frac{4\pi r^2 (E + P)}{(r - 2M)} P_0^* + \frac{1}{12} \frac{j^2 r^4}{(r - 2M)} \left(\frac{d\bar{\omega}}{dr} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^3 j^2 \bar{\omega}^2}{r - 2M} \right), \quad (3.27)$$

O comportamento assintótico da função $m_0(r)$, que descreve a mudança na massa provocada pela rotação, pode ser calculado no raio R da estrela, de forma que exigimos a continuidade com a solução analítica externa, tal que

$$M_{Total} = M + \delta M = m_0(R) + \frac{J^2}{R^3}. \quad (3.28)$$

A seguir, na Figura 15, podemos ver o principal resultado que podemos tirar das equações $l = 0$. Usamos aqui uma equação politrópica simples, uma vez que nas equações diferenciais aparecem derivadas da pressão e da energia, que na aproximação politrópica por partes apresentam "bicos" que irão resultar na divergência de alguns termos, o que exigiria um tratamento mais cuidadoso. Vemos a solução estática na curva azul, e a solução com rotação na curva amarela. Podemos concluir assim, que uma estrela com rotação pode ser mais massiva que uma estrela estática, o que fisicamente indica o fato de que a massa aumenta devido à energia cinética de rotação da estrela.

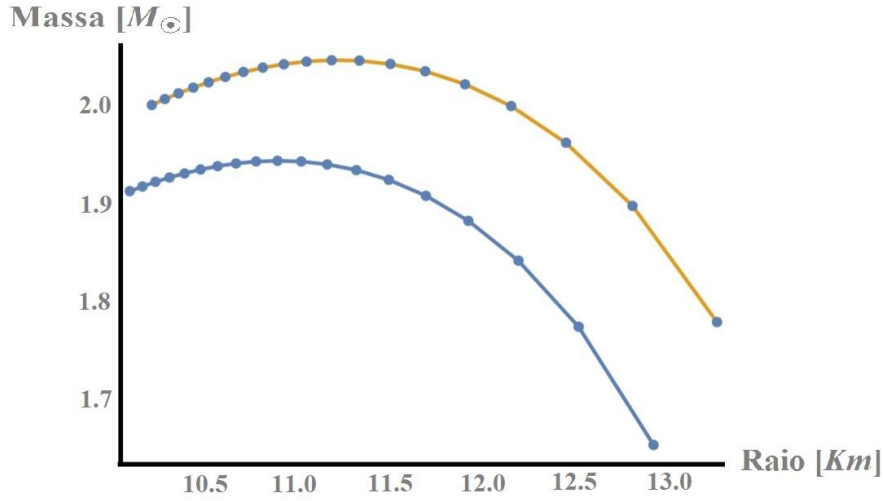


Figura 15 – Curva massa-raio de uma estrela de nêutrons descrita por uma equação politrópica simples $(p/\rho_0 c^2) = 0.0195(\rho/\rho_0)^{2.34}$. Em azul temos a solução para a estrela estática e em amarelo para uma estrela com rotação igual a $0.5\Omega_{max}$.

3.1.2.2 Resultados $l=2$

A forma da estrela é determinada pela equação que descreve a perturbação radial, calculada no raio

$$r = R + \xi_0(R) + \xi_2(R)P_2(\theta). \quad (3.29)$$

As equações de campo relevantes, em segunda ordem, para o setor $l = 2$ são [57]

$$\frac{dk_2}{dr} = -\frac{dh_2}{dr} - h_2 \frac{d\nu}{dr} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} \right) \left[-\frac{1}{3} r^3 \bar{\omega}^2 \frac{dj^2}{dr} + \frac{1}{6} r^4 j^2 \left(\frac{d\bar{\omega}}{dr} \right)^2 \right], \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{dh_2}{dr} = & h_2 \left[-\frac{d\nu}{dr} + \frac{r}{r-2M} \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^{-1} \left(8\pi(\varepsilon + P) - \frac{4M}{r^3} \right) \right] - \frac{4(k_2 + h_2)}{r(r-2M)} \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^{-1} \\ & + \frac{1}{6} \left[\frac{r}{2} \frac{d\nu}{dr} - \frac{1}{r-2M} \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^{-1} \right] r^3 j^2 \left(\frac{d\bar{\omega}}{dr} \right)^2 - \frac{1}{3} \left[\frac{r}{2} \frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{r-2M} \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^{-1} \right] r^2 \bar{\omega}^2 \frac{dj^2}{dr} \end{aligned} \quad (3.31)$$

As equações diferenciais que descrevem as perturbações na métrica se simplificam bastante

fora da estrela, onde podemos obter uma forma analítica para a métrica

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[1 + 2k_1 P_2(\cos \theta) + 2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{J^2}{r^4} (2 \cos^2 \theta - 1)\right] dt^2 + \frac{4J}{r} \sin^2 \theta dt d\phi - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left[1 - 2 \left(k_1 - \frac{6J^2}{r^4}\right) P_2(\cos \theta) - 2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{J^2}{r^4}\right] dr^2 - r^2 [1 - 2k_2 P_2(\cos \theta)] (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.32)$$

onde

$$k_1 = \frac{J^2}{Mr^3} \left(1 + \frac{M}{r}\right) + \frac{5}{8} \frac{Q - J^2/M}{M^3} Q_2^2(x),$$

$$k_2 = k_1 + \frac{J^2}{r^4} + \frac{5}{4} \frac{Q - J^2/M}{M^2 r \sqrt{1 - 2M/r}} Q_2^1(x),$$

e

$$Q_2^1(x) = (x^2 - 1)^{1/2} \left[\frac{3x}{2} \log \left(\frac{x+1}{x-1} \right) - \frac{3x^2 - 2}{x^2 - 1} \right], \quad (3.33)$$

$$Q_2^2(x) = (x^2 - 1) \left[\frac{3}{2} \log \left(\frac{x+1}{x-1} \right) - \frac{3x^3 - 5x}{(x^2 - 1)^2} \right], \quad (3.34)$$

são os Polinômios associados de Legendre de segundo tipo e Q é o momento de quadrupolo.

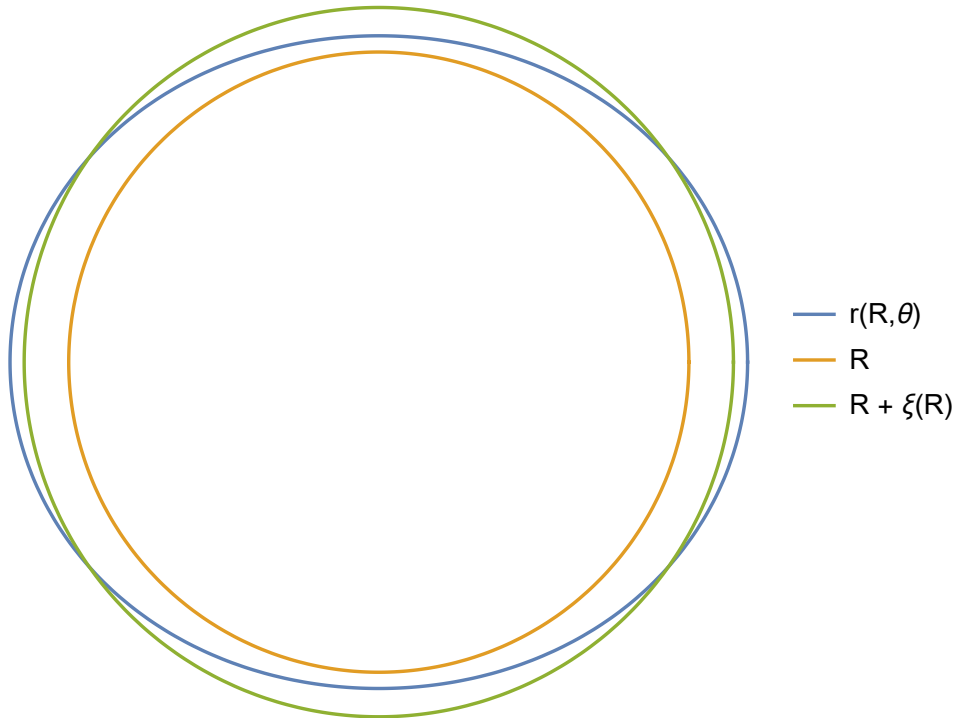


Figura 16 – Forma da estrela e as perturbações induzidas pela rotação. Usamos novamente a equação politrópica simples $(p/\rho_0 c^2) = 0.0195(\rho/\rho_0)^{2.34}$. A estrela possui uma densidade central de $\rho_c = 3.07\rho_0$ e gira com velocidade de rotação máxima.

Na Figura 16 temos o efeito da rotação em segunda ordem na forma da estrela, considerando novamente uma equação de estado politrópica simples. Primeiramente com

uma contribuição puramente radial e em seguida uma contribuição proporcional a $P_2(\theta)$ que deforma a estrela, gerando um momento de quadrupolo.

3.2 Efeitos em Primeira Ordem no Contexto de Teorias Tensor-Escalar

Para os experimentos com pulsares discutidos no próximo capítulo, vamos precisar de estudar como as soluções escalarizadas têm seu momento de inércia alterado pela presença do campo escalar. Para isso precisamos somente das equações em primeira ordem, cuja métrica podemos escrever como

$$ds_*^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - 2\bar{\omega}(r)r^2 \sin^2\theta dt d\phi. \quad (3.35)$$

A equação para o arrasto dos referenciais expressa por $\bar{\omega}$ é naturalmente modificada com a presença do campo escalar. O procedimento é o mesmo que no caso puramente relativístico discutido anteriormente e a equação diferencial passa a ser [62]

$$\bar{\omega}'' = \bar{\omega}' \left[-\frac{4}{r} + r(\varphi')^2 + \frac{4\pi r^2(\epsilon + P)}{F^2(r - 2M)} \right] + \frac{16\pi r(\epsilon + P)}{F^2(r - 2M)} (\Omega - \bar{\omega}). \quad (3.36)$$

As condições de contorno e os procedimentos numéricos para resolver a equação são os mesmos que no caso anterior, discutido na seção 3.1.1. Como o campo escalar possui uma solução externa exata, conforme visto na seção 2.5, podemos usar esse fato para integrar a equação somente até a superfície da estrela, onde usamos as seguintes relações para determinar o momento angular total e a velocidade angular [53]

$$J \equiv \frac{1}{6} \bar{\omega}(R) Q_2 R^4 e^{-1/2\hat{\nu}(R)}, \quad (3.37)$$

$$\Omega \equiv \omega(R) - \frac{3J}{4M^3(3 - \alpha^2)} \left(e^{2\hat{\nu}(R)} - 1 + \frac{4M}{R} e^{\hat{\nu}(R)} \times \left[\frac{2M}{R} + e^{\hat{\nu}(R)/2} \cosh(1/2Q_1\hat{\nu}(R)) \right] \right), \quad (3.38)$$

onde lembramos das definições 2.44-2.50.

A variação do momento de inércia com a massa nas teorias tensor-escalar discutidas estão ilustradas nas Figuras 17 e 18. Novamente usamos a equação de estado ENG e o acoplamento hiperbólico II. Vemos que no caso negativo, como a escalarização começa a ocorrer para massas mais baixas, o momento de inércia tende a aumentar em relação ao seu valor obtido usando a Relatividade Geral. Já para o caso positivo, somente o final da curva é modificado, sendo que quanto maior a constante de acoplamento ξ , menor tende a ser o momento de inércia, para uma dada massa. Esses dois resultados serão importantes

ao discutirmos como essa modificação do momento de inércia altera as variáveis que descrevem pulsares em sistemas binários, assunto que será tratado no próximo capítulo.

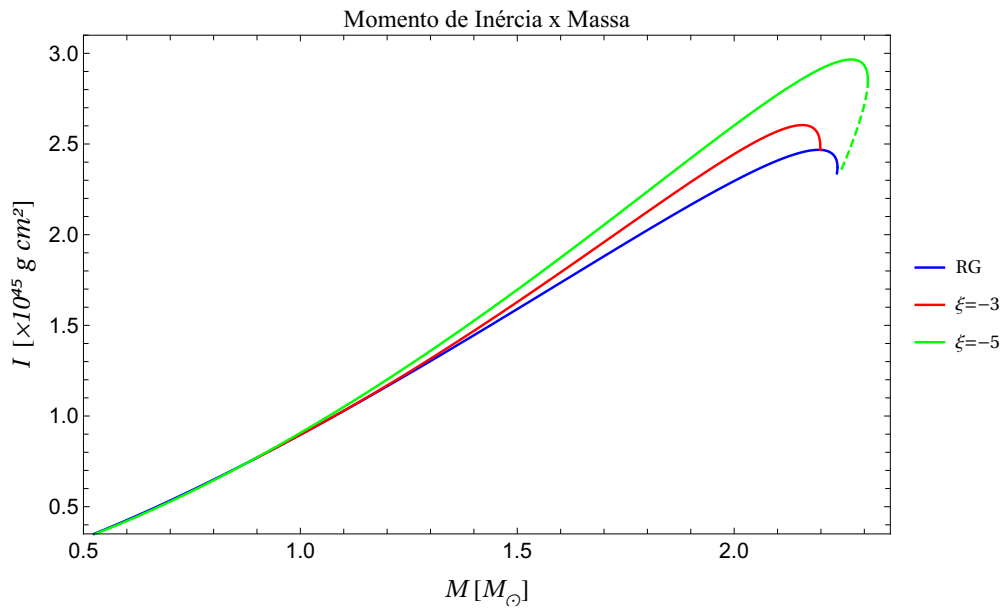


Figura 17 – Momento de Inércia em Teorias Tensor-Escalar com o acoplamento negativo

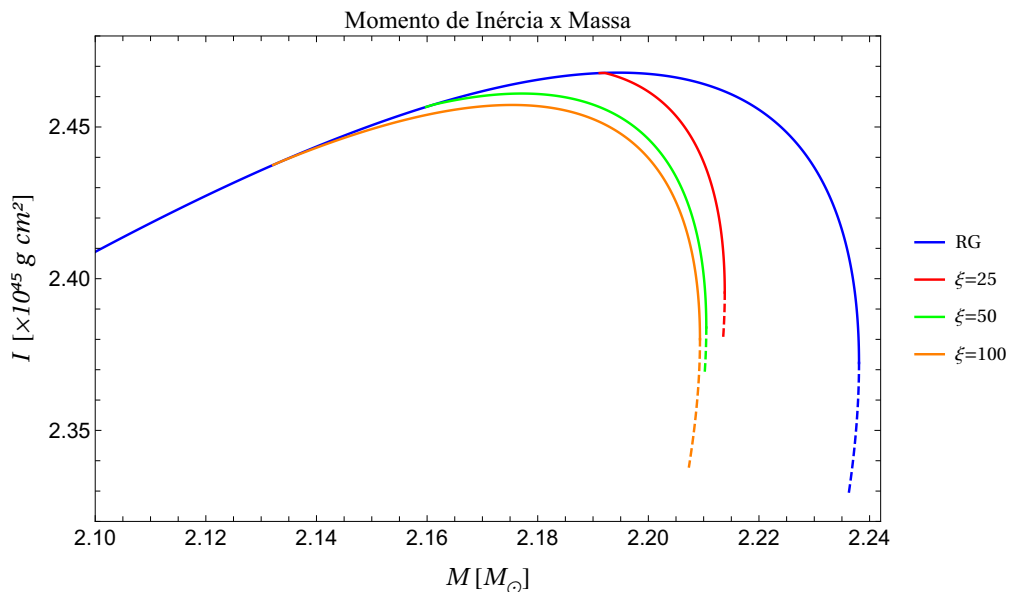


Figura 18 – Momento de Inércia em Teorias Tensor-Escalar com o acoplamento positivo

Para uma dada massa, vemos ao compararmos as duas figuras, que o momento de inércia é mais alto que na Relatividade Geral para o caso $\xi < 0$ e mais baixo no caso $\xi > 0$, sendo a diferença maior conforme $|\xi|$ aumenta. Isso está consistente com a interpretação já discutida em que a gravidade se torna mais forte ou fraca com as soluções escalarizadas, dependendo do sinal de ξ , de forma que o raio da estrela se torna menor no caso positivo e maior no caso negativo.

4 Pulsares

Desde a descoberta do primeiro pulsar em 1967, por Jocelyn Bell e Antony Hewish [1], esse fenômeno astrofísico tem sido bastante estudado para testar a gravidade em um regime diferente dos testes realizados no sistema solar, em que o campo gravitacional é considerado pequeno ($GM/Rc^2 \ll 1$) e as velocidades são consideravelmente baixas ($v/c \ll 1$).

Pulsares estão relacionados com estrelas de nêutrons, que foram discutidas com detalhes nos capítulos anteriores. Quando a estrela é magnetizada e gira com o eixo de rotação desalinhado com o eixo do campo magnético, partículas carregadas são aceleradas nesse campo, gerando um feixe de radiação eletromagnética na direção dos polos que varre o espaço na medida que a estrela gira, resultando em um fenômeno semelhante a um farol. Quando esse feixe de radiação, que normalmente é composto por ondas de rádio, aponta na direção da Terra, percebemos um pulso ao observarmos com um radio-telescópio, daí o nome Pulsar. Os detalhes exatos do mecanismo de emissão não são bem conhecidos e para nossos propósitos não serão relevantes, bastando a imagem simplificada descrita acima.

Os períodos de rotação dos pulsares variam de milissegundos até algumas dezenas de segundos, sendo os pulsares com períodos menores mais estáveis. É na regularidade dos pulsos que se baseiam os testes gravitacionais envolvendo a cronometragem, descritos nesse capítulo.

Por se tratar de um ambiente astrofísico dominado pelo campo gravitacional das estrelas de nêutrons, precisamos da forma precisa do campo desses objetos, fornecida pela teoria gravitacional em um regime de campos intensos. Tal regime está sendo um laboratório de testes da teoria gravitacional, com a possibilidade de observação de fenômenos não previstos pela Relatividade Geral.

Dessa forma temos uma outra classe de fenômenos para testar a gravidade. Vale ressaltar que os experimentos feitos no sistema solar são razoavelmente controlados, uma vez que são feitos em laboratórios na Terra ou por meio de sondas e satélites, os quais temos a possibilidade de controlar e repetir o experimento de várias formas. Já com os experimentos astrofísicos de pulsares, não temos controle algum sobre eles, uma vez que esses objetos se encontram normalmente a milhares de anos-luz de distância, de forma que temos de nos resignar a sermos somente observadores passivos. Porém mesmo com o papel de meros observadores, podemos inferir diversas propriedades do campo gravitacional ao unirmos observação com teoria.

Por se tratar de um sistema estelar, não raro os pulsares são observados em sistemas duplos com outras estrelas, que podem ser estrelas normais da sequência principal, anãs

brancas, outra estrela de nêutrons ou mesmo um buraco negro. Quando isso acontece, tipicamente estamos no regime considerado quase-estático, em que o campo gravitacional de um objeto é intenso porém as velocidades são baixas. Em sistemas binários também temos o domínio radiativo da teoria devido à emissão de ondas gravitacionais pelo sistema, que carregam energia e momento angular e afetam a dinâmica da órbita.

Dessa forma podemos estudar o movimento do sistema binário através da regularidade dos pulsos prevista comparada com aquela que é de fato observada. Assim, temos um teste dos parâmetros que descrevem a órbita do sistema, parâmetros esses que dependem da teoria gravitacional que usamos para calculá-los.

De fato, o primeiro pulsar em um sistema binário descoberto, o pulsar Hulse-Taylor [5], foi um teste incrível da Relatividade Geral, onde foi detectada de forma indireta a existência de ondas gravitacionais, por meio da variação do período orbital observada ao longo dos anos. Hoje são mais de 2000 pulsares descobertos [63], sendo vários deles em sistemas binários, onde usamos os mais avançados instrumentos de observação para monitorar essas estrelas e testar nossa teoria gravitacional de forma cada vez mais precisa.

4.1 Cronometragem de Pulsares

Basicamente, a técnica de cronometragem de pulsares consiste em medir com precisão os pulsos que chegam no laboratório aqui na Terra e relacioná-los com o tempo próprio do pulsar, levando em conta todos os efeitos que o sinal luminoso possa experimentar no seu trajeto até a Terra [64]. No final o que temos é uma fórmula relacionando esses dois "tempos", que nos permite fazer medidas de quantidades orbitais do sistema.

Durante seu trajeto até a Terra, o pulso eletromagnético sofre dispersão ao atravessar a matéria ionizada do meio interestelar, de forma que a velocidade de propagação passa a depender da frequência: altas frequências viajam mais rápido e chegam antes do que as baixas frequências, de forma que temos uma relação de dispersão dependente da frequência.

Da nossa perspectiva, os tênues pulsos individuais de um dado pulsar variam tanto na forma quanto na intensidade, considerando a frequência fixa. Porém, ao acumularmos uma medida correspondente a vários períodos do pulsar (normalmente alguns minutos bastam) somos capazes de obter um perfil de pulso "padrão", que pode ser usado para comparar com futuras medidas de forma a verificar por mudanças em relação ao perfil esperado. Os melhores pulsares para esse tipo de experimento são aqueles que giram com períodos da ordem de milissegundo, os chamados pulsares reciclados, que ganharam momento angular e energia por meio de acreção de matéria, sendo portanto mais estáveis que outros pulsares com períodos maiores [65].

O referencial da Terra em relação ao pulsar não pode ser considerado um referencial

inercial, na medida que experimenta acelerações devido à rotação do planeta e ao seu movimento de translado em torno do sol. Um referencial melhor para isso é o referencial do centro de massa (baricentro) do sistema solar, largamente utilizado como uma boa aproximação de um referencial inercial. Assim, precisamos transformar os intervalos de tempo medidos no laboratório na Terra para o referencial do baricentro do sistema solar.

Seja τ o tempo medido na Terra e t^{BSS} o tempo relativo ao baricentro do sistema solar. Assim, temos a seguinte relação entre eles

$$t^{BSS} = \tau - \frac{\Delta D}{f^2} + \Delta_{R_{\odot}} + \Delta_{S_{\odot}} + \Delta_{E_{\odot}}, \quad (4.1)$$

sendo $\Delta_{R_{\odot}}$ o atraso relativo ao tempo de viagem da luz entre os dois referenciais, conhecido como atraso de Roemer. Já $\Delta_{S_{\odot}}$ e $\Delta_{E_{\odot}}$ são efeitos relativísticos. O primeiro é o atraso de Shapiro, que consiste na influência do campo gravitacional das massas presentes no sistema solar, que retardam o sinal. Já o segundo é o atraso de Einstein, que leva em conta o efeito Doppler causado pelo movimento da Terra e o redshift gravitacional causado pelas massas presentes no sistema solar. Usualmente precisamos apenas levar em conta a massa do Sol e de Júpiter nesses efeitos. O primeiro termo, $\Delta D/f^2$, leva em conta a dispersão do sinal, que, como já foi adiantado, depende inversamente da frequência.

Quando o pulsar está sozinho, a fórmula 4.1 é suficiente para relacionar os referenciais do sistema solar e do pulsar, uma vez ignorado o efeito de paralaxe, já que para a maioria dos pulsares a distância até a Terra é bem grande. Contudo, quando o pulsar se encontra em um sistema binário, como será nosso caso de interesse, precisamos levar em conta efeitos relativísticos semelhantes aos que ocorrem no sistema solar, de forma que a transformação passa a ser

$$t^{BSS} = \tau - \frac{\Delta D}{f^2} + \Delta_{R_{\odot}} + \Delta_{S_{\odot}} + \Delta_{E_{\odot}} + \Delta_R + \Delta_S + \Delta_E, \quad (4.2)$$

onde agora Δ_R , Δ_S , e Δ_E são os respectivos atrasos de Roemer, Shapiro e Einstein em relação ao pulsar e sua companheira de órbita.

Em uma primeira aproximação, podemos descrever a órbita do sistema binário usando as leis de Kepler, discutidas em detalhes nos livros de mecânica [66]. O problema consiste em descrever o movimento de dois corpos que se atraem gravitacionalmente. A solução do movimento é uma elipse em torno do centro de massa. Caracterizamos a órbita através da introdução dos 5 parâmetros keplerianos conhecidos: o período orbital P_b , projeção do semi-eixo maior da órbita $x = a \sin i$, excentricidade e , longitude do periastro ω e a época de passagem do periastro T_0 . Na projeção do semi-eixo x , temos que a é o tamanho do eixo maior da elipse e i é o ângulo entre o plano orbital e o plano do céu, definido através de nossa linha de visão.

Para descrevermos com mais detalhes os efeitos relativísticos relevantes no sistema binário, suponha que T seja o tempo medido por um relógio em repouso em relação ao

centro de massa do pulsar, de forma que podemos expandir a frequência do pulsar em uma série de Taylor na forma

$$\nu(T) = \nu_0 + \dot{\nu}_0 T + \frac{1}{2} \ddot{\nu}_0 T^2 + \dots, \quad (4.3)$$

onde a frequência ν_0 e suas derivadas $\dot{\nu}_0 \equiv \partial\nu/\partial T|_{T=T_0}$ são avaliadas em um tempo de referência, que por simplicidade fazemos $T_0 = 0$. A derivada da frequência está relacionada com mecanismos que fazem o pulsar desacelerar com o tempo, ao converter energia cinética em energia do campo eletromagnético [67].

Como a frequência é a taxa de variação do número do pulso (ou de forma equivalente, da fase), temos que

$$N = N_0 + \nu_0 T + \frac{1}{2} \dot{\nu}_0 T^2 + \frac{1}{6} \ddot{\nu}_0 T^3 + \dots \quad (4.4)$$

Agora escolhemos um sistema de coordenadas quase cartesiano (t, \mathbf{x}) em que a origem está no centro de massa do sistema binário, e a métrica, por hipótese, só assume desvios da aproximação pós-Newtoniana próximo ao pulsar e sua companheira de órbita. Nessas coordenadas, o elemento de linha assume a forma [68]

$$ds^2 = -[1 + 2\Phi + O(v^4)]dt^2 + O(v^3)dx^i dt + [1 - 2\Phi + O(v^4)](dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (4.5)$$

onde o potencial newtoniano é dado por

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = -\frac{m_p}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p|} - \frac{m_c}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c|}, \quad (4.6)$$

onde os subscritos p e c rotulam o pulsar e sua companheira. Assim, mantendo somente contribuições newtonianas, o tempo próprio do pulsar é dado por

$$dT^2 = dt^2[1 + 2\Phi(\mathbf{x}_p) - v_p^2 + O(v^4)], \quad (4.7)$$

de forma que podemos escrever em uma forma diferencial

$$\frac{dT}{dt} = 1 - \frac{m_c}{r} - \frac{m_c^2}{Mr}, \quad (4.8)$$

onde $M = m_p + m_c$ e usamos a relação kepleriana $v^2 = M(2/r - 1/a)$. Ignoramos qualquer termo que seja constante, pois sempre podemos absorvê-los no valor arbitrário de N_0 ou no valor absoluto da frequência ν_0 . Os termos $\Phi(\mathbf{x}_p)$ e $v_p^2/2$ são interpretados como o redshift gravitacional e o efeito Doppler transversal. Para integrarmos a equação 4.8 acima, usamos a expressão kepleriana da anomalia [66],

$$u - e \sin u = (t - T_0)(2\pi/P_b), \quad r = a(1 - e \cos u), \quad (4.9)$$

de forma que podemos escrever

$$T = t_e - \frac{m_c(m_c + M)}{2\pi a M} P_b u = t_e - \frac{m_c(m_c + M)}{2\pi a M} P_b e \sin u, \quad (4.10)$$

sendo t_e o tempo da emissão do pulso, de forma que definimos a contribuição extra como o atraso de Einstein

$$\Delta_E \equiv \gamma \sin u, \quad (4.11)$$

que na Relatividade Geral é dado por $\gamma = (m_c(m_c + M)/2\pi aM)P_b e$

Agora, para relacionarmos o tempo de emissão do pulso com o tempo de chegada no baricentro do sistema solar, usamos o fato de que o sinal segue uma geodésica nula:

$$ds^2 = 0 = -[1 + 2\Phi]dt^2 + [1 - 2\Phi]d\mathbf{x}^2, \quad (4.12)$$

de forma que o tempo de emissão t_e e o tempo de chegada t_c são relacionados por

$$t_a - t_e = \int_{t_e}^{t_c} dt \approx \int_{t_e}^{t_a} |d\mathbf{x}| + 2 \int_{t_e}^{t_a} \left(-\frac{m_p}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p|} - \frac{m_c}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c|} \right) |d\mathbf{x}|. \quad (4.13)$$

Do primeiro termo em 4.13, tiramos o atraso de Roemer, relativo ao tempo que o sinal gasta para ir do pulsar até o centro de massa do sistema binário. Já o segundo termo é o atraso de Shapiro, que irá resultar em um atraso do sinal devido ao campo gravitacional da companheira. Esses termos, dependentes dos parâmetros orbitais, podem ser escritos como [69]

$$\Delta_S = -2r \log \left[1 - e \cos u - s \left(\sin \omega (\cos u - e) + \sqrt{1 - e^2} \cos \omega \sin u \right) \right], \quad (4.14)$$

$$\Delta_R = x(\cos u - e) \sin \omega + x \sin u \sqrt{1 - e^2} \cos \omega, \quad (4.15)$$

onde temos os valores $r = m_c$ e $s = \sin i$ em Relatividade Geral, que são chamados de "intervalo" e "forma" do atraso de Shapiro.

Por se tratar de um sistema relativístico, a órbita do sistema não será uma elipse. Porém, podemos permitir variações nos parâmetros keplerianos para incluir correções relativísticas seculares, da forma

$$\omega = \omega^{(0)} + \dot{\omega}T \quad (4.16)$$

$$e = e^{(0)} + \dot{e}T \quad (4.17)$$

$$P_b = P_b^{(0)} + \frac{1}{2}\dot{P}_b T \quad (4.18)$$

$$\dots \quad (4.19)$$

onde o supraescrito (0) é só para lembrar que o primeiro termo é uma contribuição kepleriana. Dessa forma, usando as expressões para a variação dos parâmetros keplerianos na formula de cronometragem 4.2, somos capazes de determinar, a princípio, vários parâmetros pós-keplerianos, onde os mais importantes, por serem mais detectáveis, são: \dot{P}_b variação do período orbital, $\dot{\omega}$ avanço do periastro, γ fator relativístico que aparece no atraso de Einstein, além de r e s .

É importante notar que nenhuma teoria gravitacional particular foi assumida para a derivação dos parâmetros e da fórmula de cronometragem, onde somente assumimos que a teoria admite uma expansão pós-newtoniana, sendo esse um formalismo fenomenológico geral. O que muda agora, é como cada teoria prevê o valor desses parâmetros.

4.2 Problema de dois corpos e testes gravitacionais

De forma geral, o problema de dois corpos auto gravitantes (duas estrelas por exemplo) é de difícil resolução, tanto em Relatividade Geral quanto em teorias alternativas. Parte das dificuldades está na natureza das equações de campo, que são não lineares e hiperbólicas, o que dificulta até mesmo a escolha dos valores de contorno do problema. Outra questão importante é o fato do campo gravitacional estar acoplado com o movimento da matéria, o que dificulta a separação do problema e a obtenção das equações de movimento.

Nesse sentido, esquemas de aproximação devem ser feitos para tratar o problema. Em um primeiro nível pós-newtoniano, ou seja, a primeira correção relativística às equações de movimento newtonianas, temos que objetos estelares compactos e não compactos são caracterizados somente pela massa, não entrando nenhuma informação da estrutura interna nas equações. Esse efeito é uma consequência da estrutura teórica da Relatividade Geral e recebe o nome na literatura de "effacement" [70], ou seja, os detalhes do campo forte de objetos compactos ficam "escondidos" na definição da massa do corpo.

Em teorias alternativas, como a Teoria Tensor-Escalar discutida nos capítulos anteriores, temos uma violação do princípio da equivalência forte, o que resulta em outras informações além da massa nas equações de movimento. Tal diferença será explicada melhor abaixo.

Para uma classe geral de teorias conservativas, que incluem a Relatividade Geral e a Teoria Tensor-Escalar, podemos escrever a Lagrangiana do sistema pulsar-companheira, cuja separação relativa $r = |\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_c|$ e velocidades $\mathbf{v}_p = \dot{\mathbf{x}}_p$, $\mathbf{v}_c = \dot{\mathbf{x}}_c$, em primeira ordem pós-newtoniana, na forma

$$\mathfrak{L} = -m_p \left(1 - \frac{\mathbf{v}_p^2}{2} - \frac{\mathbf{v}_p^4}{8} \right) - m_c \left(1 - \frac{\mathbf{v}_c^2}{2} - \frac{\mathbf{v}_c^4}{8} \right) + \frac{\mathcal{G}m_p m_c}{r} \left[1 - \frac{\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_c}{2} - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_p)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_c)}{2r^2} + \epsilon \frac{(\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_c)^2}{2} \right] - \xi \frac{\mathcal{G}^2 M m_p m_c}{2r^2}, \quad (4.20)$$

onde incluímos uma possível dependência do campo escalar em $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\varphi)$ e as quantidades ϵ e ξ permitem possíveis desvios em relação aos valores da Relatividade Geral $\epsilon = 3$, $\xi = 1$ e $\mathcal{G} = G$.

A solução da dinâmica descrita por 4.20 mais usada para os experimentos de pulsares, é aquela que introduzimos na seção passada, parametrizada pelos parâmetros pós-keplerianos [69]. Ao resolvermos as equações, temos a previsão teórica de tais parâmetros,

que dependem das massas m_p e m_c , dos parâmetros keplerianos, supostamente conhecidos, além de uma possível dependência do campo particular dos objetos, no caso de teorias tensor-escalar.

No contexto da Relatividade Geral, a previsão para os parâmetros é [71]

$$\dot{\omega}^{RG} = \frac{3n_b V_b^2}{1 - e^2}, \quad (4.21)$$

$$\gamma^{RG} = \frac{e}{n_b} \left(1 + \frac{m_c}{M} \right) \frac{m_c V_b^2}{M}, \quad (4.22)$$

$$r^{RG} = Gm_c, \quad (4.23)$$

$$s^{RG} = xn_b \frac{M}{m_c V_b}, \quad (4.24)$$

onde $n_b = 2\pi/P_b$ e $V_b = (GMn_b)^{1/3}$. Vemos que de fato a única informação da estrutura interna dos objetos gravitantes está em suas massas. Já em teorias tensor-escalar, temos além disso a dependência das chamadas "sensitividades" [71]

$$\dot{\omega}^{TE} = \frac{n_b}{1 - e^2} \left(\frac{3 - \alpha_p \alpha_c}{1 + \alpha_p \alpha_c} - \frac{m_p \alpha_p^2 \beta_c + m_c \alpha_c^2 \beta_p}{2M(1 + \alpha_p \alpha_c)^2} \right) \mathcal{V}_b^2, \quad (4.25)$$

$$\gamma^{TE} = \frac{e}{n_b} \left(\frac{1 + \kappa_p \alpha_c}{1 + \alpha_p \alpha_c} + \frac{m_c}{M} \right) \frac{m_c \mathcal{V}_b^2}{M}, \quad (4.26)$$

$$r^{TE} = \mathcal{G}m_c, \quad (4.27)$$

$$s^{TE} = xn_b \frac{M}{m_c \mathcal{V}_b}, \quad (4.28)$$

onde nesse caso $\mathcal{V}_b = [\mathcal{G}(1 + \alpha_p \alpha_c)Mn_b]^{1/3}$. Vemos que os parâmetros pós keplerianos dependem também da quantidade α , que é a carga escalar principal, além das outras "cargas" escalares β e k .

As cargas escalares aparecem devido ao fato do campo escalar influenciar o ambiente gravitacional ao redor de estrelas massivas, por meio da variação da constante gravitacional newtoniana, alterando assim as propriedades globais da estrela, como a massa e o momento angular. Um jeito de incorporar esses efeitos na descrição pós-Newtoniana é tornar a massa pontual das estrelas dependentes do campo escalar, de forma que para N corpos, a ação do sistema é escrita como

$$S_m = - \sum_{A=1}^N \int m_A(\varphi_A) d\tau_A^*. \quad (4.29)$$

Uma vez que expandimos o campo escalar em torno de seu valor cosmológico de fundo φ_∞ , o efeito da massa dependente do campo se manifesta nos valores assintóticos de suas derivadas, ou seja,

$$\alpha_A \equiv \left. \frac{d \log m_A}{d\varphi_A} \right|_{\varphi_\infty}, \quad (4.30)$$

$$\beta_A \equiv \left. \frac{d\alpha_A}{d\varphi_A} \right|_{\varphi_\infty}, \quad (4.31)$$

assim por diante. A carga escalar k_A que aparece no atraso de Einstein 4.26, carrega a informação de como o momento de inércia muda com o valor do campo escalar, sendo definida como

$$k_A \equiv - \left. \frac{\partial \log I_A}{\partial \varphi_A} \right|_{\varphi_\infty}. \quad (4.32)$$

O quinto parâmetro pós-kepleriano \dot{P}_b está relacionado com o caráter radiativo da teoria, por representar a variação do período orbital devido à emissão de ondas gravitacionais. Em Relatividade Geral, temos que a primeira contribuição dissipativa de emissão de ondas gravitacionais vem na ordem 2.5 pós newtoniana, ou seja, uma contribuição proporcional a (v^5/c^5) que é dada pela fórmula de quadrupolo [71],

$$\dot{P}_b^{RG} = - \frac{192\pi}{5} \frac{m_p m_c}{M^2} \frac{1 + 73e^2/24 + 37e^4/96}{(1 - e^2)^{7/2}} V_b^5. \quad (4.33)$$

Em Teorias Tensor-Escalar, a primeira contribuição dissipativa entra já na ordem 1.5 pós newtoniana, ou seja, proporcional a (v^3/c^3) , e representa a emissão de radiação dipolar, ausente na Relatividade Geral. Sendo assim temos uma importante diferença entre as teorias, que pode ser diretamente testada com as observações de pulsares. A principal contribuição é dada por [71]

$$\dot{P}_b^{TE} = -2\pi \frac{m_p m_c}{M^2} \frac{1 + e^2/2}{(1 - e^2)^{5/2}} \frac{(\alpha_p - \alpha_c)^2 \mathcal{V}_b^3}{1 + \alpha_p \alpha_c}. \quad (4.34)$$

Em Relatividade Geral, os parâmetros pós-keplerianos dependem unicamente das massas do pulsar e da companheira, a princípio desconhecidas, e dos parâmetros keplerianos, supostamente conhecidos. Assim, ao medirmos algum desses parâmetros, temos uma curva em um gráfico $m_p \times m_c$ com as possíveis massas que concordam com o parâmetro medido. Ao medirmos outro parâmetro, temos uma segunda curva, que irá interceptar a primeira em algum ponto correspondente à massa do sistema. Qualquer outro parâmetro que for medido irá funcionar como um teste de consistência da teoria, tendo obrigatoriamente que concordar com o ponto de interseção das curvas. Da mesma forma, as teorias Tensor-Escalar devem passar no teste de consistência, dado pela medida dos parâmetros pós keplerianos.

O melhor sistema até agora para se testar a consistência da Relatividade Geral é o pulsar duplo PSR J0737-3039 [72]. Nesse sistema, ambas as estrelas de nêutrons se manifestam como um pulsar. O primeiro com período de 23ms e o segundo, descoberto mais tarde, com um período de 2.8s. A combinação do período orbital do sistema, $P_b = 147\text{min}$, e do tamanho do semi-eixo da órbita, $a = 1.26R_\odot$, resultam em uma velocidade orbital média de cerca de $0.01c$, tornando este o sistema binário mais relativístico já detectado.

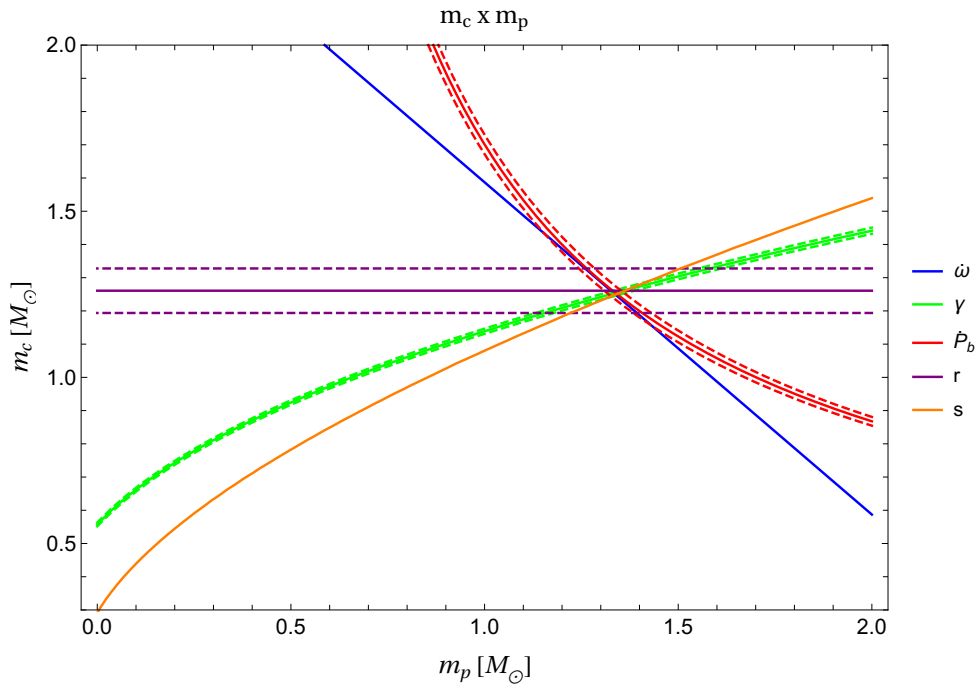


Figura 19 – Os experimentos de cronometragem de pulsares permitem testes de consistência da Relatividade Geral através dos parâmetros pós-keplerianos acima.

Na Figura 19 vemos os valores das massas permitidas de acordo com os parâmetros medidos, considerando a Relatividade Geral como a teoria gravitacional correta. Vemos que as curvas se interseccionam em uma região pequena do gráfico, considerando o erro nas medidas. Com isso, é possível inferir com precisão as massas das estrelas, sendo $m_p = 1.3381 \pm 0.0007 M_\odot$ e $m_c = 1.2489 \pm 0.0007 M_\odot$.

Pela expressão 4.34, vemos que a emissão de radiação dipolar é proporcional à diferença das duas cargas escalares principais das duas estrelas, sendo maior quando as estrelas possuem estruturas diferentes, como é o caso de um pulsar e uma anã branca. Nesse sentido, o sistema com as melhores medidas é do pulsar J1738+0333 [73], com período de 5.85ms, que possui como companheira uma anã branca de massa $m_c = 0.181_{-0.007}^{+0.008}$, em uma órbita pouco excêntrica ($e < 4 \times 10^{-7}$) cujo período orbital é de $P_b = 8.5$ horas.

Para o sistema pulsar-anã branca, podemos fazer $(\alpha_p - \alpha_c)^2 = \alpha_p^2$, ou seja, estamos considerando que somente o pulsar possui uma carga escalar e o campo nos arredores da anã branca assume seu valor de fundo $\varphi_\infty = 0$. Com isso, podemos usar o valor que foi medido para a diminuição do período orbital $\dot{P}_b = (-25.9 \pm 3.2 \times 10^{-15} \text{s/s})$ para impor um limite na magnitude da carga escalar $|\alpha_p| < 2 \times 10^{-3}$ [73]. Esse limite cria o melhor vínculo no espaço de parâmetros de teorias com $\xi < 0$, conforme podemos ver pela magnitude das cargas mostradas na Figura 10. Contudo, pela baixa magnitude da carga escalar principal com $\xi > 0$, veremos na próxima seção que teorias com o acoplamento positivo são capazes de passar nesse teste.

4.3 Cargas Escalares em Teoria Tensor-Escalar com constante de acoplamento positiva

A seguir, discutimos os principais resultados da dissertação, onde calculamos as cargas escalares numericamente, para o caso da teoria com acoplamento positivo, $\xi > 0$, explicando as implicações dessas cargas nas variáveis que descrevem pulsares em sistemas binários [10].

A primeira carga escalar, α_A , é calculada diretamente do comportamento assintótico do campo. Já para as outras duas cargas, precisamos de uma aproximação para a fórmula da derivada em 4.31-4.32.

O que as cargas escalares medem é a variação das propriedades da estrela com a mudança do campo escalar φ_A , enquanto mantemos fixa a massa bariônica dentro da estrela ($\bar{m}_A = \int \rho \sqrt{-g} u^0 d^3x$). Usamos a massa bariônica pois, ao contrário da massa gravitacional, ela não é uma propriedade global da estrela e sim uma medida local da matéria estelar, que independe do valor assintótico do campo escalar.

Usamos a aproximação de diferenças finitas para o operador derivada. Para isso construímos três sequências de equilíbrio, uma com $\varphi_A^{(0)} = \varphi_\infty$, outra com $\varphi_A^{(+)} = \varphi_\infty + \Delta\varphi$ e por último uma com $\varphi_A^{(-)} = \varphi_\infty - \Delta\varphi$, armazenando para cada uma delas o valor da pressão central, a massa total m_A , a massa bariônica \bar{m}_A e o momento de inércia I_A . Usamos agora esses dados para construirmos, por interpolação, as funções $m_A^{(i)}(\bar{m}_A)$, $\alpha_A^{(i)}(\bar{m}_A)$ e $I_A^{(i)}(\bar{m}_A)$, com $i \in \{0, -, +\}$. Para nossos propósitos é suficiente usar um método de diferenças centrado simples para a derivada, onde por exemplo

$$k_A(\bar{m}_A) \approx \frac{1}{I_A^{(0)}} \frac{I^{(+)}(\bar{m}_A) - I^{(-)}(\bar{m}_A)}{2\Delta\varphi}, \quad (4.35)$$

onde é suficiente escolher o incremento da ordem $\Delta\varphi = 0.0005$ [10].

Na Figura 20 temos o resultado para as cargas escalares α_A , β_A e k_A para $\xi = 25, 50, 100$ considerando tanto o acoplamento hiperbólico quanto o acoplamento não mínimo, para as três equações de estado discutidas anteriormente.

Pela primeira linha, vemos que as propriedades da carga α_A não são muito alteradas pela equação de estado, mantendo a mesma ordem de magnitude, onde o que se altera é o intervalo de massas que ocorre a escalarização, conforme discutido no capítulo 2.

Na segunda linha vemos o resultado da carga β_A com a massa total m_A . Ao contrário de α_A , temos que β_A assume uma magnitude maior, próxima da unidade, aumentando conforme ξ cresce. O fato de β_A ser positivo enquanto α é negativo, significa que α recebe um incremento positivo quando o valor assintótico do campo φ_A aumenta, diminuindo portanto em valor absoluto.

Finalmente, temos na terceira linha da Figura 20 o comportamento da carga k_A . A magnitude dessa carga aumenta na medida que ξ aumenta, apresentando um pico abrupto próximo da massa máxima. De forma geral, em todos os casos o acoplamento hiperbólico reproduz bem o acoplamento não mínimo.

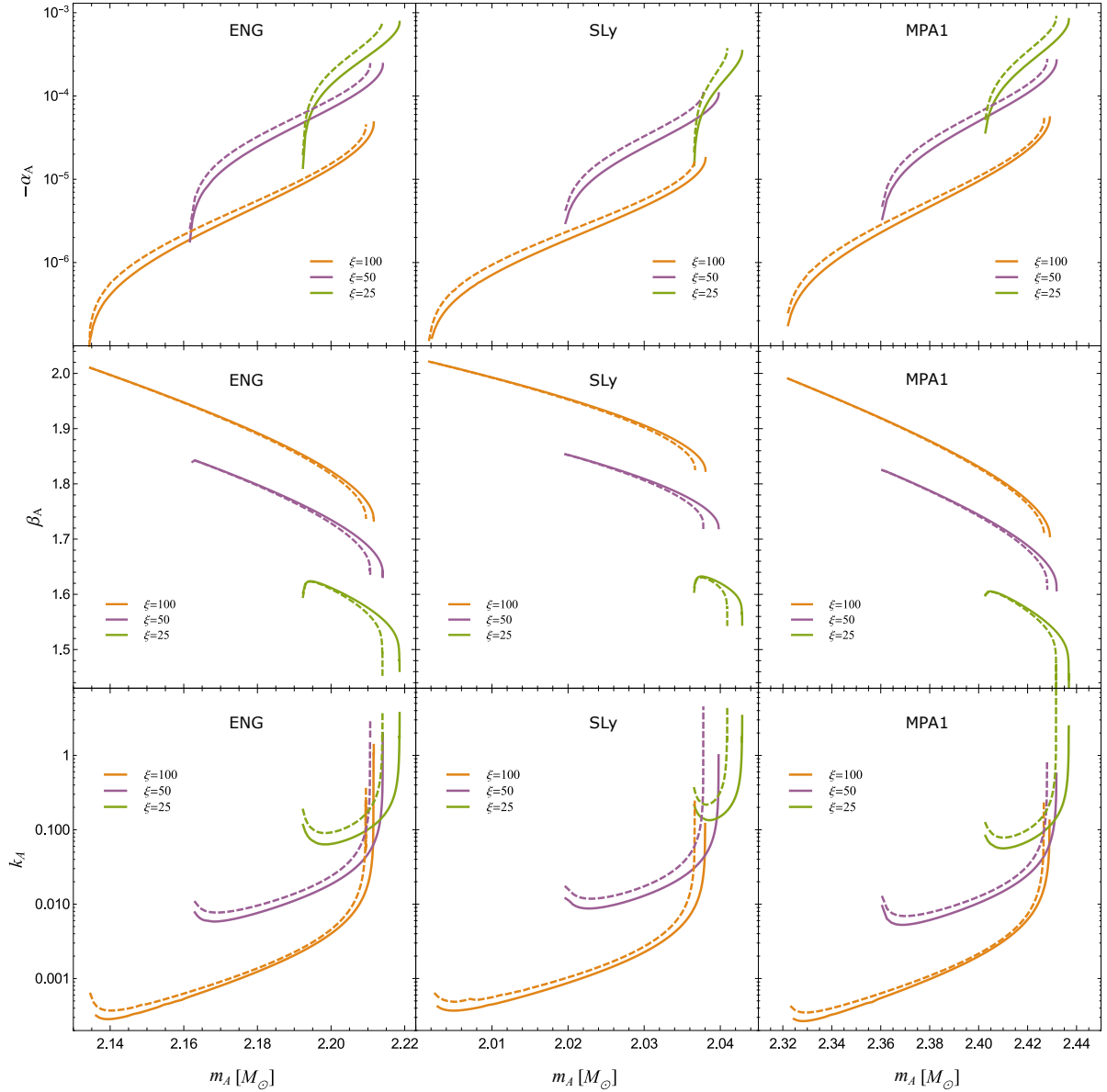


Figura 20 – Cargas escalares α_A , β_A e k_A como função da massa estelar para $\xi = 25, 50$ e 100 , considerando as três equações de estado ENG, SLy e MPA1. O acoplamento não mínimo (NM) é apresentado por linhas contínuas enquanto as linhas pontilhadas da mesma cor representam o modelo com o acoplamento hiperbólico (H), para o mesmo valor de ξ .

4.3.1 Implicações para as variáveis de pulsares

Com o comportamento das cargas escalares entendido, podemos agora ver quais são as implicações dessas cargas nas quantidades 4.25-4.28, 4.34 que descrevem a dinâmica

do pulsar no sistema binário.

Como já foi dito, historicamente foi estudado com detalhes o caso $\xi < 0$, onde fortes vínculos foram colocados nos valores possíveis de ξ , devido ao fato da carga α_A , que entra em todos observáveis de pulsares, aumentar em magnitude na medida que ξ se torna mais negativo, tornando os desvios da Relatividade Geral mais significativos. Dessa forma foi possível excluir, pelas observações, os valores de acoplamento $\xi \leq -2.2$ [73].

A situação muda porém quando consideramos $\xi > 0$. Vimos que a carga escalar α_A tende a ter seu valor suprimido quando aumentamos o valor de ξ , o que diminui os desvios da Relatividade Geral nos valores dos observáveis de pulsares. Por outro lado, ao diminuirmos o valor de ξ em busca de cargas escalares mais altas, temos que o intervalo de massas em que ocorre a escalarização também diminui. Dessa forma, teorias tensor-escalar com acoplamento positivo $\xi > 0$ tendem a passar nos testes impostos pelos observáveis de pulsares, com a possível exceção de um pequeno intervalo de valores de massas e acoplamentos.

Vamos agora analisar com mais detalhes três dos parâmetros pós keplerianos previstos, $\dot{\omega}^{TE}$, γ^{TE} e \dot{P}_b^{TE} . Como $\beta_A = O(1)$ para $\xi > 0$ vemos pela equação 4.25 que o desvio em relação ao valor da Relatividade Geral $\dot{\omega}^{RG}$ é da ordem $O(\alpha_A^2)$, sendo portanto suprimido devido à baixa magnitude de α . O mesmo ocorre para o atraso de Einstein γ^{TE} , exceto pelo termo proporcional a $\alpha_c k_p$ na equação 4.26. Como esse termo parece divergir próximo da massa máxima, conforme ilustrado na Figura 20, temos que ele pode gerar uma contribuição apreciável, desde que a carga α_c da estrela companheira não seja muito pequena. Esse caso porém representa uma pequena região de massas da estrela de nêutrons.

Por fim, comparamos a correção de radiação dipolar 4.34 para \dot{P}_b , frente a contribuição quadripolar da Relatividade Geral 4.33. Apesar do termo dipolar dominar o termo de quadrupolo por um fator $(c/V_b)^2$ ele é também suprimido por um fator $(\alpha_p - \alpha_c)^2$. Velocidades orbitais típicas observadas pela técnica de cronometragem em sistemas binários são da ordem $(V_b/c) \approx 10^{-3}$, que é da mesma ordem dos maiores valores de $|\alpha_A|$ mostrados na Figura 20. Portanto, temos a possibilidade de testar a validade de Teorias Tensor Escalar com $\xi \leq 25$ através da radiação emitida pelos pulsares mais massivos. Porém, como foi mostrado antes, o intervalo de massas que permitem a escalarização se torna cada vez menor à medida que ξ decresce, e tais efeitos, caso estejam presentes, se restringirão a sistemas bastante especiais.

Dessa forma, Teorias Tensor-Escalar com $\xi > 0$ ainda poderão passar pelos testes fornecidos pela cronometragem de pulsares, para a maior parte das massas das estrelas e de valores do acoplamento.

Conclusão

Desde a formulação da Relatividade Geral, há mais de um século [74], diversos experimentos confirmaram com precisão seus princípios básicos e suas previsões no regime de campos fracos e baixas velocidades, como nos arredores de nosso sistema solar [39]. Essa continua sendo uma das teorias mais bem formuladas e uma das pedras fundamentais do atual entendimento do mundo físico, além de formar um belo corpo conceitual que nos faz repensar nossos conceitos mais intuitivos sobre tempo, espaço e matéria.

Mais do que isso, a teoria de Einstein faz previsões de fenômenos que só agora estamos conseguindo entender e observar diretamente, como é o caso de Buracos Negros e Ondas Gravitacionais [32], que prometem ainda nos dizer muito sobre a natureza da gravidade. Tais fenômenos se manifestam em um regime gravitacional bastante diferente do nosso sistema solar e exigem que nossa teoria gravitacional seja levada ao limite de campos intensos, permitindo a realização de testes das previsões teóricas nesse domínio de validade.

Apesar dos sucessos, existem diversas teorias alternativas da gravidade que modificam a Relatividade Geral e introduzem novos graus de liberdade no setor gravitacional. Tais modificações e suas previsões são confrontadas com uma ampla classe de experimentos, tanto no regime de campos fracos quanto em regimes cosmológicos e astrofísicos de campos intensos [75]. Nesse último caso se destacam os testes envolvendo pulsares [65], estrelas de nêutrons magnetizadas com rotação, que quando se encontram em sistemas estelares binários permitem a realização de testes dos parâmetros que caracterizam a órbita através da regularidade dos pulsos que chegam aqui na Terra.

Assim, essa dissertação vêm contribuir com o conhecimento científico do assunto na medida que aborda uma das teorias alternativas mais famosas e bem justificadas, a Teoria Tensor-Escalar. Nessa teoria o acoplamento entre a matéria e a geometria do espaço-tempo é mediada por um campo escalar fundamental. Nos desdobramentos modernos dessa teoria, fenômenos como a escalarização espontânea são previstos na estrutura de estrelas de nêutrons [36, 53], que modificam as variáveis de pulsares, permitindo a realização de testes através dos quais seremos capazes de dizer qual a teoria gravitacional correta.

Vimos no capítulo 1 as bases conceituais da Relatividade Geral e quais experimentos as corroboram. Com isso introduzimos as Teorias Tensor-Escalar, motivando e discutindo sua formulação, além dos vínculos que experimentos realizados no sistema solar impõem em seus parâmetros livres. Em particular, discutimos uma classe de teorias com um acoplamento não mínimo de um campo escalar não massivo com a geometria por meio do termo $\xi R\Phi^2$ na ação gravitacional.

Nos capítulos 2 e 3 discutimos as propriedades de estrelas de nêutrons, fascinantes objetos estelares cuja matéria atinge densidades supranucleares. Vimos as equações de estado mais atuais e as propriedades globais dessas estrelas, tanto no contexto da Relatividade Geral quanto na Teoria Tensor-Escalar, com ênfase especial aos fenômenos que estão ausentes na teoria puramente relativística. Detalhamos então o fenômeno da escalarização espontânea, que se manifesta como o desenvolvimento de uma instabilidade taquiónica em estrelas suficientemente compactas e para certos valores da constante de acoplamento ξ .

Por fim, no capítulo 4 discutimos os pulsares, fenômeno associado à estrelas de nêutrons com rotação, onde o movimento e as propriedades desses objetos são determinados de acordo com a teoria gravitacional. Dessa forma fomos capazes de analisar os testes fornecidos pelos parâmetros pós-keplerianos que são medidos por meio da cronometragem dos pulsos.

Pelo estudo das principais cargas escalares, α_A , β_A e k_A , que determinam o comportamento das variáveis pós-keplerianas em Teorias Tensor Escalar, vimos uma diferença de comportamento bastante evidente entre os casos $\xi < 0$ e $\xi > 0$. No caso negativo, por exemplo, a carga escalar principal α_A tende a aumentar de magnitude à medida que $|\xi|$ cresce, de forma que desvios das previsões da Relatividade Geral se tornam cada vez maiores e grande parte dos valores permitidos são excluídos pelos testes fornecidos pela cronometragem de pulsares [71]. Já no caso positivo a magnitude da carga tende a diminuir quando $|\xi|$ cresce, onde ao mesmo tempo o intervalo de massas em que ocorre a escalarização se torna menor quando $|\xi|$ decresce. Dessa forma, como foi discutido com detalhes na seção 4.3, teorias com $\xi > 0$ tendem a passar nos testes gravitacionais de cronometragem de pulsares, mesmo na presença de escalarização espontânea, com a possível exceção de um pequeno intervalo de massas e valores do acoplamento [10].

Referências

- [1] A. Hewish, S. Bell, J. Pilkington, P. Scott, and R. Collins, “Observation of a rapidly pulsating radio source,” *Nature*, vol. 217, 02 1968.
- [2] W. Baade and F. Zwicky, “Remarks on super-novae and cosmic rays,” *Phys. Rev.*, vol. 46, pp. 76–77, Jul 1934.
- [3] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff, “On massive neutron cores,” *Phys. Rev.*, vol. 55, no. 4, pp. 374–381, 1939.
- [4] R. C. Tolman, “Static solutions of einstein’s field equations for spheres of fluid,” *Phys. Rev.*, vol. 55, pp. 364–373, Feb 1939.
- [5] R. A. Hulse and J. H. Taylor, “Discovery of a pulsar in a binary system.,” *Astrophysical Journal*, vol. 195, pp. L51–L53, Jan. 1975.
- [6] B. A. et al. (LIGO Scientific Collaboration and V. Collaboration), “Observation of gravitational waves from a binary black hole merger,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, p. 061102, Feb 2016.
- [7] A. Wolszczan and D. A. Frail, “A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257 + 12,” *Nature*, vol. 355, no. 6356, pp. 145–147, 1992.
- [8] P. Jordan, “Zum gegenwärtigen Stand der Diracschen kosmologischen Hypothesen,” *Zeitschrift für Phys.*, vol. 157, no. 1, pp. 112–121, 1959.
- [9] C. Brans and R. H. Dicke, “Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation,” *Phys. Rev.*, vol. 124, pp. 925–935, Nov 1961.
- [10] R. F. Mendes and T. Ottoni, “Scalar charges and pulsar-timing observables in the presence of nonminimally coupled scalar fields,” *Phys. Rev. D*, vol. 99, no. 12, p. 124003, 2019.
- [11] S. Schlamminger, K.-Y. Choi, T. A. Wagner, J. H. Gundlach, and E. G. Adelberger, “Test of the equivalence principle using a rotating torsion balance,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 100, p. 041101, Jan 2008.
- [12] T. A. Wagner, S. Schlamminger, J. H. Gundlach, and E. G. Adelberger, “Torsion-balance tests of the weak equivalence principle,” *Class. Quantum Gravity*, vol. 29, no. 18, p. 184002, 2012.

- [13] V. W. Hughes, H. G. Robinson, and V. Beltran-Lopez, “Upper limit for the anisotropy of inertial mass from nuclear resonance experiments,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 4, pp. 342–344, Apr 1960.
- [14] R. W. P. Drever, “A search for anisotropy of inertial mass using a free precession technique,” *Philos. Mag. A J. Theor. Exp. Appl. Phys.*, vol. 6, no. 65, pp. 683–687, 1961.
- [15] S. K. Lamoreaux, J. P. Jacobs, B. R. Heckel, F. J. Raab, and E. N. Fortson, “New limits on spatial anisotropy from optically-pumped sup201hg and ^{199}Hg ,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 57, pp. 3125–3128, Dec 1986.
- [16] T. Sotiriou, V. Faraoni, and S. Liberati, “Theory of gravitation theories: A no-progress report,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 17, 08 2007.
- [17] S. Sonego, “Is there a spacetime geometry?,” *Phys. Lett. A*, vol. 208, no. 1, pp. 1–7, 1995.
- [18] K. Nordtvedt, “Equivalence principle for massive bodies. i. phenomenology,” *Phys. Rev.*, vol. 169, pp. 1014–1016, May 1968.
- [19] K. Nordtvedt, “Equivalence principle for massive bodies. ii. theory,” *Phys. Rev.*, vol. 169, pp. 1017–1025, May 1968.
- [20] S. M. Merkowitz, “Tests of gravity using lunar laser ranging,” *Living Rev. Relativ.*, vol. 13, 2010.
- [21] J. G. Williams, S. G. Turyshev, and D. H. Boggs, “Progress in lunar laser ranging tests of relativistic gravity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 93, p. 261101, Dec 2004.
- [22] S. G. T. James G. Williams and J. Thomas W. Murphy, “Improving LLR Tests of Gravitational Theory,” *Int. J. Mod. Phys. D*, vol. 13, no. 3, pp. 567–582, 2004.
- [23] S. W. Hawking and R. Penrose, “Singularities of Gravitational Collapse and Cosmology,” *Proc. R. Soc. A*, vol. 314, no. 1519, pp. 529–548, 1970.
- [24] J. Polchinski, *String Theory*, vol. 1. Cambridge University Press, 1998.
- [25] S. Weinberg, “The cosmological constant problem,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 61, pp. 1–23, Jan 1989.
- [26] D. Lovelock, “The Einstein tensor and its generalizations,” *J. Math. Phys.*, vol. 12, no. 3, pp. 498–501, 1971.
- [27] D. Lovelock, “The four-dimensionality of space and the Einstein tensor,” *J. Math. Phys.*, vol. 13, no. 6, pp. 874–876, 1972.

- [28] T. A. Collaboration, “Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC,” *Phys. Lett. B*, vol. 716, no. 1, pp. 1–29, 2012.
- [29] P. A. M. Dirac, “The Cosmological Constants,” *Nature*, vol. 139, no. 3512, p. 323, 1937.
- [30] P. Pani, T. P. Sotiriou, and D. Vernieri, “Gravity with auxiliary fields,” *Phy. Rev. D*, vol. 88, pp. 1–5, 2013.
- [31] C. H. Brans, “The roots of scalar-tensor theory: an approximate history,” pp. 1–18, 2005.
- [32] R. M. Wald, *General relativity*. Chicago, IL: Chicago Univ. Press, 1984.
- [33] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1982.
- [34] V. Faraoni, “Nonminimal coupling of the scalar field and inflation,” *Phys. Rev. D*, vol. 53, pp. 6813–6821, Jun 1996.
- [35] V. Faraoni, “A Crucial Ingredient of Inflation,” *Int. J. Theor. Phys.*, vol. 40, no. 12, pp. 2259–2294, 2001.
- [36] T. Damour and G. Esposito-farese, “Nonperturbative strong-field effects in tensor-scalar theories of gravitation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 70, no. 15, pp. 2–5, 1993.
- [37] R. F. P. Mendes and N. Ortiz, “Highly compact neutron stars in scalar-tensor theories of gravity: Spontaneous scalarization versus gravitational collapse,” *Phys. Rev. D*, vol. 93, p. 124035, Jun 2016.
- [38] C. M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge University Press, 2 ed., 2018.
- [39] C. M. Will, “The Confrontation between General Relativity and Experiment,” *Living Reviews in Relativity*, vol. 5, pp. 1–113, 2006.
- [40] G. Esposito-Farèse and D. Polarski, “Scalar-tensor gravity in an accelerating universe,” *Physical Review D*, vol. 63, 09 2000.
- [41] B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora, “A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft,” *Nature*, vol. 425, no. 6956, pp. 374–376, 2003.
- [42] A. K. Verma, A. Fienga, J. Laskar, H. Manche, and M. Gastineau, “Use of MESSENGER radioscience data to improve planetary ephemeris and to test general relativity,” *Astron. Astrophys.*, vol. 561, pp. 1–13, 2014.

- [43] F. Özel and P. Freire, “Masses, Radii, and the Equation of State of Neutron Stars,” *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, vol. 54, no. 1, pp. 401–440, 2016.
- [44] J. Lattimer and M. Prakash, “The physics of neutron stars,” *Science (New York, N. Y.)*, vol. 304, pp. 536–42, 05 2004.
- [45] S. Shapiro and S. Teukolsky, *Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects*. 1983.
- [46] K. Schwarzschild, “On the gravitational field of a sphere of incompressible fluid according to Einstein’s theory,” *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, vol. 1916, pp. 424–434, 1916.
- [47] P. Haensel, A. Potekhin, and D. Yakovlev, *Neutron stars 1: Equation of state and structure*, vol. 326. New York, USA: Springer, 2007.
- [48] F. Douchin and P. Haensel, “A unified equation of state of dense matter and neutron star structure,” *Astronomy and Astrophysics*, vol. 380, pp. 151–167, Feb 2001.
- [49] L. Engvik, E. Osnes, M. Hjorth-Jensen, G. Bao, and E. Ostgaard, “Asymmetric Nuclear Matter and Neutron Star Properties,” *Physical Review Letters*, vol. 469, p. 794, Oct. 1996.
- [50] H. Müther, M. Prakash, and T. L. Ainsworth, “The nuclear symmetry energy in relativistic Brueckner-Hartree-Fock calculations,” *Phys. Lett. B*, vol. 199, no. 4, pp. 469–474, 1987.
- [51] J. S. Read, B. D. Lackey, B. J. Owen, and J. L. Friedman, “Constraints on a phenomenologically parametrized neutron-star equation of state,” *Phys. Rev. D*, vol. 79, p. 124032, June 2009.
- [52] H. T. Cromartie, E. Fonseca, S. M. Ransom, P. B. Demorest, Z. Arzoumanian, H. Blumer, P. R. Brook, M. E. DeCesar, T. Dolch, J. A. Ellis, R. D. Ferdman, E. C. Ferrara, N. Garver-Daniels, P. A. Gentile, M. L. Jones, M. T. Lam, D. R. Lorimer, R. S. Lynch, M. A. McLaughlin, C. Ng, D. J. Nice, T. T. Pennucci, R. Spiewak, I. H. Stairs, K. Stovall, J. K. Swiggum, and W. W. Zhu, “Relativistic Shapiro delay measurements of an extremely massive millisecond pulsar,” *Nat. Astron.*, vol. 4, no. 1, pp. 72–76, 2020.
- [53] T. Damour and G. Esposito-Farèse, “Tensor-scalar gravity and binary-pulsar experiments,” *Phys. Rev. D*, vol. 54, pp. 1474–1491, Jul 1996.
- [54] R. F. P. Mendes, G. E. A. Matsas, and D. A. T. Vanzella, “Quantum versus classical instability of scalar fields in curved backgrounds,” *Phys. Rev. D*, vol. 89, p. 047503, Feb 2014.

- [55] M. Salgado, D. Sudarsky, and U. Nucamendi, “On spontaneous scalarization,” *Phys. Rev. D*, vol. 58, p. 124003, 1998.
- [56] R. F. P. Mendes and N. Ortiz, “Highly compact neutron stars in scalar-tensor theories of gravity: Spontaneous scalarization versus gravitational collapse,” *Phys. Rev. D*, vol. 93, p. 124035, Jun 2016.
- [57] J. B. Hartle, “Slowly Rotating Relativistic Stars. I. Equations of Structure,” *Astrophysical Journal*, vol. 150, p. 1005, Dec. 1967.
- [58] J. B. Hartle and K. S. Thorne, “Slowly Rotating Relativistic Stars. II. Models for Neutron Stars and Supermassive Stars,” *Astrophysical Journal*, vol. 153, p. 807, Sept. 1968.
- [59] J. W. Hessels, S. M. Ransom, I. H. Stairs, P. C. Freire, V. M. Kaspi, and F. Camilo, “A radio pulsar spinning at 716 Hz,” *Science*, vol. 311, no. 5769, pp. 1901–1904, 2006.
- [60] S. Bonazzola, J. Friebe, and E. Gourgoulhon, “Spontaneous symmetry breaking of rapidly rotating stars in general relativity,” *The Astrophysical Journal*, vol. 460, 09 1995.
- [61] B. Schutz, *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2 ed., 2009.
- [62] H. Sotani, “Slowly rotating relativistic stars in scalar-tensor gravity,” *Physical Review D*, vol. 86, 11 2012.
- [63] R. N. Manchester, G. B. Hobbs, A. Teoh, and M. Hobbs, “The Australia Telescope National Facility Pulsar Catalogue,” *Astron. J.*, vol. 129, no. 4, pp. 1993–2006, 2005.
- [64] D. R. Lorimer and M. Kramer, *Handbook of Pulsar Astronomy*, vol. 4. 2004.
- [65] I. H. Stairs, “Testing General Relativity with Pulsar Timing,” *Living Rev. Relativ.*, vol. 6, no. 1, p. 5, 2003.
- [66] H. Goldstein, *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 1980.
- [67] Z. Yue-zhu, F. Yan-yan, W. Yi-huan, Z. Cheng-min, Y. Shao-hua, P. Yuan-yue, G. Yuan-qi, and W. De-hua, “Spin-down of Pulsars, and Their Electromagnetic and Gravitational Wave Radiations,” *Chinese Astron. Astrophys.*, vol. 40, no. 2, pp. 210–219, 2016.
- [68] R. Blandford and S. A. Teukolsky, “Arrival-time analysis for a pulsar in a binary system,” *Astrophysics Journal*, vol. 205, pp. 580–591, Apr. 1976.

- [69] T. Damour and N. Deruelle, “General relativistic celestial mechanics of binary systems. II. The post-Newtonian timing formula.,” *Ann. Inst. Henri Poincaré Phys. Théor.*, vol. 44, pp. 263–292, Jan. 1986.
- [70] T. Damour, *The problem of motion in Newtonian and Einsteinian gravity.*, pp. 128–198. 1987.
- [71] N. Wex, “Testing relativistic gravity with radio pulsars,” 02 2014.
- [72] M. Kramer and N. Wex, “The double pulsar system: A unique laboratory for gravity,” *Class. Quantum Gravity*, vol. 26, no. 7, 2009.
- [73] P. Freire, N. Wex, G. Esposito-Farèse, J. Verbiest, M. Bailes, B. Jacoby, M. Kramer, I. Stairs, J. Antoniadis, and G. Janssen, “The relativistic pulsar-white dwarf binary psr j1738+0333 ii. the most stringent test of scalar-tensor gravity,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 423, 05 2012.
- [74] A. Einstein, “The Foundation of the General Theory of Relativity,” *Annalen Phys.*, vol. 49, no. 7, pp. 769–822, 1916.
- [75] E. Berti, E. Barausse, V. Cardoso, L. Gualtieri, P. Pani, U. Sperhake, L. C. Stein, N. Wex, K. Yagi, T. Baker, C. P. Burgess, F. S. Coelho, D. Doneva, A. D. Felice, P. G. Ferreira, P. C. C. Freire, J. Healy, C. Herdeiro, M. Horbatsch, B. Kleihaus, A. Klein, K. Kokkotas, J. Kunz, P. Laguna, R. N. Lang, T. G. F. Li, T. Littenberg, A. Matas, S. Mirshekari, H. Okawa, E. Radu, R. O’Shaughnessy, B. S. Sathyaprakash, C. V. D. Broeck, H. A. Winther, H. Witek, M. E. Aghili, J. Alsing, B. Bolen, L. Bombelli, S. Caudill, L. Chen, J. C. Degollado, R. Fujita, C. Gao, D. Gerosa, S. Kamali, H. O. Silva, J. G. Rosa, L. Sadeghian, M. Sampaio, H. Sotani, and M. Zilhao, “Testing general relativity with present and future astrophysical observations,” *Class. Quantum Gravity*, vol. 32, no. 24, p. 243001, 2015.

Anexos

Scalar charges and pulsar-timing observables in the presence of nonminimally coupled scalar fields

Raissa F. P. Mendes* and Tulio Ottoni†

Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense, Niterói, Rio de Janeiro, 24210-346, Brazil.

(Dated: March 22, 2019)

Pulsar-timing has become a celebrated tool for probing modifications to General Relativity in the strong-field surroundings of neutron stars. Here we investigate whether scalar-tensor theories that incorporate a nonminimally coupled scalar degree of freedom may pass pulsar-timing tests, by computing the scalar charges entering such observables. In particular we show that for positive values of the nonminimal coupling ξ , pulsar-timing constraints may be evaded even in the presence of spontaneous scalarization.

PACS numbers: 04.50.Kd, 04.40.Dg, 04.80.Cc

I. INTRODUCTION

Perhaps the simplest way in which General Relativity (GR) can be modified is through the coupling to a new scalar degree of freedom Φ , as accomplished by the general scalar-tensor action

$$S_g = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} [F(\Phi)R - Z(\Phi)\nabla_\mu\Phi\nabla^\mu\Phi - V(\Phi)]. \quad (1)$$

This class of theories naturally implements Dirac’s idea of varying fundamental ‘constants’ [1, 2], as $G_{\text{eff}} \equiv G/F(\Phi)$ can be interpreted as a time- and space-dependent effective gravitational coupling. A well-motivated form for $F(\Phi)$ is the standard nonminimal coupling (SNMC),

$$F(\Phi) = 1 - 8\pi\xi\Phi^2, \quad (2)$$

where $\xi \in \mathbb{R}$. Its motivation ranges from fundamental considerations—such as those arising from the quantization of the classical theory in a curved spacetime [3]—to its usefulness in cosmological model-building, specially in inflationary scenarios [4, 5].

In the class of scalar-tensor theories (STTs) defined by Eq. (1), post-Newtonian (PN) deviations from GR are proportional to $(dF/d\Phi)|_{\Phi_0}$, where Φ_0 is the scalar field value at the current cosmological epoch [6]. For the SNMC, $(dF/d\Phi)|_{\Phi_0} \propto \Phi_0$, and so the observed agreement [7] between solar system observations and GR’s predictions implies that Φ_0 must be close to zero—but does not limit the viable range of ξ . Interestingly, however, even if $\Phi_0 = 0$, STTs may still differ considerably from GR in its predictions for neutron stars (NS), due to a nonperturbative, strong-field effect known as spontaneous scalarization [8]. This effect, which has long been known to happen for sufficiently negative values of the nonminimal coupling ξ , is characterized by the formation of a scalar cloud that modifies the star’s equilibrium and perturbative properties [9–13], and has dramatic implications,

most notably for pulsar-timing observables [14–16]. Indeed, the inconsistency between pulsar-timing data and certain aspects of NS phenomenology in STTs, such as the existence of scalar dipole radiation, of scalar-field induced variations in the NS moment of inertia, and so on, can be used to rule out almost the entire range $\xi \lesssim -2.2$ of field couplings allowing for spontaneous scalarization (in the case where $V(\Phi) = 0$, which we will refer to as “massless” for simplicity).

More recently, it has been shown that positive values of the nonminimal coupling ξ can give rise to a similar spontaneous scalarization effect around sufficiently compact neutron stars, i.e., stars with $GM/(Rc^2) \gtrsim 0.26$, where G is Newton’s constant, c is the speed of light, and M and R denote the NS mass and radius [17–19]. Massless STTs with $\xi > 0$ (which include the conformal coupling $\xi = 1/6$ as a particular case) are known to provide consistent cosmological scenarios [20–23], but remain largely unconstrained by astrophysical observations.

The purpose of the present work is to explore how the main post-Keplerian pulsar-timing observables—the Einstein time delay γ , the rate of periastron advance $\dot{\omega}$, and the rate of decay of the orbital period \dot{P}_b —are modified around scalarized NSs in STTs, and investigate whether pulsar-timing data could also be used to constrain massless STTs with $\xi > 0$. Interestingly, we find some crucial differences between the nature of spontaneous scalarization in the $\xi < 0$ and $\xi > 0$ cases, which reduces the effectiveness of pulsar timing observations in placing new constraints, even in the presence of spontaneous scalarization. In particular, the main scalar charge, α_A , entering these observables is typically suppressed in the $\xi > 0$ case, and becomes progressively smaller as ξ increases. As a consequence, even though the presence of dipolar scalar radiation in STTs gives a contribution to \dot{P}_b which is enhanced by a factor of $(c/v)^2$ (where v is the relative orbital velocity) with respect to GR, this term is suppressed by the smallness of the scalar charge, and \dot{P}_b becomes dominated by the usual quadrupolar contribution. By exploring the dependence of α_A on the local scalar field environment, we also argue that the feedback mechanism responsible for the effect of *dynamical* scalarization found in some STTs [24–28] will likely be absent

* rfpmedes@id.uff.br

† tulioottoni@id.uff.br

when $\xi > 0$.

This work is organized as follows. In Sec. II we discuss in more detail the framework we consider, including our choices of NS equations of state. In Sec. III we discuss how the pulsar-timing observables $\{\gamma, \dot{\omega}, \dot{P}_b\}$ are modified in STTs and briefly review how to compute the scalar charges $\{\alpha_A, \beta_A, k_A\}$ that enter such observables. Our main results are presented in Sec. IV and final considerations are made in Sec. V. A toy model presented in Appendix A aims to elucidate in a simpler setting some of the features described in Sec. IV. We adopt natural units in which $c = G = 1$ unless specified.

II. FRAMEWORK

A. Field equations

Neutron stars can be studied in STTs by adding the contribution from the stellar fluid to the gravitational action (1):

$$S = S_g + S_m[\Xi_m; g_{\mu\nu}]. \quad (3)$$

We assume that the energy-momentum tensor of the matter fields Ξ_m , $T^{\mu\nu} \equiv (2/\sqrt{-g})\delta S_m/\delta g_{\mu\nu}$, has the form of a perfect fluid:

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (4)$$

where p and ϵ denote the pressure and energy density in the fluid's rest frame and u^μ is the four-velocity of fluid elements.

For definiteness, in this work we will focus on massless scalar fields with no self-coupling, setting $V(\Phi) = 0$ in Eq. (1). A mass term, for instance, would have the effect of delaying the onset of spontaneous scalarization to larger values of $|\xi|$, as discussed in detail in Ref. [29]. An additional simplification to Eq. (1) results from exploiting its invariance under a scalar field redefinition, $\Phi \rightarrow \varphi(\Phi)$, to set $Z(\Phi)$ to a constant. Then, the only free parameter is the nonminimal coupling constant ξ , once $F(\Phi)$ is chosen as in Eq. (2).

For numerical calculations, it is often convenient to define the conformally rescaled (Einstein-frame) metric

$$g_{\mu\nu}^* \equiv F(\Phi)g_{\mu\nu} \quad (5)$$

and redefine the scalar field, $\Phi \rightarrow \varphi(\Phi)$, so that

$$\left(\frac{d\varphi}{d\Phi}\right)^2 = \frac{3}{4F(\Phi)^2} \left(\frac{dF(\Phi)}{d\Phi}\right)^2 + \frac{Z(\Phi)}{2F(\Phi)}. \quad (6)$$

These transformations turn Eq. (3) into

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R^* - 2g_{\mu\nu}^* \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi) + S_m[\Xi_m; g_{\mu\nu}^*/F(\Phi(\varphi))], \quad (7)$$

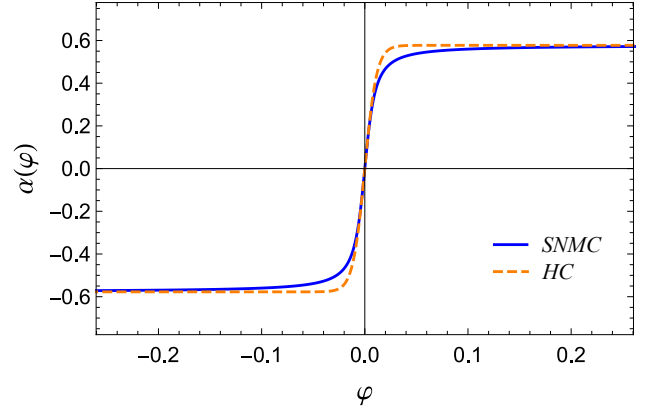


FIG. 1. Effective coupling $\alpha(\varphi)$ in terms of the Einstein-frame scalar field for the SNMC (solid blue) and the HC model of Eq. (13) (dashed orange), both for $\xi = 25$. The HC model qualitatively reproduces the overall features of the SNMC, with the quantitative agreement improving as $|\xi|$ increases.

and therefore re-express the coupling between scalar field and geometry as a coupling to matter. The field equations in the Einstein frame take a simpler form,

$$G_{\mu\nu}^* - 2\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + g_{\mu\nu}^* g_{\sigma\rho}^* \partial_\sigma \varphi \partial_\rho \varphi = 8\pi T_{\mu\nu} F(\varphi)^{-1}, \quad (8)$$

$$\nabla_\mu^* \nabla_\mu^* \varphi = -4\pi F(\varphi)^{-2} \alpha(\varphi) T, \quad (9)$$

where $T \equiv g_{\mu\nu}^* T^{\mu\nu} = 3p - \epsilon$ is the trace of the energy-momentum tensor (4),

$$\alpha(\varphi) \equiv -\frac{1}{2} \frac{d \ln F(\Phi(\varphi))}{d\varphi}, \quad (10)$$

and all quantities marked with an asterisk are computed from the metric (5).

For $F(\Phi)$ given by Eq. (2), and setting $Z(\Phi) = 8\pi$, the field redefinition (6) gives

$$\frac{d\varphi}{d\Phi} = 2\sqrt{\pi} \frac{\sqrt{1 - 8\pi\xi(1 - 6\xi)\Phi^2}}{1 - 8\pi\xi\Phi^2}, \quad (11)$$

from which we can see that for $\xi > 0$ the finite domain $\Phi \in (-\Phi_{\text{cr}}, \Phi_{\text{cr}})$, with $\Phi_{\text{cr}} \equiv 1/\sqrt{8\pi\xi}$, is mapped into $\varphi \in (-\infty, \infty)$. No such restriction arises for $\xi < 0$. If one interprets $G_{\text{eff}} = G/F(\Phi)$ as an effective gravitational coupling, gravity becomes weaker in the presence of the scalar field when $\xi < 0$, and stronger if $\xi > 0$, becoming infinitely attractive as $\Phi \rightarrow \pm\Phi_{\text{cr}}$.

Although Eq. (11) can be integrated in terms of elementary functions, the inverse transformation $\Phi(\varphi)$ must be obtained numerically. Therefore, we will find it useful in this work to consider not only $F(\Phi)$ as given by Eq. (2) but also the following hyperbolic coupling (HC) model, already expressed in terms of the Einstein-frame field:

$$F(\varphi) = \left[\cosh\left(2\sqrt{3\xi}\varphi\right) \right]^{-1/(3\xi)}, \quad (12)$$

so that

$$\alpha(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{3}} \tanh\left(2\sqrt{3}\xi\varphi\right). \quad (13)$$

This coupling function was suggested in Ref. [18] (with $\beta = 2\xi$) as a useful analytical approximation to a standard non-minimally coupled scalar field (see Fig. 1), and has been considered in Refs. [30, 31] in the context of pulsar-timing observations. Note that the SNMC and HC agree up to a cubic term in an expansion around $\varphi = 0$: In both cases $F(\varphi) = 1 - 2\xi\varphi^2 + O(\varphi^4)$.

As mentioned in the introduction, solar system observations constrain the scalar field value at the current cosmological epoch, which we denote as Φ_0 (with $\varphi_0 \equiv \varphi(\Phi_0)$ in the Einstein frame), to be very small. For instance, the parametrized post-Newtonian parameter γ_{PPN} [7], which takes the form

$$1 - \gamma_{\text{PPN}} = \frac{(dF/d\Phi)^2}{ZF + 2(dF/d\Phi)^2} \quad (14)$$

for the theories described by Eq. (1), is subject to the Cassini bound $|1 - \gamma_{\text{PPN}}| \lesssim 2.1 \times 10^{-5}$ [32]. The bound translates into $|\Phi_0| \lesssim 4.6 \times 10^{-4}/|\xi|$, which becomes more stringent as $|\xi|$ increases. In what follows we will typically fix the asymptotic, cosmological value of the scalar field to be $\Phi_0 = 0$ (or $\varphi_0 = 0$), but will also discuss some features of the $\Phi_0 \neq 0$ case.

B. Equation of state

In this work we will adopt three theoretical equations of state (EoS) for nuclear matter, the SLy [33], ENG [34], and MPA1 [35] models. In GR, the sequence of equilibrium configurations generated by these EoS is causal (in the sense that the speed of sound does not exceed the speed of light inside any stable star) and has a large enough maximum mass to accommodate the observation of a $\sim 2M_\odot$ NS [36]. Additionally, these EoS allow for stable NSs that are compact enough to trigger a spontaneous scalarization effect for both positive and negative values of the coupling constant ξ (see Sec. IIC below).

Instead of implementing these EoS through the interpolation of tabulated points, we shall approximate them by piecewise polytropes, adopting the parametrization developed in Ref. [37]. This parametrization was shown to accurately reproduce the main NS properties predicted by theoretical EoS [37], as well as NS scalar charges in STTs [30].

C. Spontaneous scalarization windows

One of the most interesting phenomenological aspects of STTs in astrophysical scenarios is the spontaneous scalarization effect [8]. In this section we briefly review the basic ideas behind this effect, and present the regions

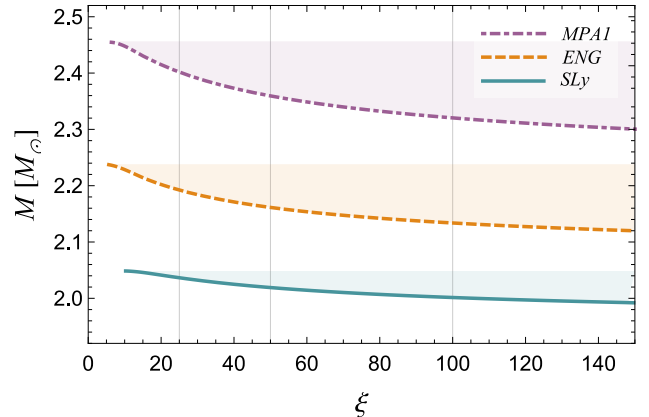


FIG. 2. Regions of the coupling parameter $\xi > 0$ and NS masses where spontaneous scalarization can take place, for the three EoS considered in this work. Each region is cut at the maximum mass of a NS allowed, in GR, by that EoS. We highlight the values $\xi = 25$, $\xi = 50$ and $\xi = 100$ that will be considered subsequently.

in parameter space where it takes place for the EoS employed in this work.

A careful inspection of the field equations (8) and (9) readily shows that a trivial scalar field profile, $\varphi = 0$, together with general-relativistic metric and matter configurations, form a solution of the field equations. However, for some relativistic stars, this trivial, GR-like solution may not be stable under scalar field perturbations [38]. This can be seen by expanding Eqs. (8) and (9) around $\varphi = 0$. To linear order in the perturbed quantities, the metric and fluid variables are not modified, while for the scalar field perturbation one obtains

$$\square^{(0)}\delta\varphi = -8\pi\xi T^{(0)}\delta\varphi, \quad (15)$$

where the index (0) labels background quantities. In the right-hand side of Eq. (15), the combination $m_{\text{eff}}^2 \equiv -8\pi\xi T^{(0)}$ can be loosely interpreted as an effective mass squared, and the fact that this can be negative signals the possible appearance of (tachyonic-like) instabilities (see Refs. [39–41] for a quantum analogue). The non-linear development of this instability is the scalarization phenomenon: the spontaneous development of a cloud of scalar field around the star [18, 42, 43].

Since the trace of the energy-momentum tensor, $T = 3p - \epsilon$, is typically negative (as energy density dominates over pressure), the scalarization effect would occur for $\xi < 0$ (so that $m_{\text{eff}}^2 < 0$). Here, however, we will be mostly interested in studying pulsar-timing observables in the presence of positive values of the nonminimal coupling, since these are still unconstrained by astrophysical observations. In this case, in order to display the nontrivial phenomenology related to spontaneous scalarization, NSs must be sufficiently massive and compact that the trace of the energy-momentum tensor becomes positive in a region of their interior (so that $m_{\text{eff}}^2 < 0$ in a suf-

ficiently large region inside the star). In Ref. [19] the minimum compactness required for this property to hold was estimated to be $C \equiv M/R = 0.262^{+0.011}_{-0.017}$ (90% confidence interval), with the error bars accounting for our ignorance on the nuclear EoS. All the EoS considered in this work allow for stars more compact than this threshold value.

In Fig. 2 we show the regions of coupling parameters ($\xi > 0$) and NS masses for which spontaneous scalarization takes place, for the three EoS considered in this work. To find these regions, we first solve the Tolman-Oppenheimer-Volkoff equations to construct a sequence of equilibrium configurations in GR and then determine whether unstable modes ($\delta\varphi \propto e^{\Omega t}$, $\Omega > 0$) of Eq. (15) can be found in that background. The lines delimiting the onset of instability coincide with the onset of spontaneous scalarization (as long as $\varphi_0 = 0$) [17, 44]. Notice that, although the realistic EoS considered in this work do not allow configurations that are compact enough to trigger this effect for the conformal coupling $\xi = 1/6$, more exotic structures could do so (see Fig. 3 of Ref. [45] for the case of a thin shell).

III. PULSAR-TIMING OBSERVABLES

Since the discovery of the first binary pulsar by Hulse and Taylor [46], pulsar timing has become a major tool for testing GR (see [16, 47] and references therein). The essence of pulsar timing lies in connecting the observed arrival time of the radio pulses to the proper time of emission. The resulting *timing formula* is obtained from a succession of steps, as follows [48–50]. First, by relating proper time in the pulsar’s rest frame to a coordinate system attached to the binary center of mass (CM), one ends up with contributions coming from the pulsar motion around the CM (the transverse Doppler shift), as well as from a varying gravitational redshift that depends on the relative distance between the pulsar and its companion. These effects are combined in the “Einstein time delay”, usually expressed in terms of the measurable parameter γ . The next step consists in relating the coordinate time of emission to the coordinate time of arrival of a given pulse, by integrating along the null geodesics covered by the radiation. This picks up effects coming from dispersion in the interstellar medium, a geometrical contribution known as Roemer time delay, as well as from the Shapiro time delay due to the companion’s gravitational well. Additional corrections are also accounted for, ranging from aberration effects due to the pulsar’s rotation to corrections due to the motion of the Earth.

At any instant, the orbit of each member of the binary system is tangent to a Keplerian ellipse (“osculating” orbit), characterized by six orbital parameters—say, the semi-latus rectum p , eccentricity e , longitude of pericenter ω , time of pericenter passage T_0 , inclination i , and angle of nodes Ω . In order to account for deviations from Newtonian dynamics, these parameters are allowed to

undergo secular variations: $x \rightarrow x + \dot{x}t$. In particular, the rate of periastron advance $\dot{\omega}$ and the rate of decay of the binary period \dot{P}_b (derivable from the parameters above) are typically measurable.

In this work we will focus on the three classical pulsar-timing observables $\dot{\omega}$, γ , and \dot{P}_b , although many other post-Keplerian (PK) parameters can in principle be inferred from pulsar-timing observations [51]. A given theory of gravity will predict the value of these observables as a function of the Keplerian parameters and the masses of the binary components. If the masses (m_p and m_c) are unknown, as often is the case, one can use the measurement of two of these PK parameters to infer m_p and m_c , and perform a test of the gravitational theory with the third. This is typically portrayed by drawing, for each PK parameter, a level surface in the m_p - m_c diagram corresponding to the measured value of that parameter. The theory is consistent with observations if the resulting curves all intersect at the same point, the binary component masses [16].

In STTs, as in GR, the theoretical prediction for pulsar-timing observables is based on the PN description of the orbital motion. Explicitly, one has [6, 15]:

$$\dot{\omega} = \frac{3n_b}{1-e^2} \frac{v_b^2}{c^2} \left[\frac{1 - \alpha_p \alpha_c / 3}{1 + \alpha_p \alpha_c} - \frac{m_p \beta_c \alpha_p^2 + m_c \beta_p \alpha_c^2}{6M(1 + \alpha_p \alpha_c)^2} \right], \quad (16)$$

$$\gamma = \frac{e}{n_b} \frac{m_c}{M(1 + \alpha_c \alpha_p)} \frac{v_b^2}{c^2} \left[1 + \alpha_c k_p + (1 + \alpha_p \alpha_c) \frac{m_c}{M} \right], \quad (17)$$

$$\dot{P}_b = \dot{P}_\varphi^{\text{monopole}} + \dot{P}_\varphi^{\text{dipole}} + \dot{P}_\varphi^{\text{quadrupole}} + \dot{P}_{g^*}^{\text{quadrupole}}, \quad (18)$$

where $n_b \equiv 2\pi/P_b$, $M \equiv m_p + m_c$, and $v_b \equiv (\mathcal{G}Mn_b)^{1/3}$, with $\mathcal{G} \equiv G(1 + \alpha_p \alpha_c)$. The quantities α_A , β_A , and k_A , with the label $A \in \{p, c\}$ denoting the pulsar or its companion, are functions of the stellar mass m_A , and will be defined in Sec. III A below. Equation (18) includes contributions related to monopole, dipole, and quadrupole scalar radiation, as well as the quadrupolar contribution from tensor waves familiar from GR. All terms are proportional to $(v_b/c)^5$, and therefore of 2.5PN order, except from $\dot{P}_\varphi^{\text{dipole}}$, that contributes already at 1.5PN. Since this is the dominant contribution to the energy loss and will be important for our discussion, we write this term explicitly:

$$\dot{P}_\varphi^{\text{dipole}} = - \frac{2\pi m_p m_c}{M^2(1 + \alpha_p \alpha_c)} \frac{v_b^3}{c^3} \frac{1 + e^2/2}{(1 - e^2)^{5/2}} (\alpha_p - \alpha_c)^2. \quad (19)$$

For comparison,

$$\dot{P}_{g^*}^{\text{quad}} = - \frac{192\pi m_p m_c}{5M^2(1 + \alpha_p \alpha_c)} \frac{(v_b/c)^5}{(1 - e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4 \right). \quad (20)$$

The expressions for the other terms can be found, e.g., in Refs. [6, 52].

A. Scalar charges

Crucially, in the pulsar timing observables (16)-(18) we find the appearance of the “gravitational form factors” (in the terminology of Ref. [15]) or “scalar charges” (in the terminology of Ref. [30]) $\alpha_A = \alpha_A(m_A)$, $\beta_A = \beta_A(m_A)$, and $k_A = k_A(m_A)$ (with $A \in \{p, c\}$). In this section we briefly review their definition, the rationale behind their appearance in pulsar-timing observables, and how to compute them in practice.

It is well known that, in GR, a body’s orbital dynamics is governed by integral quantities such as its mass and spin, with corrections due to shape and internal structure appearing only at high PN orders. For this reason, complex bodies can often be well approximated by point masses (insofar as their orbital motion is concerned). In STTs, the value of the scalar field around the star determines the strength of the effective gravitational coupling, and therefore influences its global properties. This feature can be effectively incorporated into a PN description based on point masses by allowing the mass of each body to be field dependent: For an N -body system, the action is taken to be [53]

$$S_m = - \sum_{A=1}^N \int m_A(\varphi_A) d\tau_A^*. \quad (21)$$

It is worthwhile to emphasize the dual role played by the function $m_A(\varphi_A)$ above. If one assumes that the inter-body distance D between the binary components is much larger than their typical size R , and allow the ratio R/D to shrink to zero, then $m_A(\varphi_A)$ expresses the stellar mass in terms of the scalar field value at the star’s location. This is the “outer”, PN perspective. However, the function $m_A(\varphi_A)$ is not determined self-consistently within the PN scheme, but is assumed to be known from the matching to the “inner” problem, where the stellar structure is determined. From this “inner” perspective, the point particle limit corresponds to the matching sphere becoming infinitely large, and from this point of view the function $m_A(\varphi_A)$ denotes the mass the star has when the asymptotic value of the scalar field is φ_A .

Once the field is expanded around its (cosmological) asymptotic value in the PN approximation, the effect of a field-dependent mass is encoded in the asymptotic value of its derivatives. In particular, one defines:

$$\alpha_A \equiv \left. \frac{d \log m_A}{d \varphi_A} \right|_{\varphi_0}, \quad (22)$$

$$\beta_A \equiv \left. \frac{d \alpha_A}{d \varphi_A} \right|_{\varphi_0}, \quad (23)$$

and so on. The scalar charges above (closely related to the “sensitivities” used in the Jordan-frame description [52]) are the ones appearing at the Newtonian and post-Newtonian levels, relevant for the derivation of the pulsar timing observables (16)-(18).

The additional scalar charge k_A entering the Einstein time delay (17) is defined as

$$k_A \equiv - \left. \frac{\partial \log I_A}{\partial \varphi_A} \right|_{\varphi_0}, \quad (24)$$

where I_A is the moment of inertia of star A . It appears in the computation of the parameter γ when relating the intrinsic time of the pulsar clock to the proper time in a local inertial frame around the pulsar, due to the fact that, in STTs, the moment of inertia of the star depends on the local scalar field environment—which may fluctuate in a binary system, causing the angular velocity to fluctuate as well [15].

In order to explain how the scalar charges α_A , β_A , and k_A are computed, we now revert attention to the inner problem of an isolated, slowly-rotating star, which is a suitable approximation for most of the observed pulsars. We therefore consider the spacetime of a slowly rotating body, with metric [54]

$$ds_*^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - 2\omega(r)r^2 \sin^2 \theta dt d\phi, \quad (25)$$

where $\omega(r)$ accounts for frame-dragging effects and is the only $O(\Omega)$ correction to the static case, with Ω denoting the star’s angular velocity (see Refs. [55, 56] for generalizations). The differential equations governing the metric functions $\nu(r)$, $\lambda(r)$, $\omega(r)$, scalar field $\varphi(r)$, and fluid variable $p(r)$ can be found, e.g., in Refs. [15, 57], and are reproduced in Appendix B for the sake of completeness. By imposing regularity conditions at $r = 0$, asymptotic flatness at spatial infinity, as well as the condition $\varphi(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \varphi_A$, one can integrate these equations to obtain a one-parameter family of solutions (labeled, say, by the central value of the pressure). The scalar charges in Eqs. (22)-(24) measure the change of the stellar properties as φ_A changes, while keeping fixed the baryon mass inside the star ($\bar{m}_A = \int \rho \sqrt{-g} u^0 d^3x$, where ρ is the rest-mass density).

Global properties of the NS can be extracted from the asymptotic behaviour of the metric functions. The total mass m_A is obtained from the $1/r$ behaviour of $e^{\nu(r)} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1 - 2m_A/r + O(1/r^2)$. The total angular momentum J_A is obtained from the $1/r^3$ behaviour of $\omega(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 2J_A/r^3 + O(1/r^4)$, and enables the computation of the star’s moment of inertia: $I_A = J_A/\Omega$. Finally, from the leading $1/r$ contribution to the scalar field at spatial infinity, $\varphi \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \varphi_A + \omega_A/r + O(1/r^2)$, one can directly obtain the scalar charge α_A through $\alpha_A = -\omega_A/m_A$. That the quantity computed in this way is equivalent to the definition in Eq. (22) is shown in the Appendix A of Ref. [6].

Contrary to the computation of α_A , which can be done straightforwardly, computing β_A and k_A is more involved, and here we proceed as follows. First, we construct three sequences of equilibrium solutions, for $\varphi_A^{(0)} = \varphi_0$, $\varphi_A^{(+)} = \varphi_0 + \Delta\varphi$ and $\varphi_A^{(-)} = \varphi_0 - \Delta\varphi$, storing, for each value of the central pressure, the total mass

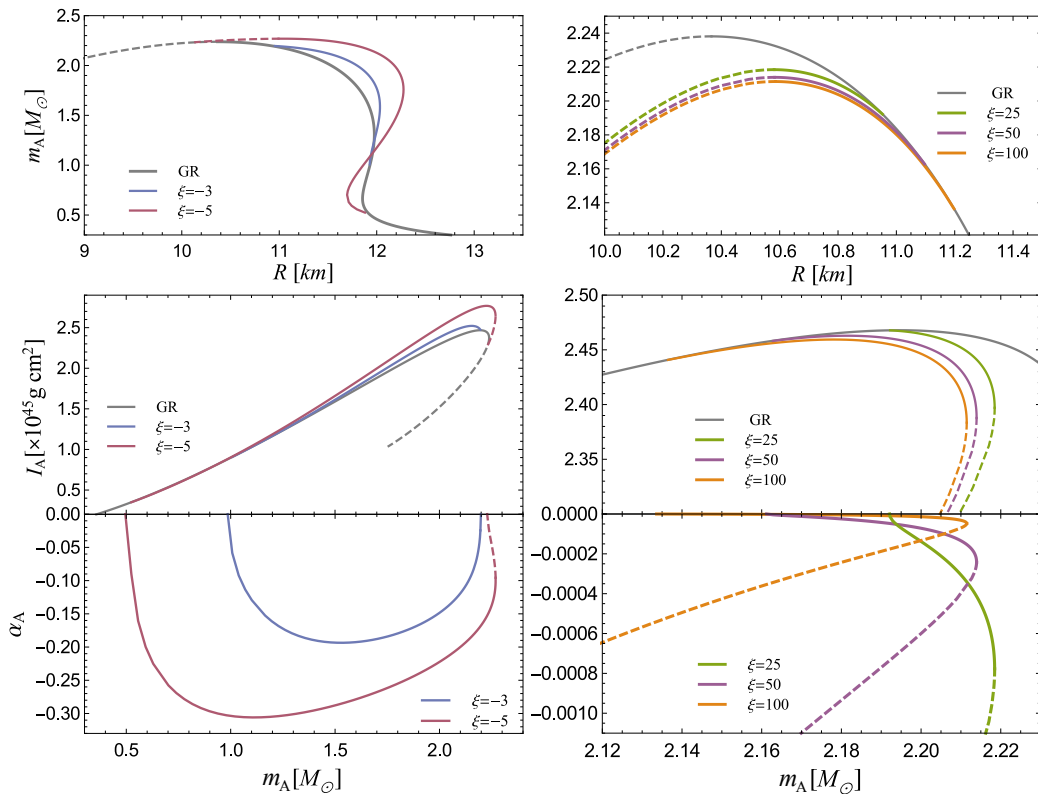


FIG. 3. Total mass m_A , moment of inertia I_A and scalar charge α_A of a sequence of equilibrium solutions describing NSs with the ENG EoS in the presence of a scalar field with SNMC $\xi = -3$ and -5 (left column) and $\xi = 25, 50$, and 100 (right column). The asymptotic value of the scalar field was fixed to zero. The dashed part of each curve denotes their hydrodynamically unstable piece.

m_A , baryonic mass \bar{m}_A , and moment of inertia I_A of the resulting solution. This data is then used to define, by interpolation, functions $m_A^{(i)}(\bar{m}_A)$, $\alpha_A^{(i)}(\bar{m}_A)$, and $I_A^{(i)}(\bar{m}_A)$, with $i \in \{0, +, -\}$, from which we can compute the scalar charges by a finite difference approximation to the derivative operators in Eqs. (23) and (24). For our purposes, we find it enough to use a central stencil for the derivative operator, setting, for instance,

$$k_A(\bar{m}_A) \approx \frac{1}{I_A^{(0)}(\bar{m}_A)} \frac{I_A^{(+)}(\bar{m}_A) - I_A^{(-)}(\bar{m}_A)}{2\Delta\varphi}. \quad (26)$$

More details on the numerical procedure and the accompanying errors can be found in Appendix B. Note also that a bank of scalar charges, as well as a thorough account of the procedure to compute them, was recently provided in Ref. [30]. The authors did not, however, explore the possibility of spontaneous scalarization for $\xi > 0$, which is our main focus here.

IV. RESULTS

A. Scalar charges

In order to establish a point of comparison between the cases where ξ is negative and positive, in Fig. 3 we show the behaviour of the total mass m_A , moment of inertia I_A , and scalar charge α_A for a sequence of equilibrium solutions with $\xi = -3$ and -5 and $\xi = 25, 50$, and 100 . The asymptotic value of the scalar field is taken to be $\varphi_0 = 0$. As anticipated in Sec. II C (see Fig. 2), scalarized solutions for $\xi > 0$ only exist for the most massive and compact stars, while scalarization happens for $\xi < 0$ in a much wider range of masses. From the first row of Fig. 3, we see that as $|\xi|$ increases the maximum mass of scalarized solutions increases when $\xi < 0$ and decreases when $\xi > 0$. This is consistent with the interpretation of $G_{\text{eff}} = G/F(\Phi)$ as an effective gravitational coupling. As $\xi > 0$ increases, so does G_{eff} : gravity becomes stronger in the presence of the scalar field and less massive scalarized stars can be supported without undergoing gravitational collapse. The opposite happens for $\xi < 0$. For a given mass, the second row of Fig. 3 shows that the moment of inertia is larger (smaller) than in GR when $\xi < 0$

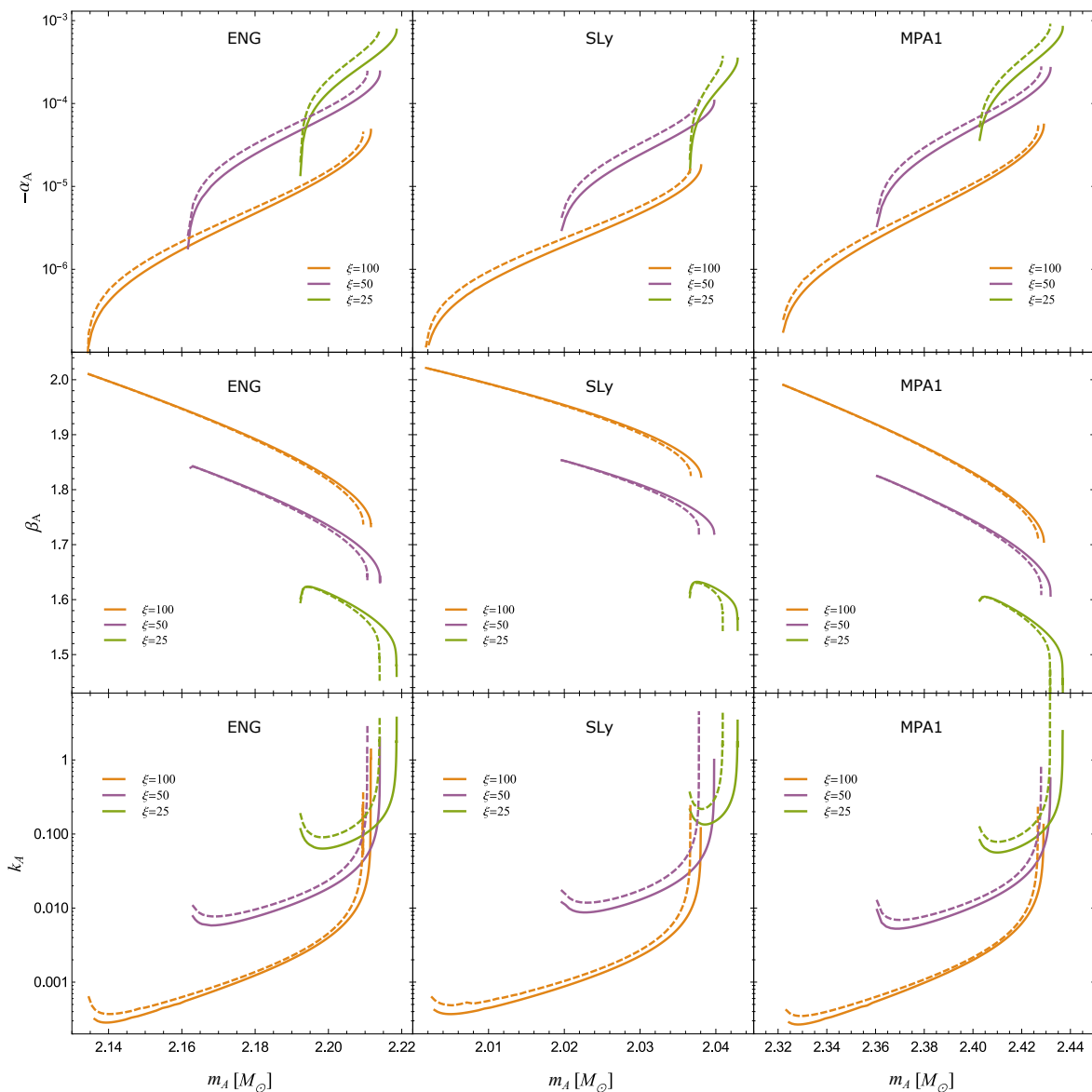


FIG. 4. Scalar charges α_A , β_A , and k_A as a function of the stellar mass for $\xi = 25, 50$, and 100 , and three nuclear EoS: ENG, SLy, and MPA1. Solid lines refer to the SNMC, while dashed lines of the same color correspond to the HC model, with the same value of ξ .

(> 0). This can also be understood as the effect of gravity becoming weaker (stronger) in each of these cases, and the stellar size becoming typically larger (smaller) than in GR when a nontrivial scalar field profile is present.

Since the field equations (8) and (9) are invariant under the transformation $\varphi \rightarrow -\varphi$ for the coupling functions we consider, one always finds two twin scalarized solutions related by the aforementioned transformation, and with opposite scalar charges α_A . This is true as long as $\varphi_0 = 0$, as in Fig. 3, otherwise the boundary condition breaks the reflection symmetry of the solution. In the third row of Fig. 3 we show the scalar charge α_A for solutions with a positive scalar field profile.

Two notable differences are found in the $\xi > 0$ case (right panel), compared to when $\xi < 0$ (left panel), namely that the magnitude of α_A (i) is now much smaller and (ii) typically decreases as $|\xi|$ increases. Both have to do with the fact that the scalar field tends to be amplified in the stellar region where $\xi T > 0$ and suppressed in the region where $\xi T < 0$. For any realistic EoS, the trace of the energy momentum can be positive only in a small region in the stellar interior; therefore, a scalar field with $\xi > 0$ is amplified in this inner region, but is necessarily suppressed in the outer layers of the star. As a consequence, although the central value of the scalar field may increase with increasing ξ , the scalar charge,

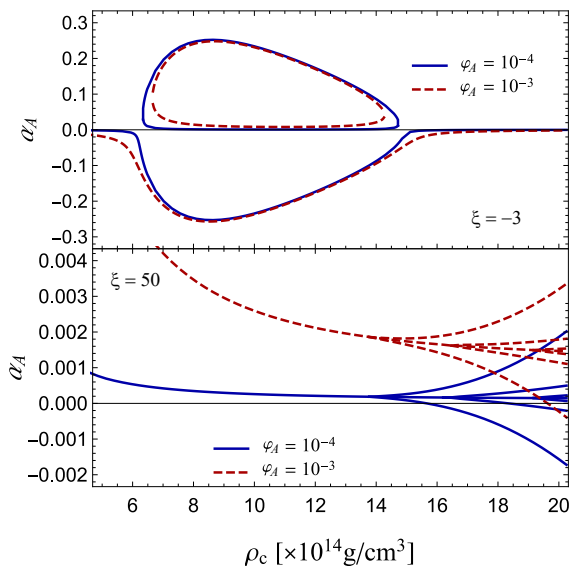


FIG. 5. Scalar charge α_A as a function of the central rest-mass density ρ_c for the HC model with $\xi = -3$ (upper panel) and $\xi = 50$ (lower panel), and two asymptotic values of the scalar field: $\varphi_A = 10^{-4}$ and $\varphi_A = 10^{-3}$. The ENG EoS was assumed. All families of equilibrium solutions are shown, and a change in the number of solutions is noted at several critical densities (note, however, that not all the solutions in the $\xi > 0$ case are stable, as shown in the Supplemental Material of Ref. [13]).

measured asymptotically, ends up being smaller. In Appendix A we present a simple, analytically solvable, toy model that illustrates these points.

Figure 4 shows the scalar charges α_A , β_A , and k_A for $\xi = 25, 50$, and 100 , for both the SNMC and the HC models, and for three nuclear EoS describing the NS fluid. From the first row we see that the properties of α_A described in the preceding paragraph are not altered by the nuclear EoS. Indeed, the magnitude of all scalar charges is only mildly influenced by the EoS, the main effect of which is to change the range of masses where scalarization takes place.

The second row of Fig. 4 shows the scalar charge $\beta_A = (d\alpha_A/d\varphi_A)_{\varphi_0}$ as a function of the stellar mass. This is a positive, order-of-unity quantity, which increases with increasing ξ . The fact that β_A is positive (and α_A negative) means that α_A receives a positive increment when the asymptotic value of the scalar field φ_A increases, and therefore typically diminishes in absolute value (as long as φ_A is close to 0). This is opposite to what happens when $\xi < 0$, in which case $\beta_A < 0$ and α_A increases in absolute value with increasing φ_A . This is shown more explicitly in Fig. 5, where the scalar charge α_A is represented for $\varphi_A = 10^{-4}$ and 10^{-3} , for $\xi = 50$ and $\xi = -3$.

Interestingly, the features described above can have implications for scalarization in dynamical situations. “Dy-

namical scalarization” was first observed in binary NS simulations in STTs [24], wherein NSs that were not compact enough to scalarize in isolation suddenly developed a large scalar charge once their separation became sufficiently small, making the coalescence proceed in a faster timescale. It was then understood to be due to a kind of feedback mechanism [25, 28]. Indeed, as discussed before, from the PN perspective the mass and other stellar properties are functions of the local scalar field value at the star’s worldline, which is influenced by the presence of the companion star. In STTs with $\xi < 0$, if the ambient scalar field value grows, it induces a growth in $\omega_A = -m_A\alpha_A$ (see Fig. 5). This, in turn, increases the local value of the scalar field at the companion’s location (given by $\varphi_c \sim \varphi_0 + \omega_p/r$, where r is the separation distance), and the positive feedback proceeds until a fixed-point is reached. Although exploring this in detail is beyond the scope of the present work, we can anticipate that the opposite behaviour is likely to occur in STTs with $\xi > 0$: In this case $\beta_A > 0$ and ω_A decreases with increasing φ_A ; therefore the feedback mechanism present in the $\xi < 0$ case will most likely be absent or reversed.

Finally, let us come back to the last row of Fig. 4, where k_A [cf. Eq. (24)] is shown as a function of the stellar mass. The typical values of k_A are seen to decrease with increasing ξ , with a large spike close to the maximum allowed mass. This is a somewhat similar behaviour to the $\xi < 0$ case (see, e.g., Fig. 4 in Ref. [30]), although the typical values in Fig. 4 are quite small due to the relatively large values of ξ we consider. In all cases, the HC reproduces well the qualitative features of the SNMC.

B. Implications for pulsar-timing observables

Having understood the properties of the scalar charges $\alpha_A(m_A)$, $\beta_A(m_A)$, and $k_A(m_A)$, we now turn to the pulsar timing observables $\dot{\omega}$, γ , and \dot{P}_b , given in STTs as in Eqs. (16)-(18).

Pulsar-timing observations can be used to put stringent bounds on $\xi < 0$ [15, 30, 31, 58, 59]. A crucial feature that makes this possible is that the scalar charge α_A , which enters in all pulsar-timing observables, increases in magnitude as ξ becomes more negative, making deviations from GR stronger. As a consequence, one is able to exclude the entire range of negative couplings up to a certain value.

The situation for $\xi > 0$ is much more permissive. On the one hand, since the scalar charge α_A decreases in magnitude as $\xi > 0$ increases (cf. Fig. 4; see also Fig. 8 of Ref. [23]), deviations of pulsar-timing observables from GR are suppressed for large values of the non-minimal coupling. On the other hand, as we decrease the value of ξ in search of larger scalar charges, the range of NS masses allowing for spontaneous scalarization gets progressively smaller (cf. Fig. 2). Thus, STTs with $\xi > 0$ tend to pass pulsar-timing tests, with the possible exception of a small range of couplings and NS masses.

Having described the global picture, let us give a few more details about each of the observables $\dot{\omega}$, γ , and \dot{P}_b . Since $\beta_A = O(1)$ for $\xi > 0$ (cf. Fig. 4), we can see from Eq. (16) that corrections to $\dot{\omega}$ are $O(\alpha_A^2)$, and therefore negligible due to the smallness of the scalar charge α_A in this case. The same is true for the Einstein time delay γ , except for the term proportional to $\alpha_c k_p$ in Eq. (17). Since k_A seems to diverge in limit of the maximum NS mass (cf. Fig. 4), this term still could give a non-negligible contribution as long as the companion's charge α_c is not vanishingly small. This would be restricted, however, to an exceptionally thin range of NS masses. As for the rate of decay of the orbital period, \dot{P}_b , it is enough to compare the contribution in Eq. (19) coming from dipolar scalar radiation to the usual quadrupolar contribution due to tensor waves, Eq. (20). Although the first one dominates the second by a factor of $(c/v_b)^2$, it is also suppressed by a factor of $(\alpha_p - \alpha_c)^2$. Typical orbital velocities in binary systems observed through pulsar-timing techniques are of the order of $(v_b/c) \sim 10^{-3}$. Interestingly, this is of the same order of magnitude as the largest values of $|\alpha_A|$ shown in Fig. 3. Therefore, it might still be possible to probe STTs with $\xi \lesssim 25$ with the radiation emitted by the most massive NSs in Nature. However, as emphasized above, the range of masses allowing for spontaneous scalarization gets narrower as ξ decreases, and such effects, if present, would be restricted to very special systems. For the largest ranges of NS masses and non-minimal couplings, STTs with $\xi > 0$ would still evade the sharp knife of pulsar-timing tests.

V. CONCLUSION

It is well known that General Relativity has passed with flying colors all strong-field tests imposed by pulsar-timing observations. Moreover, these observations have stripped many modified theories of gravity of a large portion of their parameter space, confining their predictions to the close vicinity of GR [14]. This is the case, in particular, of a class of scalar-tensor theories of gravity including the case of a massless scalar field with the standard, $\xi R\Phi^2$, nonminimal coupling to gravity. In these theories a tachyonic-like instability develops for sufficiently compact stars and $\xi \lesssim -2.2$, leading to the development of a scalar cloud around the star (see Sec. II). If the scalar field is thus activated around a member of a binary system, it drives the emission of dipole scalar radiation, contributing to a steeper decrease of the orbital period in time. Since this effect—as well as the changes introduced in other observable quantities (see Sec. III)—is incompatible with pulsar-timing data, almost the entire range of couplings allowing for spontaneous scalarization has now been excluded [31, 58].

Recently, it has been advocated that a similar scalarization effect might occur for positive values of the non-minimal coupling ξ , around the most massive neutron stars found in Nature, as long as they are also sufficiently

compact [18, 19] (which depends on the still unknown nuclear equation of state). This seems to open the possibility of using measurements of the most massive observed NS, such as the pulsar PSR J0348+0432 [36] or possibly PSR B1957+20 [60], in order to also probe this range of couplings.

In this work we carried out a study of the scalar charges α_A , β_A , and k_A , which determine the behaviour of the main post-Keplerian pulsar timing observables, $\dot{\omega}$, γ , and \dot{P}_b , in STTs with $\xi > 0$ (see Sec. IV). We find that the scalar charges differ remarkably in the $\xi > 0$ and $\xi < 0$ cases. In particular, the main scalar charge α_A governing Newtonian and post-Newtonian deviations from GR is suppressed as $\xi > 0$ increases, while the range of masses allowing for spontaneous scalarization decreases as $\xi > 0$ becomes smaller. As discussed in detail in Sec. IV, this indicates that STTs with $\xi > 0$, even in the presence of spontaneous scalarization, are able to pass pulsar-timing tests, with the possible exception of an exceedingly narrow range of couplings and NS masses. Moreover, the contrasting properties exhibited by the scalar charge β_A in the $\xi > 0$ case suggest that the feedback mechanism responsible for the effect of dynamical scalarization might not be present for positive values of the nonminimal coupling. It remains an interesting research avenue to determine which NS properties are most sensitive to a scalar field background in regime of small scalar charges (e.g. the NS oscillation spectrum as recently suggested by Ref. [13]).

ACKNOWLEDGMENTS

We thank Gabriel Vidal for his involvement in the early phases of this project. This work was partially supported by the National Council for Scientific and Technological Development – CNPq.

Appendix A: A simple toy model

In order to gain some intuition about the behavior of the scalar charge α_A , we consider a simpler version of Eq. (9) [8], where we neglect the metric curvature and the details of the coupling function, keeping only its linear piece:

$$\Delta\varphi = -\epsilon\kappa^2\varphi. \quad (\text{A1})$$

Here $\Delta \equiv d^2/dr^2 + (2/r)d/dr$, $\kappa \equiv \sqrt{8\pi|\xi T|}$, and $\epsilon = \text{sign}(\xi T)$. Moreover we will assume that κ is constant throughout the star, but that ϵ can change sign, according to

$$\epsilon = \begin{cases} +1, & \text{if } 0 \leq r \leq r^+ \\ -1, & \text{if } r^+ < r \leq R \end{cases} \quad (\text{A2})$$

where R is the stellar radius and $0 \leq r^+ \leq R$. The case most often considered in the literature, i.e., $\xi < 0$

and $T < 0$ throughout the star, would correspond to $r^+ = R$. On the other hand, we are most interested here in the case where $\xi > 0$ and the trace T changes sign inside the star, as captured by the general form (A2). Taking κ to be constant, as we do for simplicity, implies the additional assumption that the typical strength (say, the mean value) of $T > 0$ in the region $0 \leq r \leq r^+$ is comparable with the typical value of $T < 0$ in the region $r^+ < r \leq R$.

The general solution to this problem is

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_c \frac{\sin(\kappa r)}{\kappa r}, & \text{if } 0 \leq r \leq r^+, \\ A \frac{\sinh(\kappa r)}{\kappa r} + B \frac{\cosh(\kappa r)}{\kappa r}, & \text{if } r^+ < r \leq R, \\ \varphi_0 + \omega/r, & \text{if } r > R, \end{cases} \quad (\text{A3})$$

where φ_c , A , B , and ω can be explicitly computed in terms of φ_0 , κ , r^+ , and R by imposing continuity of the field and its derivative across $r = r^+$ and $r = R$. In particular,

$$\varphi_c = \frac{\varphi_0}{\sin(\kappa r^+) \sinh(\kappa r^-) + \cos(\kappa r^+) \cosh(\kappa r^-)} \quad (\text{A4})$$

and

$$\omega = -\varphi_0 R + \frac{\varphi_0}{\kappa} \frac{\tan(\kappa r^+) + \tanh(\kappa r^-)}{1 + \tan(\kappa r^+) \tanh(\kappa r^-)}, \quad (\text{A5})$$

where we defined $r^- \equiv R - r^+$. It is worth writing explicitly two particular cases: If $r^+ = 0$, we have

$$\varphi_c = \frac{\varphi_0}{\cosh(\kappa R)}, \quad \omega = -\varphi_0 R \left(1 - \frac{\tanh(\kappa R)}{\kappa R} \right), \quad (\text{A6})$$

while if $r^- = 0$ we get

$$\varphi_c = \frac{\varphi_0}{\cos(\kappa R)}, \quad \omega = -\varphi_0 R \left(1 - \frac{\tan(\kappa R)}{\kappa R} \right). \quad (\text{A7})$$

In the first case, Eq. (A6), the field is suppressed with respect to its asymptotic value and $|\omega|$ is bounded by $|\varphi_0|R$, going to zero as $\varphi_0 \rightarrow 0$. This would be the picture if, say, $\xi > 0$ and $T < 0$ throughout the star. In the second case, Eq. (A7), the field is amplified with respect to its asymptotic value and $|\omega|$ is enhanced with respect to $|\varphi_0|R$. Indeed, these quantities may have a nonzero limit even when $\varphi_0 \rightarrow 0$, as long as $\kappa R = \pi/2$. This gives a heuristic picture of the spontaneous scalarization effect when $\xi < 0$ [8].

Take now the full expressions (A4) and (A5), which are the relevant ones when $\xi > 0$. We see that there is a competition between enhancement and suppression effects. In particular, the onset of scalarization, which was determined by the condition $\cot(\kappa R) = 0$ for Eq. (A7), is delayed to higher values of κR , with the relevant condition becoming $\cot(\kappa r^+) = -\tanh(\kappa r^-)$. Moreover, a number of features displayed by the scalar charge α_A for scalarized solutions (cf. Sec. IV A) are already exhibited in the expressions above (outside the scalarization regime). For instance, the $1/\kappa$ dependency in Eq. (A5) indicates that $|\omega|$ decreases with increasing κ , except near the resonances mentioned above. This is in contrast with the case (A7), where $|\omega|$ increases with κ .

Appendix B: Numerical setup

With the metric ansatz (25), the field equations (8) and (9) yield

$$m' = 4\pi r^2 F^{-2} \epsilon + \frac{1}{2} r(r-2m)(\phi')^2, \quad (\text{B1})$$

$$\nu' = \frac{8\pi r^2 F^{-2} p}{r-2m} + r(\phi')^2 + \frac{2m}{r(r-2m)}, \quad (\text{B2})$$

$$\phi'' = \frac{4\pi r F^{-2}}{r-2m} [\alpha(\epsilon-3p) + r\phi'(\epsilon-p)] - \frac{2(r-m)}{r(r-2m)} \phi', \quad (\text{B3})$$

$$p' = -(\epsilon+p) \left[\frac{4\pi r^2 F^{-2} p}{r-2m} + \frac{r(\phi')^2}{2} + \frac{m}{r(r-2m)} + \alpha\phi' \right], \quad (\text{B4})$$

$$\begin{aligned} \omega'' &= \omega' \left[-\frac{4}{r} + r(\phi')^2 + \frac{4\pi r^2(\epsilon+p)}{F^2(r-2m)} \right] \\ &\quad - \frac{16\pi r(\epsilon+p)}{F^2(r-2m)} (\Omega - \omega), \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

where primes denote radial derivatives, $\Omega \equiv u^\phi/u^t$, and we have set $e^{\lambda(r)} \equiv 1/(1-2m(r)/r)$. When supplemented by a choice of EoS, this set of differential equations can be integrated numerically by standard methods. The relevant boundary conditions to the problem are regularity at $r = 0$, which requires that $m(0) = 0$, $\omega'(0) = 0$, and $\phi'(0) = 0$, and asymptotic flatness, which requires that $\lim_{r \rightarrow \infty} \nu(r) = 0$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \omega(r) = 0$ and $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = \phi_A$. The condition $p(R) = 0$ determines the stellar radius R as usual. As described in Sec. III A the stellar mass m_A and angular momentum J_A are determined by the asymptotic behavior of the metric functions. Alternatively, Eqs. (B1)-(B5) can be integrated up to the stellar radius and matched to the known form of the exterior solution [15], from which global quantities like m_A and J_A can be inferred.

As described in Sec. IV A, the computation of the scalar charges,

$$\alpha_A = \frac{d \log m_A}{d\varphi_A}, \quad \beta_A = \frac{d\alpha_A}{d\varphi_0}, \quad k_A = -\frac{d \log I_A}{d\varphi_0}, \quad (\text{B6})$$

is somewhat involved, since the derivatives must be evaluated for a fixed value of the baryonic mass. For this purpose, given an EoS and a value for ξ , we construct three sequences of equilibrium solutions, with the asymptotic value of the scalar field given by $\varphi_A^0 = \varphi_0$, $\varphi_A^+ = \varphi_0 + \Delta\varphi$, and $\varphi_A^- = \varphi_0 - \Delta\varphi$. For most of the results presented in this work we employ $\varphi_0 = 0$ and $\Delta\varphi = 0.0005$, except for Fig. 5 where different values of φ_0 are used. From the data thus generated, we construct by interpolation the functions $m_A^{(i)}(\bar{m}_A)$, $\alpha_A^{(i)}(\bar{m}_A)$, and $I_A^{(i)}(\bar{m}_A)$, with $i \in \{0, +, -\}$ and estimate the scalar charges (B6) through a simple central finite difference approximation

to the derivative operator:

$$\alpha_A^{\text{approx}}(\bar{m}_A) = \frac{1}{m_A^{(0)}(\bar{m}_A)} \frac{m_A^{(+)}(\bar{m}_A) - m_A^{(-)}(\bar{m}_A)}{2\Delta\varphi},$$

$$\beta_A^{\text{approx}}(\bar{m}_A) = \frac{\alpha_A^{(+)}(\bar{m}_A) - \alpha_A^{(-)}(\bar{m}_A)}{2\Delta\varphi},$$

$$k_A^{\text{approx}}(\bar{m}_A) = \frac{1}{I_A^{(0)}(\bar{m}_A)} \frac{I^{(+)}(\bar{m}_A) - I^{(-)}(\bar{m}_A)}{2\Delta\varphi}.$$

Recall that the scalar charge α_A can either be computed from the expression above, or directly from the asymptotic behaviour of the scalar field, through $\alpha_A = -\omega_A/m_A$. The latter procedure yields a much more reliable estimate for α_A , and so the comparison between $\alpha_A^{(0)}$ and α_A^{approx} enables us to estimate the error incurred in the finite difference approximations above. This is shown in Fig. 6. For $\Delta\varphi = 5 \times 10^{-4}$, which is typically used in this work, we see that the relative error in the scalar charge is of the order of 0.01%, but may increase near the boundaries of the mass interval where scalarized solutions exist. Errors of the same order are obtained for other values of ξ as well.

Notice that, when presenting our results, we restrict consideration to the range of baryonic masses for which both (+) and (-) quantities exist. This may exclude from our consideration a narrow range of masses at the borders of the mass interval. These boundary values could

be taken care of by a one-sided approximation to the derivative operator, which would lead, in particular, to a better resolution of the spikes in Fig. 4. These fine details are not, however, too relevant for our analysis.

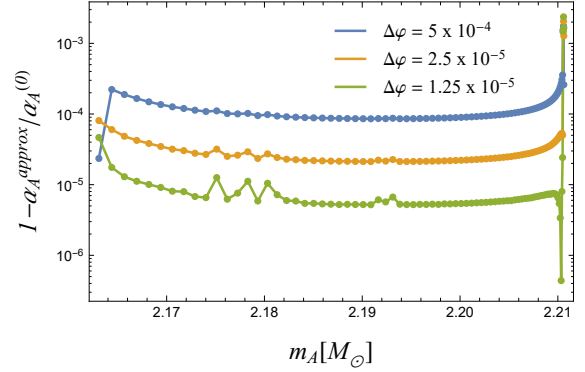


FIG. 6. Relative error $|(\alpha_A^{(0)} - \alpha_A^{\text{approx}})/\alpha_A^{(0)}|$ between the scalar charge computed directly from the asymptotic behaviour of the scalar field and the one computed using a finite difference approximation to the derivative operator. Here we employ the HC model with $\xi = 100$ and the ENG EoS, and consider the cases where $\Delta\varphi = 5 \times 10^{-4}$, $\Delta\varphi = 2.5 \times 10^{-4}$, and $\Delta\varphi = 1.25 \times 10^{-4}$. Using this data we can also determine the rate of convergence, which is found to agree with the second-order character of the finite difference stencil we use.

-
- [1] P. A. M. Dirac, *Nature* **139**, 323 (1937).
 - [2] J.-P. Uzan, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 403 (2003), [arXiv:0205340 \[hep-ph\]](#).
 - [3] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, 1984) p. 352.
 - [4] V. Faraoni, *Phys. Rev. D* **53**, 6813 (1996).
 - [5] V. Faraoni, *Int. J. Theor. Phys.* **40**, 2259 (2001).
 - [6] T. Damour and G. Esposito-Farèse, *Class. Quantum Gravity* **9**, 2093 (1992).
 - [7] C. M. Will, *Living Rev. Relativ.* **9**, 1 (2006).
 - [8] T. Damour and G. Esposito-Farèse, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2220 (1993).
 - [9] M. Salgado, D. Sudarsky, and U. Nucamendi, *Phys. Rev. D* **58**, 124003 (1998), [arXiv:9806070 \[gr-qc\]](#).
 - [10] Z. Althaha Motahar, J. L. Blázquez-Salcedo, B. Kleihaus, and J. Kunz, *Phys. Rev. D* **96**, 064046 (2017).
 - [11] H. Sotani and K. D. Kokkotas, *Phys. Rev. D* **70**, 084026 (2004).
 - [12] H. Sotani and K. D. Kokkotas, *Phys. Rev. D* **71**, 124038 (2005).
 - [13] R. F. P. Mendes and N. Ortiz, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 201104 (2018).
 - [14] C. M. Will, *Theory Exp. Gravitational Phys.*, 2nd ed. (Cambridge University Press, 1993) p. 380.
 - [15] T. Damour and G. Esposito-Farèse, *Phys. Rev. D* **54**, 1474 (1996).
 - [16] N. Wex, (2014), [arXiv:1402.5594](#).
 - [17] R. F. P. Mendes, *Phys. Rev. D* **91**, 064024 (2015).
 - [18] R. F. P. Mendes and N. Ortiz, *Phys. Rev. D* **93**, 124035 (2016).
 - [19] D. M. Podkowka, R. F. P. Mendes, and E. Poisson, *Phys. Rev. D* **98**, 064057 (2018).
 - [20] T. Damour and K. Nordtvedt, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2217 (1993).
 - [21] G. Esposito-Farèse and D. Polarski, *Phys. Rev. D* **63**, 063504 (2001).
 - [22] D. Anderson, N. Yunes, and E. Barausse, *Phys. Rev. D* **94**, 104064 (2016).
 - [23] D. Anderson and N. Yunes, *Phys. Rev. D* **96**, 064037 (2017).
 - [24] E. Barausse, C. Palenzuela, M. Ponce, and L. Lehner, *Phys. Rev. D* **87**, 081506 (2013).
 - [25] C. Palenzuela, E. Barausse, M. Ponce, and L. Lehner, *Phys. Rev. D* **89**, 044024 (2014).
 - [26] L. Sampson, N. Yunes, N. Cornish, M. Ponce, E. Barausse, A. Klein, C. Palenzuela, and L. Lehner, *Phys. Rev. D* **90**, 124091 (2014).
 - [27] K. Taniguchi, M. Shibata, and A. Buonanno, *Phys. Rev. D* **91**, 024033 (2015).
 - [28] N. Sennett and A. Buonanno, *Phys. Rev. D* **93**, 124004 (2016).
 - [29] F. M. Ramazanolu and F. Pretorius, *Phys. Rev. D* **93**,

- 064005 (2016).
- [30] D. Anderson and N. Yunes, (2019), arXiv:1901.00937.
- [31] D. Anderson, P. Freire, and N. Yunes, (2019), arXiv:1901.00938.
- [32] B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora, *Nature* **425**, 374 (2003).
- [33] F. Douchin and P. Haensel, *Astron. Astrophys.* **380**, 151 (2001).
- [34] L. Engvik, E. Osnes, M. Hjorth-Jensen, G. Bao, and E. Ostgaard, *Astrophys. J.* **469**, 794 (1996), arXiv:9509016 [nucl-th].
- [35] H. Mütter, M. Prakash, and T. Ainsworth, *Phys. Lett. B* **199**, 469 (1987).
- [36] J. Antoniadis, P. C. C. Freire, N. Wex, T. M. Tauris, R. S. Lynch, M. H. van Kerkwijk, M. Kramer, C. Bassa, V. S. Dhillon, T. Driebe, J. W. T. Hessels, V. M. Kaspi, V. I. Kondratiev, N. Langer, T. R. Marsh, M. A. McLaughlin, T. T. Pennucci, S. M. Ransom, I. H. Stairs, J. van Leeuwen, J. P. W. Verbiest, and D. G. Whelan, *Science* **340**, 448, 1233232 (2013).
- [37] J. Read, B. Lackey, B. Owen, and J. L. Friedman, *Phys. Rev. D* **79**, 124032 (2009), arXiv:0812.2163.
- [38] T. Harada, *Prog. Theor. Phys.* **98**, 359 (1997), arXiv:9706014 [gr-qc].
- [39] W. C. C. Lima and D. A. T. Vanzella, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 161102 (2010).
- [40] W. C. C. Lima, G. E. A. Matsas, and D. A. T. Vanzella, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 151102 (2010).
- [41] R. F. P. Mendes, G. E. A. Matsas, and D. A. T. Vanzella, *Phys. Rev. D* **89**, 047503 (2014).
- [42] J. Novak, *Phys. Rev. D* **58**, 064019 (1998), arXiv:9806022 [gr-qc].
- [43] D. Gerosa, U. Sperhake, and C. D. Ott, *Class. Quantum Gravity* **33**, 135002 (2016).
- [44] P. Pani, V. Cardoso, E. Berti, J. Read, and M. Salgado, *Phys. Rev. D* **83**, 081501 (2011).
- [45] W. C. C. Lima, R. F. P. Mendes, G. E. A. Matsas, and D. A. T. Vanzella, *Phys. Rev. D* **87**, 104039 (2013).
- [46] R. A. Hulse and J. H. Taylor, *Astrophys. J.* **195**, L51 (1975).
- [47] I. H. Stairs, *Living Rev. Relativ.* **6**, 5 (2003).
- [48] R. Blandford and S. A. Teukolsky, *Astrophys. J.* **205**, 580 (1976).
- [49] T. Damour and N. Deruelle, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **44**, 263 (1986).
- [50] D. R. Lorimer and M. Kramer, *Handbook of pulsar astronomy* (Cambridge University Press, 2005) p. 301.
- [51] T. Damour and J. Taylor, *Phys. Rev. D* **45**, 1840 (1992).
- [52] S. Mirshekari and C. M. Will, *Phys. Rev. D* **87**, 084070 (2013).
- [53] D. M. Eardley, *Astrophys. J.* **196**, L59 (1975).
- [54] J. B. Hartle, *Astrophys. J.* **150**, 1005 (1967).
- [55] D. D. Doneva, S. S. Yazadjiev, N. Stergioulas, and K. D. Kokkotas, *Phys. Rev. D* **88**, 084060 (2013).
- [56] P. Pani and E. Berti, *Phys. Rev. D* **90**, 024025 (2014).
- [57] H. Sotani, *Phys. Rev. D* **86**, 124036 (2012).
- [58] P. C. C. Freire, N. Wex, G. Esposito-Farèse, J. P. W. Verbiest, M. Bailes, B. A. Jacoby, M. Kramer, I. H. Stairs, J. Antoniadis, and G. H. Janssen, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **423**, 3328 (2012).
- [59] L. Shao, N. Sennett, A. Buonanno, M. Kramer, and N. Wex, *Phys. Rev. X* **7**, 041025 (2017).
- [60] M. H. van Kerkwijk, R. P. Breton, and S. R. Kulkarni, *Astrophys. J.* **728**, 95 (2011), arXiv:1009.5427.