

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

INSTITUTO DE FÍSICA

TRABALHO DE DISSERTAÇÃO

Investigando a estrutura quântica de teorias escalares-tensorais no  
cenário de segurança assintótica

Samuel Motta De Paula Antunes

Niterói-RJ

2021

SAMUEL MOTTA DE PAULA ANTUNES

INVESTIGANDO A ESTRUTURA QUÂNTICA DE TEORIAS ESCALARES-TENSORIAIS NO  
CENÁRIO DE SEGURANÇA ASSINTÓTICA

Dissertação apresentada ao Departamento de  
Física da Universidade Federal Fluminense,  
como requisito parcial para obtenção do grau  
de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Duarte Pereira Júnior

Coorientador: Prof. Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro

Niterói-RJ

2021



Ficha catalográfica automática - SDC/BIF  
Gerada com informações fornecidas pelo autor

A627i Antunes, Samuel Motta de Paula  
Investigando a estrutura quântica de teorias escalares-  
tensoriais no cenário de segurança assintótica. / Samuel  
Motta de Paula Antunes ; Antônio Duarte Pereira Junior,  
orientador ; Rodrigo Ferreira Sobreiro, coorientador.  
Niterói, 2021.  
82 f. : il.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,  
Niterói, 2021.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22409/PPGF.2021.m.16143163766>

1. Teoria Quântica de Campos. 2. Gravitação Quântica. 3.  
Grupo de Renormalização Funcional. 4. Teorias Escalares-  
Tensoriais. 5. Produção intelectual. I. Pereira Junior,  
Antônio Duarte, orientador. II. Sobreiro, Rodrigo Ferreira,  
coorientador. III. Universidade Federal Fluminense. Instituto  
de Física. IV. Título.

CDD -

Bibliotecário responsável: Debora do Nascimento - CRB7/6368

# Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus por me dar forças e capacitação nos piores momentos de estresse e ansiedade que passei ao longo do curso e por ter colocado pessoas muito abençoadas na minha vida que tiveram toda a paciência do mundo em me ajudar quando eu tinha problemas em aprender os principais requisitos para a escrita dessa dissertação. Em segundo lugar, gostaria de agradecer à minha família que sempre me apoiou nas minhas decisões e nos momentos difíceis, sou muito grato, em especial, ao meu pai (Cláudio), minha mãe (Mara), minha avó (Marília), minha avó (Mirtes) e meu querido avô que partiu recentemente (Agapito). Muito obrigado e saibam que jamais vou esquecer o que vocês fizeram e todo o apoio que me deram até aqui. Amo todos vocês. Agradeço também aos meus amigos mais próximos, dentre eles: Diogenes, Matheus, Cícero, Daniel, Igor, João Victor, Pedro, Fred e Rebecca que sempre alegraram meus dias. Dentro desses amigos, muito grato em saber que tive a oportunidade de crescer junto, desde criança, com o Igor e ver que nossa amizade dura até hoje, apesar dele torcer para o maior rival do meu time. Tive essa mesma oportunidade com a Rebecca, apesar de não esquecer que ela ocasionalmente me colocava de castigo quando costumávamos brincar na infância. Mas me alegra muito termos voltado a nos falar depois um longo período de tempo e você foi uma grande benção para mim nesse período de isolamento, torcendo por mim. Gostaria de agradecer também a todos os professores da escola em que eu estudei. Obrigado porque vocês me deram um conhecimento básico, mas fundamental para que eu chegasse até onde eu cheguei e eu jamais vou os esquecer. Também quero agradecer aos meus amigos de viagem no período da graduação: Caio, Felipe e Bernardo. Foi muito bom estar com vocês até o final e a nossa união, nesse tempo todo, foi capaz de superar todos os obstáculos que estiveram o nosso caminho e eu afirmo que não teria conseguido se não fossem vocês. Agradeço aos amigos que conheci no início da graduação também: Igor, Sônia, Carol, João, Lucas pelos momentos de conversa e descontração, mas também pelos momentos de ajuda. Agradeço também ao meu querido amigo, Pedro Tristão, que sempre foi muito solícito com todas as minhas questões. Quero agradecer também à professora Raissa que teve a maior paciência do mundo em me ensinar o básico de relatividade geral que sei hoje e por sempre ter demonstrado muita paciência com todas as minhas dúvidas. A convivência que tive com ela não só fez com que eu visse uma professora excelente, mas também um ser humano incrível. Como eu poderia esquecer do Arthur? Arthur, muito obrigado por ser uma pessoa muito solícita e por sempre se mostrar disposto a me ajudar a mexer no Mathematica, além de tirar dúvidas em relação a outros tópicos envolvendo teoria de campos. Também não poderia deixar de agradecer ao Gustavo, que também se demonstrou extremamente solícito e demonstrou uma paciência fora do comum, me ajudando muito a aprender a

usar o Mathematica como uma ferramenta de trabalho, além de me tirar dúvidas relacionadas a outros tópicos. Não poderia deixar de citar os meus irmãos de fé que sempre estiveram pedindo pela minha vida nesse tempo todo, em especial, à Nathália e ao Ramon. Também jamais poderia deixar de agradecer ao meu orientador, Antônio, não só por ter me ajudado nesse período todo em aprender as ferramentas necessárias do grupo de renormalização, mas também por revelar ter um caráter de empatia que não se vê em todas as pessoas hoje, sendo capaz de compreender perfeitamente e respeitar os momentos em que eu lutava contra minha ansiedade. Gostaria de agradecer ao CNPq, por ter financiado e investido durante esses dois anos na minha pesquisa. Sou extremamente grato ao Conselho por isso. Enfim, eu gostaria de escrever o nome de todas as pessoas que influenciaram positivamente minha vida até aqui, mas citei as que foram as mais importantes na etapa da graduação e mestrado. Gostaria de citar duas frases que carrego comigo até hoje no fim desses agradecimentos, a primeira frase é de um dos melhores filmes que já vi, marcando a minha vida desde a infância, usada pelo vilão Dr Octopus, que no final se redime salvando Nova York inteira em “Homem-Aranha 2”: “Inteligência não é um privilégio, mas é um dom que deve ser usado para o bem da humanidade”. E de fato, eu como ser-humano, fui abençoado com um dom e cabe a mim usá-lo sempre em prol de um mundo melhor. A segunda frase é do Sir Isaac Newton que disse: “Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes”. Vocês, nesses agradecimentos que escrevi, são meus gigantes, por isso, o meu muito obrigado a todos vocês.

# Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	ix
Abstract	x
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Grupo de Renormalização Funcional Wilsoniano</b>	<b>4</b>
2.1 Método das cascas de momentos . . . . .	4
2.2 Funções <i>cutoff</i> e equação de Wetterich . . . . .	8
2.3 Teoria escalar . . . . .	17
<b>3 Grupo de Renormalização Funcional e a Interação Gravitacional</b>	<b>20</b>
3.1 Introdução . . . . .	20
3.2 Formulação funcional de TQC em espaços curvos . . . . .	20
3.3 Truncamento de Einstein-Hilbert . . . . .	22
3.4 Decomposição de York e truncamento de Einstein-Hilbert . . . . .	29
<b>4 Teorias escalares-tensoriais e gravidade assintoticamente segura</b>	<b>35</b>
4.1 Introdução . . . . .	35
4.2 Modelos teóricos escalares-tensoriais: Teoria de Brans-Dicke e a representação de Jordan .	36
4.3 Quebra espontânea de simetria . . . . .	37
4.4 Cálculo dos pontos fixos e expoentes críticos para a teoria escalar-tensorial para ordem R na curvatura . . . . .	38
4.4.1 Cálculo de pontos fixos e expoentes críticos com a influência de campos escalares de matéria . . . . .	44
<b>5 Conclusões</b>	<b>50</b>
<b>A Integrais gaussianas</b>	<b>1</b>
<b>B Integral de caminho para teorias de calibre e determinante de Faddev-Popov</b>	<b>3</b>
B.1 Determinante de Faddev-Popov e a teoria de Maxwell . . . . .	3

	viii
B.2 Determinante de Faddeev-Popov e a Teoria Gravitacional . . . . .	7
<b>C Expansão dos termos de curvatura</b>	<b>9</b>
<b>D Tecnologia para o cálculo do traço</b>	<b>11</b>
<b>Referências</b>	<b>21</b>



# Resumo

Nesse trabalho, estamos interessados em tratar a gravitação quântica como uma teoria de campos usual, mas abordando-a de forma não-perturbativa através da *equação do grupo de renormalização funcional* (FRGE em inglês). Estudamos, em primeira mão, o cálculo de um ponto fixo para uma teoria escalar com interação quártica nos campos em espaço plano. Posteriormente, estaremos estudando a existência do ponto fixo de Reuter para o *truncamento de Einstein-Hilbert* usando o *método de fundo* e, finalmente, analisaremos a dimensionalidade da *superfície crítica ultravioleta* (UV) através dos expoentes críticos. O cálculo seguinte envolverá a mesma análise feita anteriormente, mas dessa vez, empregaremos o método da *decomposição de York* e faremos uma pequena comparação com o cálculo anterior sobre prováveis mudanças no ponto fixo e no expoente crítico. Em seguida, consideraremos uma teoria modificada da gravitação: *teoria escalar-tensorial*, cujo campo escalar também desempenha um papel fundamental na interação gravitacional, além do próprio gráviton. As motivações para tal modificação serão explicadas e analisaremos as evidências para a existência de um *ponto fixo de matéria gaussiano* (GMFP em inglês), através do *método de fundo*, usando uma decomposição interpolante da métrica entre uma parte não-dinâmica e suas flutuações no calibre de Landau. Estudaremos a dependência desse tipo de ponto fixo conforme variamos o parâmetro interpolante  $\tau$ . Finalmente, nosso interesse consistirá em examinar como campos de matéria do setor escalar influenciam nos pontos fixos envolvendo a constante de Newton e a constante cosmológica tanto na parametrização linear quanto na parametrização exponencial.

Palavras-chave: gravitação quântica, grupo de renormalização funcional, superfície ultravioleta, teoria escalar-tensorial, ponto fixo de matéria gaussiano.

# Abstract

In this work, we are interested in considering the quantum gravity as an usual quantum field theory, but treating it in a non-perturbative way using the *functional renormalization group equation* (FRGE). We firstly study the computation of a fixed point for a scalar field theory on flat space. Posteriorly, we will investigate the existence of the Reuter's fixed point for the *Einstein-Hilbert* truncation using the *background field method*. Finally, we will analyze the dimensionality of the *ultraviolet* (UV) *critical surface* through the critical exponents. After that, we will repeat the analysis, but using the *York decomposition* method and will make a comparison with the previous calculation. Then, we consider a modified theory of gravity, where the scalar field plays a very important role too, together with the graviton field: *the scalar-tensor theory*. The motivations for a such modified theory of gravity will be discussed and explained. We will explore the existence of a gaussian matter fixed point (GMFP) through the *background field* method using the interpolating parametrization in the Landau gauge. Our main interest will be in examining the dependence of this kind of fixed point in relation to the interpolating parameter  $\tau$ . In the end we will explore how the scalar matter sector influences the behavior of the fixed points that involves Newton's constant and the cosmological constant both at linear and exponential parametrization.

Keywords: quantum gravity, functional renormalization group equation, ultraviolet critical surface, scalar-tensor theory, gaussian matter fixed point.

# Capítulo 1

## Introdução

A teoria quântica de campos (TQC) tem um grande sucesso na quantização das ditas interações fundamentais da natureza. Ela foi capaz de primeiramente quantizar o eletromagnetismo, na chamada eletrodinâmica quântica que foi um campo da física desenvolvido por Shinichiro Tomonaga, Julian Schwinger e Richard Feynman [1–9]. Tais trabalhos envolvendo esse campo renderam-lhes o prêmio Nobel de 1965. Posteriormente, na década de 70, após os trabalhos de Yang e Mills na década anterior [10, 11], um modelo de teoria quântica que unificava a interação forte e fraca (teoria eletrofraca) foi proposto por Weinberg e Salam [12, 13], baseados no trabalho anterior de Glashow [14], o que rendeu aos três o prêmio Nobel de 1979. A prova da renormalizabilidade (explicaremos um pouco mais adiante sobre) foi proposta por Hooft em 1972 [15]. Finalmente, experimentos de grande importância como a descoberta de correntes neutras em 1972 e, eventualmente, a detecção direta dos bósons Z e W em 1982 no CERN consolidaram a teoria eletrofraca. A teoria quântica da interação forte (cromodinâmica quântica) foi desenvolvida principalmente por Moo-Young-Han, Yoichiro Nambu e Oscar Wallace Greenberg [16, 17], em 1965, que introduziram a ideia de que quarks carregam um número quântico chamado de “cor” e que os quarks interagem por meio da troca de glúons. Entretanto, o desenvolvimento teórico final para o advento da cromodinâmica quântica foi a descoberta da liberdade assintótica feita por David Gross, Frank Wilczek [18] e Hugh Politzer [19]. Tal mecanismo explica o porquê de quarks se comportarem como partículas livres em escalas de energia altas. Os trabalhos desenvolvidos por eles envolvendo a interação forte lhes renderam o prêmio Nobel de 2004. Todos trabalhos, envolvendo as interações fundamentais, até então citados, possibilitaram o desenvolvimento do modelo padrão de partículas elementares, que é uma teoria que descreve bem três das quatro interações fundamentais conhecidas até hoje através de técnicas de quantização perturbativas. Entretanto, ainda não temos uma teoria quântica para a interação gravitacional.

A teoria da relatividade geral de Einstein, que é o modelo clássico que melhor descreve a interação gravitacional, possui grande poder de predição na descrição de uma série de regimes de escala de comprimento. Entretanto, ela falha quando consideramos um regime de comprimento muito pequeno, a escala de Planck ( $l_p = \sqrt{G}$ ;  $c = \hbar = 1$ ), pois é a escala em que efeitos quânticos da gravitação passam

a ser predominantemente dominantes. Portanto, a relatividade geral clássica não é uma teoria que é válida em todas as escalas de energia. Isso nos leva à necessidade de formular uma teoria quântica da gravitação que seja válida nessa escala de comprimento, ou se preferir, num regime de escala de energia ultravioleta (UV). Se por exemplo, estivermos interessados a compreender melhor o que aconteceu no início do universo primordial, que leva em consideração a escala de Planck, precisamos de uma teoria mais completa do que a relatividade geral. Um outro problema que a relatividade geral tem está no estudo das singularidades dos buracos negros em seus estágios finais de evaporação [20]. Por também se tratar de um regime cuja escala de energia é muito alta, mais uma vez precisaríamos de uma teoria quântica. Quando tratamos a teoria gravitacional de forma perturbativa (levando em conta que os acoplamentos são pequenos), existe um problema que é o problema da não-renormalizabilidade da teoria [21]. Em cálculos de teorias de campos, problemas de divergências aparecem de forma recorrente no cálculo de correções quânticas. Entretanto, existe uma técnica (renormalização) que é capaz de remover essas divergências através da introdução de contratermos na sua lagrangiana original. Quando introduzimos esses contratermos, removemos essas divergências e os diagramas se tornam finitos. Uma teoria na qual um número de parâmetros associados aos diferentes contratermos é finito, é dita uma teoria renormalizável, pois com um número finito de parâmetros a serem fixados por informações externas, *i.e.* experimentos com a adição desses contratermos, a teoria é preditiva. O problema da interação gravitacional é que ela não é renormalizável perturbativamente, pois para que possamos remover as divergências das correções quânticas, é necessário a introdução de infinitos novos contratermos que não estavam presentes na lagrangiana original, como pode ser visto no artigo de revisão [22], o que significa que teremos infinitos parâmetros a se fixar. Esse problema envolvendo a não preditividade da teoria de gravidade quântica utilizando métodos perturbativos levou ao desenvolvimento de uma série de modelos que sejam capazes de tornar a gravitação uma teoria quântica. Dentre elas, podemos citar a teoria das cordas, a gravidade quântica em loop, a triangulação dinâmica e a gravitação quântica assintoticamente segura (ASQG). Nessa dissertação, nos atentaremos ao último modelo.

Nesse último modelo, ainda tratamos a quantização da interação gravitacional como uma teoria de campos usual, entretanto, a tratamos como uma teoria não-perturbativa, ou seja, não levamos em conta a aproximação de que os acoplamentos são pequenos, mas levamos em consideração a ideia de que eles variam com a escala de energia  $k$ . Portanto, a ideia central que envolve ASQG se baseia na conjectura de Weinberg [23], onde os acoplamentos variam com a escala de energia  $k$  e atingem um ponto fixo no regime ultravioleta, o que faz com que esses acoplamentos sejam limitados em escalas de energia altas e não “explodam”, conferindo à teoria quântica segurança assintótica. O segundo ponto da conjectura de Weinberg, que garante a renormalizabilidade da teoria, é a finitude da dimensão da superfície crítica UV. A superfície crítica é composta por todas as direções que levam ao ponto fixo no UV. Cada direção está associada a um dos acoplamentos. Se o número de direções que levam ao ponto fixo for finita, teremos um número finito de parâmetros a serem fixados por dados experimentais e a teoria se torna preditiva não-perturbativamente. Sendo assim, desenvolve-se uma ferramenta muito poderosa do cálculo não-perturbativo que é a chamada de *equação de Wetterich* [24]. Essa equação permite calcular os pontos

fixos e também descreve a relação de dependência de cada acoplamento com a escala de energia. Existem muitos indícios da existência de um ponto fixo não-trivial na teoria de gravitação quântica, por exemplo, a partir do trabalho pioneiro de Reuter para o *truncamento de Einstein-Hilbert* [25]. Trabalhos na literatura envolvendo truncamentos mais refinados, incluindo potências de  $f(R)$ , de ordem superior até  $R^{145}$  atualmente, e termos de curvatura mais gerais como  $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ ,  $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$  e  $C_{\mu\nu\alpha\beta}C^{\mu\nu\alpha\beta}$  mostram a existência de um ponto fixo e uma certa estabilidade para o número de direções relevantes, como pode ser visto em [26–56].

Um fato interessante envolvendo ASQG é que precisamos avaliar como esse formalismo se dá no mundo real, ou seja, em um mundo que possui campos de matéria. Nessa situação, em vez de se atentar apenas para a gravitação pura, uma série de trabalhos envolvendo gravidade e campos de matéria foram desenvolvidos, mostrando a existência de um ponto fixo assintoticamente seguro como [57–79]. Tais trabalhos são de grande importância, já que, enquanto a ASQG envolvendo a gravitação pura pode gerar uma teoria bem consistente, não sabemos se eventualmente ASQG seria igualmente consistente com a inclusão de campos de matéria, ou seja, não sabemos se esse formalismo geraria um modelo de gravitação quântica que fosse aplicável ao nosso universo. Por exemplo, no caso da teoria de Yang-Mills, temos uma teoria que possui liberdade assintótica no regime do UV, o que a torna uma teoria completa, ou seja, uma teoria válida em todas as escalas de energia nesse regime. Entretanto, com a adição de um determinado número de férmions, essa liberdade assintótica acaba sendo destruída [80]. Esse mesmo efeito poderia ocorrer com a adição de campos de matéria à gravitação, de tal forma que poderíamos não ter uma teoria quântica de gravitação completa no UV.

Nesse trabalho, focaremos inicialmente no cálculo de uma teoria escalar pura  $\lambda\phi^4$  e calcularemos seus pontos fixos e expoentes críticos. Em seguida, trataremos do caso do truncamento de Einstein-Hilbert, onde, usando a decomposição linear, mostraremos a existência de um ponto fixo não-trivial (ponto fixo de Reuter) e faremos também o cálculo do ponto fixo para esse mesmo truncamento, usando a decomposição de York. Em seguida, iremos abordar algumas motivações e algumas aplicações para a teoria escalar-tensorial e calcularemos os seus pontos fixos e expoentes críticos, usando a parametrização interpolante, baseados no trabalho [81]. Avaliaremos como os pontos fixos e expoentes críticos variam conforme ajustamos o parâmetro interpolante. Também investigaremos como o número de campos bosônicos escalares podem alterar o ponto fixo para o truncamento de Einstein-Hilbert, verificando se, ao adicionarmos esses campos, os pontos fixos permanecem estáveis ou não.

## Capítulo 2

# Grupo de Renormalização Funcional Wilsoniano

### 2.1 Método das cascas de momentos

O grupo de renormalização permite o estudo de sistemas com infinitos graus de liberdade e é um método que explora métodos funcionais de TQC com a ideia wilsoniana de grupo de renormalização proposta por Kenneth Wilson [82, 83]. Além disso, em física de altas energias, o grupo de renormalização permite uma poderosa compreensão das interações fundamentais e permite distinguir teorias efetivas (não são válidas no limite ultravioleta) de teorias fundamentais (válidas no limite ultravioleta). O grupo de renormalização wilsoniano é baseado no método das cascas de momento, onde é introduzido na integral funcional usual um termo de *cutoff*  $\Lambda$  que limita a magnitude do momento  $k$ , de tal forma que integramos sobre  $\phi(k)$  com  $|k| \leq \Lambda$ , com  $\phi(k) = 0$  para  $|k| > \Lambda$ , restringindo o número de variáveis que são integráveis. Essa modificação da integral funcional sugere um método para “reforçar” a influência de flutuações quânticas para um valor de momentum ou distâncias pequenas. Essas flutuações, no formalismo da integral funcional, são representadas pelas componentes de Fourier de  $\phi$  com momentum próximos do *cutoff*. Assim, podemos determinar a influência desses “momentos rápidos” próximos do *cutoff* na predição física da teoria ao realizarmos a integral sobre essas variáveis e compararmos o resultado com a integral funcional original [84].

Usualmente, representamos o gerador funcional  $Z[J]$  no espaço de Minkowski como sendo:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi] + \int d^d x J\phi} = \prod_k \int d\phi(k) e^{iS[\phi] + \int d^d x J\phi}. \quad (2.1)$$

Entretanto, estaremos usando o espaço euclidiano cuja assinatura da métrica é  $(+, +, +, +)$ , de forma que o gerador funcional nesse espaço fica:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] + \int d^d x J\phi} = \prod_k \int \phi(k) e^{-S[\phi] + \int d^d x J\phi}, \quad (2.2)$$

onde  $J(x)$  representa uma fonte externa clássica e a variável de integração  $\phi$  passou a ser representada

no espaço de momentum ao invés do espaço usual. Vamos agora impor uma restrição de integração dos modos, introduzindo o cutoff  $\Lambda$ , restringindo a integração das variáveis  $\phi(k)$  para  $|k| < \Lambda$ , de forma que  $\phi(k) = 0$  para  $k > \Lambda$ . Sendo assim, para um campo escalar com interação  $\lambda\phi^4$ , ao desligarmos a fonte, tomando  $J = 0$  por questões de simplicidade, o gerador funcional toma a forma:

$$Z[0] = \int [\mathcal{D}\phi]_{\Lambda} \exp \left[ - \int d^d x \left( \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda \phi^4}{4!} \right) \right]; \quad [D\phi]_{\Lambda} = \prod_{|k| < \Lambda} d\phi(k). \quad (2.3)$$

Nessa lagrangiana,  $m$  e  $\lambda$  são os acoplamentos da teoria. Nós dividiremos a variável de integração em 2 partes, usando o método de integração das cascas de Wilson [82, 83]. Uma parte da integração envolverá os modos lentos  $\phi$  e a outra parte envolverá os modos rápidos  $\hat{\phi}$ :

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(k) &= \hat{\phi}(k), \quad b\Lambda \leq |k| < \Lambda; \\ \hat{\phi}(k) &= 0, \quad \text{caso contrário.} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \phi(k) &= \phi(k), \quad |k| < b\Lambda; \\ \phi(k) &= 0, \quad b\Lambda \leq |k|, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde  $b$  é uma constante adimensional, de tal forma que  $b < 1$ . Agora calculamos  $S[\phi + \hat{\phi}]$  e obtemos:

$$\begin{aligned} Z[0] &= \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\hat{\phi} \exp \left( - \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \phi + \partial_{\mu} \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m^2 (\phi + \hat{\phi})^2 + \frac{\lambda (\phi + \hat{\phi})^4}{4!} \right] \right) \\ &= \int \mathcal{D}\phi e^{-\int \mathcal{L}(\phi)} \int \mathcal{D}\hat{\phi} \exp \left( - \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}^2 + \lambda \left( \frac{1}{6} \phi^3 \hat{\phi} + \frac{1}{4} \phi^2 \hat{\phi}^2 + \frac{1}{6} \hat{\phi} \hat{\phi}^3 \right) \right] \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Portanto, podemos expressar  $Z[0]$  como:

$$Z[0] = \int_{0 < k < b\Lambda} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \int_{b\Lambda < k < \Lambda} \mathcal{D}\hat{\phi} e^{-F[\phi, \hat{\phi}]} \quad (2.7)$$

A integral dos modos rápidos  $\hat{\phi}$  resultará numa função do tipo  $e^{-H[\phi]}$ . Podemos, então definir a lagrangiana efetiva como:  $\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}[\phi] + \mathcal{L}_H[\phi]$ ;

$$Z[0] = \int [D\phi]_{b\Lambda} \exp \left( - \int d^d x \mathcal{L}_{eff} \right); \quad \mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}(\phi) + \text{correções.} \quad (2.8)$$

Para derivarmos  $\mathcal{L}_{eff}$ , iremos tratar todos os termos de acoplamento como perturbações. Assim, teremos para  $Z[J]$  a seguinte expressão:

$$\int \mathcal{D}\hat{\phi} e^{-\int d^d x \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \hat{\phi})^2} \left[ 1 - \int d^d x_1 \left( \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}^2(x_1) + \frac{\lambda \hat{\phi}^4(x_1)}{4!} + \lambda(\dots) \right) \right]. \quad (2.9)$$

Para calcularmos o propagador, sabemos que o termo cinético da integral tem a forma:

$$\int d^d x \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \hat{\phi})(\partial_{\mu} \hat{\phi}) = -\frac{1}{2} \int d^d x \hat{\phi} \partial_{\mu} \partial_{\mu} \hat{\phi}. \quad (2.10)$$

Isso representado no espaço de momentos, a equação (2.11) se torna:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int d^d x \hat{\phi} \partial_{\mu} \partial_{\mu} \hat{\phi} &= \frac{1}{2} \int d^d x \int \frac{d^d k_1 d^d k_2 \hat{\phi}(k_1) e^{k_1 \cdot x} k_2^2 \hat{\phi}(k_2) e^{i k_2 \cdot x}}{(2\pi)^{2d}} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d k_1 d^d k_2 \hat{\phi}(k_1) \delta(k_1 + k_2) k_2^2 \hat{\phi}(k_2)}{(2\pi)^d}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Portanto, o propagador da teoria é dado por:

$$\langle \hat{\phi}(k)\hat{\phi}(p) \rangle = \frac{1}{k^2} (2\pi)^d \delta(k+p) \Theta(k), \quad (2.12)$$

onde definimos a função  $\Theta(k)$  como sendo:

$$\begin{aligned} \Theta(k) &= 1, \quad b\Lambda \leq k < \Lambda, \\ \Theta(k) &= 0, \quad \text{caso contrário.} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Primeiramente, vamos considerar a contribuição do termo  $\phi^2 \hat{\phi}^2$ :

$$\int \mathcal{D}\hat{\phi} \left( \lambda \int d^d x_1 \frac{1}{4} \phi^2 \hat{\phi}^2 \right) e^{-\frac{1}{2} \int d^d x (\partial_\mu \hat{\phi})^2} = \left\langle \lambda \int d^d x_1 \frac{1}{4} \phi(x_1)^2 \hat{\phi}(x_1)^2 \right\rangle_{S_0}, \quad (2.14)$$

onde  $S_0$  diz respeito a ação para a teoria escalar livre envolvendo somente o termo cinético.

Podemos representar a equação (2.14) no espaço de momentos, de forma que:

$$\left\langle \lambda \int d^d x_1 \frac{1}{4} \phi(x_1)^2 \hat{\phi}(x_1)^2 \right\rangle_{S_0} = \int \prod_{l=1}^4 \frac{d^d k_l}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \phi(k_1) \phi(k_2) \langle \hat{\phi}(k_3) \hat{\phi}(k_4) \rangle. \quad (2.15)$$

Ao usarmos o teorema de Wick e fazermos algumas manipulações, obtemos o termo:

$$\left\langle \lambda \int d^d x_1 \frac{1}{4} \phi(x_1)^2 \hat{\phi}(x_1)^2 \right\rangle_{S_0} = \int \frac{d^d k_1 d^d k_2}{(2\pi)^d} \delta(k_1 + k_2) \phi(k_1) \phi(k_2) \int \frac{d^d k_3}{(2\pi)^d} \frac{\Theta(k_3)}{(k_3)^2}. \quad (2.16)$$

Sabendo que o limite da integral de  $k_3$  respeita os limites de integração dos modos  $\hat{\phi}$ , com  $b\Lambda \leq k_3 \leq \Lambda$ , podemos facilmente resolver essa integral e retornar para o espaço de configurações usual, obtendo o termo da seguinte forma:

$$\left\langle \lambda \int d^d x_1 \frac{1}{4} \phi(x_1)^2 \hat{\phi}(x_1)^2 \right\rangle_{S_0} = -\frac{\lambda}{4} \int d^d x \left( \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{(1 - b^{d-2})}{d-2} \Lambda^{d-2} \right) \phi(x)^2. \quad (2.17)$$

Esse termo representa uma correção do termo de massa análoga à correção do termo de massa que aparece no processo de renormalização da teoria  $\lambda\phi^4$  a 1 loop:

$$m_o^2 = m^2 + \frac{\lambda}{2} \left( \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{(1 - b^{d-2})}{d-2} \Lambda^{d-2} \right). \quad (2.18)$$

Os termos de ordem mais alta da teoria podem ser trabalhados da mesma forma para servirem como termos de correção:

$$\begin{aligned} \int d^d x \mathcal{L}_{eff} &= \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (1 + \Delta Z) (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (m^2 + \Delta m^2) \phi^2 + \frac{1}{4!} (\lambda + \Delta \lambda) \phi^4 + \Delta C (\partial_\mu \phi)^4 \right. \\ &\quad \left. + \Delta D \phi^6 + \dots \right], \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde os termos representados por  $\Delta$  são as flutuações quânticas dos modos rápidos que foram integrados.

Lembrando que a integral funcional antiga dava origem ao termo de propagador:  $\frac{1}{k^2} (2\pi)^d \delta^d(\vec{k} + \vec{p}) \Theta(k)$ .

Em termos da variável  $x'$  e  $k'$ , definimos a seguinte relação:

$$x' = xb \quad e \quad k' = \frac{k}{b}. \quad (2.20)$$



Conseqüentemente:

$$\frac{dx'}{dx} = b \quad (2.21)$$

Assim, a lagrangiana adquire uma nova forma:

$$\int d^d x \mathcal{L}_{eff} = \int d^d x' b^{-d} \left[ \frac{1}{2}(1 + \Delta Z)b^2(\partial'_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}(m^2 + \Delta m^2)\phi^2 + \frac{1}{4!}(\lambda + \Delta\lambda)\phi^4 + \Delta C b^4(\partial'_\mu \phi)^4 + \Delta D \phi^6 + \dots \right] \quad (2.22)$$

A nova  $\mathcal{L}_{eff}$  dará origem ao mesmo propagador da equação (2.12) se reescrevermos  $\phi$  da forma  $\phi' = [b^{2-d}(1 + \Delta Z)]^{1/2}\phi$ . Assim, depois de reescalarmos a ação efetiva, retornamos à forma inicial:

$$\int d^d x \mathcal{L}_{eff} = \int d^d x' \left[ \frac{1}{2}(\partial'_\mu \phi')^2 + \frac{1}{2}m'^2 \phi'^2 + \frac{1}{4!}\lambda' \phi'^4 + C'(\partial'_\mu \phi')^4 + D' \phi'^6 + \dots \right], \quad (2.23)$$

onde fizemos as seguintes redefinições:

$$\begin{aligned} m'^2 &= (m^2 + \Delta m^2)(1 + \Delta Z)^{-1}b^{-2}, \\ \lambda' &= (\lambda + \Delta\lambda)(1 + \Delta Z)^{-2}b^{d-4}, \\ C' &= (C + \Delta C)(1 + \Delta Z)^{-2}b^d, \\ D' &= (D + \Delta D)(1 + \Delta Z)^{-3}b^{2d-6}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Repetindo o mesmo processo, integrando novamente sobre outra casca de momento, transformamos ainda mais a lagrangiana. Integrações sucessivas produzem mais termos interagentes. Ao tomarmos  $b$  próximo de 1, as cascas de momento se tornam infinitesimalmente finas e a transformação se torna contínua. Essa continuidade gerada pela transformação da lagrangiana produz um fluxo dos acoplamentos da teoria em função do *cutoff* introduzido. Este fluxo é a característica definidora do que é conhecido como *grupo de renormalização wilsoniano*.

Para melhor compreensão de como a lagrangiana (ou ação) varia de acordo com a integração wilsoniana, consideremos a lagrangiana na vizinhança de  $m^2 = \lambda = C = D = \dots = 0$ , onde todas as perturbações se anulam. Dizemos que a lagrangiana  $\mathcal{L}_o = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2$  é um ponto fixo da transformação do grupo de renormalização [84]. Na vizinhança de  $\mathcal{L}_o$ , podemos ignorar os termos  $\Delta m, \Delta\lambda$ , assim, obtemos:

$$\begin{aligned} m'^2 &= m^2 b^{-2}, \\ \lambda' &= \lambda b^{d-4}, \\ D' &= D b^{2d-6}, \\ C' &= C b^d. \end{aligned} \quad (2.25)$$

- Se  $d < 4$ :  $\lambda' > \lambda$ ,  $C' < C$  e  $m'^2 > m^2$ .
- Se  $d \geq 4$ :  $\lambda' = \lambda + \text{correções}$ ,  $C' < C$ ,  $D' < D$  e  $m'^2 > m^2$ .

Vamos fazer, então, as seguintes definições:

- *Acoplamentos relevantes*: crescem com a transformação do grupo de renormalização.
- *Acoplamentos irrelevantes*: decrescem com a transformação do grupo de renormalização.
- *Acoplamentos marginais*: nesse caso, será necessária a investigação de termos de ordem superior para verificar se ele é relevante ou irrelevante.

No caso em que  $d=4$ , para  $\lambda'$ , temos que levar em conta as suas correções para verificarmos se  $\lambda'$  aumenta com a transformação do grupo de renormalização ou se diminui, então, temos que voltar para  $\lambda' = (\lambda + \Delta\lambda)(1 + \Delta Z)^{-2}b^{d-4}$ . Nesse caso,  $\Delta Z = 0$ , pois é da ordem de  $\lambda^2$  e estamos interessados até a ordem  $\lambda^2$ . Ao avaliarmos a correção em  $\lambda$ , obtemos, segundo [84]:

$$\lambda' = \lambda - \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \log \frac{1}{b} \text{ (acoplamento marginalmente irrelevante)}. \quad (2.26)$$

Observamos que ao integrarmos sobre os modos rápidos, as flutuações quânticas desses modos fazem  $\lambda$  decrescer.

Podemos representar o gerador funcional após a integração dos modos rápidos com a fonte desligada como sendo:

$$Z[0] = \int \mathcal{D}\phi e^{S_{ef}[\phi]}, \quad (2.27)$$

com

$$S_{ef}[\phi] = S[\phi] + \Delta S[\phi]. \quad (2.28)$$

$S_{ef}[\phi]$  é a chamada ação efetiva de Wilson e terá um papel muito importante quando definirmos a ação efetiva média na próxima seção. Percebemos nessa seção que o grupo de renormalização funcional wilsoniano é uma ferramenta poderosa na TQC se quisermos analisar o comportamento de cada acoplamento para escalas de energia no UV ao realizarmos a integração dos modos rápidos e incluirmos as flutuações quânticas para cada um dos acoplamentos.

## 2.2 Funções *cutoff* e equação de Wetterich

O grupo de renormalização funcional utiliza a ideia da integração wilsonianiana de forma suave ao introduzirmos uma função reguladora na ação original. Funções *cutoff* são funções que introduzimos na ação para suprimir a ação de um conjunto de modos. Sabemos que, no espaço euclidiano, o gerador funcional para uma dada teoria de campos definida pela ação clássica  $S[\phi]$  é dado por:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left( -S[\phi] + \int d^d x J\phi \right). \quad (2.29)$$

Adicionamos uma função *cutoff*  $\Delta S_k[\phi]$  dada por:

$$\Delta S_k[\phi] = \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \phi(-q) R_k(q^2) \phi(q). \quad (2.30)$$

Mas nós podemos também usar a representação no espaço usual:

$$\Delta S_k[\phi] = \frac{1}{2} \int d^d x \phi(x) R_k(-\partial_\mu \partial^\mu) \phi(x). \quad (2.31)$$

Podemos fazer a seguinte relação:

$$\frac{\delta^2 \Delta S_k}{\delta \phi(x_1) \delta \phi(x_2)} = R_k(-\partial_\mu \partial^\mu) \delta(x_1 - x_2) \longrightarrow R_k(p^2) \text{ (espaço de momento)}. \quad (2.32)$$

$Z_k$  agora vai ser a função de partição definida com a ação  $S + \Delta S_k$ , de forma que:

$$Z_k[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left( -S[\phi] - \Delta S_k[\phi] + \int d^d x J \phi \right). \quad (2.33)$$

A supressão dos modos no infravermelho é satisfeita através de qualquer regulador que satisfaça as seguintes propriedades:

- 1) Deve ser quadrática nos campos.
- 2) A função  $R_k(q^2)$ , para  $k$  fixo, deve decrescer monotonicamente em  $q^2$ .
- 3) A função  $R_k(q^2)$ , para  $q^2$  fixo deve crescer monotonicamente em  $k$ .
- 4)  $\lim_{k \rightarrow 0} R_k(q^2) = 0$ .
- 5) Para  $q^2 > k^2$ ,  $R_k(q^2)$  vai a 0 suficientemente rápido.
- 6)  $R_k(0) = k^2$ .

As duas primeiras condições são propriedades definidoras de uma função cutoff. A quarta condição garante que  $Z_k \rightarrow Z$  no limite em que  $k \rightarrow 0$ . A quinta propriedade garante que os modos de momento altos sejam integrados sem serem suprimidos. A quinta condição é uma espécie de condição de normalização da função cutoff. Vale destacar que  $k$  funciona como um cutoff que regula os modos que são integrados, pois quando  $k$  diminui, um maior número de modos são integrados, já quando aumenta, um número menor de modos é integrado, o que remete à ideia de Wilson de integração sobre as cascas.

Tanto  $z$  quanto  $R_k(z)$  têm dimensão de massa quadrada, portanto, podemos expressar:

$$R_k(z) = k^2 r(y) \ ; \ y = \frac{z}{k^2}, \quad (2.34)$$

onde  $r$  é um termo adimensional que faz parte do cutoff. Algumas escolhas típicas para  $r(y)$  são:

$$r_1(y) = \frac{y}{e^y - 1}, \quad (2.35)$$

$$r_2(y) = \frac{y^2}{e^{y^2} - 1}, \quad (2.36)$$

$$r_3(y) = (1 - y)\theta(1 - y). \quad (2.37)$$

A representação gráfica dessas escolhas típicas está disposta na figura 2.1. É importante salientar que a função  $r(y)$  mais usada na literatura é a (2.37). Importante notar também que a introdução do *cutoff* provoca uma modificação do propagador da teoria, que está associado com o setor quadrático de campos,

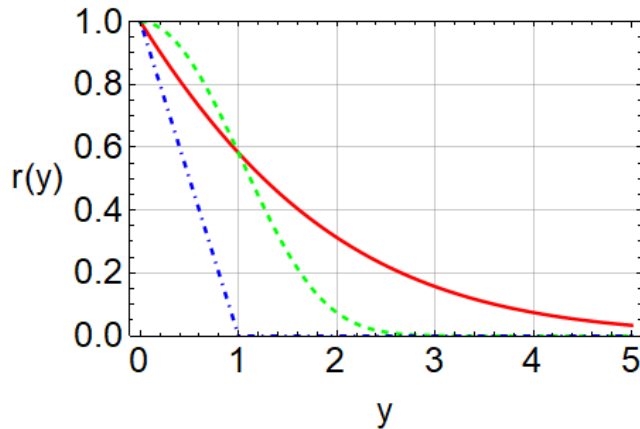


Figura 2.1: Comportamento gráfico das funções *cutoff*, onde  $r_1(y)$  é a linha vermelha,  $r_2(y)$  é a linha pontilhada verde e  $r_3(y)$  é a linha tracejada-pontilhada azul.

o que significa que o *cutoff* não gera uma modificação nos termos de vértices (termos de interação). Seu efeito, então, pode ser explicado como sendo a substituição do propagador inverso original  $z$  pelo propagador inverso do *cutoff*:

$$P_k(z) = z + R_k(z). \quad (2.38)$$

Então, o propagador original, que tinha a forma  $G(z) = \frac{1}{z}$ , agora, com a adição do *cutoff* é representado por  $G_k(z) = \frac{1}{P_k(z)}$ , onde  $z$  é representado no espaço de momento por  $p^2$  e no espaço de posições por:  $\Delta = -\partial_\mu \partial^\mu$ .

Lembramos que

$$Z_k[J] = \int [\mathcal{D}\phi] \exp \left( -S[\phi] - \Delta S_k[\phi] + \int dx J\phi \right) = e^{-W_k[J]}, \quad (2.39)$$

onde  $W_k[J] = -\log Z_k[J]$ .

Definimos a ação efetiva quântica:

$$\tilde{\Gamma}_k[\varphi] = W_k[J] - \int d^d x J\varphi(x), \quad (2.40)$$

onde  $\varphi = \langle \phi \rangle$ , que é o valor esperado do campo  $\phi$  no vácuo. Além disso, ao tomarmos a derivada funcional em relação a  $\varphi$ , obtemos que:

$$\frac{\delta \tilde{\Gamma}_k[\varphi]}{\delta \varphi(x)} = -J(x). \quad (2.41)$$

Definiremos a ação efetiva média como sendo:

$$\Gamma_k[\varphi] = \tilde{\Gamma}_k[\varphi] - \Delta S_k[\varphi]. \quad (2.42)$$

Ao isolarmos o funcional  $W_k[J]$ , obtemos:

$$W_k[J] = \Gamma_k[\varphi] + \Delta S_k[\varphi] + \int d^d x J \varphi(x). \quad (2.43)$$

Isso significa, então que:

$$Z_k[J] = \int [\mathcal{D}\phi] e^{(-S[\phi] - \Delta S_k[\phi] + \int dx J \phi)} = e^{-\Gamma_k[\varphi] - \Delta S_k - \int d^d x J \varphi}. \quad (2.44)$$

Portanto, ao isolarmos o termo que contém  $\Gamma_k$ , obtemos:

$$e^{-\Gamma_k[\varphi]} = \int [\mathcal{D}\phi] e^{-S[\phi] - \Delta S_k[\phi] + \Delta S_k[\varphi] - \int d^d x J(\phi - \varphi)}. \quad (2.45)$$

Lembrando que quando definimos a ação efetiva, vimos que  $\frac{\delta \tilde{\Gamma}_k[\varphi]}{\delta \varphi(x)} = -J(x)$ , então usando a mesma ideia para a ação efetiva média:

$$\frac{\delta \Gamma_k[\varphi]}{\delta \varphi(x)} = -J(x) - \frac{\delta \Delta S_k[\varphi]}{\delta \varphi(x)}. \quad (2.46)$$

Ao isolarmos  $J(x)$  na equação acima e substituí-lo na equação (2.45), obtemos:

$$e^{-\Gamma_k[\varphi]} = \int [\mathcal{D}\phi] e^{-S[\phi] - \Delta S_k[\phi] + \Delta S_k[\varphi] + \int d^d x \left( \frac{\delta \Gamma_k[\varphi]}{\delta \varphi(x)} + \frac{\delta \Delta S_k[\varphi]}{\delta \varphi(x)} \right) (\phi - \varphi)}. \quad (2.47)$$

Agora vamos fazer a seguinte mudança de variável:  $\xi = \phi - \varphi$ . Assim, teremos a modificação:  $-\Delta S_k[\phi] + \Delta S_k[\varphi] \rightarrow -\Delta S_k[\varphi + \xi] + \Delta S_k[\varphi]$ . Ao expandirmos o primeiro termo em série de Taylor e somarmos com o segundo, obteremos o seguinte resultado:

$$-\Delta S_k[\varphi + \xi] = - \int d^d x \frac{\delta \Delta S_k[\varphi]}{\delta \varphi(x)} \xi(x) - \frac{1}{2} \int d^d x_1 d^d x_2 \frac{\delta^2 \Delta S_k}{\delta \varphi(x_1) \delta \varphi(x_2)} \xi(x_1) \xi(x_2). \quad (2.48)$$

Notemos que o primeiro termo da equação (2.48) se cancela com o último termo da equação (2.47). Além disso, sabemos que, a partir da equação (2.32):

$$- \frac{1}{2} \int d^d x_1 d^d x_2 \frac{\delta^2 \Delta S_k}{\delta \varphi(x_1) \delta \varphi(x_2)} \xi(x_1) \xi(x_2) = -\Delta S_k(\xi). \quad (2.49)$$

A equação (2.47), então, fica da seguinte forma:

$$e^{-\Gamma_k[\varphi]} = \int \mathcal{D}\xi e^{-S[\varphi + \xi] - \Delta S_k[\xi] + \int d^d x \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \varphi(x)} \xi(x)}. \quad (2.50)$$

Vamos considerar alguns limites:

- Caso em que  $k \rightarrow 0$ .
- Caso em que  $k \rightarrow \infty$

No primeiro caso,

$$\lim_{k \rightarrow 0} R_k(q^2) = 0 \implies \lim_{k \rightarrow 0} \Gamma_k[\varphi] = \tilde{\Gamma}[\varphi]. \quad (2.51)$$

Isso significa que ao tomarmos o limite de  $k$  indo para zero, o cutoff tende para zero, sendo assim, não vai existir a supressão de modos, consequentemente, a ação efetiva média tende para a ação efetiva quântica usual. Já no segundo caso:

$$\frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \phi(-q) R_k(q^2) \phi(q) \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} C k^2 \int d^d q \phi(-q) \phi(q), \quad (2.52)$$

com  $C$  sendo uma constante arbitrária. Redefinindo  $\xi \rightarrow \frac{\xi}{k}$ , a equação (2.50) fica:

$$e^{-\Gamma_k[\varphi]} = \int \mathcal{D}\xi e^{-S[\varphi + \frac{\xi}{k}] - \Delta S_k[\frac{\xi}{k}] + \frac{1}{k} \int d^d x \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \varphi(x)} \xi(x)}. \quad (2.53)$$

Mas:

$$\Delta S_k[\xi/k] = \lim_{k \rightarrow \infty} C \int d^d q \xi(-q) \xi(q). \quad (2.54)$$

Portanto, chegamos na seguinte equação, nesse limite:

$$\begin{aligned} e^{-\Gamma_\infty[\varphi]} &= \int \mathcal{D}\xi e^{-S[\varphi] - C \int d^d q \xi \xi} \\ &= e^{-S[\varphi]} \int \mathcal{D}\xi e^{-C \int d^d q \xi^2} \\ &= e^{-S[\varphi] + cte}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Finalmente, chegamos na conclusão que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Gamma_k = S. \quad (2.56)$$

Isso significa que ao tomarmos o limite em que  $k$  tende para infinito, a ação efetiva média tende para a ação clássica. Isso explica do porque estamos usando o termo “média” para a ação efetiva média, já que através desses dois limites que vimos acima, podemos obter tanto a ação quântica, quanto a ação clássica. Então a ação efetiva média que definimos, interpola essas duas ações.

Em teoria de perturbação usual aplicada a TQC, a ação efetiva quântica a 1 loop [85] é dada por:

$$\Gamma[\varphi] = S[\varphi] + \frac{1}{2} \text{Tr} \log \left( \frac{\delta^2 S}{\delta \phi \delta \phi} \right). \quad (2.57)$$

Agora, suponha que estamos lidando com  $S \rightarrow S + \Delta S_k[\phi]$ , com  $R_k = \frac{\delta^2 \Delta S_k[\phi]}{\delta \phi \delta \phi}$ . Nesse caso, a ação efetiva calculada a 1 loop tem a seguinte forma:

$$\tilde{\Gamma}_k = S + \Delta S_k[\varphi] + \frac{1}{2} \text{Tr} \log \left( \frac{\delta^2 S}{\delta \phi \delta \phi} + R_k \right). \quad (2.58)$$

Consequentemente, a ação efetiva média será:

$$\Gamma_k = \tilde{\Gamma}_k - \Delta S_k[\varphi] \implies \Gamma_k = S[\varphi] + \frac{1}{2} \text{Tr} \log \left( \frac{\delta^2 S}{\delta \phi \delta \phi} + R_k \right). \quad (2.59)$$

Ao tomarmos a derivada em relação a  $k$ , obtemos:

$$\frac{d\Gamma_k}{dk} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \left( \frac{\delta^2 S}{\delta \phi \delta \phi} + R_k \right)^{-1} \frac{dR_k}{dk} \right]. \quad (2.60)$$

Ao multiplicarmos essa expressão por  $k$  e ao definirmos:  $t = \log k$ , consequentemente,  $k \frac{d}{dk} \equiv \partial_t$ , chegamos finalmente na expressão:

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \left( \frac{\delta^2 S}{\delta \phi \delta \phi} + R_k \right)^{-1} \partial_t R_k \right]. \quad (2.61)$$

O lado direito dessa equação é chamado de “funcional beta” a 1 loop da teoria. Nessa equação aparece o termo inverso do propagador “bare”  $\frac{\delta^2 S}{\delta \phi \delta \phi}$ . Alguém pode se perguntar se substituir a ação clássica pela ação quântica poderia nos dar informações mais refinadas do que as obtidas na aproximação de 1 loop. E

de fato, porque essa substituição é a realização de uma equação que é satisfeita exatamente pela teoria, como veremos a seguir.

Seja a ação efetiva média  $\Gamma_k[\varphi]$ :

$$\Gamma_k[\varphi] = W_k[J] - \int d^d x J \varphi - \Delta S_k[\varphi]. \quad (2.62)$$

Ao tomarmos a derivada em relação a  $t$ , obtemos:

$$\partial_t \Gamma_k[\varphi] = \partial_t W_k[J] - \partial_t \Delta S_k[\varphi]. \quad (2.63)$$

Pela definição da função *cutoff*:

$$\partial_t \Delta S_k[\varphi] = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \varphi(p) (\partial_t R_k(p^2)) \varphi(-p). \quad (2.64)$$

Entretanto, por definição, o campo clássico  $\varphi(x)$  é definido de tal forma que:  $\varphi(x) = \frac{\delta W_k[J]}{\delta J(x)} = \langle \phi(x) \rangle$ .

Portanto:

$$\begin{aligned} \partial_t \Delta S_k &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \langle \phi(p) \rangle (\partial_t R_k(p^2)) \langle \phi(q) \rangle \delta(p+q). \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} (\langle \phi \rangle \langle \phi \rangle \partial_t R_k(p^2)). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Para calcularmos  $\partial_t W_k[J]$ , vamos considerar:

$$e^{-W_k[J]} = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] - \Delta S_k[\phi] - \int d^d x J \phi}. \quad (2.66)$$

Tomando a derivada em relação a  $t$ :

$$\begin{aligned} -(\partial_t W_k[J]) e^{-W_k[J]} &= \int \mathcal{D}\phi (-\partial_t \Delta S_k[\phi]) e^{\dots} \\ &= - \int \mathcal{D}\phi \frac{1}{2} \left( \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \phi(p) (\partial_t R_k(p^2)) \phi(-p) \right) e^{\dots} \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \partial_t R_k(p^2) \int \mathcal{D}\phi \phi(p) \phi(-p) e^{\dots} \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} (\partial_t R_k(p^2)) Z_k[J] \langle \phi(p) \phi(-p) \rangle. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Finalmente, chegamos que:

$$\partial_t W_k[J] = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} (\partial_t R_k(p^2)) \langle \phi(p) \phi(-p) \rangle \implies \partial_t W_k[J] = \frac{1}{2} \text{Tr} [\partial_t R_k(p^2) \langle \phi \phi \rangle]. \quad (2.68)$$

Finalmente, a equação (2.63) fica da forma:

$$\partial_t \Gamma_k[\varphi] = \frac{1}{2} \text{Tr}[(\partial_t R_k(p^2) \langle \phi \phi \rangle)] - \frac{1}{2} \text{Tr}(\langle \phi \rangle \langle \phi \rangle \partial_t R_k(p^2)). \quad (2.69)$$

Vamos recordar que:

$$\frac{\delta \tilde{\Gamma}_k}{\delta \varphi} = J \implies \frac{\delta^2 \tilde{\Gamma}_k}{\delta \varphi \delta \varphi} = \frac{\delta J}{\delta \varphi}. \quad (2.70)$$

Por outro lado, também sabemos que:

$$\frac{\delta^2 W}{\delta J \delta J} = \frac{\delta \varphi}{\delta J} \implies \frac{\delta^2 W}{\delta J \delta J} = \left( \frac{\delta^2 \tilde{\Gamma}_k}{\delta \varphi \delta \varphi} \right)^{-1}. \quad (2.71)$$

Finalmente:

$$\partial_t \Gamma_k[\varphi] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \left( \frac{\delta^2 \tilde{\Gamma}_k}{\delta \varphi \delta \varphi} \right)^{-1} \partial_t R_k(p^2) \right]. \quad (2.72)$$

Ao substituirmos a ação efetiva pela ação efetiva média, obtemos:

$$\partial_t \Gamma_k[\varphi] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \left( \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \varphi \delta \varphi} + R_k \right)^{-1} \partial_t R_k \right]. \quad (2.73)$$

Finalmente chegamos na equação (2.73). Essa é a chamada equação do *grupo de renormalização funcional* ou *equação de Wetterich* ou *ERGE* (*Exact Renormalization Group Equation* em inglês). Ela é uma equação exata, já que, em sua dedução, não usamos nenhuma aproximação. Além disso, a equação de Wetterich não depende do fato dos acoplamentos serem pequenos, como são considerados em aproximações perturbativas. Portanto, a equação de Wetterich é uma equação exata que apresenta soluções não perturbativas. Entretanto, por mais que a equação de Wetterich seja uma equação exata, fatalmente, a partir de um certo ponto, teremos que usar algumas aproximações para aplicações práticas.

A ação efetiva pode ser expandida da forma:

$$\Gamma_k[\varphi] = \sum_i g_i(k) \mathcal{O}_i(\varphi), \quad (2.74)$$

onde  $\mathcal{O}_i(\varphi)$  são todos os operadores compatíveis com as simetria da teoria em consideração e  $g_i(k)$  são os termos de acoplamentos. Eventualmente, em aproximações, truncaremos a série, interrompendo a soma a uma certa ordem ou consideraremos uma subclasse de operadores. Para avaliar se o truncamento feito em questão é uma boa aproximação, pode-se aumentar o número de operadores compatíveis com a simetria da teoria e avaliar se os resultados permanecem estáveis, isto é, demonstram uma aparente convergência. Quanto mais convergentes forem esses resultados, melhor é o truncamento.

Ao tomarmos a derivada em relação a  $t$  dos dois lados da equação (2.74), obtemos:

$$\frac{d\Gamma_k}{dt} = \sum_i (\partial_t g_i) \mathcal{O}_i \implies \partial_t \Gamma_k = \sum_i \beta_i \mathcal{O}_i. \quad (2.75)$$

Sendo assim, comparando com o lado direito da equação de Wetterich escrita na mesma base, é possível obter expressões para as funções  $\beta_i$ , isto é, para as funções que medem a dependência de escala de cada acoplamento da teoria. Além disso, se o acoplamento tem dimensão de massa  $d_i$ , definimos o parâmetro adimensional:

$$\tilde{g}_i = k^{-d_i} g_i, \quad (2.76)$$

produzindo, portanto, sua versão adimensional  $\tilde{g}_i$ . Ao tomarmos sua derivada em relação a  $t$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{g}_i &= \partial_t (k^{-d_i} g_i) \\ &= -d_i k^{-d_i} g_i + k^{-d_i} \partial_t g_i. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Um conceito de grande importância no entendimento do fluxo dos acoplamentos com a escala  $k$  é o de *ponto fixo*, que será largamente utilizado nesta dissertação.



**Definição:** Um ponto fixo é um ponto  $g_* = \{g_1^*, g_2^*, \dots, g_n^*\}$  no espaço de teorias, tal que:  $\beta_i(g_1^*, g_2^*, \dots, g_n^*) = 0$ . Importante notar também que  $\beta_i(g_1^*, g_2^*, \dots, g_n^*) = 0$  é um sistema de equações que caracteriza o ponto fixo e que possui solução. Essas funções beta são funções dos acoplamentos essenciais (acoplamentos que não podem ser eliminados da ação por redefinição de campo) e adimensionais.

Ao determinarmos as funções beta, podemos resolver as equações  $\beta_i = \frac{dg_i}{dt}$ . Integrando, obtemos  $g_i(k)$  e, portanto, determinamos o fluxo do acoplamento a partir da dependência em  $k$ . Uma possibilidade é, quando nós tomamos o limite da escala de energia para infinito, os acoplamentos divergem. Uma outra possibilidade é quando o fluxo do grupo de renormalização atinge um ponto, assim, os acoplamentos fluem para esse ponto e permanecem nele conforme se aumenta a escala de energia, dando origem a um ponto fixo. Esse cenário, é chamado de *segurança assintótica*. Um outro cenário possível, seria se o fluxo do grupo de renormalização funcional atingisse a origem, o que faria com que os acoplamentos “desligassem” para altas escalas de energia. Esse cenário é chamado de: *liberdade assintótica*, que é claramente um cenário particular da segurança assintótica, em que o ponto fixo é justamente a origem, o chamado *ponto fixo gaussiano*. No cenário de segurança assintótica, o ponto fixo é chamado de *ponto fixo interagente*, *ponto fixo não trivial* ou *ponto fixo não-gaussiano*.

Em geral, o espaço de teorias tem uma estrutura onde se tem um ponto fixo e uma superfície, em que as trajetórias do grupo de renormalização, nela confinadas, são atraídas para o ponto fixo. O número de direções atraídas para o ponto fixo tem a ver com a dimensão da superfície, supondo que esse ponto fixo seja um ponto não trivial ultravioleta ( $k \rightarrow \infty$ ). Esta superfície é chamada de *superfície crítica UV*. Essa explicação pode ser compreendida de uma forma melhor através da figura 2.2.

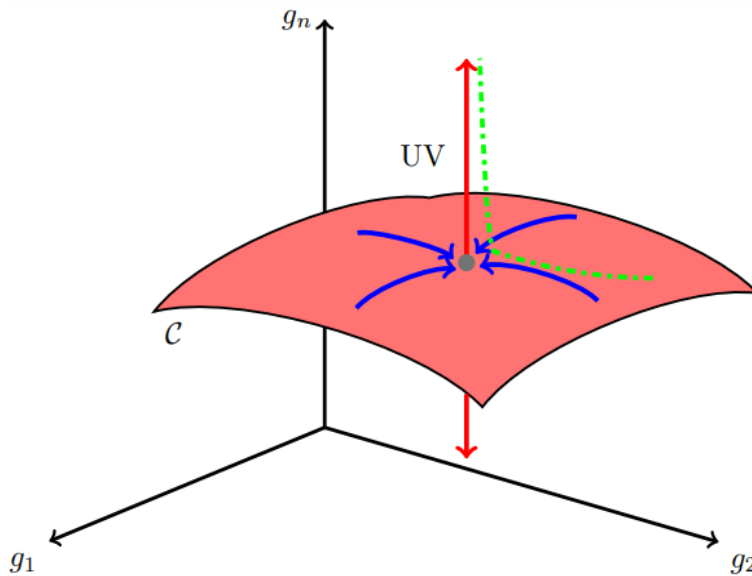


Figura 2.2: Superfície crítica com dimensão finita, que consiste em todas as direções que levam para o ponto fixo no ultravioleta.

Vamos definir um conceito importante associado à superfície crítica que é o espaço tangente à superfície crítica no ponto fixo quando analisamos a forma linearizada das equações de fluxo das funções beta:

$$\beta_i = \beta_i(g^*) + \left. \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j} \right|_{g^*} (g_j - g_j^*) = M_{ij}(g_j - g_j^*), \quad (2.78)$$

onde, por hipótese  $g^*$  é um ponto fixo, então o primeiro termo da equação (2.78) se anula.

Sejam  $y_i = g_i - g_i^*$  as coordenadas centradas no ponto fixo, então, teremos a equação:

$$\frac{dy_i}{dt} = M_{ij}y_j, \quad (2.79)$$

onde  $M_{ij}$  é chamada de matriz de estabilidade. Vamos supor que exista uma matriz que diagonaliza  $M$ , tal qual,  $S_{ki}^{-1}M_{ij}S_{jl} = \delta_{kl}\lambda_k$ , reescrevendo a equação do fluxo:

$$\frac{d(S_{ki}^{-1}y_i)}{dt} = (S_{ki}^{-1}y_i)\lambda_k. \quad (2.80)$$

Vamos definir  $S_{ki}^{-1}y_i = z_k$ . Assim:

$$\frac{k dz_n(k)}{dk} = \lambda_n z_n(k). \quad (2.81)$$

A equação pode ser facilmente resolvida e obtemos:

$$z_n(k) = C_n k^{\lambda_n}. \quad (2.82)$$

Podemos escrever a equação para os acoplamentos originais, de tal forma que obtemos:

$$g_n(k) = g_n^* + S_{nm}C_m k^{\lambda_n}, \quad (2.83)$$

onde  $\lambda_i$  são os autovalores da matriz de estabilidade. Suponha  $\lambda_i > 0$ , colocando  $t \rightarrow \infty \implies g_n(k) \rightarrow \infty$ , o que significa que estamos no afastando do ponto fixo e isso caracteriza uma direção irrelevante. Mas, se  $\lambda_i < 0$ , colocando  $t \rightarrow \infty \implies g_n(k) \rightarrow g_n^*(k)$ , o que significa que agora estamos nos aproximando do ponto fixo e isso caracteriza uma direção relevante. Agora se supusermos que  $\lambda_i = 0$ , temos o que chamamos de direção marginal, pois não sabemos se  $g_n(k)$  se aproxima ou afasta do ponto fixo. Note pela equação (2.82), que a única chance dos acoplamentos convergirem para o ponto fixo é se  $C_i = 0$  caso  $\lambda_i > 0$ . Portanto, tais constantes não são parâmetros livres no caso de direções irrelevantes, mas devem se anular.

Pode-se dizer, por exemplo, que usualmente, caracterizamos a natureza das direções relevantes e irrelevantes pelo chamado expoente crítico, que é definido pelo negativo dos autovalores da matriz de estabilidade. Portanto, expoentes críticos positivos caracterizam direções relevantes, enquanto que expoentes críticos negativos caracterizam direções irrelevantes. O expoente crítico, por essa definição, é dado como:  $\theta_i = -\lambda_i$ . É importante também dizer que a dimensão da superfície crítica está associada com o número de direções relevantes associadas aos acoplamentos. Isso significa que, se existe um número finito de direções relevantes, temos um número finito de parâmetros a fixar, o que faz da teoria, uma teoria preditiva. Entretanto, em uma situação na qual existe um número infinito de direções relevantes, existirão infinitos parâmetros a serem fixados e a teoria não se torna preditiva. Portanto, para a teoria ser preditiva, a superfície crítica deve ter dimensão finita.

## 2.3 Teoria escalar

Ao apresentarmos na seção anterior os principais conceitos e as principais ferramentas matemáticas dos grupo de renormalização, com a visão de aplicar os referidos conceitos para a gravitação, iremos, nessa seção, tratar de um exemplo prático. Nessa seção, trataremos de uma situação simples, envolvendo a teoria escalar de um único campo real em um espaço euclidiano plano. Sendo assim, tomemos um truncamento bastante simples para a ação efetiva média, dado por:

$$\Gamma_k[\varphi] = \int d^d x \left( \frac{Z_k}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi + \frac{m_k^2}{2} Z_k \varphi^2 + \frac{\lambda_k}{4!} Z_k^2 \varphi^4 \right), \quad (2.84)$$

onde  $Z_k$  é o termo associado com a dependência de escala da normalização dos campos. Por simplicidade, estamos considerando que  $Z_k = cte$  no exemplo atual. Além disso, estaremos supondo que  $\varphi = \varphi_o$ , já que estamos interessados em calcular o fluxo da massa e do acoplamento  $\lambda$ . Portanto, um campo constante é suficiente para capturar essa informação. O termo de *cutoff* a ser introduzido é:

$$\Delta S_k = \frac{Z_k}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \varphi(p) R_k(p^2) \varphi(-p), \text{ com } R_k(p^2) = (k^2 - p^2) \Theta(k^2 - p^2). \quad (2.85)$$

Ao calcularmos a derivada de  $R_k$  em relação a  $t$ , obtemos:

$$\partial_t R_k = 2k^2 \Theta(k^2 - p^2). \quad (2.86)$$

A equação de Wetterich tem a forma:

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \left( \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \varphi \delta \varphi} + Z_k R_k \right)^{-1} \partial_t (Z_k R_k) \right]. \quad (2.87)$$

Ao tomarmos a derivada funcional no espaço de momento da ação efetiva média  $\Gamma_k$ , obtemos que:

$$\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \varphi \delta \varphi} = Z_k p^2 + Z_k m_k^2 + \frac{\lambda_k}{2} Z_k^2 \varphi^2. \quad (2.88)$$

Apenas ressaltando que, tecnicamente, o último termo apresenta integrais de momentum.

Sabendo que  $\text{Tr} A = \int d^d x d^d y A(x, y) \delta(x - y)$ . Podemos representar  $A$  no espaço de momento:

$$A(x, y) = \int \frac{d^d p_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d p_2}{(2\pi)^d} e^{ix \cdot p_1} e^{iy \cdot p_2} A(p_1, p_2). \quad (2.89)$$

Supondo que  $A$  satisfaça invariância por translação:  $A(x, y) = A(x + a, y + a) \implies A(x, y) = A(x - y)$ .

Portanto:

$$A(x - y) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{i(x-y) \cdot p} \tilde{A}(p). \quad (2.90)$$

Sendo assim,

$$\text{Tr} A = \int d^d x d^d y \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{i(x-y) \cdot p} \tilde{A}(p) \delta(x - y) \implies \text{Tr} A = V_d \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} A(p), \quad (2.91)$$

com  $V_d = \int d^d x$ . Consequentemente, a equação de Wetterich toma a forma:

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k &= \frac{V_d}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[ \frac{2k^2 \Theta(k^2 - p^2) Z_k}{Z_k [p^2 + m_k^2 + (k^2 - p^2) \Theta(k^2 - p^2)] + \frac{\lambda_k Z_k^2 \varphi^2}{2}} \right], \\ \partial_t \Gamma_k &= \frac{V_d}{2} \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^k dp p^{d-1} \left[ \frac{2k^2 Z_k}{Z_k (k^2 + m_k^2) + \frac{\lambda_k}{2} Z_k^2 \varphi^2} \right], \end{aligned} \quad (2.92)$$

onde  $\Omega_d$  representa a área de uma  $d$ -esfera de raio unitário. Sendo assim, podemos calcular facilmente a integral da parte angular:

$$\int \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}. \quad (2.93)$$

Portanto:

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{V_d}{2} \frac{2\pi^{d/2}}{(2\pi)^d \Gamma(d/2)} \left( \frac{2k^2}{k^2 + m_k^2 + \frac{\lambda_k Z_k \varphi_o^2}{2}} \right) \frac{k^d}{2}. \quad (2.94)$$

Para que possamos comparar o lado esquerdo com o direito, teremos que expandir o termo em parêntesis em séries de potência:

$$(*) = \frac{2k^2}{k^2 + m_k^2 + \frac{\lambda_k}{2} Z_k \varphi_o^2} = \frac{2k^2}{(k^2 + m_k^2)} \frac{1}{\left[ 1 + \frac{\lambda_k Z_k \varphi_o^2}{2(k^2 + m_k^2)} \right]}. \quad (2.95)$$

Para compararmos os termos do lado esquerdo com o lado direito, expandimos o termo entre colchetes em série de potências, obtendo:

$$(*) = \frac{2k^2}{k^2 + m_k^2} \left[ 1 - \frac{\lambda_k^2 Z_k \varphi_o^2}{2(k^2 + m_k^2)} + \frac{\lambda_k^2 Z_k^2 \varphi_o^4}{4(k^2 + m_k^2)^2} + \dots \right]. \quad (2.96)$$

Podemos facilmente determinar a dimensão de massa dos acoplamentos a partir da dimensão de massa derivada:

$$[\partial_\mu] = 1. \quad (2.97)$$

Portanto, para o campo  $\varphi$ :

$$2 + [\varphi] + [\varphi] = d \implies [\varphi] = \frac{d-2}{2}. \quad (2.98)$$

Assim, podemos facilmente determinar a dimensão de  $m_k^2$  e do acoplamento  $\lambda_k$ , obtendo:

$$\begin{aligned} [m_k^2] &= 2, \\ [\lambda_k] &= 4 - d. \end{aligned} \quad (2.99)$$

A partir da dimensão de cada acoplamento, podemos definir os acoplamentos adimensionais:

$$\tilde{m}_k^2 = k^{-2} m_k^2, \quad \text{e} \quad \tilde{\lambda}_k = k^{(d-4)} \lambda_k. \quad (2.100)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \partial_t m_k^2 &= 2k^2 \tilde{m}_k^2 + k^2 \partial_t \tilde{m}_k^2, \\ \partial_t \lambda_k &= -(d-4) k^{-(d-4)} \tilde{\lambda}_k + k^{-(d-4)} \partial_t \tilde{\lambda}_k. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Ao igualarmos termo a termo através da equação de Wetterich, podemos obter as funções beta associadas à  $m_k^2$  e  $\lambda_k$ :

$$\beta_{\tilde{m}^2} = \partial_t \tilde{m}_k^2 = -2\tilde{m}_k^2 - \frac{1}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2 + 1)} \frac{\tilde{\lambda}_k^2}{(1 + \tilde{m}_k^2)}. \quad (2.102)$$

Podemos fazer o mesmo para encontrar  $\beta_{\tilde{\lambda}_k}$ :

$$\beta_{\tilde{\lambda}_k} = (d-4) \tilde{\lambda}_k + \frac{12}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \frac{1}{d} \frac{\tilde{\lambda}_k^2}{(1 + \tilde{m}_k^2)^3}. \quad (2.103)$$

Suponha  $\tilde{\lambda}_k, \tilde{m}_k \ll 1$ , que é o regime em que as funções beta produzem o resultado usual de teoria de perturbação:

$$\beta_{\tilde{m}_k^2} = -2\tilde{m}_k^2 - \frac{\tilde{\lambda}_k^2}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(1+d/2)} + \dots, \quad (2.104)$$

$$\beta_{\tilde{\lambda}_k} = (d-4)\tilde{\lambda}_k + \frac{6\tilde{\lambda}_k^2}{(4\pi)^{d/2}} + \dots. \quad (2.105)$$

Em  $d = 4$ , se  $\beta_{\tilde{\lambda}_k} = 0 \implies \tilde{\lambda}_k^* = 0$  (Coordenada do ponto fixo). Já, se  $\beta_{\tilde{m}_k^2} = 0 \implies \tilde{m}_k^{2*} = 0$ . Portanto, o ponto fixo da teoria escalar para  $d = 4$ , usando a aproximação de teoria de perturbação é:  $(\tilde{m}_k^{2*}, \tilde{\lambda}_k^*) = (0, 0)$  (Ponto fixo gaussiano). A matriz de estabilidade pode ser calculada, sabendo que ela é da forma:  $M_{ij} = \frac{\partial \tilde{\beta}_i}{\partial \tilde{g}_j} |_{(\text{ponto fixo})}$ :

$$\begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{2(4\pi)^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.106)$$

Nesse caso, os autovalores da matriz podem ser facilmente calculados, assim, obtemos os autovalores:  $\lambda = 0$  e  $\lambda = -2$ , o que implica que os expoentes críticos são  $\theta_+ = 0$  e  $\theta_- = 2$ . Portanto, temos uma direção relevante e uma direção marginal para essa teoria nessa aproximação de truncamento.

Para  $d \neq 4$ , mas genérico, teremos os seguintes pontos fixos:  $(\tilde{m}^{2*}, \tilde{\lambda}^*) = (0, 0)$  e  $(\tilde{m}^{2*}, \tilde{\lambda}^*) = \left( \frac{4-d}{d-16}, \frac{9(d-4)2^{5+d}\pi^{d/2}\Gamma(1+d/2)}{(d-16)^3} \right)$ . Especificamente para  $d=3$  (mecânica estatística), o ponto fixo é  $(\tilde{m}^{2*}, \tilde{\lambda}^*) = \left( \frac{-1}{13}, \frac{1728\pi^2}{2197} \right) \approx (-0.0769; 7.7627)$ . O ponto fixo não gaussiano é chamado de *ponto fixo de Wilson-Fisher* [86]. A matriz de estabilidade  $M$  para  $d$  genérico, usando o ponto fixo não-trivial é:

$$\begin{pmatrix} \frac{2-d}{3} & -\frac{2^{-(d-4)}\pi^{-d/2}(d-16)^2}{9\Gamma(1+d/2)} \\ \frac{9\pi^{d/2}(d-4)^2 2^{3+d}\Gamma(1+d/2)}{(d-16)^2} & 4-d \end{pmatrix}. \quad (2.107)$$

Nesse caso, podemos calcular os autovalores de  $M$ :  $\lambda_{\pm} = \frac{1}{6}(10 - 4d \pm \sqrt{484 - 200d + 22d^2})$ . Para o ponto fixo de Wilson-Fisher,  $\theta_+ = -1.1759$  e  $\theta_- = 1.8426$ , o que mostra que a existência de uma direção relevante e de outra direção irrelevante. Já para o caso  $d = 4$ , se quisermos avaliar o comportamento da direção marginal, precisaríamos ir além da análise do fluxo linearizado para avaliar o comportamento desta direção. Entretanto, como é conhecido na literatura que o acoplamento  $\lambda$  apresenta um polo de Landau, ou seja, ao integrarmos a função  $\beta_{\tilde{\lambda}}$ , observamos que ela diverge para um valor finito de *cutoff* [87].

## Capítulo 3

# Grupo de Renormalização Funcional e a Interação Gravitacional

### 3.1 Introdução

Como foi mencionado anteriormente, usando métodos perturbativos, a teoria da gravitação é não-renormalizável, pois ao tentarmos renormalizá-la, perdemos o poder preditivo da teoria. Podemos, então, aplicar métodos não-perturbativos, de tal forma que, em princípio, esse tipo de problema associado a falta de previsibilidade da teoria seria resolvido, já que focaremos nossa atenção na dimensão da superfície crítica associada a um ponto fixo não-trivial. Se a dimensão dela, que está associada com o número de direções relevantes, for finita, resolvemos o problema da não-previsibilidade da teoria. Podemos verificar a existência de um ponto fixo não-gaussiano na teoria gravitacional para o *truncamento de Einstein-Hilbert*, satisfazendo a conjectura de Weinberg [23] que sugere a possibilidade de uma teoria quântica de gravitação assintoticamente segura, ou seja, que possua um ponto fixo no ultravioleta. O truncamento de Einstein-Hilbert, que será explicado nesse capítulo, é a aproximação mais simples que se pode adotar para a ação efetiva média na gravitação e ele possui dois acoplamentos: a constante cosmológica  $\Lambda_k$  e a constante de Newton  $G_k$ . A partir desse truncamento, veremos a primeira evidência para a existência de um ponto fixo não-trivial, o ponto fixo de Reuter [25]. Logo, um dos maiores desafios dessa linha de trabalho é encontrar evidências mais robustas para a segurança assintótica da teoria quântica da gravitação.

### 3.2 Formulação funcional de TQC em espaços curvos

Para tratarmos de uma teoria quântica de gravitação, é necessário compreendermos como a formulação de TQC se dá em espaços curvos, visto que partimos da formulação da relatividade geral de Einstein, que trata a interação gravitacional como consequência da curvatura do espaço-tempo. O

funcional gerador para TQC em espaços curvos é dado por:

$$Z[J; \bar{g}] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi; \bar{g}] + \int_x \sqrt{\bar{g}} J \phi}, \quad (3.1)$$

onde  $\int_x(\dots) = \int d^d x(\dots)$  e  $\sqrt{\bar{g}}$  é a raiz quadrada do determinante da métrica de fundo  $\bar{g}_{\mu\nu}$  no espaço euclidiano. É importante ressaltar que ao usarmos a assinatura euclidiana, a assinatura do determinante na métrica sofre uma mudança de sinal. O apêndice A pode ser consultado caso se tenha o interesse em entender melhor a respeito do espaço euclidiano.

A partir do gerador funcional, calculamos as funções de correlação:

$$\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle = \left[ \frac{1}{Z[J; \bar{g}]} \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}(x_1)} \dots \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}(x_n)} \frac{\delta^n Z[J; \bar{g}]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right] \Big|_{J=0}. \quad (3.2)$$

No caso, o gerador funcional de funções de correlação conexas  $W$ , é dado por:

$$W[J; \bar{g}] = -\ln Z[J; \bar{g}]. \quad (3.3)$$

Já a ação efetiva quântica será:

$$\Gamma[\varphi; \bar{g}] = W[J; \bar{g}] - \int_x \sqrt{\bar{g}} J(x) \varphi(x), \quad (3.4)$$

onde:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}(x)} \frac{\delta W[J; \bar{g}]}{\delta J(x)} \equiv \langle \phi(x) \rangle_J \quad ; \quad J(x) = \frac{(-1)^j}{\sqrt{\bar{g}}(x)} \frac{\delta \Gamma[\varphi; \bar{g}]}{\delta \varphi(x)}, \quad (3.5)$$

com  $j = 0$  para bósons e  $j = -1$  para férmions. A relação de inversão entre a ação efetiva quântica e o funcional gerador conexo é, por sua vez:

$$\int_z \sqrt{\bar{g}}(z) \left( \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}(x)} \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}(z)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(z)} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}(z)} \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}(y)} \frac{\delta^2 W}{\delta J(z) \delta J(y)} \right) = (-1)^j \delta_{\bar{g}}(x, y). \quad (3.6)$$

A delta de Dirac em espaço curvo é dada por:

$$\delta_{\bar{g}}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}(y)} \delta(x - y). \quad (3.7)$$

O termo de *cutoff* será:

$$\Delta S_k[\phi; \bar{g}] = \frac{1}{2} \int_x \sqrt{\bar{g}} \phi(x) R_k(\Delta_g) \phi(x) \quad ; \quad \Delta_g = -\bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}^\mu. \quad (3.8)$$

Nesse caso, a “escala de momentum” é definida pelos autovalores do laplaciano no espaço curvo (que, em geral, não tem ondas planas como autofunções).

O funcional gerador tomará a forma:

$$Z_k[J; \bar{g}] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi; \bar{g}] - \Delta S_k + \int_x \sqrt{\bar{g}} J \phi}. \quad (3.9)$$

A ação efetiva média será:

$$\Gamma_k[\varphi; \bar{g}] = W_k[J; \bar{g}] - \int_x \sqrt{\bar{g}} \varphi(x) J(x) - \Delta S_k[\varphi; \bar{g}]. \quad (3.10)$$

Nesse caso, ao realizarmos um procedimento análogo ao capítulo anterior, equação do grupo de renormalização funcional será:

$$\partial_t \Gamma_k[\varphi; \bar{g}] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(x)}\sqrt{\bar{g}(y)}} \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(y)} + R_k \right)^{-1} \partial_t R_k \right], \quad (3.11)$$

Pode-se generalizar a construção da equação (3.11) para uma teoria com vários campos:

$$\partial_t \Gamma_k[\varphi; \bar{g}] = \frac{1}{2} \text{STr} \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(x)}\sqrt{\bar{g}(y)}} \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \Phi(\mathbf{x}) \delta \Phi(\mathbf{y})} + \mathcal{R}_k \right)^{-1} \partial_t \mathcal{R}_k \right], \quad (3.12)$$

onde  $\Phi$  é o chamado “super campo”, composto por todos os campos que estão presentes na teoria,  $\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \Phi(\mathbf{x}) \delta \Phi(\mathbf{y})}$  é um termo matricial composto pelas derivadas funcionais segundas de cada componente do super campo,  $\mathcal{R}_k$  é o regulador funcional matricial, composto por todas as componentes do super campo,  $\text{STr}$  é um traço funcional generalizado que inclui um sinal de menos para variáveis fermiônicas e um fator 2 para variáveis complexas.

### 3.3 Truncamento de Einstein-Hilbert

Para a teoria gravitacional iremos usar o formalismo de TQC em espaços curvos visto na seção anterior e nos basearemos no trabalho [35]. Sendo assim, definiremos o gerador funcional da gravitação no espaço euclidiano é:

$$Z[J; g] = \int \mathcal{D}[g_{\mu\nu}] e^{-S_{EH}[g_{\mu\nu}]}, \quad (3.13)$$

onde  $S_{EH}$  é a *ação de Einstein-Hilbert* dada por:

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{g} (2\Lambda - R), \quad (3.14)$$

onde  $[g_{\mu\nu}]$  representa todas as classes de métrica que se conectam por difeomorfismos, *i.e.* se conectam por transformações gerais de coordenadas,  $\Lambda$  representa a constante cosmológica e  $G$  é a constante de Newton. A aplicação do grupo de renormalização nos força a usar o método de campo de fundo [85, 88] para a gravidade, pois precisamos de uma métrica para definir uma escala com respeito a qual flutuações quânticas são suprimidas [89]. Dessa forma, usamos o método de campo de fundo, decompondo a métrica total em termos de uma métrica de fundo e um campo de flutuações:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (3.15)$$

que é a *decomposição ou parametrização linear* da métrica e  $h_{\mu\nu}$  não é necessariamente uma flutuação do campo pequena em torno do de um *background* fixo. Sua inversa é dada por:

$$g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\lambda} h^\nu{}_\lambda + \dots \quad (3.16)$$



É importante ressaltar que essa não é a única forma de decompor a métrica. Existe também a *decomposição ou parametrização exponencial* da métrica dada por:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \bar{g}_{\mu\lambda} [\exp(h)]^\lambda{}_\nu \\ &= \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h_{\mu\lambda} h^\lambda{}_\nu + \dots \end{aligned} \quad (3.17)$$

Sua inversa é:

$$g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \frac{1}{2} h^{\mu\lambda} h^\nu{}_\lambda + \dots \quad (3.18)$$

Além da parametrização exponencial, existe uma decomposição mais genérica para a métrica, que é a chamada *decomposição ou parametrização interpolante*:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + \frac{\tau}{2} h_{\mu\lambda} h^\lambda{}_\nu + \dots \quad (3.19)$$

Conseqüentemente, a métrica inversa nessa parametrização é:

$$g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{\tau}{2}\right) h^{\mu\alpha} h_\alpha{}^\nu + \dots \quad (3.20)$$

O nome “parametrização interpolante” se deve ao fato de introduzirmos um parâmetro  $\tau$  que intercala a decomposição da métrica entre a parametrização linear e a exponencial. Assim, claramente, na parametrização linear, que estamos levando em consideração, temos  $\tau = 0$ . Trabalhos usando esse tipo de parametrização para a gravitação quântica pura podem ser lidos em [89] e se verifica que, ao menos para truncamentos envolvendo termos de curvatura de ordem baixa, o valor do ponto fixo depende do parâmetro interpolante.

Usando a decomposição linear, o funcional gerador para gravitação quântica é:

$$Z[J; \bar{g}] = \int \mathcal{D}h_{\mu\nu} e^{-S[h, \bar{g}] + \int_x \sqrt{\bar{g}} J^{\mu\nu} h_{\mu\nu}}, \quad (3.21)$$

onde  $S[h_{\mu\nu}; \bar{g}]$  representa a ação de Einstein-Hilbert na decomposição linear e  $J^{\mu\nu}$  é a fonte associada ao campo  $h_{\mu\nu}$ .

Em teoria de gravitação clássica, existe uma transformação de coordenadas gerais que tornam a ação gravitacional invariante. Essa transformação é dada por:

$$x'^\mu = x^\mu - \epsilon^\mu(x), \quad (3.22)$$

$$\delta_E g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \epsilon_\nu + \nabla_\nu \epsilon_\mu \implies \delta_E S[g_{\mu\nu}] = 0, \quad (3.23)$$

onde  $\delta_E$  representa a transformação de calibre de coordenadas gerais. Assim, dizemos que a ação gravitacional possui uma invariância por difeomorfismos, o que corresponde a uma invariância de calibre da integral funcional. Entretanto, ao realizarmos a decomposição linear, existe uma forma particular de satisfazermos a equação (3.23), através da chamada transformação quântica,  $\delta_E^{(Q)}$ , ao assumirmos que a métrica de fundo é invariante diante dessa transformação, mas a flutuação  $h_{\mu\nu}$  não:

$$\delta_E^{(Q)} \bar{g}_{\mu\nu} = 0, \quad (3.24)$$

$$\delta_E^{(Q)} h_{\mu\nu} = \nabla_\mu \epsilon_\nu + \nabla_\nu \epsilon_\mu, \quad (3.25)$$

em que  $\nabla$  é a derivada covariante com referência à métrica completa  $g_{\mu\nu}$ . Entretanto, existe um pequeno problema que está no fato da simetria de calibre da ação por difeomorfismos estabelecer que existem configurações de campo distintas, mas que estão relacionadas pelas transformações de calibre, ou seja, são fisicamente equivalentes. Isso faz com que cada configuração de campo seja contada várias vezes, gerando redundâncias. Uma solução para resolver esse problema é através do *método de Faddeev-Popov*, que pode ser visto de forma detalhada no apêndice B. Partimos, então da introdução de uma condição de calibre:

$$F_\mu[h; \bar{g}] = \bar{\nabla} h^\nu{}_\mu - \frac{(1+\rho)}{d} \bar{\nabla}_\mu h = 0, \quad (3.26)$$

onde o termo  $\bar{\nabla}$  representa a derivada covariante da métrica de fundo,  $h$  é equivalente a  $h^\nu{}_\nu$  e  $\rho$  é um dos parâmetros de calibre. A realização da condição de calibre pode ser feita via a introdução dos campos de Faddeev-Popov ou campos de *ghost*  $C_\mu$  e  $\bar{C}_\mu$ . Assim, teremos:

$$Z[J; \bar{g}] = \int \mathcal{D}h_{\mu\nu} \mathcal{D}\bar{C}_\mu \mathcal{D}C_\mu e^{-S[h; \bar{g}] - S_{gf}[h; \bar{g}] - S_{gh}[\bar{C}, C, h; \bar{g}] + \int_x \sqrt{\bar{g}}(J^{\mu\nu} h_{\mu\nu} + j^\mu C_\mu + \bar{j}^\mu \bar{C}_\mu)}, \quad (3.27)$$

onde  $j^\mu$  e  $\bar{j}^\mu$  são as fontes associadas aos campos  $C_\mu$  e  $\bar{C}_\mu$ ,  $S_{gf}$  é a *ação de gauge-fixing* e  $S_{gh}$  é a *ação de ghost* [25]. Ao introduzirmos o termo de *cutoff*, o gerador funcional fica:

$$Z_k[J; \bar{g}] = \int \mathcal{D}h_{\mu\nu} \mathcal{D}\bar{C}_\mu \mathcal{D}C_\mu e^{-S[h; \bar{g}] - S_{gf}[h; \bar{g}] - S_{gh}[C, \bar{C}; \bar{g}] - \Delta S_k + \int_x \sqrt{\bar{g}}(J^{\mu\nu} h_{\mu\nu} + j^\mu C_\mu + \bar{j}^\mu \bar{C}_\mu)}. \quad (3.28)$$

O termo de *cutoff*  $\Delta S_k$  introduzido no gerador funcional é:

$$\Delta S_k = \Delta S_k[h; \bar{g}] + \Delta S_k[\bar{C}, C; \bar{g}], \quad (3.29)$$

onde:

$$\Delta S_k[h; \bar{g}] = \frac{1}{2} \int_x \sqrt{\bar{g}} h_{\mu\nu} R_k(\Delta \bar{g})^{\mu\nu\alpha\beta} h_{\alpha\beta}, \quad (3.30)$$

$$\Delta S_k[\bar{C}, C; \bar{g}] = - \int_x \sqrt{\bar{g}} \bar{C}_\mu R_k^{(gh)\mu\nu} C_\nu. \quad (3.31)$$

A ação efetiva média usada para o truncamento de Einstein-Hilbert é:

$$\Gamma_k[h, C, \bar{C}; \bar{g}] = \frac{1}{16\pi G_k} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} (2\Lambda_k - R) + S_{gf}[h; \bar{g}] + S_{gh}[C, \bar{C}; \bar{g}], \quad (3.32)$$

onde  $G_k$  e  $\Lambda_k$  representam a constante de Newton e a constante cosmológica, dependentes da escala de energia  $k$ , respectivamente.

A ação de *gauge fixing* é:

$$S_{gf}[h; \bar{g}] = \frac{1}{32\pi G_k \alpha} \int \sqrt{\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} F_\mu[h; \bar{g}] F_\nu[h; \bar{g}], \quad (3.33)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro de calibre. Após substituírmos  $F_\mu$  na ação de *gauge-fixing*:

$$S_{gf}[h; \bar{g}] = - \frac{1}{32\pi G_k \alpha} \int \sqrt{\bar{g}} \left[ h^\rho{}_\mu \bar{\nabla}_\rho \bar{\nabla}_\sigma h^{\sigma\mu} - 2 \left( \frac{\rho+1}{d} \right) h^\rho{}_\mu \bar{\nabla}_\rho \bar{\nabla}^\mu h + \left( \frac{\rho+1}{d} \right) h \bar{\nabla}^2 h \right]. \quad (3.34)$$

Já a ação de *ghost*, fica:

$$S_{gh}[C, \bar{C}; \bar{g}] = -Z_C \int \sqrt{\bar{g}} \bar{C}^\mu (\bar{g}^{\rho\nu} \delta_\mu^\sigma \bar{\nabla}_\rho \nabla_\nu + \bar{g}^{\rho\sigma} \bar{\nabla}_\rho \nabla_\mu - \bar{g}^{\rho\sigma} \bar{\nabla}_\mu \nabla_\rho) C_\sigma, \quad (3.35)$$

onde  $Z_C$  é a função de renormalização dos campo de *ghost*, que nesse caso será 1, pois não levaremos em conta informações não-perturbativas do setor de *ghost*. Para calcularmos as funções beta dos acoplamentos  $\Lambda_k$  e  $G_k$ , calcula-se o hessiano da ação efetiva média com respeito a  $h_{\mu\nu}$ . Ele é introduzido no lado esquerdo da *ERGE* e só depois usa-se a aproximação de campo de fundo, levando as flutuações dos campos  $\langle h_{\mu\nu} \rangle$  para zero. Essa é a também chamada aproximação de *background* e ela é uma forma de garantir que as potências de campo do lado esquerdo da *ERGE* sejam as mesmas das do lado direito. Após essa aproximação, obtemos a relação de que  $\nabla = \bar{\nabla}$  e, assim, obtemos uma nova relação para a ação de *ghost* na aproximação de *background*:

$$S_{gh}[\bar{C}, C, h; \bar{g}] = - \int_x \bar{C}^\mu \left( \bar{g}_{\mu\nu} \bar{\nabla}^2 + \left[ 1 - \frac{2}{d}(1 + \rho) \right] \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu + \bar{R}_{\mu\nu} \right) C^\nu. \quad (3.36)$$

Dada a aproximação de background e o truncamento que estamos interessados em discutir para a ação efetiva média, o setor de *gauge fixing* e o setor de *ghost* apresentam a mesma forma da ação clássica que entra no gerador funcional  $Z[J]$ . Pela ação de *ghost* acima, ao expressarmos o hessiano e o *cutoff* na forma matricial, os termos do setor gravitacional e os termos do setor de *gauge fixing* se desacoplam:

$$\mathbf{\Gamma}_k^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta h \delta h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta C \delta C} \\ 0 & \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta C \delta \bar{C}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

É importante salientar que estamos considerando a notação em que  $\langle h_{\mu\nu} \rangle = h_{\mu\nu}$ ,  $\langle C_\mu \rangle = C_\mu$ ,  $\langle \bar{C}_\mu \rangle = \bar{C}_\mu$ . Podemos representar o super campo  $\Phi$  na forma matricial:

$$\Phi = \begin{pmatrix} h_{\mu\nu} \\ \bar{C}_\mu \\ C_\nu \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

A representação matricial do termo de cutoff será, por sua vez:

$$\mathcal{R}_k = \begin{pmatrix} R_k(\Delta g)_{hh} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_k^{(gh)} \\ 0 & -R_k^{(gh)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Portanto, a equação do fluxo do grupo de renormalização funcional fica:

$$\partial_t \Gamma_k[0; \bar{g}] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \left( \Gamma_{hh}^{(2)} + R_k \right)^{-1} \partial_t R_k \right] - \text{Tr} \left[ \left( \Gamma_{C\bar{C}}^{(2)} + R_k^{(gh)} \right)^{-1} \partial_t R_k^{(gh)} \right]. \quad (3.40)$$

Vamos considerar que a nossa ação efetiva média total é definida por:

$$\Gamma_k[h, \bar{C}, C; \bar{g}] = \bar{\Gamma}_k[\bar{g} + h] + \hat{\Gamma}_k[h, C, \bar{C}; \bar{g}]. \quad (3.41)$$

Ao fazermos  $h = C = \bar{C} = 0$ , usando a aproximação de *background*, após os cálculos dos hessianos, vemos que:  $\Gamma_k[0; \bar{g}] = \bar{\Gamma}_k[\bar{g}]$ . Lembramos que estamos usando a aproximação de (3.32) para a ação efetiva média, de forma que:

$$\bar{\Gamma}_k[\bar{g} + h] = \frac{1}{16\pi G_k} \int d^d x \sqrt{g} (2\Lambda_k - R). \quad (3.42)$$

E também:

$$\hat{\Gamma}_k[h, C, \bar{C}; \bar{g}] = S_{gf}[h; \bar{g}] + S_{gh}[C, \bar{C}, h; \bar{g}] \quad (3.43)$$

Obs: É importante ressaltar que  $\bar{g}_{\mu\nu}$  está associado com os seguintes objetos geométricos:  $\{\bar{\nabla}_\mu, \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha, \bar{R}^\alpha_{\mu\nu\beta}, \bar{R}_{\mu\nu}, \bar{R}\}$ .

A partir de agora usaremos a relação :  $Z = \frac{1}{16\pi G_k}$  assim obtendo:

$$\bar{\Gamma}_k[\bar{g} + h] = \int d^d x \sqrt{\bar{g}} (2Z\Lambda_k - ZR). \quad (3.44)$$

Usando a propriedade de que  $\Gamma_k[0; \bar{g}] = \Gamma_k[\bar{g}]$  e ao tomarmos a derivada em relação a  $t$ , obtemos:

$$\partial_t \Gamma_k[0; \bar{g}] = \frac{-\partial_t G_k}{16\pi G_k^2} \int_x \sqrt{\bar{g}} (2\Lambda_k - \bar{R}) + \frac{1}{16\pi G_k} \int_x \sqrt{\bar{g}} 2\partial_t \Lambda_k. \quad (3.45)$$

Estamos interessados, porém, em calcular as funções beta para os acoplamentos adimensionais. Sabendo que o escalar de Ricci possui dimensão de massa igual a 2, podemos facilmente obter a dimensão dos acoplamentos  $G_k$  e  $\Lambda_k$ .

$$\begin{aligned} [G_k] &= 2 - d, \\ [\Lambda_k] &= 2. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Portanto, redefinindo os acoplamentos como sendo adimensionais, obtemos:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_k &= k^{d-2} G_k, \\ \tilde{\Lambda}_k &= k^{-2} \Lambda_k. \end{aligned} \quad (3.47)$$

A partir das duas expressões, podemos obter as seguintes relações:

$$\partial_t G_k = (2 - d)k^{2-d} \tilde{G}_k + k^{2-d} \partial_t \tilde{G}_k, \quad (3.48)$$

$$\partial_t \Lambda_k = 2k^2 \tilde{\Lambda}_k + k^2 \partial_t \tilde{\Lambda}_k. \quad (3.49)$$

Substituindo na relação (3.45), obtemos para o lado esquerdo da equação a relação:

$$\partial_t \Gamma_k[0; \bar{g}] = \frac{1}{16\pi \tilde{G}_k} \int \sqrt{\bar{g}} \left[ 2k^d (d\tilde{\Lambda}_k + \tilde{\eta}\tilde{\Lambda}_k + \partial_t \tilde{\Lambda}_k) - k^{d-2} (d-2 + \tilde{\eta}) \bar{R} \right], \quad (3.50)$$

tal que  $\tilde{\eta} = -\frac{\partial_t \tilde{G}_k}{\tilde{G}_k}$ .

Para o setor gravitacional, no calibre de de Donder, com parâmetros  $\alpha = 1$ ,  $\rho = \frac{d}{2} - 1$ , o termo de segunda ordem em  $h$ , após expandirmos cada termo de curvatura<sup>1</sup> do setor gravitacional envolvendo a ação de Einstein-Hilbert e a ação de *gauge fixing* tem a forma dada por:

$$\frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{g} h_{\mu\nu} \Gamma_k^{(2)\mu\nu\rho\sigma} h_{\rho\sigma}, \quad (3.51)$$

onde:

$$\Gamma_k^{(2)\mu\nu\rho\sigma} = Z \left[ K_{\rho\sigma}^{\mu\nu} (-\nabla^2 - 2\Lambda_k) + U_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \right], \quad (3.52)$$

<sup>1</sup>No apêndice C é possível ver a expansão de  $R_{\mu\nu\alpha\beta}(\bar{g} + h)$ ,  $R_{\mu\nu}(\bar{g} + h)$ ,  $R(\bar{g} + h)$  e  $\sqrt{g}$  até segunda ordem em  $h$

de modo que estamos considerando, a partir de agora, como simplificação de notação que  $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}$ , além de definirmos também as estruturas tensoriais:

$$\begin{aligned} K_{\rho\sigma}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left( \delta_{\rho\sigma}^{\mu\nu} - \frac{d}{2} P_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \right), \\ \delta_{\rho\sigma}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left( \delta_{\rho}^{\mu} \delta_{\sigma}^{\nu} + \delta_{\sigma}^{\mu} \delta_{\rho}^{\nu} \right), \\ P_{\rho\sigma}^{\mu\nu} &= \frac{1}{d} g^{\mu\nu} g_{\rho\sigma}, \\ U_{\rho\sigma}^{\mu\nu} &= R K_{\rho\sigma}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} R_{\rho\sigma} + R^{\mu\nu} g_{\rho\sigma}) - \delta_{(\rho}^{\mu} R_{\sigma)}^{\nu)} - R_{(\rho}^{\mu}{}_{\sigma)}^{\nu)}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Para simplificarmos a notação usada, empregaremos a representação em negrito para cada um dos termos da equação acima:  $\mathbf{K}, \mathbf{1}, \mathbf{P}, \mathbf{U}$ . É importante observar que  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{1} - \mathbf{P}$  são projetores do traço e do traço livre (TF em inglês) no espaço dos tensores simétricos:  $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(TF)} + h_{\mu\nu}^{(T)}$ , com  $h_{\mu\nu}^{(T)} = P_{\mu\nu}^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} = \frac{1}{d} g_{\mu\nu} h$ . Assim, podemos representar os operadores que definimos em termos desses projetores, o que nos permite facilmente invertermos o termo  $\Gamma_k^{(2)\mu\nu\rho\sigma}$ .

$$\Gamma_k^{(2)} = \frac{Z}{2} \left[ (\mathbf{1} - \mathbf{P})(-\nabla^2 - 2\Lambda_k \mathbf{1} + 2\mathbf{U}) - \frac{d-2}{2} \mathbf{P} \left( -\nabla^2 - 2\Lambda_k \mathbf{1} - \frac{4}{d-2} \mathbf{U} \right) \right]. \quad (3.54)$$

É importante ressaltarmos que, para calcularmos o lado esquerdo da ERGE, precisaremos dos traços:

$$\begin{aligned} \text{tr} \mathbf{1} &= \frac{d(d+1)}{2}, \\ \text{tr} \mathbf{P} &= 1, \\ \text{tr}(\mathbf{1} - \mathbf{P}) &= \frac{d^2 + d - 2}{2}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Iremos escolher um *background* maximalmente simétrico para que o cálculo seja facilitado. Ele estabelece as relações:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{d(d-1)} (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) R, \quad (3.56)$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{R}{d} g_{\mu\nu}, \quad (3.57)$$

com o escalar de curvatura  $R$  sendo agora considerado uma constante numérica. Usando essa aproximação:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{1} - \mathbf{P}) \frac{d^2 - 3d + 4}{d(d-1)} R - \mathbf{P} \frac{(d-2)(d-4)}{2} \frac{(d-4)}{d} R \right]. \quad (3.58)$$

Assim, obtemos para o hessiano do setor gravitacional o termo:

$$\Gamma_k^{(2)} = \frac{Z}{2} \left[ (\mathbf{1} - \mathbf{P}) \left( -\nabla^2 - 2\Lambda_k \mathbf{1} + \frac{d^2 - 3d + 4}{d(d-1)} R \right) - \frac{d-2}{2} \mathbf{P} \left( -\nabla^2 - 2\Lambda_k \mathbf{1} + \frac{d-4}{d} R \right) \right]. \quad (3.59)$$

Lembrando que definimos o termo de cutoff:

$$\Delta S_k = \frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{g} h_{\mu\nu} R_k (-\nabla^2)^{\mu\nu\rho\sigma} h_{\rho\sigma} - \int d^d x \sqrt{g} \bar{C}_\mu R_k^{(gh)} (-\nabla^2)^\mu{}_\nu C^\nu, \quad (3.60)$$

tal que,

$$\mathbf{R}_k(-\nabla^2) = Z \mathbf{K} R_k(-\nabla^2), \quad (3.61)$$

$$R_k^{(gh)}(-\nabla^2)^\mu{}_\nu = \delta_\nu^\mu R_k(-\nabla^2). \quad (3.62)$$

Definindo a relação,

$$\eta = \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dt}, \quad (3.63)$$

e ao tomarmos a derivada em relação a  $t$ , obtemos:

$$\frac{d\mathbf{R}_k}{dt} = Z\mathbf{K} [\partial_t R_k(-\nabla^2) + \eta R_k(-\nabla^2)]. \quad (3.64)$$

Ao adicionarmos o termo de cutoff no hessiano  $\Gamma_k^{(2)}$ , basta substituírmos  $-\nabla^2$  por  $P_k(-\nabla^2)$ , onde estamos definindo que:

$$P_k(-\nabla^2) = -\nabla^2 + R_k(-\nabla^2). \quad (3.65)$$

Dadas as propriedades do projetor, podemos facilmente inverter  $\Gamma_k^{(2)} + \mathbf{R}_k$ , *i.e.*

$$(\Gamma_k^{(2)} + \mathbf{R}_k)^{-1} = \frac{2}{Z} \left[ (\mathbf{1} - \mathbf{P}) \frac{1}{\left(P_k - 2\Lambda_k + \frac{d^2 - 3d + 4}{d(d-1)}\right)} - \frac{2}{d-2} \mathbf{P} \frac{1}{\left(P_k - 2\Lambda_k + \frac{d-4}{d}R\right)} \right]. \quad (3.66)$$

Fazendo o mesmo com o setor de *ghost*, podemos facilmente obter que a equação de fluxo da ERGE é:

$$\frac{d\Gamma_k}{dt} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{1} - \mathbf{P}) \frac{\partial_t R_k + \eta R_k}{P_k - 2\Lambda_k + \frac{d^2 - 3d + 4}{d(d-1)}R} + \frac{1}{2} \text{Tr}\mathbf{P} \frac{\partial_t R_k + \eta R_k}{P_k - 2\Lambda_k + \frac{d-4}{d}R} - \text{Tr}\delta_\nu^\mu \frac{\partial_t R_k}{P_k - \frac{R}{d}}. \quad (3.67)$$

No processo seguinte, expandimos os termos envolvendo  $R$  no denominador em série binomial e depois usamos a tecnologia dos *coeficientes de Heat-Kernel*, que é explicada no apêndice  $D$  para calcularmos os traços acima. Utilizaremos o *cutoff* de Litim [90]:

$$R_k(z) = (k^2 - z)\theta(k^2 - z). \quad (3.68)$$

Ao calcularmos os traços do lado direito, bem como expandirmos em potências de  $R$ , podemos projetar a equação de Wetterich nos operadores que acompanham o escalar de Ricci e nos operadores independentes de  $R$ . Temos, portanto, duas equações de fluxo. Para facilitar os cálculos, podemos usar a seguinte relação entre os lados esquerdo e direito, após expandirmos o segundo usando os coeficientes de *Heat-Kernel*:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{2\Lambda_k}{16\pi G_k} \right) = \frac{k^d}{16\pi} (A_1 + A_2\eta), \quad (3.69)$$

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{16\pi G_k} \right) = \frac{k^{d-2}}{16\pi} (B_1 + B_2\eta). \quad (3.70)$$

Após tornarmos os acoplamentos adimensionais usando (3.48) e (3.49) e isolando as duas equações para  $\frac{d\tilde{\Lambda}_k}{dt}$  e  $\frac{d\tilde{G}_k}{dt}$ , deriva-se:

$$\frac{d\tilde{\Lambda}}{dt} = -2\tilde{\Lambda}_k + \tilde{G}_k \frac{A_1 + 2B_1\tilde{\Lambda}_k + \tilde{G}_k(A_1B_2 - A_2B_1)}{2(1 + B_2\tilde{G}_k)}, \quad (3.71)$$

$$\frac{d\tilde{G}_k}{dt} = (d-2)\tilde{G}_k + \frac{B_1\tilde{G}_k^2}{1 + B_2\tilde{G}_k}. \quad (3.72)$$

Ao calcularmos o lado direito da ERGE, obtemos o valor dos coeficientes como sendo,

$$A_1 = \frac{16\pi(d-3+8\tilde{\Lambda}_k)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)(1-2\tilde{\Lambda}_k)}, \quad (3.73)$$

$$A_2 = \frac{16\pi(d+1)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}(d+2)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)(1-2\tilde{\Lambda}_k)}, \quad (3.74)$$

$$B_1 = \frac{-4\pi(-d^3+15d^2-12d+48+(2d^3-14d^2-192))\tilde{\Lambda}_k+(16d^2+192)\tilde{\Lambda}_k^2}{3(4\pi)^{\frac{d}{2}}d\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)(1-2\tilde{\Lambda}_k)^2}, \quad (3.75)$$

$$B_2 = \frac{4\pi(d^2-9d+14-2(d+1)(d+2)\tilde{\Lambda}_k)}{3(4\pi)^{\frac{d}{2}}(d+2)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)(1-2\tilde{\Lambda}_k)^2}. \quad (3.76)$$

Portanto, em  $d = 4$ , as funções beta terão o seu valor dado por:

$$\beta_{\tilde{\Lambda}_k} = -2\tilde{\Lambda}_k + \frac{\tilde{G}_k}{6\pi} \frac{3 - 4\tilde{\Lambda}_k - 12\tilde{\Lambda}_k^2 - 56\tilde{\Lambda}_k^3 + \frac{107-20\tilde{\Lambda}_k}{12\pi}\tilde{G}_k}{(1 - 2\tilde{\Lambda}_k)^2 - \frac{1+10\tilde{\Lambda}_k}{12\pi}\tilde{G}_k}, \quad (3.77)$$

$$\beta_{\tilde{G}_k} = 2\tilde{G}_k - \frac{\tilde{G}_k^2}{3\pi} \frac{11 - 18\tilde{\Lambda}_k + 28\tilde{\Lambda}_k^2}{(1 - 2\tilde{\Lambda}_k)^2 - \frac{1+10\tilde{\Lambda}_k}{12\pi}\tilde{G}_k}. \quad (3.78)$$

Assim, podemos finalmente calcular o ponto fixo para o truncamento de Einstein-Hilbert. A partir dele, calculamos a matriz de estabilidade e os expoentes críticos. Ao igualarmos as funções beta a zero e resolvermos o sistema, obtemos o ponto fixo não-gaussiano:  $(\tilde{\Lambda}_k^*, \tilde{G}_k^*) = (0.1932; 0.7073)$ . Os expoentes críticos podem ser calculados e, assim, obtemos:  $\Theta_{\pm} = 1,475 \pm 3,043i$ . Ao tomarmos a parte real do expoente crítico, vemos que  $Re(\Theta_{\pm}) > 0 \implies 2$  direções relevantes. Assim, para o truncamento de Einstein-Hilbert, temos um número finito de direções relevantes, que gera o número finito de dimensão para a superfície crítica, o que implica que temos um número finito de parâmetros relevantes. Um cálculo mais detalhado e com discussões mais aprofundadas a respeito dos pontos fixos e expoentes críticos na parametrização interpolante pode ser visto em [89]. Portanto, a teoria gravitacional no truncamento de Einstein-Hilbert é assintoticamente segura e, conseqüentemente, renormalizável não-perturbativamente. Destacamos que, como o espaço de teorias é bidimensional, é um resultado trivial dizer que a superfície crítica terá dimensão finita e ela tem dimensão igual a dimensão do espaço de teorias, o que pode levantar a suspeita de que a dimensão da superfície crítica é igual a dimensão do espaço das teorias, o que seria perigoso. Entretanto, truncamentos mais refinados mostram que o número de direções relevantes satura em um valor bem baixo [26–56], mesmo quando a dimensão do espaço das teorias cresce significativamente, servindo, portanto, como um teste bastante não trivial para a existência de um ponto fixo preditivo.

### 3.4 Decomposição de York e truncamento de Einstein-Hilbert

Nessa seção, teremos como objetivo apresentar um método alternativo para o cálculo dos pontos fixos. Usualmente, ao considerarmos truncamentos mais refinados, com derivadas superiores ou um sistema gravitacional acoplado com matéria, é importante usarmos o que é chamado de *decomposição de York*, já que o termo  $\mathbf{\Gamma}_k^{(2)} + \mathcal{R}_k$  deve se encontrar numa forma diagonal, ou parcialmente diagonal, como uma forma de evitar dificuldades técnicas no cálculo dos hessianos como mencionado em [89]. Vamos exemplificar melhor a situação calculando os pontos fixos no truncamento de Einstein-Hilbert, usando a decomposição de York:

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^T + \bar{\nabla}_{\mu}\xi_{\nu} + \bar{\nabla}_{\nu}\xi_{\mu} + \bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma - \frac{1}{d}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{\nabla}^2\sigma + \frac{1}{d}\bar{g}_{\mu\nu}h, \quad (3.79)$$

onde,  $h_{\mu\nu}^T$  é a componente transversa, cujo traço é nulo (transverse-traceless),  $\xi_{\mu}$  é o vetor transverso,  $\sigma$  e  $h$  são escalares. O tensor longitudinal pode ser expresso da forma:  $h_{\mu\nu}^L = h_{\mu\nu}^{LT} + h_{\mu\nu}^{LL}$ , com  $h_{\mu\nu}^{LT} \equiv \bar{\nabla}_{\mu}\xi_{\nu} + \bar{\nabla}_{\nu}\xi_{\mu}$  e  $h_{\mu\nu}^{LL} = \bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma - \frac{\bar{g}_{\mu\nu}\bar{\nabla}^2}{d}\sigma$ . Os campos acima estão sujeitos às seguintes condições:

$$\bar{g}^{\mu\nu}h_{\mu\nu}^T = 0, \quad \bar{\nabla}^{\mu}h_{\mu\nu}^T = 0, \quad \bar{\nabla}^{\mu}\xi_{\mu} = 0, \quad h = \bar{g}_{\mu\nu}h^{\mu\nu}. \quad (3.80)$$

É importante observar que  $h_{\mu\nu}$  não recebe contribuições dos campos  $\xi_\mu$  e  $\sigma$ , já que satisfazem a equação de Killing:

$$\bar{\nabla}_\mu \xi_\nu + \bar{\nabla}_\nu \xi_\mu = 0, \quad (3.81)$$

além da equação escalar:

$$\bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu \sigma - \frac{1}{d} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{\nabla}^2 \sigma = 0, \quad (3.82)$$

assim, ambos os campos são referidos como modos não-físicos e devem ser excluídos da integral funcional. Importante ressaltar que a partir desse momento, iremos desconsiderar as barras em cima dos termos geométricos e da métrica para simplificar a notação.

O produto interno no espaço dos tensores toma a seguinte forma:

$$\langle h^{(1)}, h^{(2)} \rangle \equiv \int d^d x \sqrt{g} h_{\mu\nu}^{(1)} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} h_{\rho\sigma}^{(2)}.$$

Ao aplicarmos a decomposição de York, usarmos relações de comutação para a derivada covariante, integrarmos por partes e usarmos as relações em (3.80), obtemos, para o produto escalar no espaço tensorial,

$$\begin{aligned} \langle h^{(1)}, h^{(2)} \rangle = \int d^d x \sqrt{g} \left[ h_{\mu\nu}^{(1)T} h^{(2)\mu\nu T} - 2\xi_\mu^{(1)} (g^{\mu\nu} \nabla^2 + R^{\mu\nu}) \xi_\nu^{(2)} - 2\xi_\mu^{(1)} R^{\mu\nu} \nabla_\nu \sigma^{(2)} \right. \\ \left. - 2\xi_\mu^{(2)} R^{\mu\nu} \nabla_\nu \sigma^{(1)} + \sigma^{(1)} \left( \frac{d-1}{d} (\nabla^2)^2 + \nabla_\mu R^{\mu\nu} \nabla_\nu \right) \sigma^{(2)} + \frac{1}{d} h^{(1)} h^{(2)} \right]. \end{aligned} \quad (3.83)$$

O que nós percebemos pela equação acima é que, se não considerarmos um background específico, os termos  $h_{\mu\nu}$  são ortogonais entre si, já  $h_{\mu\nu}^{LT}$  e  $h_{\mu\nu}^{LL}$  não são ortogonais. Essas observações podem ser vistas na equação acima quando temos apenas termos que misturam as componentes  $\xi^\mu$  com  $\sigma$ . Entretanto, ao considerarmos um background esfericamente simétrico, nós conseguimos eliminar esses termos mistos e, assim, o conjunto  $\{h_{\mu\nu}^T, h_{\mu\nu}^{LT}, h_{\mu\nu}^{LL}, h_{\mu\nu}^{Tr}\}$  forma um conjunto ortogonal, com  $h_{\mu\nu}^{Tr} = h$ .

Ao realizarmos a decomposição de York, estamos fazendo uma mudança de variáveis que irá levar ao aparecimento de um jacobiano  $J_1$  na integral funcional. Podemos calcular esse jacobiano ao calcularmos a integral gaussiana de  $h_{\mu\nu}$  e reescrevermos ela em termos dos campos das componentes da decomposição de York.

$$1 = \int \mathcal{D}h_{\mu\nu} \exp \left[ -\frac{1}{2} \langle h, h \rangle \right] = J_1 \int \mathcal{D}h_{\mu\nu}^T \mathcal{D}\xi_\mu \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}h \exp \left[ -1/2 \int d^d x \sqrt{g} \left\{ h_{\mu\nu}^T h^{T\mu\nu} + \frac{1}{d} h^2 + \Phi^{T\sigma, \xi} M^{(\mu, \nu)} \Phi^{\sigma, \xi} \right\} \right], \quad (3.84)$$

onde definimos o termo matricial como sendo:

$$M^{(\mu, \nu)} = \begin{pmatrix} -2(g^{\mu\nu} \nabla^2 + R^{\mu\nu}) & -2R^{\mu\lambda} \nabla_\lambda \\ 2\nabla_\lambda R^{\lambda\nu} & \frac{d-1}{d} (\nabla^2)^2 + \nabla_\lambda R^{\lambda\rho} \nabla_\rho \end{pmatrix} \quad (3.85)$$

E o super campo como sendo:

$$\Phi^{\sigma\xi} = \begin{pmatrix} \xi_\nu \\ \sigma \end{pmatrix} \quad (3.86)$$



Ao resolvermos cada integral gaussiana e, dado que  $\Phi^{\sigma\xi}$  é uma variável real, obtemos que:

$$J_1 = N \sqrt{\det M^{(\mu,\nu)}},$$

onde  $N$  é uma constante numérica. Da mesma forma que decomposmos o setor gravitacional, vamos também decompor o setor de *ghost*:

$$\bar{C}_\mu = \bar{c}_\mu^T + \nabla_\mu \bar{c}, \quad C^\mu = c^{T\mu} + \nabla^\mu c, \quad (3.87)$$

onde  $\bar{c}_\mu^T$  e  $c^{T\mu}$  são as componentes transversas de  $\bar{C}_\mu$  e  $C^\mu$  que satisfazem as relações:

$$\nabla^\mu \bar{c}_\mu^T = 0, \quad \nabla_\mu c^{T\mu} = 0. \quad (3.88)$$

Essa mudança de variáveis no setor de *ghost* gera um jacobiano  $J_2$  que pode ser calculado a partir da relação:

$$\begin{aligned} 1 &= \int \mathcal{D}C^\mu \mathcal{D}\bar{C}_\mu \exp \{ \langle -\bar{C}, C \rangle \} \\ &= J_2 \int \mathcal{D}c^{T\mu} \mathcal{D}\bar{c}_\mu^T \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \exp \left[ - \int d^d x \sqrt{g} \{ \bar{c}_\mu^T c^{T\mu} + \bar{c} (-\nabla^2) c \} \right]. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Dessa vez, as variáveis  $c$  e  $\bar{c}$  são variáveis grasmianas, portanto, ao resolvermos a integral funcional desse setor, encontramos a expressão de  $J_2$ :

$$J_2 = [\det(-\nabla^2)]^{-1}. \quad (3.90)$$

Nós também podemos redefinir as variáveis da decomposição de York para que, no final, todos os jacobianos sejam cancelados. Também podemos não redefinir as variáveis e considerar as contribuições dos jacobianos. Aqui iremos usar o primeiro método. Mas é importante ressaltar que, para truncamentos mais refinados, a partir de terceira ordem de curvatura, essa redefinição acaba gerando polos, portanto, nesses truncamentos, é mais útil considerar as contribuições dos jacobianos, como foi feito para o truncamento  $f(R)$  em [30]. Além disso, dado que os modos  $\xi^\mu$  e  $\sigma$  são modos não-físicos, eles devem ser excluídos do cálculo. Entretanto, a exclusão de modos não-físicos só irá afetar o cálculo para truncamentos a partir de ordem 2 na curvatura como poder ser visto no apêndice do artigo de revisão [35]. Usamos as redefinições de variáveis:

$$\begin{aligned} \xi^\mu &\longrightarrow \sqrt{-\nabla^2 - Ric} \xi^\mu, \\ \sigma &\longrightarrow \sqrt{(\nabla^2)^2 + \frac{d}{d-1} \nabla_\mu R^{\mu\nu} \nabla_\nu} \sigma, \\ \bar{c} &\longrightarrow \sqrt{-\nabla^2} \bar{c}, \quad c \longrightarrow \sqrt{-\nabla^2} c. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Aqui, o operador  $Ric$  mapeia vetores em vetores de acordo com:

$$(Ric v)^\mu = R^{\mu\nu} v_\nu. \quad (3.92)$$

A partir dessa nova redefinição de variáveis, daremos origem aos novos jacobianos:

$$J_3 = [\det(-\nabla^2 - Ric)]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.93)$$

$$J_4 = \left[ \det \left( (\nabla^2)^2 + \frac{d}{d-1} \nabla_\mu R^{\mu\nu} \nabla_\nu \right) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.94)$$

$$J_5 = \det(-\nabla^2). \quad (3.95)$$

Isso faz com que os jacobianos  $J_2$  e  $J_5$  se cancelam, assim sobram os jacobianos  $J_1$ ,  $J_3$  e  $J_4$ . Importante observar que estamos usando a simplificação de notação:

$$\chi_i \equiv \langle \chi_i \rangle, \quad (3.96)$$

onde definimos  $\chi \equiv (h^T, \xi, \sigma, h, \bar{c}^T, c^T, \bar{c}, c)$ .

Ao usarmos a escolha de *background* maximalmente simétrico, a redefinição dos campos fica:

$$\xi^\mu = \sqrt{\nabla^2 - \frac{R}{d}} \xi^\mu, \quad \sigma = \sqrt{-\nabla^2} \sqrt{-\nabla^2 - \frac{R}{d-1}} \sigma. \quad (3.97)$$

Já os jacobianos que surgem pela redefinição de variáveis ficam:

$$J_3 = \left[ \det \left( -\nabla^2 - \frac{R}{d} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.98)$$

$$J_4 = \left[ \det \left( (\nabla^2)^2 + \nabla^2 \frac{R}{d-1} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.99)$$

E o jacobiano  $J_1$ :

$$\begin{aligned} J_1 &= \left( \int \mathcal{D}\xi_\mu \mathcal{D}\sigma \exp \left[ - \int d^d x \sqrt{g} \left\{ -2\xi_\mu \left( \nabla^2 + \frac{R}{d} \right) \xi^\mu + \sigma \left( \frac{d-1}{d} (\nabla^2)^2 + \frac{R}{d} \nabla^2 \right) \sigma \right\} \right] \right)^{-1} \\ &= N \sqrt{\det \left( -\nabla^2 - \frac{R}{d} \right)} \sqrt{\det(-\nabla^2)^2} \sqrt{\det \left( -\nabla^2 - \frac{R}{d-1} \right)} = N' J_3^{-1} J_4^{-1}, \end{aligned} \quad (3.100)$$

Assim, nós vemos que a redefinição dos campos  $\sigma$ ,  $\xi^\mu$ ,  $\bar{c}$  e  $c$  nos permitiu simplificar todos os jacobianos e eliminá-los da nossa integral funcional. Afirmamos que é importante só tomar a redefinição de campos após fazer todas as simplificações necessárias na sua ação efetiva. Isto é, após usar as condições (3.80), (3.79), (3.56), (3.57) nela.

A equação do fluxo do grupo de renormalização funcional para o caso da decomposição de York é, segundo [91]:

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \left( \mathbf{\Gamma}_k^{(2)} + \mathcal{R}_k^{grav} \right)^{-1} \partial_t \mathcal{R}_k^{grav} \right] - \text{Tr} \left[ \left( \mathbf{S}_{gh}^{(2)} + \mathcal{R}_k^{gh} \right)^{-1} \partial_t \mathcal{R}_k^{gh} \right], \quad (3.101)$$

onde  $\mathbf{\Gamma}_k^{(2)}$  e  $\mathbf{S}_{gh}^{(2)}$  representam as matrizes associadas ao setor gravitacional e ao setor de *ghost* após a decomposição de York.

Ao abirmos cada um dos traços obtemos a seguinte equação para o fluxo do grupo de renormalização funcional:

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k[0; g] &= \frac{1}{2} \text{Tr}_{(2)} \left[ \frac{\partial_t R_k^T}{\mathbf{\Gamma}_k^{(2)T} + R_k^T} \right] + \frac{1}{2} \text{Tr}'_{(1)} \left[ \frac{\partial_t R_k^{\xi\xi}}{\mathbf{\Gamma}_k^{(2)\xi\xi} + R_k^{\xi\xi}} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \text{Tr}''_{(0)} \left[ \left( \begin{array}{cc} \mathbf{\Gamma}_k^{\sigma\sigma} + R_k^{\sigma\sigma} & \mathbf{\Gamma}_k^{\sigma h} + R_k^{\sigma h} \\ \mathbf{\Gamma}_k^{h\sigma} + R_k^{h\sigma} & \mathbf{\Gamma}_k^{hh} + R_k^{hh} \end{array} \right)^{-1} \left( \begin{array}{cc} \partial_t R_k^{\sigma\sigma} & \partial_t R_k^{\sigma h} \\ \partial_t R_k^{h\sigma} & \partial_t R_k^{hh} \end{array} \right) \right] - \text{Tr}_{(1)} \left[ \frac{\partial_t R_k^{c^T c^T}}{\mathbf{S}_{gh}^{(2)c^T c^T} + R_k^{c^T c^T}} \right] \\ &- \text{Tr}'_{(0)} \left[ \frac{\partial_t R_k^{C C}}{\mathbf{S}_{gh}^{(2)C C} + R_k^{C C}} \right], \end{aligned} \quad (3.102)$$

onde (2) é um índice representando o setor tensorial, (1) representa o setor vetorial e (0) o setor escalar. Além disso, os termos envolvendo uma linha e duas linhas estão associados com os modos espúrios que devem ser excluídos do cálculo. Entretanto, como mencionamos anteriormente, essa exclusão de modos espúrios só será relevante a partir de truncamentos de segunda ordem em  $R$ . Ao fixarmos o calibre usando a condição  $\beta = \frac{d}{2} - 1$  e  $\alpha = 1$ , nós eliminamos os termos cruzados da matriz envolvendo  $\sigma$  e  $h$ . Assim, a equação acima toma a forma:

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k[0; g] = & \frac{1}{2} \text{Tr}_{(2)} \left[ \frac{\partial_t R_k^{TT}}{\Gamma_k^{(2)TT} + R_k^{TT}} \right] + \frac{1}{2} \text{Tr}'_{(1)} \left[ \frac{\partial_t R_k^{\xi\xi}}{\Gamma_k^{(2)\xi\xi} + R_k^{\xi\xi}} \right] + \frac{1}{2} \text{Tr}''_{(0)} \left[ \frac{\partial_t R_k^{\sigma\sigma}}{\Gamma_k^{(2)\sigma\sigma} + R_k^{\sigma\sigma}} \right] \\ & \frac{1}{2} \text{Tr}_{(0)} \left[ \frac{\partial_t R_k^{hh}}{\Gamma_k^{(2)hh} + R_k^{hh}} \right] - \text{Tr}_{(1)} \left[ \frac{\partial_t R_k^{c^T c^T}}{S_k^{(2)c^T c^T} + R_k^{c^T c^T}} \right] - \text{Tr}'_{(0)} \left[ \frac{\partial_t R_k^{C C}}{S_k^{(2)C C} + R_k^{C C}} \right], \end{aligned} \quad (3.103)$$

A forma da ação efetiva após a decomposição pode ser vista detalhadamente em [91]. Especificamente em  $d = 4$ , para ver os detalhes dos elementos do hessiano, pode-se também consultar [57]. A partir da ação efetiva, podemos representar individualmente o hessiano de cada variável:

$$\begin{aligned} \Gamma_k^{(2)TT} &= \frac{Z}{2} \left[ -\nabla^2 + \frac{d^2 - 3d + 4}{d(d-1)} R \right] \delta^{\mu\nu, \alpha\beta}, \\ \Gamma_k^{(2)\xi\xi} &= Z \left( -\nabla^2 - \frac{R}{d} \right) \left[ -\nabla^2 + \frac{d-3}{d} R - \Lambda_k \right] g^{\mu\nu}, \\ \Gamma_k^{(2)hh} &= -Z \frac{d-2}{4d} \left[ -\nabla^2 + \frac{d-4}{d} R - 2\Lambda_k \right], \\ \Gamma_k^{(2)\sigma\sigma} &= Z \frac{d-1}{2d} (-\nabla^2) \left( -\nabla^2 - \frac{R}{d-1} \right) \left[ -\nabla^2 + \frac{d-4}{d} R - 2\Lambda_k \right], \\ \Gamma_k^{(2)c^T c^T} &= \left[ \nabla^2 + \frac{R}{d} \right] g^{\mu\nu}, \\ \Gamma_k^{(2)C C} &= -\nabla^2 \left[ \nabla^2 + \frac{2}{d} R \right], \end{aligned} \quad (3.104)$$

com  $\delta^{\mu\nu, \alpha\beta} = \frac{1}{2}(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha})$ . Importante observar que na expressão dos hessianos envolvendo o setor  $\sigma$  e o setor  $\xi^\mu$ , nós ainda não usamos a redefinição de variáveis da equação (3.97). Ao usarmos essa redefinição, eliminamos os jacobianos, além de causar uma pequena modificação nos hessianos associados a  $\sigma$  e  $\xi^\mu$ . A equação de fluxo fica:

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k = & \frac{1}{2} \text{Tr}_{(2)} \frac{\partial_t R_k + \eta R_k}{P_k - 2\Lambda_k + \frac{d^2 - 3d + 4}{d(d-1)} R} + \frac{1}{2} \text{Tr}'_{(1)} \frac{\partial_t R_k + \eta R_k}{P_k - \Lambda_k + \frac{d-3}{d} R} + \frac{1}{2} \text{Tr}''_{(0)} \frac{\partial_t R_k + \eta R_k}{P_k - 2\Lambda_k + \frac{d-4}{d} R} \\ & + \frac{1}{2} \text{Tr}_{(0)} \frac{\partial_t R_k + \eta R_k}{P_k - 2\Lambda_k + \frac{d-4}{d} R} + -\text{Tr}_{(1)} \frac{\partial_t R_k}{P_k - \frac{R}{d}} - \text{Tr}'_{(0)} \frac{\partial_t R_k}{P_k - \frac{2R}{d}}, \end{aligned} \quad (3.105)$$

onde o primeiro termo do traço vem do setor  $h_{\mu\nu}^T$ , o segundo termo vem do setor  $\xi^\mu$ , o terceiro termo vem do setor  $\sigma$ , o quarto vem do setor  $h$ , o quinto vem do setor  $c_\mu^T$  e o sexto vem do setor  $c$ . Mais uma vez, aplicamos a tecnologia dos coeficientes de *Heat-Kernel* para obtermos o valor dos traços do lado direito. Assim, percebemos que, novamente, ao compararmos o lado esquerdo com o lado direito, teremos o mesmo formato das equações (3.69) e (3.70). No processo seguinte, expandimos os termos envolvendo  $R$  no denominador em série binomial e, percebemos, após o uso da tecnologia dos coeficientes de *Heat Kernel*, que os coeficientes  $A_1$  e  $A_2$  são os mesmos que calculamos em (3.75) e (3.76). Os coeficientes  $B_1$

e  $B_2$  tomam a forma:

$$B_1 = 4\pi \left( d(d-1)(d^3 - 15d^2 - 36) + 24 - 2(d^5 - 8d^4 - 5d^3 - 72d^2 - 36d + 96)\tilde{\Lambda}_k - 16(d-1)(d^3 + 6d + 12)\tilde{\Lambda}_k \right) / 3(4\pi)^{\frac{d}{2}} d^2 (d-1) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) (1 - 2\tilde{\Lambda}_k)^2, \quad (3.106)$$

$$B_2 = 4\pi \frac{d(d^4 - 10d^3 + 11d^2 - 38d + 12) - 2(d+2)(d^4 - 13d^2 - 24d + 12)\tilde{\Lambda}_k}{3(4\pi)^{\frac{d}{2}} (2+d)(d-1) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) (1 - 2\tilde{\Lambda}_k)^2}. \quad (3.107)$$

Em  $d = 4$ , as funções beta são:

$$\beta_{\tilde{\Lambda}} = -2\tilde{\Lambda}_k + \frac{1}{24\pi} \frac{(12 - 33\tilde{\Lambda}_k + 20\tilde{\Lambda}_k^2 - 200\tilde{\Lambda}_k^3)G_k + \frac{467-572\tilde{\Lambda}_k}{12\pi}\tilde{G}_k}{(1 - 2\tilde{\Lambda}_k)^2 - \frac{29-9\tilde{\Lambda}_k}{72\pi}\tilde{G}_k}, \quad (3.108)$$

$$\beta_{\tilde{G}} = 2\tilde{G}_k - \frac{1}{24\pi} \frac{(105 - 212\tilde{\Lambda}_k + 200\tilde{\Lambda}_k^2)\tilde{G}_k^2}{(1 - 2\tilde{\Lambda}_k)^2 - \frac{29-9\tilde{\Lambda}_k}{72\pi}\tilde{G}_k}. \quad (3.109)$$

Mais uma vez, a partir das funções beta, calculamos os pontos fixos e a matriz de estabilidade e obtemos, usando a decomposição de York o ponto fixo não-gaussiano:  $(\tilde{\Lambda}_k^*, \tilde{G}_k^*) = (0.1715; 0.7011)$ . Dessa forma, os expoentes críticos serão  $\Theta_{\pm} = 1, 689 \pm 2.485$ . Portanto,  $Re(\Theta_{\pm}) > 0 \implies 2$  direções relevantes. Mais uma vez, temos um número finito de direções relevantes, que nos leva a um número finito de parâmetros a serem fixados. Portanto, pelo método da decomposição de York, vemos também que a gravitação no truncamento de Einstein-Hilbert é assintoticamente segura e, conseqüentemente renormalizável não-perturbativamente. É encorajador saber da existência de um ponto fixo não-trivial para esse truncamento, apesar de ser trivial que, para um espaço de teorias finito, teríamos uma superfície crítica finita. Entretanto ressaltamos que, na literatura, para truncamentos mais refinados, a dimensão da superfície crítica apresenta uma certa estabilidade e possui dimensão menor do que a do espaço das teorias, como mencionamos na seção anterior. Isso confere uma maior robustez para a existência de um ponto fixo não-trivial na gravitação quântica.

## Capítulo 4

# Teorias escalares-tensoriais e gravidade assintoticamente segura

### 4.1 Introdução

Os primeiros trabalhos que fazem uma investigação sobre o papel que campos escalares podem ter na teoria gravitacional foram feitos por Pascual Jordan, Carl Brans e Robert Dicke [92–95]. Por volta da mesma época, o campo escalar foi usado como uma forma de permitir uma quebra espontânea de simetria [96–98]. Esse mecanismo foi fundamental para pudéssemos explicar as diferentes partículas com diferentes massas, portanto, esse processo foi muito importante para o que conhecemos hoje como modelo padrão. Posteriormente, com a descoberta do bóson de Higgs, em 2012 no Large Hadron Collider (LHC) [99], obtivemos uma grande evidência de que existe uma partícula escalar fundamental. Com essa forte evidência da existência de um campo escalar fundamental na natureza, considerar modelos gravitacionais cujo campo escalar também se torna um mediador gravitacional não seria um absurdo. Assim, esse modelo de gravitação modificada supõe que a interação gravitacional é um fenômeno gerado parcialmente pela curvatura do espaço-tempo e parcialmente gerado pelo campo escalar. Essa classe particular de teoria modificada da gravitação é chamada de teoria escalar tensorial (STT). Importante mencionar que descoberta do bóson de Higgs dá origem a um problema em aberto no modelo padrão que é a existência de um polo de Landau transplanckiano no setor Higgs-Yukawa [77]. Isso significa que existe um problema de divergência no modelo padrão associado com um limite de energia finito que está além da escala de Planck que torna o modelo padrão uma teoria não-fundamental, ou seja, não válida em todas as escalas de energia. Como o polo de Landau é transplanckiano, é logicamente viável que efeitos de gravitação quântica não possam ser desprezados nesse regime e, portanto, podem ser cruciais para resolver as divergências do modelo padrão sem a inclusão de gravidade quântica. Portanto, tratar gravitação quântica e o setor envolvendo o campo de Higgs de forma independente pode ser perigoso, pois um afeta a dinâmica do outro. Neste sentido, investigar a quantização do campo gravitacional, bem como resolver o polo de Landau no setor escalar do modelo padrão, podem ser tarefas que só fazem sentido se forem tratadas de maneira simultânea. É importante

Além dessa aplicação associada ao modelo padrão, campos escalares desempenham uma série de papéis na cosmologia. Através de observações cosmológicas, existe a previsão da existência de um conteúdo de matéria escura (DM em inglês) e energia escura (DE em inglês) do universo que ainda não foi detectado diretamente, o que torna a DM tema de pesquisa de muitos grupos teóricos e experimentais, que tentam entender DM com base em alguma teoria modificada da relatividade geral através da inclusão de novos graus de liberdade por meio de campos escalares, como pode ser visto em mais detalhes em [100–102]. Além disso, campos escalares, sob o nome de inflaton, poderiam ser relevantes para dirigir a inflação do universo no seu tempo inicial e/ou no seu tempo póstumo. Os trabalhos principais envolvendo inflação cosmológica dirigida pelo campo escalar podem ser acessados em [103–106].

Podemos rapidamente mencionar uma motivação teórica para o uso de campos escalares em teorias de gravitação. De acordo com o teorema de Lovelock [107, 108], para construir teorias de gravitação com equações de campo que diferem das que vêm da ação de Einstein-Hilbert, temos 3 possibilidades: i) aceitar termos maiores do que derivadas segunda na equação de campo, ii) adotar uma dimensão mais alta para o espaço-tempo, ou iii) considerar outros campos além da métrica. Entretanto equações que apresentam termos com derivadas superiores a ordem 2 sofrem com problemas de estabilidade e uma vez que não percebemos dimensões extras, claramente, a terceira opção é a forma mais natural de escaparmos do teorema de Lovelock e ela abre a porta para que a STT seja uma teoria modificada da teoria einsteiniana.

## 4.2 Modelos teóricos escalares-tensoriais: Teoria de Brans-Dicke e a representação de Jordan

Nessa seção, a partir da motivação teórica apresentada na introdução, introduziremos os principais modelos teóricos de teorias escalares-tensoriais desenvolvidas como podem ser vistos mais detalhadamente em [92–95, 109, 110] para então aplicar um desses modelos ao cenário de segurança assintótica. Partindo da ação de Einstein-Hilbert sem a constante cosmológica, com métrica lorentziana, interagindo com campos de matéria:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + S^{(m)}[g_{\mu\nu}, \Psi] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} (ZR + \mathcal{L}_{(m)}), \end{aligned} \quad (4.1)$$

com a ação  $S^{(m)}[g_{\mu\nu}, \Psi]$  representando o setor envolvendo campos de matéria, que são generalizados pela representação do campo  $\Psi$  acoplado à métrica  $g_{\mu\nu}$  e  $\mathcal{L}_m$  é a lagrangiana associada com a ação  $S^{(m)}[g_{\mu\nu}, \Psi]$ . Usando a ideia de Dirac [111], promovemos  $Z$  a um campo escalar dinâmico dependente de coordenadas espaço-temporais:  $Z(\vec{x}, t)$ . Definimos, então  $Z(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x}, t)$ . Incluímos um termo cinético da forma:  $\frac{-\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi$  na ação para que as equações de movimento sejam de segunda ordem nos campos, de forma que  $\mathcal{L}_m$  também apresente dependência nos campos e em suas derivadas:  $\mathcal{L}_m(\phi, \nabla_\mu \phi)$ . Assim, a

ação modificada fica:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \phi R - \frac{\omega_{BD}}{\phi} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + \mathcal{L}_m \right), \quad (4.2)$$

onde  $\omega_{BD}$  é um parâmetro livre, conhecido como parâmetro de Brans-Dicke, e dividimos o setor cinético por  $\phi$  de forma que não tenhamos uma constante com dimensão na teoria. A equação (4.2) é chamada de *teoria de Jordan-Fierz-Brans-Dicke* da gravitação ou mais popularmente conhecida simplesmente como *teoria de Brans-Dicke* e é um dos trabalhos pioneiros mais conhecidos envolvendo teorias modificadas de gravitação com a inclusão do campo escalar. Percebemos que nessa teoria modificada, o campo escalar se acopla com a gravitação com o termo  $\phi R$ . O acoplamento através do produto  $\phi R$  é chamado de acoplamento não-mínimo.

Entretanto, podemos generalizar a teoria de Brans-Dicke para uma classe de teorias escalar-tensorial mais geral:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( F(\phi)R - V(\phi) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \right) + S^{(m)}[g_{\mu\nu}, \Psi], \quad (4.3)$$

de forma que agora o fator que multiplica o escalar de Ricci,  $F(\phi)$  é uma função mais genérica do campo escalar. Também incluímos um potencial geral na ação original, dado que temos interesse em estudar teorias escalares-tensoriais com interações. Essa ação mais geral é a chamada *representação de Jordan* e é de grande importância neste trabalho, pois é nessa representação que investigaremos a existência de possíveis pontos fixos não-triviais. Importante mencionar que usaremos a assinatura da métrica euclidiana ao invés da lorentziana, o que trará uma pequena modificação na ação acima.

### 4.3 Quebra espontânea de simetria

Nessa seção, analisaremos através de um modelo simplificado como funciona a quebra espontânea de simetria [97, 98] e mostraremos a relevância do campo escalar nesse processo. A quebra espontânea de simetria é o mecanismo pelo qual os campos de calibre e partículas do modelo padrão adquirem massa. Usaremos um exemplo simples para mostrarmos como funciona o mecanismo usando a lagrangiana de um campo escalar  $\mathcal{L}_\phi$ , a lagrangiana um campo fermiônico  $\mathcal{L}_\psi$  e um termo interagente:

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi), \quad \mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi, \quad \mathcal{L}_{int} = q\bar{\psi}\phi\psi, \quad (4.4)$$

onde  $\psi$  são campos fermiônicos de Dirac,  $\gamma^\mu$  são as matrizes de Dirac, além disso,  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$  e estamos considerando o potencial interagente da forma:

$$V(\phi) = -\frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4, \quad (4.5)$$

com  $\mu^2$  sendo o parâmetro de massa ao quadrado associado ao campo escalar,  $\lambda$  e  $q$  são constantes de acoplamento. Aqui, não estamos levando em conta correções quânticas pois estamos tratando a situação clássica. Claramente, ao tomarmos a primeira e segunda derivadas do potencial, ele apresenta um máximo no ponto  $\phi_0 = 0$ , onde  $\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=\phi_0} = -\mu^2 < 0$ , mas também apresenta um mínimo nos pontos  $\phi_1 = +\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$  e  $\phi_2 = -\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$ , com  $\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=\phi_1} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=\phi_2} = 2\mu^2 > 0$ . Note que a lagrangiana para o setor escalar apresenta uma simetria do tipo  $\phi \rightarrow -\phi$ , mas uma vez que o campo se estabeleça em um dos pontos

estáveis de mínimo, essa simetria é quebrada. Antes da quebra de simetria, temos um campo escalar com termo de massa negativa que interage com um campo fermiônico sem massa através do termo interagente  $\propto q\bar{\psi}\phi\psi$ . Ao expandirmos a lagrangiana no ponto mínimo de potencial  $\phi \rightarrow \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} + \sigma$ , após a quebra de simetria, obtemos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\sigma)^2 - \mu^2\sigma^2 + \sqrt{\lambda\mu^2}\sigma^3 - \frac{\lambda}{4}\sigma^4 + \frac{\mu^4}{4\lambda} + \bar{\psi} \left( \gamma^\mu \partial_\mu + q\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \right) \psi + q\bar{\psi}\sigma\psi. \quad (4.6)$$

Essa lagrangiana representa um campo escalar  $\sigma$  com termo de massa positiva  $2\mu^2$  que interage com um campo fermiônico cuja massa é  $m = q\sqrt{\mu^2/\lambda}$  com o termo interagente  $q\bar{\psi}\sigma\psi$ . Podemos ver claramente que na situação inicial, nós tínhamos um campo escalar taquiônico (massa quadrada negativa) interagindo com um campo fermiônico sem massa, mas após a quebra espontânea de simetria, passamos a ter um campo escalar massivo interagindo com um campo fermiônico de massa  $m$ . Poderíamos fazer o mesmo, utilizando o mecanismo de quebra de simetria e proporcionando massa ao campo vetorial  $A_\mu$  interagindo com o campo escalar.

Considerar o mecanismo de quebra espontânea de simetria em um referencial cosmológico requer uma dependência na temperatura no potencial interagente, como no exemplo [112]:

$$V(\phi, T) = -\frac{\mu^2}{2} \left( 1 - \frac{\lambda T^2}{4\mu^2} \right) \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 - \frac{\pi^2 T^4}{90} - \frac{\mu^2 T^2}{24}, \quad (4.7)$$

com  $T$  sendo a temperatura de fundo cósmico. Os pontos extremos para esse potencial são:

$$\phi = 0, \quad \phi = \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda} \left( 1 - \frac{\lambda T^2}{4\mu^2} \right)}. \quad (4.8)$$

Para temperaturas abaixo da temperatura crítica:  $T < T_c$ , sendo  $T_c = 2\sqrt{\mu^2/\lambda}$ , existe um máximo local para  $\phi = 0$  e os outros pontos são pontos de mínimo locais. Já para a situação em que  $T > T_c$ , existe só um mínimo global em  $\phi = 0$ , já que raízes de número negativo não representam resultados físicos nesse caso. Isso significa que para as altas temperaturas no universo primordial, a simetria  $\phi \rightarrow -\phi$  na lagrangiana é preservada, mas conforme a temperatura de fundo cósmico vai diminuindo, à medida que o universo vai se expandindo, ao atingir uma temperatura  $T < T_c$ , a simetria de reflexão é quebrada.

## 4.4 Cálculo dos pontos fixos e expoentes críticos para a teoria escalar-tensorial para ordem $R$ na curvatura

Tomando como embasamento o trabalho envolvendo divergências a para a ação de Einstein-Hilbert [21], teorias escalares-tensoriais também não são renormalizáveis perturbativamente. Portanto, dada a relevância delas como descrito nas subseções anteriores, investigaremos a possibilidade delas serem assintoticamente seguras e, portanto, procurar por pontos fixos para um truncamento envolvendo até a ordem 1 de  $R$ .

$$\Gamma_k[g, \phi] = \int d^d x \sqrt{g} \left( V_k(\phi^2) - F_k(\phi^2)R + \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \right) + S_{GF} + S_{gh}. \quad (4.9)$$



A dependência de  $V$  e  $F$  é escrita em termos de  $\phi^2$  para tornar manifesta a invariância diante da transformação discreta  $\phi \rightarrow -\phi$ . A partir de agora, omitiremos o fator  $k$  dos acoplamentos, que representa que eles variam com a escala de energia. Estamos usando a aproximação de *background*, tomando as flutuações de campo para 0 após o cálculo dos hessianos:

$$\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta h_{\mu\nu} \delta h_{\rho\sigma}} \Big|_{h=0}. \quad (4.10)$$

Definimos a ação de *gauge fixing* como sendo:

$$S_{GF} = \frac{1}{2\alpha} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} F(\phi^2) \bar{g}^{\mu\nu} F_\mu F_\nu. \quad (4.11)$$

A ação de *ghost*, por sua vez, é dada por:

$$S_{gh} = - \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{C}^\mu \left[ \delta_\mu^\beta + \left( 1 - \frac{2(1+\rho)}{d} \right) \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}^\beta + \bar{R}_\mu^\rho \right] \bar{C}_\beta. \quad (4.12)$$

Importante mencionar que usaremos a parametrização interpolante para decompor a métrica  $g_{\mu\nu}$  e usaremos a decomposição linear para o campo escalar:

$$\phi = \bar{\phi} + \varphi,$$

com  $\bar{\phi}$  sendo constante. Expandiremos a ação efetiva média até a segunda ordem em  $h$  e em  $\varphi$  e dado que estamos usando a aproximação de *background* também para  $\varphi$  após o cálculo dos hessianos, somente os termos de segunda ordem serão de interesse.

A partir de agora, estaremos simplificando a notação, retirando as barras dos termos de curvatura. Além disso, consideraremos a decomposição de York na equação para o campo  $h_{\mu\nu}$  dada pela equação (3.79) e que satisfaz as relações (3.80) consideraremos decomposição de York no setor de *ghost* dada pela equação (3.87) que satisfaz as relações (3.88). A partir desse momento, iremos desconsiderar as barras em cima dos termos geométricos e da métrica para simplificar a notação. Além disso, estaremos escolhendo o *background* maximalmente simétrico que satisfaz as equações (3.56) e (3.57).

Dessa vez, não iremos redefinir as variáveis  $\xi_\mu$  e  $\sigma$ , de tal forma que teremos que incluir a contribuição dos seguintes jacobianos na equação de Wetterich, após a escolha de *background* maximalmente simétrico:

$$J_{grav} = \left[ \det'_{(1)} \left( -\nabla^2 - \frac{R}{d} \right) \right]^{1/2} \left\{ \det''_{(0)} \left[ -\nabla^2 \left( -\nabla^2 - \frac{R}{d-1} \right) \right] \right\}^{1/2}, \quad J_{gh} = \left[ \det'_{(0)} (-\nabla^2) \right]^{-1}. \quad (4.13)$$

Podemos expressar os jacobianos acima como integrais funcionais, de tal forma que:

$$J_{grav} = \int \mathcal{D}\zeta \mathcal{D}\bar{\zeta} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\theta \exp \left\{ - \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \left[ \frac{1}{2} \chi_\mu \left( -\nabla^2 - \frac{R}{d} \right)' \chi^\mu + \frac{1}{2} \theta \left[ -\nabla^2 \left( -\nabla^2 - \frac{R}{d-1} \right) \right]'' \theta - \bar{\zeta}_\mu \left( -\nabla^2 - \frac{R}{d} \right) \zeta^\mu - \bar{\psi} \left[ -\nabla^2 \left( -\nabla^2 - \frac{R}{d-1} \right) \right]'' \psi \right] \right\}, \quad (4.14)$$

com  $\chi_\mu$  sendo um campo bosônico vetorial real,  $\theta$  sendo um campo bosônico escalar real,  $(\bar{\zeta}_\mu, \zeta^\mu)$  sendo variáveis grassmanianas vetoriais e  $(\bar{\psi}, \psi)$  sendo variáveis grassmanianas escalares. Para o jacobiano do

setor de *ghost*, gera-se a seguinte integral funcional:

$$J_{gh} = \int \mathcal{D}\bar{\phi}\mathcal{D}\phi \exp \left[ - \int d^d x \sqrt{g} \bar{v}(-\nabla^2)'v \right], \quad (4.15)$$

onde  $(\bar{v}, v)$  sendo variáveis grassmanianas escalares. Após a decomposição de York para o setor gravitacional, a introdução dos *ghosts* de Faddeev-Poppov e a introdução das variáveis auxiliares associadas aos jacobianos do setor gravitacional e do setor de *ghost*, o conjunto completo de campos é definido pelo seguinte elemento da integral funcional:

$$\mathcal{D}\mu = \mathcal{D}h^T \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}h \mathcal{D}\bar{C}^T \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C^T \mathcal{D}C \mathcal{D}\bar{\zeta} \mathcal{D}\zeta \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\theta \mathcal{D}\bar{v} \mathcal{D}v. \quad (4.16)$$

Portanto, após a introdução das variáveis auxiliares, a equação de fluxo toma a forma:

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k[0; g] &= \frac{1}{2} \text{Tr}_{(2)} \left[ \frac{\partial_t R_k^{TT}}{\Gamma_k^{(2)TT} + R_k^{TT}} \right] + \frac{1}{2} \text{Tr}'_{(1)} \left[ \frac{\partial_t R_k^{\xi\xi}}{\Gamma_k^{(2)\xi\xi} + R_k^{\xi\xi}} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \text{Tr}''_{(0)} \left[ \left( \begin{array}{ccc} \Gamma_k^{\sigma\sigma} + R_k^{\sigma\sigma} & \Gamma_k^{\sigma h} + R_k^{\sigma h} & \Gamma_k^{\sigma\phi} + R_k^{\sigma\phi} \\ \Gamma_k^{h\sigma} + R_k^{h\sigma} & \Gamma_k^{hh} + R_k^{hh} & \Gamma_k^{h\phi} + R_k^{h\phi} \\ \Gamma_k^{\phi\sigma} + R_k^{\phi\sigma} & \Gamma_k^{\phi h} + R_k^{\phi h} & \Gamma_k^{\phi\phi} + R_k^{\phi\phi} \end{array} \right)^{-1} \left( \begin{array}{ccc} \partial_t R_k^{\sigma\sigma} & \partial_t R_k^{\sigma h} & \partial_t R_k^{\sigma\phi} \\ \partial_t R_k^{h\sigma} & \partial_t R_k^{hh} & \partial_t R_k^{h\phi} \\ \partial_t R_k^{\phi\sigma} & \partial_t R_k^{\phi h} & \partial_t R_k^{\phi\phi} \end{array} \right) \right] \\ &- \text{Tr}_{(1)} \left[ \frac{\partial_t R_k^{c^T c^T}}{\Gamma_k^{(2)c^T c^T} + R_k^{c^T c^T}} \right] - \text{Tr}'_{(0)} \left[ \frac{\partial_t R_k^{c^c}}{\Gamma_k^{(2)c^c} + R_k^{c^c}} \right] + \frac{1}{2} \text{Tr}'_{(1)} \left[ \frac{\partial_t R_k^{\chi\chi}}{\Gamma_k^{(2)\chi\chi} + R_k^{\chi\chi}} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \text{Tr}''_{(0)} \left[ \frac{\partial_t R_k^{\theta\theta}}{\Gamma_k^{(2)\theta\theta} + R_k^{\theta\theta}} \right] + \frac{1}{2} \text{Tr}'_{(0)} \left[ \frac{\partial_t R_k^{v\nu}}{\Gamma_k^{(2)v\nu} + R_k^{v\nu}} \right] - \text{Tr}'_{(1)} \left[ \frac{\partial_t R_k^{\zeta\zeta}}{\Gamma_k^{(2)\zeta\zeta} + R_k^{\zeta\zeta}} \right] \\ &- \text{Tr}''_{(0)} \left[ \frac{\partial_t R_k^{\psi\psi}}{\Gamma_k^{(2)\psi\psi} + R_k^{\psi\psi}} \right], \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde os termos envolvendo uma linha e duas linhas estão associados com os modos espúrios que devem ser excluídos do cálculo devido aos campos não-físicos. Ressaltamos novamente que essa exclusão só será relevante para termos de segunda ordem na curvatura como mencionamos anteriormente. Após usarmos a decomposição de York para o setor gravitacional e para o setor de *ghost* e escolhermos o *background* maximalmente simétrico, obtemos as seguintes expressões para os hessianos da equação (4.17)

$$\Gamma_k^{(2)TT} = \frac{F(\phi^2) \Delta}{2} + R \left( \frac{1-\tau}{2} + \frac{\tau + \frac{1}{-1+d} - 1}{d} \right) F(\phi^2) + \frac{(\tau-1) V(\phi^2)}{2}. \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_k^{(2)\xi\xi} &= \frac{F(\phi^2) \Delta^2}{\alpha} + \frac{R^2 (1+\alpha (d-2) (\tau-1)) F(\phi^2)}{\alpha d^2} + \frac{R (2+\alpha (d-2) (\tau-1)) F(\phi^2) \Delta}{\alpha d} + \\ &+ \frac{R (1-\tau) V(\phi^2)}{d} - (1-\tau) V(\phi^2) \Delta. \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_k^{(2)\sigma\sigma} &= - \frac{(2+\alpha (d-2) - 2d) (d-1) F(\phi^2) \Delta^3}{2\alpha d^2} + \frac{R^2 (2+\alpha (d-2) (\tau-1)) F(\phi^2) \Delta}{2\alpha d^2} + \\ &+ \frac{R (4-2\alpha\tau + d^2\alpha (1-\tau) + d(-4+\alpha(3\tau-2))) F(\phi^2) \Delta^2}{2\alpha d^2} - \frac{R (\tau-1) V(\phi^2) \Delta}{2d} \\ &+ \frac{(d-1) (\tau-1) V(\phi^2) \Delta^2}{2d}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\Gamma_k^{(2)\sigma h} = \Gamma_k^{(2)h\sigma} = -\frac{\left(2 + \frac{2\beta}{\alpha} - d\right) R F(\phi^2) \Delta}{2d^2} + \frac{(2\beta - \alpha(d-2))(d-1) F(\phi^2) \Delta^2}{2\alpha d^2}. \quad (4.21)$$

$$\Gamma_k^{(2)hh} = -\frac{(-2\beta^2 + \alpha(2 - 3d + d^2)) F(\phi^2) \Delta}{2\alpha d^2} - \frac{(d-2) R(d-4 + 2\tau) F(\phi^2)}{4d^2} + \frac{(d-2 + 2\tau) V(\phi^2)}{4d}. \quad (4.22)$$

$$\Gamma_k^{(2)h\varphi} = \Gamma_k^{(2)\varphi h} = \left(\frac{2}{d} - 1\right) R\phi F'(\phi^2) - \left(2 - \frac{2}{d}\right) \phi F'(\phi^2) \Delta + \phi V'(\phi^2). \quad (4.23)$$

$$\Gamma_k^{(2)\varphi\varphi} = \Delta - 2RF'(\phi^2) + 2V'(\phi^2) + 4\phi^2 (-RF''(\phi^2) + V''(\phi^2)). \quad (4.24)$$

Para o Setor de *ghost*, os hessianos são:

$$\Gamma_k^{(2)\bar{c}^T \bar{c}^T} = -\frac{R}{d} + \Delta. \quad (4.25)$$

$$\Gamma_k^{(2)c\bar{c}} = -\frac{2R\Delta}{d} + \frac{2(-1 - \beta + d) \Delta^2}{d}. \quad (4.26)$$

Obs: Estamos usando que  $-\nabla_\alpha \nabla^\alpha = -\square = \Delta$ .

Vamos definir os acoplamentos adimensionais para  $V(\phi^2)$ ,  $F(\phi^2)$  e  $\phi$ : Analisando a dimensionalidade da ação efetiva (4.9), percebemos que os acoplamentos adimensionais e o campo adimensional ficam da forma:

$$\tilde{\phi} = k^{\frac{2-d}{2}} \phi, \quad (4.27)$$

$$\tilde{V}(\tilde{\phi}^2) = k^{-d} V(\phi^2), \quad (4.28)$$

$$\tilde{F}(\tilde{\phi}^2) = k^{2-d} F(\phi^2). \quad (4.29)$$

Já para as derivadas com respeito a  $t$ , temos:

$$\partial_t \tilde{V}(\tilde{\phi}^2) = -d\tilde{V}(\tilde{\phi}^2) + (d-2)\tilde{\phi}^2 \tilde{V}'(\tilde{\phi}^2) + k^{-d} (\partial_t V(\phi^2)), \quad (4.30)$$

$$\partial_t \tilde{F}(\tilde{\phi}^2) = -(d-2)\tilde{F}(\tilde{\phi}^2) + (d-2)\tilde{\phi}^2 \tilde{F}'(\tilde{\phi}^2) + k^{-(d-2)} (\partial_t F(\phi^2)). \quad (4.31)$$

Iremos considerar que  $\tilde{V}$  e  $\tilde{F}$  são funções polinomiais do tipo:

$$\tilde{V}(\tilde{\phi}^2) = \sum_{n=0}^2 \tilde{\lambda}_{2n} \tilde{\phi}^{2n}; \quad \tilde{F}(\tilde{\phi}^2) = \sum_{n=0}^1 \tilde{\xi}_{2n} \tilde{\phi}^{2n} \quad (4.32)$$

Ao abrirmos ambos os somatórios, temos que:

$$\tilde{V}(\tilde{\phi}^2) = \tilde{\lambda}_0 + \tilde{\lambda}_2 \tilde{\phi}^2 + \tilde{\lambda}_4 \tilde{\phi}^4. \quad (4.33)$$

Assim, vemos que, usando a nossa convenção, temos para o termo livre de  $R$ , o termo:

$$\tilde{V}(\tilde{\phi}^2) = \frac{2\tilde{\Lambda}}{16\pi\tilde{G}} + \tilde{m}^2 \tilde{\phi}^2 + \tilde{\lambda} \tilde{\phi}^4. \quad (4.34)$$

Já, para  $\tilde{F}(\tilde{\phi}^2)$

$$\tilde{F}(\tilde{\phi}^2) = \tilde{\xi}_0 + \tilde{\xi}_2 \tilde{\phi}^2, \quad (4.35)$$

o que faz com que o termo acompanhado de  $R$  tenha a forma:

$$\tilde{F}(\tilde{\phi}^2) = \frac{1}{16\pi\tilde{G}} + \tilde{\xi} \tilde{\phi}^2, \quad (4.36)$$

com  $\xi_2 = \xi$  sendo o acoplamento não-mínimo. Para obtermos o fluxo dos acoplamentos adimensionais, calculamos as funções beta  $\partial_t \tilde{V}$  e  $\partial_t \tilde{F}$ , igualando os termos livres de  $R$  com a função beta de  $\tilde{V}$  e igualando os termos acompanhados de  $R$  com a função beta de  $\tilde{F}$ . Após fazermos isso, a relação para determinar o fluxo de cada acoplamento será:

$$\partial_t \tilde{\lambda}_{2n} = \frac{1}{n!} \frac{\delta^n(\partial_t \tilde{V})}{\delta(\tilde{\phi}^2)} \Big|_{\tilde{\phi}^2=0} \quad ; \quad \partial_t \tilde{\xi}_{2n} = \frac{1}{n!} \frac{\delta^n(\partial_t \tilde{F})}{\delta(\tilde{\phi}^2)} \Big|_{\tilde{\phi}^2=0}. \quad (4.37)$$

Após calcularmos o fluxo de cada acoplamento, verificaremos a possível existência de um *ponto fixo de matéria gaussiano* (GMFP), ou seja, um ponto fixo onde os acoplamentos de matéria (acompanhados de  $\tilde{\phi}^{2n}$ , com  $n > 0$ ) vão para zero no limite do UV. É importante ressaltar que, para o cálculo do ponto fixo, é utilizado o limite em que  $\rho \rightarrow \gamma\sqrt{\alpha}$ , com  $\gamma \rightarrow 1$ , de tal forma que esse primeiro limite seja capaz de curar uma divergência resultante no cálculo do traço do setor matricial do lado direito da equação de Wetterich. Além disso, tomaremos o limite  $\alpha \rightarrow 0$ . Assim, ao variarmos o parâmetro interpolante  $\tau$  de 0 (parametrização linear) até 1 (parametrização exponencial), através de um incremento de  $\frac{1}{20}$  obtemos os seguintes valores para os pontos fixos de matéria gaussiano e dos expoentes críticos (especificamente, direções relevantes) para  $d = 4$ , como pode ser visto na tabela 4.1.

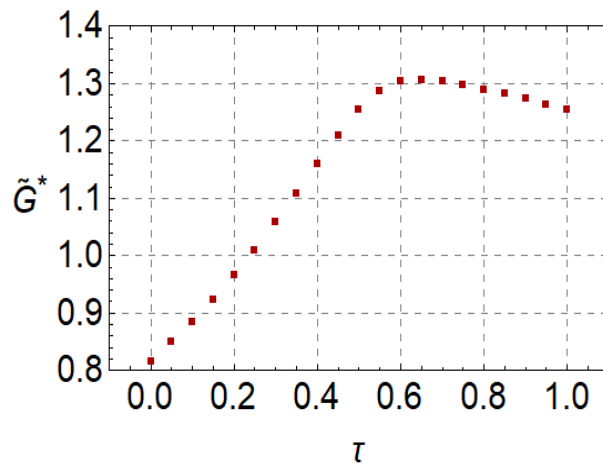


Figura 4.1: Pontos fixos de  $\tilde{G}$  em função do parâmetro interpolante  $\tau$

Podemos observar na figura 4.1 como  $\tilde{G}^*$  sofre um crescimento abrupto até atingir um pico em  $\tau = \frac{14}{20}$  e passa a apresentar uma certa estabilidade, sofrendo pouca variação para valores próximos de  $\tau = 1$ . De acordo com a figura 4.2 para  $\tilde{\Lambda}^*$ , percebemos que a mudança conforme variamos  $\tau$  não é tão acentuada de início, como é para o caso de  $\tilde{G}^*$ , tendo um pico para  $\tau = \frac{13}{20}$  uma estabilidade bem razoável para valores de  $\tau$  próximos de 1. Na figura 4.3 vemos que o produto  $\tilde{G}^* \tilde{\Lambda}^*$  apresenta um crescimento abrupto até o pico em  $\tau = \frac{13}{20}$ , com uma queda mais suave para valores menores do que  $\tau = \frac{13}{20}$ . A motivação para avaliarmos o comportamento de  $\tilde{G}^* \tilde{\Lambda}^*$  está no fato de que ele (antes de definirmos os acoplamentos adimensionais) é adimensional e, portanto, tende a ter menos dependência espúria na escolha de calibre e do regulador. Percebemos também que, para a teoria escalar-tensorial, temos a existência de um ponto fixo gaussiano de matéria, além de 2 direções relevantes para cada

$\tau$	$\tilde{G}^*$	$\tilde{\Lambda}^*$	$\theta_1$	$\theta_2$
0	0.8153	0.1881	2.1521 + 3.0967i	2.1521 - 3.0967i
$\frac{1}{20}$	0.8491	0.1954	2.1552 + 3.0493i	2.1552 - 3.0493i
$\frac{2}{20}$	0.8851	0.2033	2.1563 + 2.9988i	2.1563 - 2.9988i
$\frac{3}{20}$	0.9239	0.2119	2.1545 + 2.9449i	2.1545 - 2.9449i
$\frac{4}{20}$	0.9656	0.2213	2.1485 + 2.8879i	2.1485 - 2.8879i
$\frac{5}{20}$	1.0102	0.2316	2.1362 + 2.8282i	2.1362 - 2.8282i
$\frac{6}{20}$	1.0578	0.2429	2.1145 + 2.7675i	2.1145 - 2.7675i
$\frac{7}{20}$	1.1077	0.2554	2.0783 + 2.7094i	2.0783 - 2.7094i
$\frac{8}{20}$	1.1592	0.2692	2.0195 + 2.6628i	2.0195 - 2.6628i
$\frac{9}{20}$	1.2097	0.2841	1.9251 + 2.6472i	1.9251 - 2.6472i
$\frac{10}{20}$	1.2549	0.2996	1.7769 + 2.7050i	1.7769 - 2.7050i
$\frac{11}{20}$	1.2879	0.3138	1.5620 + 2.9044i	1.5620 - 2.9044i
$\frac{12}{20}$	1.3041	0.3234	1.3028 + 3.2859i	1.3028 - 3.2859i
$\frac{13}{20}$	1.3070	0.3269	1.0591 + 3.7778i	1.0591 - 3.7778i
$\frac{14}{20}$	1.3034	0.3253	0.8688 + 4.2654i	0.8688 - 4.2654i
$\frac{15}{20}$	1.2974	0.3207	0.7311 + 4.6904i	0.7311 - 4.6904i
$\frac{16}{20}$	1.2901	0.3145	0.6323 + 5.0433i	0.6323 - 5.0433i
$\frac{17}{20}$	1.2821	0.3074	0.5598 + 5.3325i	0.5598 - 5.3325i
$\frac{18}{20}$	1.2733	0.3001	0.5051 + 5.5697i	0.5051 - 5.5697i
$\frac{19}{20}$	1.2639	0.2927	0.4624 + 5.7655i	0.4624 - 5.7655i
1	1.2540	0.2854	0.4280 + 5.9286i	0.4280 - 5.9286i

Tabela 4.1: Pontos fixos gaussianos de matéria e seus respectivos expoentes críticos em função do parâmetro interpolante  $\tau$

valor de  $\tau$ . Isso mostra que a teoria escalar-tensorial até um truncamento de ordem 1 na curvatura em  $R$  apresenta dimensão de superfície crítica finita, sendo portanto, assintoticamente segura dentro da aproximação proposta. Além disso, a dimensão da superfície crítica é menor do que a dimensão do espaço de configurações, além de não apresentar mudanças conforme o parâmetro interpolante é variado. Esses dados mostram que não seria absurdo pensar numa teoria modificada da gravitação que não seja somente mediada pelo gráviton, como também mediada pelo campo escalar, desempenhando um papel muito importante em modelos cosmológicos do universo primordial e na cura de divergências no modelo padrão no cenário de segurança assintótica.

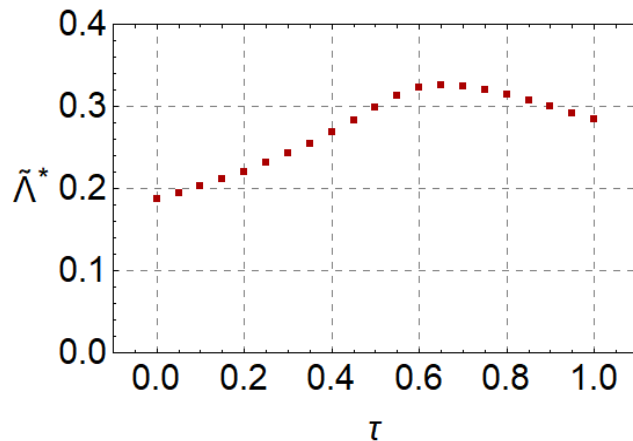


Figura 4.2: Pontos fixos de  $\tilde{\Lambda}$  em função do parâmetro interpolante  $\tau$

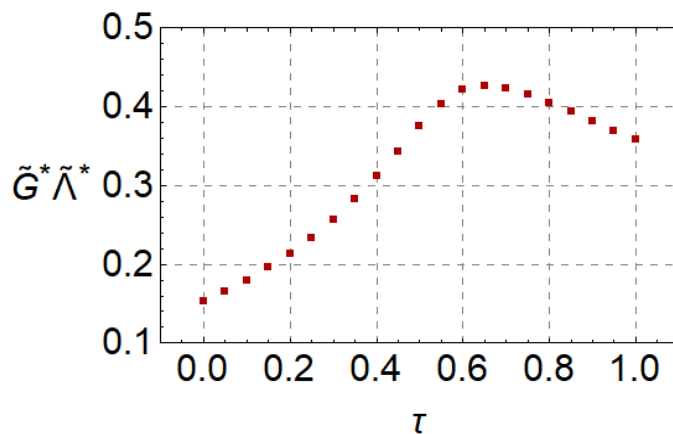


Figura 4.3: Pontos fixos de  $\tilde{G}\tilde{\Lambda}$  em função do parâmetro interpolante  $\tau$

#### 4.4.1 Cálculo de pontos fixos e expoentes críticos com a influência de campos escalares de matéria

Nesta subseção, analisaremos de que forma os campos de matéria do setor escalar influenciam nos valores dos pontos fixos gravitacionais. Verificaremos de forma gráfica como esses pontos fixos e expoentes críticos se comportam tanto na parametrização linear quanto na parametrização exponencial conforme formos adicionando um número de campos cada vez maior através da seguinte ação efetiva média:

$$\Gamma_k[g, \phi^m] = \int d^d x \sqrt{g} \left( \frac{2\Lambda_k}{16\pi G_k} - \frac{1}{16\pi G_k} R + \frac{g^{\mu\nu}}{2} \sum_{m=1}^n \partial_\mu \phi^m \partial_\nu \phi^m \right) + S_{GF} + S_{gh}, \quad (4.38)$$

onde novamente os termos  $S_{GF}$  e  $S_{gh}$  são dados pelas equações (4.11) e (4.12), além de  $n$  ser um número inteiro que fixaremos. Além disso, estamos usando novamente a parametrização interpolante (3.19). Usamos também a decomposição de York para o setor gravitacional (3.79) e para o setor de *ghost* (3.87), onde as relações em (3.80) e (3.88) são satisfeitas. Por último, aqui também empregaremos a redefinição  $\rho \rightarrow \gamma\sqrt{\alpha}$ , com  $\gamma \rightarrow 1$  pelo mesmo motivo mencionado na subseção anterior para curar divergências. Assim, novamente utilizaremos o calibre de Landau em que  $\alpha \rightarrow 0$ .

Para a decomposição linear, considerando uma variação até  $n = 10$ , temos os seguintes pontos fixos e expoentes críticos na tabela 4.2. Já a dependência dos pontos fixos de  $\tilde{\Lambda}_k$ ,  $\tilde{G}_k$  e  $\tilde{\Lambda}_k\tilde{G}_k$  em relação a  $n$ ,

$n$	$\tilde{G}^*$	$\tilde{\Lambda}^*$	$\theta_1$	$\theta_2$
0	0.8644	0.1728	2.0360 + 2.9263i	2.0360 - 2.9263i
1	0.8153	0.1881	2.1521 + 3.0967i	2.1521 - 3.0967i
2	0.7718	0.2014	2.2771 + 3.2507i	2.2771 - 3.2507i
3	0.7331	0.2131	2.4089 + 3.3895i	2.4089 - 3.3895i
4	0.6984	0.2235	2.5459 + 3.5145i	2.5459 - 3.5145i
5	0.6672	0.2328	2.6870 + 3.6266i	2.6870 - 3.6266i
6	0.6389	0.2412	2.8309 + 3.7260i	2.8309 - 3.7260i
7	0.6132	0.2489	2.9771 + 3.8163i	2.9771 - 3.8163i
8	0.5896	0.2558	3.1250 + 3.8955i	3.1250 - 3.8955i
9	0.5681	0.2622	3.2740 + 3.9651i	3.2740 - 3.9651i
10	0.5482	0.2681	3.4239 + 4.0258i	3.4239 - 4.0258i

Tabela 4.2: Pontos fixos e expoentes críticos em função do número de campos escalares  $n$  na parametrização linear

com  $n$  variando de 0 até 100 pode ser vista de forma mais clara e completa a partir dos gráficos abaixo nas figuras 4.4, 4.5 e 4.6. Percebemos a partir do gráfico da figura 4.4 que, conforme introduzimos um número maior de campos de matéria escalares na nossa ação efetiva média, o ponto fixo individual representado por  $\tilde{G}^*$  sofre uma queda brusca inicial até se tornar razoavelmente estável para valores de  $n$  menores e próximos de 100. Em contrapartida, no gráfico da figura 4.5, o ponto fixo individual representado por  $\tilde{\Lambda}^*$  sofre um aumento razoável, até atingir uma certa estabilidade para valores de  $n$  menores e próximos de 100. Já o produto entre os pontos fixos individuais, figura 4.6 representado pelo produto entre  $\tilde{\Lambda}^*$  e  $\tilde{G}^*$  apresenta pouca variação conforme introduzimos campos de matéria na ação efetiva média até se tornar estável para valores de  $n$  menores e próximos de 100. Além disso, observamos um pico para  $n$  pequeno.

Para a decomposição exponencial, considerando uma variação até  $n = 10$ , temos os seguintes pontos fixos e expoentes críticos mostrados na tabela 4.3. Podemos ter uma noção melhor do comportamento de  $\tilde{G}^*$  e de  $\tilde{\Lambda}^*$  e  $\tilde{G}^*\tilde{\Lambda}^*$  em relação a  $n$  a partir dos gráficos das figuras 4.7, 4.8 e 4.9. Percebemos uma queda

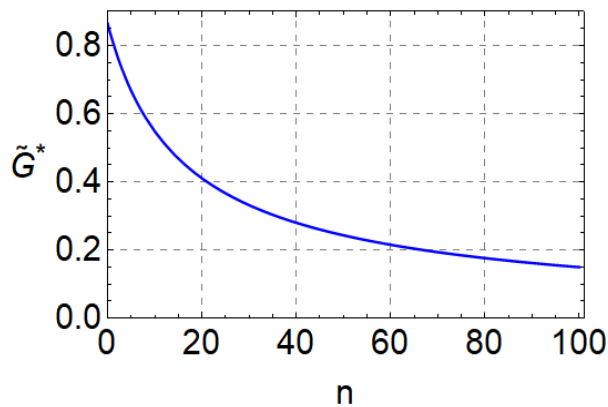


Figura 4.4: Pontos fixos de  $\tilde{G}_k$  em função do número de campos  $n$  na parametrização linear  $\tau = 0$

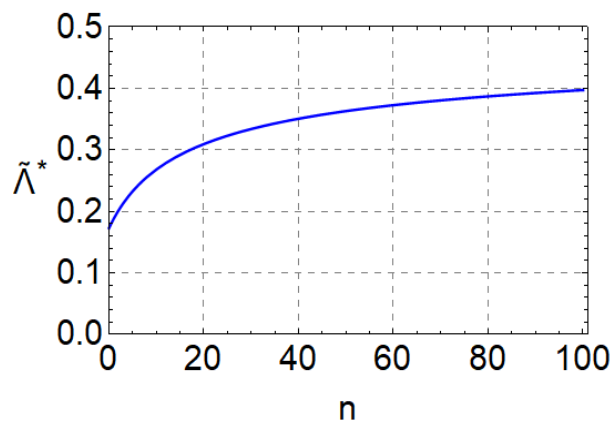


Figura 4.5: Pontos fixos de  $\tilde{\Lambda}_k$  em função do número de campos  $n$  na parametrização linear  $\tau = 0$

extremamente acentuada de  $\tilde{G}^*$ , sofrendo uma variação brusca para os valores iniciais de  $n$  no gráfico 4.7, até apresentar uma estabilidade para  $n$  próximo de 100. Já  $\tilde{\Lambda}^*$  apresenta um aumento relativamente suave ao aumentarmos o número de campos de matéria do campo escalar  $n$  no gráfico 4.8, até também atingir uma razoável estabilidade para  $n$  próximo de 100. O produto entre  $\tilde{G}^*$  e  $\tilde{\Lambda}^*$  na figura 4.9 apresenta uma queda acentuada para os valores iniciais, sem apresentar um pico entre  $n = 1$  e  $n = 100$ , como é o caso da parametrização linear. Para valores próximos de  $n = 100$ , apresenta relativa estabilidade

Percebemos então que, quando incluímos campos escalares de matéria no setor gravitacional, apesar de a introdução de mais e mais campos escalares produzir uma mudança numérica no ponto fixo gravitacional, isto não afeta a existência do ponto fixo em si e que esse é um primeiro passo para testar o impacto de campos de matéria sobre o ponto fixo assintoticamente seguro. Isso se torna um primeiro passo para a compatibilidade entre a teoria quântica da gravitação e o modelo padrão no cenário de segurança



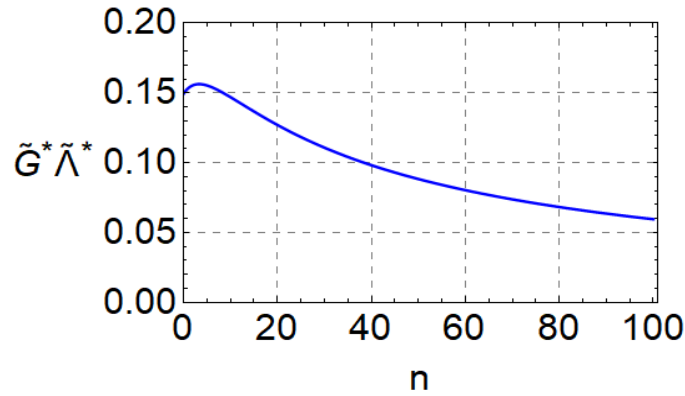


Figura 4.6: Pontos fixos de  $\tilde{G}_k \tilde{\Lambda}_k$  em função do número de campos  $n$  na parametrização linear  $\tau = 0$

$n$	$\tilde{G}^*$	$\tilde{\Lambda}^*$	$\theta_1$	$\theta_2$
0	1.4048	0.2743	$0.2052 + 5.0855i$	$0.2052 - 5.0855i$
1	1.2539	0.2933	$0.4280 + 5.9286i$	$0.4280 - 5.9286i$
2	1.1351	0.2933	$0.8496 + 6.6365i$	$0.8496 - 6.6365i$
3	1.0392	0.2992	$1.3962 + 7.2167i$	$1.3962 - 7.2167i$
4	0.9598	0.3039	$2.0229 + 7.6793i$	$2.0229 - 7.6793i$
5	0.8930	0.3077	$2.7016 + 8.0341i$	$2.7016 - 8.0341i$
6	0.8358	0.3109	$3.4138 + 8.2899i$	$3.4138 - 8.2899i$
7	0.7862	0.3137	$4.1472 + 8.4535i$	$4.1472 - 8.4535i$
8	0.7427	0.3161	$4.8933 + 8.5306i$	$4.8933 - 8.5306i$
9	0.7042	0.3182	$5.6460 + 8.5247i$	$5.6460 - 8.5247i$
10	0.6698	0.3200	$6.4012 + 8.4380i$	$6.4012 - 8.4380i$

Tabela 4.3: Pontos fixos e expoentes críticos em função do número de campos escalares  $n$  na parametrização exponencial

assintótica, visto que campos escalares correspondem a um dos campos fundamentais presentes nele.

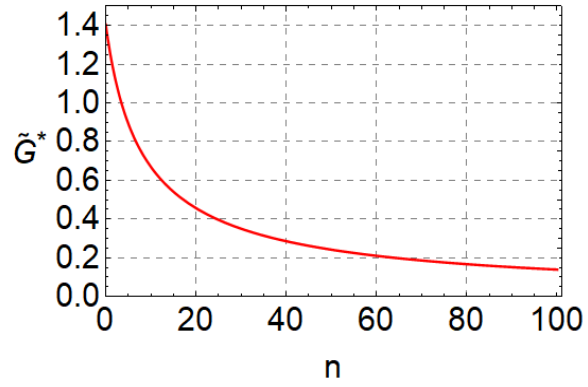


Figura 4.7: Pontos fixos de  $\tilde{G}_k$  em função do número de campos  $n$  na parametrização exponencial  $\tau = 1$

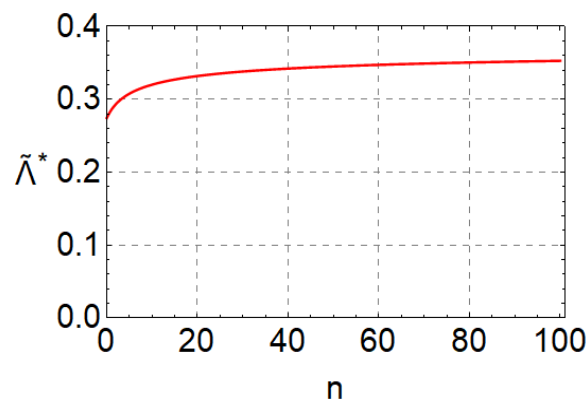


Figura 4.8: Pontos fixos de  $\tilde{\Lambda}_k$  em função do número de campos  $n$  na parametrização exponencial  $\tau = 1$

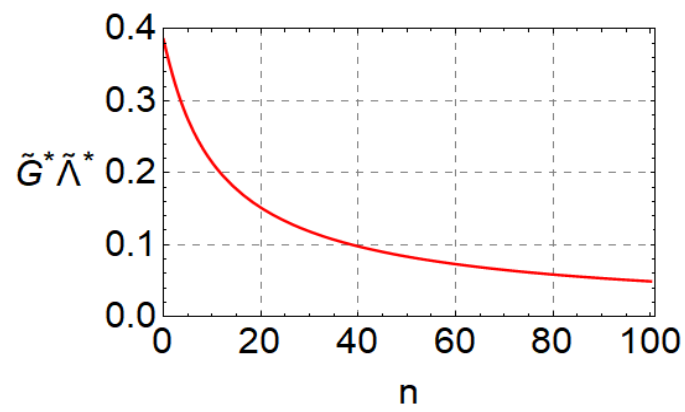


Figura 4.9: Pontos fixos de  $\tilde{G}_k \tilde{\Lambda}_k$  em função do número de campos  $n$  na parametrização exponencial  $\tau = 1$

## Capítulo 5

# Conclusões

Neste trabalho, pode-se concluir que existem perspectivas promissoras no tratamento da gravitação como uma teoria quântica de campos usual não-perturbativa, especialmente para uma classe específica de teorias modificadas de gravitação: a teoria escalar-tensorial. Pelo método de cascas de momentos, deduzimos uma equação não-perturbativa do grupo de renormalização funcional para se calcular o fluxo dos acoplamentos e, conseqüentemente, os pontos fixos de uma determinada teoria física. Primeiramente, como um exemplo simples, exploramos a implementação da equação de Wetterich para a teoria escalar com interação  $\lambda\phi^4$  e verificamos a existência de um ponto fixo não-trivial para a teoria escalar e fizemos uma breve discussão sobre o ponto fixo de Wilson-Fisher e do polo de Landau. Em seguida, verificamos a existência de um ponto fixo não-trivial (ponto fixo de Reuter) para o truncamento de Einstein-Hilbert sem o uso da decomposição de York e com o uso dela.

Usando o fato de a teoria quântica gravitacional ter fortes indícios de segurança assintótica, investigamos teorias alternativas da gravitação que sofrem com o mesmo problema da não-renormalizabilidade perturbativa. Talvez faça sentido tratar essas teorias modificadas como teorias quânticas via mecanismo de segurança assintótica. Em particular, foi foco dessa dissertação as teorias escalares-tensoriais, que têm particular interesse em aspectos cosmológicos como a inflação primordial, e, também, constituem uma possível conexão com a física de partículas, especificamente, no setor escalar de Higgs. Partindo dessas motivações, buscamos evidências que reforcem a existência do ponto fixo não-trivial em teorias escalares-tensoriais, ou que estabeleçam o caráter fictício deste ponto fixo através de truncamentos mais refinados. Assim, calculamos um ponto fixo especial chamado de ponto fixo de matéria gaussiano (GMFP) para uma série de valores do parâmetro interpolante  $\tau$ . Isso permite concluir que existem perspectivas promissoras ao investigarmos a estrutura quântica de teorias escalares-tensoriais no cenário de segurança assintótica, podendo então reforçar ideias teóricas de modelos cosmológicos do universo primordial, cujo papel do campo escalar é de destaque para a inflação. Além de eventualmente curar divergências que surgem no modelo padrão de física de partículas. Finalmente investigamos a inclusão de campos escalares de matéria na teoria gravitacional e verificamos que a inclusão desses campos não afeta a existência de um ponto fixo, apesar de produzir uma mudança numérica no mesmo. Essa é uma importante investigação que, como

conclusão, compatibiliza a teoria quântica de gravitação com o modelo padrão no cenário de segurança assintótica.

# APÊNDICES

# Apêndice A

## Integrais gaussianas

Integrais gaussianas aparecem com bastante frequência nos cálculos realizados nessa dissertação. Por esse motivo, baseado em [113], creio que seja importante que o leitor tenha noções básicas em como calcular essas integrais. Estamos acostumados a avaliar o seguinte tipo de integral gaussiana:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}. \quad (\text{A.1})$$

Agora, vamos considerar um número complexo  $z = x + iy$ . Assim:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz^* dz \exp(-az^*z) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp[-a(x^2 + y^2)] = \frac{2\pi}{a}. \quad (\text{A.2})$$

Já para vários graus de liberdade  $z_1, \dots, z_n$ , podemos definir o vetor complexo:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

e assim denotar o termo  $(z^*, Az)$  como sendo o produto escalar entre o vetor complexo conjugado, a matriz complexa  $A$  e o vetor complexo, de tal forma que:

$$\int dz_1^* dz_2^* \dots \int dz_n dz_n^* \exp[i(z^*, Az)] = \frac{(2\pi)^n i^n}{\det A}. \quad (\text{A.4})$$

Para o caso de variáveis reais, com  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  temos:

$$\int dx_1 \dots dx_n \exp[i(x, Ax)] = \frac{\pi^{n/2} i^{n/2}}{[\det A]^{1/2}} \quad (\text{A.5})$$

Para integrais sobre  $n$  variáveis grassmanianas, temos que o resultado da integral gaussiana envolvendo  $(\bar{\eta}, A\eta) = \sum_{i,j} \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j$  será:

$$\int d\eta_1 d\bar{\eta}_1 \dots d\eta_n d\bar{\eta}_n \exp(\bar{\eta}, A\eta) = \det A. \quad (\text{A.6})$$

Quando falamos de campos, entretanto, estamos falando de um número infinito de graus de liberdade, então nesse limite do contínuo a forma das nossas integrais gaussianas sofrem algumas mudanças.

Por exemplo, o produto escalar acima passa a ser representado na forma de uma integral:  $(\phi, A\phi) = \int d^4x d^4y \phi(x)A(x, y)\phi(y)$ . Assim, a partir de [114], obtemos:

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{i}{2}(\phi, A\phi) + i(J, \phi)} = (\det A)^{-1/2} e^{-\frac{i}{2}(J, A^{-1}J)}. \quad (\text{A.7})$$

É importante ressaltar que esse cálculo é feito no espaço de Minkowski. Se quisermos fazer o cálculo no espaço euclidiano, devemos realizar a rotação de Wick, de forma, que teremos as seguintes modificações para as coordenadas espaço-temporais, segundo [115]

$$x_0 = -i\tau. \quad (\text{A.8})$$

Portanto:

$$x^2 = x_0^2 - |\vec{x}|^2 = -(\tau^2 + |\vec{x}|^2) = -x_E^2 \text{ (métrica ++++).} \quad (\text{A.9})$$

Assim, o termo de “volume” fica:

$$d^4x = -id\tau d^3x = -id^4x_E. \quad (\text{A.10})$$

A coordenada temporal do momento sofre a seguinte mudança a partir da rotação de Wick:

$$p_0 = i\omega. \quad (\text{A.11})$$

Portanto:

$$p^2 = p_0^2 - |\vec{p}|^2 = -(\omega^2 + |\vec{p}|^2) = -p_E^2. \quad (\text{A.12})$$

Já o termo de volume no espaço de momento é:

$$d^4p = id^4p_E = id\omega d^3p. \quad (\text{A.13})$$

O produto interno entre p e x é:

$$p \cdot x = p_0x_0 - \vec{p} \cdot \vec{x} = \omega\tau - \vec{p} \cdot \vec{x}. \quad (\text{A.14})$$

A derivada temporal a partir da rotação de Wick fica:

$$\partial_0 = i\partial_\tau. \quad (\text{A.15})$$

Assim:

$$\partial^2 = \partial_0^2 - \nabla^2 = -(\partial_\tau^2 + \nabla^2) = -\partial_E^2, \text{ onde } \partial_E^2 = \partial_\tau^2 + \nabla^2. \quad (\text{A.16})$$

No exemplo abaixo, consideramos a transformação da ação de um campo escalar com interação  $\phi^4$ , transformando do espaço de Minkowski para o espaço euclidiano:

$$\begin{aligned} iS &= i \int d^4x \left[ \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2 \phi^2}{2} - \frac{\lambda \phi^4}{4!} + J\phi \right] \\ &= i \int -id^4x \left[ -\frac{1}{2}(\partial_\mu^E \phi)^2 - \frac{m^2 \phi^2}{2} - \frac{\lambda \phi^4}{4!} + J\phi \right] \\ &= - \int d^4x_E \left[ \frac{1}{2}(\partial_\mu^E \phi)^2 + \frac{m^2 \phi^2}{2} + \frac{\lambda \phi^4}{4!} - J\phi \right] \\ &= - \int d^4x_E (\mathcal{L}_E[\phi] - J\phi), \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

com  $S_E = - \int d^4x_E (\mathcal{L}_E[\phi] - J\phi)$ , que é a ação do campo escalar para o espaço euclidiano. Nesse caso, de variáveis reais, o cálculo para uma integral gaussiana sofre uma pequena modificação, em que

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2}(\phi, A\phi) + (J, \phi)} = (\det A)^{-1/2} e^{\frac{1}{2}(J, A^{-1}J)}. \quad (\text{A.18})$$

Já, para o caso de campos grassmanianos, no espaço euclidiano:

$$\int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} e^{(\bar{\eta}, A\eta) + (J, \eta) + (\bar{J}, \bar{\eta})} = \det A e^{(\bar{J}, A^{-1}J)} \quad (\text{A.19})$$



# Apêndice B

## Integral de caminho para teorias de calibre e determinante de Faddeev-Popov

Neste apêndice vamos entender melhor como calculamos a integral de caminho para teorias de calibre e o porquê do determinante de Faddeev-Popov ser tão importante nesse cálculo.

### B.1 Determinante de Faddeev-Popov e a teoria de Maxwell

Considere a lagrangiana para o cálculo da integral de caminho para a teoria eletromagnética com o termo de fonte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + J^\mu A_\mu. \quad (\text{B.1})$$

Ao abrirmos o tensor de Faraday na forma  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , a ação para a teoria eletromagnética com a fonte ligada é:

$$S = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu) + J^\mu A_\mu \right]. \quad (\text{B.2})$$

Ao usarmos a integração por partes, a ação toma a seguinte forma:

$$S = \int d^4x \left[ \frac{1}{2}(A_\mu \eta^{\mu\nu} \square A_\nu - A_\mu \partial^\mu \partial^\nu A_\nu) + J^\mu A_\mu \right]. \quad (\text{B.3})$$

Ao desligarmos a fonte,

$$S_{(J=0)} = \frac{1}{2} \int d^4x d^4y A_\mu(x) (\eta^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) \delta(x-y) A_\nu(y). \quad (\text{B.4})$$

Definimos, a partir dessa ação o operador  $O^{\mu\nu}(x-y) = (\eta^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) \delta(x-y)$ . Portanto, o funcional gerador toma a forma:

$$\begin{aligned} Z[J_\mu] &= e^{iW[J]} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu e^{S^{(J)}[A_\mu]} \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu e^{i\left[\frac{1}{2}(A_\mu \cdot O^{\mu\nu} A_\nu) + (J^\mu, A_\mu)\right]}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Ao resolvermos essa integral funcional, obtemos para o gerador funcional o valor:

$$Z[J_\mu] = e^{iW[J]} = \mathcal{N} (\det(-O^{\mu\nu}))^{-1/2} e^{-\frac{i}{2}(J^\mu, O_{\mu\nu}^{-1} J^\nu)}. \quad (\text{B.6})$$

Percebemos também uma propriedade interessante do operador  $O^{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} O^{\mu\nu}O_\nu^\lambda &= (\eta^{\mu\nu}\square - \partial^\mu\partial^\nu)(\delta_\nu^\lambda\square - \partial_\nu\partial^\lambda) \\ &= \square(\eta^{\mu\lambda} - \partial^\mu\partial^\lambda) \\ &= \square O^{\mu\lambda}. \end{aligned} \tag{B.7}$$

Se adicionarmos um fator de normalização ( $O^{\mu\nu} \rightarrow \frac{1}{\square}O^{\mu\lambda}$ ) para a expressão acima, vemos que o operador  $O^{\mu\nu}$  é análogo a um operador de projeção (definido por  $O^{\mu\nu} = P^{\mu\nu}$ ). De fato, vemos que a projeção para  $\partial^\mu$  é nula:

$$\partial_\mu P^{\mu\nu} = \partial_\nu P^{\mu\nu} = 0. \tag{B.8}$$

O que mostra que  $P^{\mu\nu}$  é o operador de projeção transverso (perpendicular). Ou seja, esse operador projeta a componente de qualquer vetor que seja perpendicular ao operador gradiente  $\partial_\mu$ . Como resultado, a inversa desse operador de projeção não existe e, conseqüentemente, tanto sua função de Green quanto o propagador de Feynman não são definidos. Portanto, ao aplicarmos o formalismo de integral de caminho, não teremos como representar o propagador da teoria. A fonte desse problema está na invariância de calibre da teoria de Maxwell, como é dito em [116, 117], que foram as referências em que essa seção foi baseada. A lagrangiana é invariante sob a transformação de calibre:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) + ie^{i\alpha(x)}\partial_\mu e^{-i\alpha(x)} \\ &= U^{-1}(x)A_\mu(x)U(x) + iU^{-1}(x)\partial_\mu U(x), \end{aligned} \tag{B.9}$$

com  $U^{-1}(x) = e^{-i\alpha(x)} \in U(1)$ .

Para podermos inverter o operador, então, nossa saída será quebrar essa invariância de calibre através do método de Faddeev-Popov. Primeiramente, considere a condição de calibre:

$$F(A_\mu) = 0 \text{ (Condição de calibre)}. \tag{B.10}$$

Aqui, estaremos interessados em usar a condição de calibre de Lorenz:

$$F(A_\mu) = \partial_\mu A^\mu = 0. \tag{B.11}$$

A partir de agora, estaremos usando um índice extra superior  $\alpha$  para o campo  $A_\mu$ , tomando a forma  $A_\mu^\alpha$ . Esse índice extra está associado com o índice de gerador do grupo, ao assumirmos que  $T^\alpha$  define o gerador do grupo. Agora vamos definir o termo:

$$\Delta_{FP}[A_\mu] \int \prod_x d\alpha(x)\delta(F(A_\mu^\alpha(x))) = 1 \text{ (identidade)}. \tag{B.12}$$

Importante notar que  $\Delta_{FP}[A_\mu]$  é um termo invariante de calibre. Que pode ser visto quando fazemos a transformação de calibre do termo:

$$\Delta_{FP}^{-1}[A_\mu] = \int \prod_x d\alpha(x)\delta(F(A_\mu^\alpha(x))). \tag{B.13}$$

Vamos fazer a transformação de calibre  $A_\mu \rightarrow A_\mu^{\alpha'}$ . Assim:

$$\begin{aligned}\Delta_{FP}^{-1}[A_\mu^{\alpha'}] &= \int \prod_x d(\alpha(x) + \alpha'(x)) \delta(F(A_\mu^{\alpha+\alpha'}(x))) \\ &= \int \prod_x d\alpha(x) \delta(F(A_\mu^\alpha(x))). \\ &= \Delta_{FP}^{-1}[A_\mu^\alpha].\end{aligned}\tag{B.14}$$

Isso vem do fato de tanto o campo  $A_\mu^\alpha$  quanto a medida no espaço de grupo  $\int d\alpha(x)$  serem invariantes mediante uma transformação de calibre.

Agora, vamos usar introduzir a expressão (B.12) no gerador funcional  $Z[J]$ :

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu \left( \Delta_{FP}[A_\mu] \int \prod_x d\alpha(x) \delta(F(A_\mu^\alpha(x))) \right) e^{S^{(J)}[A_\mu]}.\tag{B.15}$$

Vamos fazer uma transformação de calibre inversa:  $A \rightarrow A_\mu^{-\alpha}$ , assim, o gerador funcional fica:

$$\begin{aligned}Z[J] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_{FP}[A_\mu] \int \prod_x d\alpha(x) \delta(F(A_\mu(x))) e^{S^{(J)}[A_\mu]} \\ &= \mathcal{N} \left( \int \prod_x d\alpha(x) \right) \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_{FP}[A_\mu] \delta(F(A_\mu)) e^{S^{(J)}[A_\mu]} \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_{FP}[A_\mu] \delta(F(A_\mu)) e^{S^{(J)}[A_\mu]}.\end{aligned}\tag{B.16}$$

Precisamos determinar o termo  $\Delta_{FP}[A_\mu]$ . Para isso, note que:

$$\begin{aligned}\Delta_{FP}^{-1}[A_\mu] &= \int \prod_x d\alpha(x) \delta(F(A_\mu^\alpha)) \\ &= \int \prod_x dF \delta(F(A_\mu^\alpha)) \left( \det \frac{\delta\alpha}{\delta F} \right) = \det \left( \frac{\delta\alpha}{\delta F} \right)_{F(A_\mu^\alpha)=0}.\end{aligned}\tag{B.17}$$

Portanto, obtemos que:

$$\Delta_{FP}[A_\mu] = \det \left( \frac{\delta F(A_\mu^\alpha)}{\delta\alpha} \right)_{\alpha=0}.\tag{B.18}$$

Para generalizarmos a derivação, vamos considerar uma forma mais geral para a fixação de calibre:

$$F(A_\mu(x)) = f(x).\tag{B.19}$$

$f(x)$  é uma função que não depende de  $A_\mu$ . Portanto, inserimos a identidade

$$\Delta_{FP}[A_\mu] \int \prod_x d\alpha(x) \delta(F(A_\mu^\alpha(x)) - f(x)) = 1\tag{B.20}$$

No gerador funcional  $Z[J]$ , obtendo:

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_{FP}[A_\mu] \delta(F(A_\mu(x)) - f(x)) e^{iS^{(J)}[A_\mu]}.\tag{B.21}$$

É importante notar que a integral do gerador funcional não depende de  $f(x)$ , portanto, podemos multiplicar ele por um fator de peso envolvendo  $f(x)$  e integrar sobre  $f(x)$ . De preferência, esse fator de peso

tem a forma de uma integral gaussiana que, quando calculada, é reabsorvida por  $\mathcal{N}$ . Assim, temos que:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_{FP}[A_\mu] \int Df \delta(f(A_\mu(x)) - f(x)) e^{-\frac{i}{2\xi} \int d^4x (f(x))^2} e^{iS(J)} \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_{FP}[A_\mu] e^{i[S(J) - \frac{1}{2\xi} \int d^4x (F(A_\mu(x)))^2]} \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_{FP}[A_\mu] e^{i(S(J) - S_{GF})}, \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

onde  $S_{GF} = \frac{1}{2\xi} \int d^4x (F(A_\mu(x)))^2$ ;  $\xi$  é conhecido como parâmetro de *gauge fixing*. Além disso, vemos que:

$$\begin{aligned} \Delta_{FP}[A_\mu] &= \det \left( \frac{\delta F(A_\mu^\alpha(x))}{\delta \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \int \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C e^{-i \int d^4x d^4y \bar{C}(x) \left( \frac{\delta F(A_\mu^\alpha(x))}{\delta \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} C(y)} = \int \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C e^{-i S_{ghost}}, \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

com  $S_{ghost} = \int d^4x d^4y \bar{C}(x) \left( \frac{\delta F(A_\mu^\alpha(x))}{\delta \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} C(y)$ . Portanto, o gerador funcional após usarmos o método de Faddeev-Popov para quebrar a simetria de calibre fica:

$$Z[J] = e^{iW[J]} = \mathcal{N} \int e^{iS[A_\mu] - iS_{GF} - iS_{ghost} + \int d^4x (J^\mu A_\mu + \bar{J}\bar{C} + JC)}. \quad (\text{B.24})$$

Vamos olhar uma condição de calibre simples:  $F(A_\mu) = \partial_\mu A^\mu(x) = f(x)$ . Assim a lagrangiana da fixação de calibre fica:

$$\mathcal{L}_{GF} = \frac{1}{2\xi} (F(A_\mu(x)))^2 = \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu(x)). \quad (\text{B.25})$$

Portanto, ao realizarmos a transformação de calibre:

$$F(A_\mu^{(\alpha)}) = \partial_\mu A^{\mu(\alpha)}(x) = \partial_\mu (A^\mu + \partial^\mu \alpha(x)) \implies \frac{\delta F(A_\mu^\alpha(x))}{\delta \alpha(y)} \Big|_{\alpha=0} = \square \delta^{(4)}(x - y). \quad (\text{B.26})$$

Portanto, para o setor de *ghost*:

$$\begin{aligned} S_{ghost} &= \int d^4x d^4y \bar{C}(x) \left( \frac{\delta F(A_\mu^\alpha(x))}{\delta \alpha(y)} \right) \Big|_{\alpha=0} C(y) = \int d^4x d^4y \bar{C}(x) (\square \delta^{(4)}(x - y)) C(y) \\ &= \int d^4x \bar{C}(x) \square C(x) = \int d^4x \mathcal{L}_{ghost}. \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Após voltarmos na ação total  $S_{total} = S[A_\mu] - S_{GF} - S_{ghost}$ , vemos que a ação de *gauge fixing* fica:

$$S_{GF} = -\frac{1}{2\xi} \int d^4x d^4y A_\mu(x) \partial^\mu \partial^\nu \delta(x - y) A_\nu(y). \quad (\text{B.28})$$

Portanto:

$$S_{total} = \frac{1}{2} A_\mu \left( \eta^{\mu\nu} \square - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu \partial^\nu \right) A_\nu + \bar{C} \square C. \quad (\text{B.29})$$

Assim, nosso novo operador  $O^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \square - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu \partial^\nu$ . Podemos representá-lo no espaço de momento:

$$O^{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu} p^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) p^\mu p^\nu. \quad (\text{B.30})$$

Podemos parametrizar a inversa mais geral de  $O$  da forma:  $O_{\mu\nu}^{-1}(p) = \alpha \eta_{\mu\nu} + \beta \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}$ , de tal forma que:

$$O^{\mu\nu}(p) O_{\nu\lambda}^{-1} = \delta_\lambda^\mu. \quad (\text{B.31})$$

Assim, teremos:

$$\begin{aligned} & \left( \eta^{\mu\nu} p^2 - \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) p^\mu p^\nu \right) \left( \alpha \eta_{\nu\lambda} + \beta \frac{p_\nu p_\lambda}{p^2} \right) = \delta_\lambda^\mu \\ \alpha p^2 \delta_\lambda^\mu - \alpha \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) p^\mu p_\lambda + \beta p^\mu p_\lambda - \beta \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) p^\mu p_\lambda &= -\delta_\lambda^\mu \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

$$(\alpha p^2 + 1) \delta_\lambda^\mu - \left( \alpha \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) - \frac{\beta}{\xi} \right) p^\mu p_\lambda = 0. \quad (\text{B.33})$$

Assim,  $\alpha = -\frac{1}{p^2}$  e  $\beta = -\frac{1}{p^2}(\xi - 1)$ . Portanto, o operador inverso é:

$$O_{\mu\nu}^{-1} = -\frac{1}{p^2} \left( \eta_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right). \quad (\text{B.34})$$

## B.2 Determinante de Faddeev-Popov e a Teoria Gravitacional

A partir da primeira seção, ficou mais claro porque devemos introduzir a ação de *ghost* e a ação de *gauge fixing* na ação total. Entretanto, nosso caso de interesse será o caso da teoria gravitacional. O ponto central é que o gerador funcional  $Z[J]$  da gravitação envolve integrações sobre a configuração de campo  $\mathcal{D}g_{\mu\nu}$ . Mas o problema é que, mais uma vez, devido a simetria de calibre por difeomorfismos, há muitas configurações de campo relacionadas por essas transformações de calibre. Sendo assim, ao realizarmos a integração, teríamos uma série de ambiguidades no cálculo da integral do gerador funcional. Para podermos definir a medida de integração  $\mathcal{D}g_{\mu\nu}$ , de tal forma que que só estaremos levando configurações de campo distintas entre todas as configurações iguais, ou seja, conectadas por transformações de calibre, precisaremos fixar o calibre, como explica de forma excelente [89].

O que pode ser feito é escolher uma ação de *gauge-fixing* que quebre a simetria quântica, mas que mantenha a simetria de background. Então, podemos optar pelas transformações:

$$\delta_\epsilon^{(Q)} \bar{g}_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{B.35})$$

$$\delta_\epsilon^{(Q)} h_{\mu\nu} = \nabla_\nu \epsilon_\nu + \nabla_\nu \epsilon_\mu. \quad (\text{B.36})$$

Vamos considerar a função  $F_\mu[h; \bar{g}]$  que satisfaz a condição de calibre  $F_\mu[h; \bar{g}] = f_\mu(x)$ . Assim, a identidade toma a forma:

$$1 = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\epsilon^\mu \det \left( \frac{\delta F_\mu[h^\epsilon; \bar{g}]}{\delta \epsilon^\nu} \right) \delta(F_\mu[h^\epsilon; \bar{g}] - f_\mu(x)). \quad (\text{B.37})$$

Assim, introduzindo essa identidade no gerador funcional  $Z[J]$ , obtemos:

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\epsilon^\mu \int \mathcal{D}h_{\mu\nu} e^{-S[g]} \det \left( \frac{\delta F_\mu[h^\epsilon; \bar{g}]}{\delta \epsilon^\nu} \right) \delta(F_\mu[h^\epsilon; \bar{g}] - f_\mu(x)),$$

com  $S[h; \bar{g}]$  representando tanto a ação  $S[g; \bar{g}]$  na decomposição linear quanto na decomposição exponencial. Essa ação é invariante sobre transformações quânticas, de tal forma que:

$$S[h^\epsilon; \bar{g}] = S[h; \bar{g}]. \quad (\text{B.38})$$

Vamos supor que a medida de integração é invariante por difeomorfismo:  $\mathcal{D}h_{\mu\nu}^\epsilon = \mathcal{D}h_{\mu\nu}$ . Assim, podemos fatorar a integração em  $\epsilon$ :

$$Z[J] = \mathcal{N} \left( \int \mathcal{D}\epsilon^\mu \right) \int \mathcal{D}h_{\mu\nu} e^{-S[h; \bar{g}]} \det(\mathcal{M}[h; \bar{g}]) \delta(F_\mu[h; \bar{g}] - f_\mu(x)), \quad (\text{B.39})$$

com:

$$\mathcal{M}[h; \bar{g}]^\mu{}_\nu = \left( \frac{\delta F_\mu[h^\epsilon; \bar{g}]}{\delta \epsilon^\nu} \right) \Big|_{\epsilon=0}. \quad (\text{B.40})$$

Novamente,  $\det(\mathcal{M}[h; \bar{g}])$  pode ser expresso como uma integral gaussiana como feito em (B.23):

$$\begin{aligned} \det \mathcal{M} &= \int \mathcal{D}C \mathcal{D}\bar{C} \exp \left( \int_x \sqrt{\bar{g}} C_\mu \mathcal{M}[h; \bar{g}]^\mu{}_\nu C^\nu \right) \\ &= \int \mathcal{D}C \mathcal{D}\bar{C} e^{-S_{gh}}, \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

onde agora, estamos utilizando o espaço euclidiano e  $S_{gh}$  é a ação fantasma.

Podemos encontrar o valor de  $\mathcal{M}^\mu{}_\nu[h; \bar{g}]$  ao usarmos a condição de calibre:

$$F_\mu[h; \bar{g}] = \bar{\nabla}_\nu h^\nu{}_\mu - \frac{(1+\beta)}{d} \bar{\nabla}_\mu h = 0 \quad (\text{B.42})$$

Ao tomarmos a condição em que  $\beta = \frac{d}{2} - 1$ , a condição fica da forma:

$$F_\mu[h; \bar{g}] = \bar{\nabla}_\rho h^\rho{}_\mu - \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\mu h = 0. \quad (\text{B.43})$$

Portanto, ao usarmos a transformação (B.36), obtemos que:

$$\begin{aligned} F_\mu[h^\epsilon; \bar{g}] &= \bar{g}^{\rho\nu} \bar{\nabla}_\rho (\nabla_\nu \epsilon_\mu + \nabla_\mu \epsilon_\nu) - \frac{1}{2} \bar{g}^{\rho\sigma} \bar{\nabla}_\mu (\nabla_\rho \epsilon_\sigma + \nabla_\sigma \epsilon_\rho) \\ &= \bar{g}^{\rho\nu} \bar{\nabla}_\rho \nabla_\nu \epsilon_\mu + \bar{g}^{\rho\nu} \bar{\nabla}_\rho \nabla_\mu \epsilon_\nu - \bar{g}^{\rho\sigma} \bar{\nabla}_\mu \nabla_\rho \epsilon_\sigma \\ &= (\bar{g}^{\rho\nu} \delta_\mu^\sigma \bar{\nabla}_\rho \nabla_\nu + \bar{g}^{\rho\nu} \delta_\nu^\sigma \bar{\nabla}_\rho \nabla_\mu - \bar{g}^{\rho\sigma} \bar{\nabla}_\mu \nabla_\rho) \epsilon_\sigma. \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

Portanto,

$$\left( \frac{\delta F_\mu[h^\epsilon; \bar{g}]}{\delta \epsilon^\alpha} \right) \Big|_{\epsilon=0} = (\bar{g}^{\rho\nu} \delta_\mu^\sigma \bar{\nabla}_\rho \nabla_\nu + \bar{g}^{\rho\nu} \delta_\nu^\sigma \bar{\nabla}_\rho \nabla_\mu - \bar{g}^{\rho\sigma} \bar{\nabla}_\mu \nabla_\rho) \delta_\sigma^\alpha \quad (\text{B.45})$$

Ao renomearmos a variável muda  $\sigma$  para  $\alpha$  e a variável livre  $\alpha$  para  $\sigma$  e contrairmos os índices, obtemos que:

$$\left( \frac{\delta F_\mu[h^\epsilon; \bar{g}]}{\delta \epsilon^\sigma} \right) \Big|_{\epsilon=0} = (\bar{g}^{\rho\nu} \delta_\mu^\sigma \bar{\nabla}_\rho \nabla_\nu + \bar{g}^{\rho\nu} \delta_\nu^\sigma \bar{\nabla}_\rho \nabla_\mu - \bar{g}^{\rho\sigma} \bar{\nabla}_\mu \nabla_\rho). \quad (\text{B.46})$$

Finalmente, a ação de *ghost* toma a forma:

$$S_{gh} = \int_x \sqrt{\bar{g}} \bar{C}^\mu (\bar{g}^{\rho\nu} \delta_\mu^\sigma \bar{\nabla}_\rho \nabla_\nu + \bar{g}^{\rho\nu} \delta_\nu^\sigma \bar{\nabla}_\rho \nabla_\mu - \bar{g}^{\rho\sigma} \bar{\nabla}_\mu \nabla_\rho) C_\sigma. \quad (\text{B.47})$$

Finalmente, ao tomarmos as flutuações de campo para zero;  $h = 0$ ,  $\nabla = \bar{\nabla}$ :

$$\begin{aligned} S_{gh} &= \int_x \sqrt{\bar{g}} \bar{C}^\mu (\delta_\mu^\sigma \bar{\nabla}^2 + \bar{\nabla}^\sigma \bar{\nabla}_\mu - \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}^\sigma) C_\sigma \\ &= \int_x \sqrt{\bar{g}} \bar{C}^\mu (\bar{g}_{\mu\nu} \bar{\nabla}^2 + \bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\mu - \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu) C^\nu. \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

Portanto:

$$S_{gh} = \int_x \sqrt{\bar{g}} \bar{C}^\mu (\bar{g}_{\mu\nu} \bar{\nabla}^2 + \bar{R}_{\mu\nu}) C^\nu \quad (\text{B.49})$$

## Apêndice C

# Expansão dos termos de curvatura

Dada a decomposição interpolante que estamos usando, é necessário que nós expandamos os termos  $\sqrt{g}$  e  $R$  até segunda ordem em  $h_{\mu\nu}$  para o cálculo do hessiano. Nessa seção, iremos mostrar os resultados dessa expansão.

Dado que estamos escolhendo a decomposição interpolante, os termos da métrica tomam a forma:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + \frac{\tau}{2} h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu\alpha}, \quad (\text{C.1})$$

onde estamos usando o parâmetro  $\tau$  no lugar de  $\Omega$ , mas claramente  $\Omega = \frac{\tau}{2}$ . Já a inversa toma a seguinte forma:

$$g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{\tau}{2}\right) h^{\mu\alpha} h^{\nu}_{\alpha}, \quad (\text{C.2})$$

onde mais uma vez estamos usando o parâmetro  $\tau$  no lugar de  $\chi$ , mas claramente  $\chi = \left(1 - \frac{\tau}{2}\right)$ .

O termo  $\sqrt{g}$  toma a seguinte forma na decomposição interpolante:

$$\sqrt{g} = \sqrt{\bar{g}} \left(1 + \frac{1}{2} h + \frac{1}{4} (\tau - 1) h_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} + \frac{1}{8} h^2\right), \quad (\text{C.3})$$

onde  $h = h^{\alpha}_{\alpha} = \bar{g}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$  e também usamos o fato de que:

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = e^{Tr(\ln g_{\mu\nu})}. \quad (\text{C.4})$$

No caso dos símbolos de Christoffel, a expansão gera os seguintes termos:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha(1)} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha(2)}, \quad (\text{C.5})$$

com:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} &= \frac{1}{2} \bar{g}^{\alpha\beta} (\partial_{\mu} \bar{g}_{\nu\beta} + \partial_{\nu} \bar{g}_{\mu\beta} - \partial_{\beta} \bar{g}_{\mu\nu}), \\ \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha(1)} &= \frac{1}{2} (\bar{\nabla}_{\mu} h^{\alpha}_{\nu} + \bar{\nabla}_{\nu} h^{\alpha}_{\mu} - \bar{\nabla}^{\alpha} h_{\mu\nu}), \\ \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha(2)} &= \frac{\tau}{4} [\bar{\nabla}_{\mu} (h_{\nu\sigma} h^{\sigma\alpha}) + \bar{\nabla}_{\nu} (h_{\mu\sigma} h^{\sigma\alpha}) - \bar{\nabla}^{\alpha} (h_{\mu\sigma} h^{\sigma}_{\nu})], \\ &\quad - \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} (\bar{\nabla}_{\nu} h_{\mu\beta} + \bar{\nabla}_{\mu} h_{\nu\beta} - \bar{\nabla}_{\beta} h_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Já as expansões para o tensor de Riemann são da forma:

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \bar{R}^\alpha_{\beta\mu\nu} + R^{\alpha(1)}_{\beta\mu\nu} + R^{\alpha(2)}_{\beta\mu\nu}, \quad (\text{C.7})$$

com

$$\begin{aligned} \bar{R}^\alpha_{\beta\mu\nu} &= \partial_\mu \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\mu} + \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\lambda} \bar{\Gamma}^\lambda_{\beta\nu} - \bar{\Gamma}^\alpha_{\nu\lambda} \bar{\Gamma}^\lambda_{\beta\mu}, \\ R^{\alpha(1)}_{\beta\mu\nu} &= \bar{\nabla}_\mu \Gamma^{\alpha(1)}_{\beta\nu} - \bar{\nabla}_\nu \Gamma^{\alpha(1)}_{\beta\mu}, \\ R^{\alpha(2)}_{\beta\mu\nu} &= \bar{\nabla}_\mu \Gamma^{\alpha(2)}_{\beta\nu} - \bar{\nabla}_\nu \Gamma^{\alpha(2)}_{\beta\mu} + \left[ \Gamma^{(1)}_\mu, \Gamma^{(1)}_\nu \right]^\alpha_\beta. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Ao contrairmos um índice de cima com um índice debaixo do tensor de Riemann, obtemos o tensor de Ricci:

$$R_{\beta\mu} = \delta^\mu_\alpha R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \bar{R}_{\beta\nu} + R^{(1)}_{\beta\nu} + R^{(2)}_{\beta\nu}, \quad (\text{C.9})$$

onde:

$$\begin{aligned} R^{(1)}_{\beta\nu} &= \frac{1}{2} [\bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}_\alpha h^\alpha_\nu + \bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\alpha h^\alpha_\beta - \bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}_\nu h - \bar{\nabla}^2 h_{\beta\nu}] + \frac{1}{2} \bar{R}_{\nu\lambda} h^\lambda_\beta + \frac{1}{2} \bar{R}_{\beta\lambda} h^\lambda_\nu + \bar{R}_{\beta\lambda\alpha\nu} h^{\lambda\alpha}, \\ R^{(2)}_{\beta\nu} &= \frac{\tau}{4} \bar{\nabla}_\mu [\bar{\nabla}_\beta (h_{\nu\sigma} h^{\sigma\mu}) + \bar{\nabla}_\nu (h_{\beta\sigma} h^{\sigma\mu}) - \bar{\nabla}^\mu (h_{\beta\sigma} h^\sigma_\nu)] - \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\mu [h^{\mu\lambda} (\bar{\nabla}_\nu h_{\beta\lambda} + \bar{\nabla}_\beta h_{\nu\lambda} - \bar{\nabla}_\lambda h_{\beta\nu})] \\ &\quad - \frac{1}{2} (\tau - 1) \bar{\nabla}_\mu (h_{\mu\sigma} \bar{\nabla}_\beta h^{\sigma\mu}) + \frac{1}{4} \bar{\nabla}_\sigma h (\bar{\nabla}_\beta h^\sigma_\nu + \bar{\nabla}_\nu h^\sigma_\beta - \bar{\nabla}^\sigma h_{\nu\beta}) \\ &\quad - \frac{1}{4} (\bar{\nabla}_\sigma h^\mu_\nu + \bar{\nabla}_\nu h^\mu_\sigma - \bar{\nabla}^\mu h_{\nu\sigma}) (\bar{\nabla}_\beta h^\sigma_\mu + \bar{\nabla}_\mu h^\sigma_\beta - \bar{\nabla}^\sigma h_{\mu\beta}). \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Para as perturbações do escalar de Ricci, sabemos que:  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ , portanto:

$$\begin{aligned} R &= \left( \bar{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \left( 1 - \frac{\tau}{2} \right) h^{\mu\alpha} h^\nu_\alpha \right) \left( \bar{R}_{\mu\nu} + R^{(1)}_{\mu\nu} + R^{(2)}_{\mu\nu} \right) \\ &= \bar{R} + R^{(1)} + R^{(2)}, \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

com:

$$\begin{aligned} R^{(1)} &= \bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}_\nu h^{\beta\nu} - \bar{\nabla}^2 h - h^{\beta\nu} \bar{R}_{\beta\nu} \\ R^{(2)} &= \bar{\nabla}_\beta h^{\beta\lambda} \bar{\nabla}_\lambda h + h^{\beta\lambda} \bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}_\lambda h - \frac{1}{4} \bar{\nabla}_\sigma h \bar{\nabla}^\sigma h - \left( \tau - \frac{3}{4} \right) \bar{\nabla}^\beta h^\mu_\sigma \bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}^\mu h_{\mu\sigma}, \\ &\quad + \frac{1}{2} (\tau - 1) \bar{\nabla}_\beta h_{\mu\sigma} \bar{\nabla}^\mu h^{\sigma\beta} + \left( \frac{\tau}{2} - 1 \right) \bar{R}^\sigma_{\lambda\beta\mu} h^{\lambda\beta} h^\mu_\sigma. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

É importante ressaltarmos que ao tomarmos o limite em que  $\tau \rightarrow 0$ , obtemos as expansões de segunda ordem dos termos de curvatura na parametrização linear. Já ao tomarmos o limite em que  $\tau \rightarrow 1$ , obtemos as expansões de segunda ordem dos termos de curvatura na parametrização exponencial.



## Apêndice D

# Tecnologia para o cálculo do traço

A expansão em coeficientes de Heat-Kernel acaba por ser extremamente útil no cálculo dos traços que surgem do lado direito da equação de Wetterich, de tal forma que:

$$\text{Tr} W(\Delta \mathcal{O}) = \frac{1}{(4\pi)^n} \sum_{n=0}^{\infty} \int \sqrt{\bar{g}} Q_{d/2-n}[W] \text{Tr}[\mathbf{b}_{2n}(\Delta) \mathcal{O}], \quad (\text{D.1})$$

com  $b_{2n}$  sendo os coeficientes de Heat-Kernel e também, com:

$$Q_n[W] = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} dz z^{n-1} W(z); \quad n > 0. \quad (\text{D.2})$$

É importante mencionarmos que a explicação do cálculo do traço é feita de maneira mais detalhada em [35, 89].

Além disso, os primeiros coeficientes  $b_{2n}$  são:

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{1} \quad (\text{D.3})$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{1}R}{6} \quad (\text{D.4})$$

$$\mathbf{b}_4 = \frac{1}{180} \left( R^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta} - R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \frac{5}{2} R^2 + 6\nabla^2 R \right) \mathbf{1} + \frac{1}{12} \Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu}, \quad (\text{D.5})$$

com  $\Omega^{\mu\nu} = [\nabla^\mu, \nabla^\nu]$ , de tal forma que:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \phi = 0 \quad (\text{D.6})$$

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\alpha = R^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta \quad (\text{D.7})$$

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] T^{\alpha\beta} = R^\alpha_{\lambda\mu\nu} T^{\lambda\beta} + R^\beta_{\lambda\mu\nu} T^{\alpha\lambda} \quad (\text{D.8})$$

Obviamente, no caso do truncamento de Einstein-Hilbert, nossos coeficientes de interesse serão apenas os dois primeiros.

Vamos tomar como exemplo o cálculo do traço do setor de *ghost* no primeiro cálculo que fizemos para gravitação assintoticamente segura, mas dessa vez sem usar a aproximação de background simetricamente esférico (removendo a notação de barra dos termos geométricos, só por simplificação de notação

novamente).

$$\begin{aligned}
Tr[gh] &= -Tr\delta_\nu^\mu \frac{\partial_t R_k}{\delta_\nu^\mu P_k - R_\nu^\mu} = -Tr \frac{\partial_t R_k}{P_k} \left[ \delta_\nu^\mu + \frac{R_\nu^\mu}{P_k} + \mathcal{O}(R^2) \right] \\
&= -Tr\delta_\nu^\mu \frac{\partial_t R_k}{P_k} - Tr R_\nu^\mu \frac{\partial_t R_k}{P_k^2} \\
&= -\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \sum_{n=0} \int_x \sqrt{g} Q_{d/2-n} \left[ \frac{\partial_t R_k}{P_k} \right] Tr[b_{2n}(\Delta)\delta_\nu^\mu] \\
&\quad - \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \sum_{n=0} \int_x \sqrt{g} Q_{d/2-n} \left[ \frac{\partial_t R_k}{P_k^2} Tr[b_{2n}(\Delta)R_\nu^\mu] \right] + \mathcal{O}(R^2), \tag{D.9}
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
Tr[b_0\delta_\nu^\mu] &= d, \\
Tr[b_2\delta_\nu^\mu] &= \frac{d}{6}R, \\
Tr[b_0(\Delta)R_\nu^\mu] &= R. \tag{D.10}
\end{aligned}$$

Portanto:

$$Tr[gh] = -\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_x \sqrt{g} \left\{ dQ_{d/2} \left[ \frac{\partial_t R_k}{P_k} \right] + \left[ \frac{d}{6}Q_{d/2-1} \left[ \frac{\partial_t R_k}{P_k} \right] + Q_{d/2} \left[ \frac{\partial_t R_k}{P_k^2} \right] \right] \right\}. \tag{D.11}$$

O raciocínio acima também pode ser implementado no primeiro cálculo que fizemos para segurança assintótica ao usarmos os resultados de (3.55), de tal forma que a equação (3.67), fica:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Gamma_k}{dt} &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_x \sqrt{g} \left\{ \frac{d(d+1)}{4} Q_{d/2} \left( \frac{\partial_t R_k + \eta R_k}{P_k - 2\Lambda_k} \right) - dQ_{d/2} \left( \frac{\partial_t R_k}{P_k} \right) \right. \\
&\quad + \left[ \frac{d(d+1)}{24} Q_{d/2-1} \left( \frac{\partial_t R_k + \eta R_k}{P_k - 2\Lambda_k} \right) - \frac{d}{6} Q_{d/2-1} \left( \frac{\partial_t R_k}{P_k} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{d(d-1)}{4} Q_{d/2} \left( \frac{\partial_t R_k + \eta R_k}{(P_k - 2\Lambda_k)^2} \right) - Q_{d/2} \left( \frac{\partial_t R_k}{P_k^2} \right) \right] R + \mathcal{O}(R^2) \right\}. \tag{D.12}
\end{aligned}$$

Assim, para calcularmos o lado direito, basta agora somente calcularmos as funções  $Q's$ .

Entretanto, quando nós usamos o background simetricamente esférico, que satisfaz as relações (3.56) e (3.57), não precisamos nos preocupar com índices livres acompanhando os coeficientes  $b's$ , como nas equações em (D.10). Portanto, nesse caso, para cada tipo de campo, já temos os  $Tr[b_{2n}]$  bem definidos a partir da tabela abaixo:

	0	1T	2T
$Trb_0$	1	3	5
$Trb_2$	$\frac{R}{6}$	$\frac{R}{4}$	$-\frac{5R}{6}$
$Trb_4$	$\frac{29R^2}{2160}$	$-\frac{7R^2}{1440}$	$-\frac{R^2}{432}$
$Trb_6$	$\frac{37R^3}{54432}$	$-\frac{541R^3}{362880}$	$-\frac{311R^3}{54432}$
$Trb_8$	$\frac{149R^4}{6531840}$	$-\frac{157R^4}{2488320}$	$\frac{109R^4}{1306368}$

A coluna 0 representa o setor escalar  $\sigma$  e  $h$ , a coluna 1T representa o setor de vetor transversal  $\xi_\mu$  e a coluna 2T representa o setor tensorial transversal e de traço nulo  $h_{\mu\nu}^{TT}$ . Obviamente, como foi mencionado

anteriormente, essa tabela tem suas limitações: Primeiramente, devemos entender que o método dos coeficientes de Heat-Kernel só serão válidos para uma situação em que estamos tomando as flutuações de campo para zero. Caso contrário, teríamos termos com vértices (nesse caso, precisaríamos usar o método da expansão em vértices, como explicado de forma breve em [118]), o que não nos permitiria o cálculo do traço. Além disso, o fato de usarmos a aproximação do background esfericamente simétrico faz com que os termos de curvatura envolvendo  $R$  não influenciem no momento em que calculamos  $Tr[\mathbf{b}_{2n}(\Delta) \mathcal{O}]$ . E para finalizar, se não tivéssemos termos laplacianos com derivadas covariantes contraídas, como por exemplo, ao invés de  $\nabla_\mu \nabla^\mu R$ , termos  $\nabla_\mu \nabla_\nu R$ , não poderíamos fazer a substituição  $P_k(\Delta) \rightarrow \Delta$ , ao adicionarmos o termo de cutoff  $R_k$  ao hessiano, já que teríamos termos não laplacianos. Isso conseqüentemente nos faria ter que encontrar uma forma para o cálculo do traço para um caso mais universal, com a presença desses termos, como é explicado em [119]

# Referências Bibliográficas

- [1] S. Tomonaga. On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields. *Prog. Theor. Phys.*, 1:27–42, 1946.
- [2] Zirô Koba, Takao Tati, and Shin ichirô Tomonaga. On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields. II: Case of Interacting Electromagnetic and Electron Fields. *Prog. Theor. Phys.*, 2(3):101–116, 1947.
- [3] Sin-Itiro Tomonaga and J. R. Oppenheimer. On Infinite Field Reactions in Quantum Field Theory. *Phys. Rev.*, 74:224–225, 1948.
- [4] Julian S. Schwinger. Quantum electrodynamics. I A covariant formulation. *Phys. Rev.*, 74:1439, 1948.
- [5] Julian S. Schwinger. On Quantum electrodynamics and the magnetic moment of the electron. *Phys. Rev.*, 73:416–417, 1948.
- [6] Julian S. Schwinger. Quantum electrodynamics. 2. Vacuum polarization and selfenergy. *Phys. Rev.*, 75:651, 1948.
- [7] R. P. Feynman. Relativistic cutoff for quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, 74:1430–1438, 1948.
- [8] R. P. Feynman. A Relativistic cutoff for classical electrodynamics. *Phys. Rev.*, 74:939–946, 1948.
- [9] R. P. Feynman. Space - time approach to quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, 76:769–789, 1949.
- [10] C. N. Yang and R. L. Mills. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Phys. Rev.*, 96:191–195, Oct 1954.
- [11] Chen-Ning Yang and R. L. Mills. Isotopic spin conservation and a generalized gauge invariance. 1954.
- [12] Steven Weinberg. A Model of Leptons. *Phys. Rev. Lett.*, 19:1264–1266, 1967.
- [13] Abdus Salam. Weak and Electromagnetic Interactions. *Conf. Proc. C*, 680519:367–377, 1968.
- [14] S. L. Glashow. Partial Symmetries of Weak Interactions. *Nucl. Phys.*, 22:579–588, 1961.
- [15] Gerard 't Hooft and M. J. G. Veltman. Regularization and Renormalization of Gauge Fields. *Nucl. Phys. B*, 44:189–213, 1972.

- [16] M. Y. Han and Yoichiro Nambu. Three Triplet Model with Double SU(3) Symmetry. *Phys. Rev.*, 139:B1006–B1010, 1965.
- [17] O. W. Greenberg. Spin and Unitary Spin Independence in a Paraquark Model of Baryons and Mesons. *Phys. Rev. Lett.*, 13:598–602, 1964.
- [18] David J. Gross and Frank Wilczek. Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories. *Phys. Rev. Lett.*, 30:1343–1346, 1973.
- [19] H. David Politzer. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? *Phys. Rev. Lett.*, 30:1346–1349, 1973.
- [20] Pankaj S. Joshi. *Spacetime Singularities*. 11 2013.
- [21] Gerard 't Hooft and M.J.G. Veltman. One loop divergencies in the theory of gravitation. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Theor. A*, 20:69–94, 1974.
- [22] Christian F. Steinwachs. Towards a unitary, renormalizable and ultraviolet-complete quantum theory of gravity. 4 2020.
- [23] Steven Weinberg. Ultraviolet divergences in quantum theories of gravitation. In *General relativity*. 1979.
- [24] Christof Wetterich. Exact evolution equation for the effective potential. *Phys. Lett. B*, 301:90–94, 1993.
- [25] M. Reuter. Nonperturbative evolution equation for quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 57:971–985, 1998.
- [26] Benjamin Bürger, Jan M. Pawłowski, Manuel Reichert, and Bernd-Jochen Schaefer. Curvature dependence of quantum gravity with scalars. 12 2019.
- [27] Kevin Falls, Callum R. King, Daniel F. Litim, Kostas Nikolakopoulos, and Christoph Rahmede. Asymptotic safety of quantum gravity beyond Ricci scalars. *Phys. Rev. D*, 97(8):086006, 2018.
- [28] Holger Gies, Benjamin Knorr, and Stefan Lippoldt. Generalized Parametrization Dependence in Quantum Gravity. *Phys. Rev. D*, 92(8):084020, 2015.
- [29] Kevin Falls. Renormalization of Newton’s constant. *Phys. Rev. D*, 92(12):124057, 2015.
- [30] Gustavo P. De Brito, Nobuyoshi Ohta, Antonio D. Pereira, Anderson A. Tomaz, and Masatoshi Yamada. Asymptotic safety and field parametrization dependence in the  $f(R)$  truncation. *Phys. Rev. D*, 98(2):026027, 2018.
- [31] Astrid Eichhorn, Holger Gies, and Michael M. Scherer. Asymptotically free scalar curvature-ghost coupling in Quantum Einstein Gravity. *Phys. Rev. D*, 80:104003, 2009.
- [32] Astrid Eichhorn and Holger Gies. Ghost anomalous dimension in asymptotically safe quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 81:104010, 2010.

- [33] Nicolai Christiansen, Daniel F. Litim, Jan M. Pawłowski, and Andreas Rodigast. Fixed points and infrared completion of quantum gravity. *Phys. Lett. B*, 728:114–117, 2014.
- [34] Alessandro Codello, Giulio D’Odorico, and Carlo Pagani. Consistent closure of renormalization group flow equations in quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 89(8):081701, 2014.
- [35] Alessandro Codello, Roberto Percacci, and Christoph Rahmede. Investigating the Ultraviolet Properties of Gravity with a Wilsonian Renormalization Group Equation. *Annals Phys.*, 324:414–469, 2009.
- [36] Nobuyoshi Ohta, Roberto Percacci, and Gian Paolo Vacca. Renormalization Group Equation and scaling solutions for  $f(R)$  gravity in exponential parametrization. *Eur. Phys. J. C*, 76(2):46, 2016.
- [37] Maximilian Demmel, Frank Saueressig, and Omar Zanusso. A proper fixed functional for four-dimensional Quantum Einstein Gravity. *JHEP*, 08:113, 2015.
- [38] Alessandro Codello, Roberto Percacci, and Christoph Rahmede. Ultraviolet properties of  $f(R)$ -gravity. *Int. J. Mod. Phys. A*, 23:143–150, 2008.
- [39] Pedro F. Machado and Frank Saueressig. On the renormalization group flow of  $f(R)$ -gravity. *Phys. Rev. D*, 77:124045, 2008.
- [40] Maximilian Demmel, Frank Saueressig, and Omar Zanusso. Fixed-Functionals of three-dimensional Quantum Einstein Gravity. *JHEP*, 11:131, 2012.
- [41] Maximilian Demmel, Frank Saueressig, and Omar Zanusso. RG flows of Quantum Einstein Gravity on maximally symmetric spaces. *JHEP*, 06:026, 2014.
- [42] Kevin Falls, Daniel F. Litim, Konstantinos Nikolakopoulos, and Christoph Rahmede. Further evidence for asymptotic safety of quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 93(10):104022, 2016.
- [43] Nobuyoshi Ohta, Roberto Percacci, and Gian Paolo Vacca. Flow equation for  $f(R)$  gravity and some of its exact solutions. *Phys. Rev. D*, 92(6):061501, 2015.
- [44] Yannick Kluth and Daniel F. Litim. Fixed Points of Quantum Gravity and the Dimensionality of the UV Critical Surface. 8 2020.
- [45] Wataru Souma. Nontrivial ultraviolet fixed point in quantum gravity. *Prog. Theor. Phys.*, 102:181–195, 1999.
- [46] M. Reuter and Frank Saueressig. Renormalization group flow of quantum gravity in the Einstein-Hilbert truncation. *Phys. Rev. D*, 65:065016, 2002.
- [47] O. Lauscher and M. Reuter. Flow equation of quantum Einstein gravity in a higher derivative truncation. *Phys. Rev. D*, 66:025026, 2002.
- [48] Alessandro Codello and Roberto Percacci. Fixed points of higher derivative gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 97:221301, 2006.

- [49] Dario Benedetti, Pedro F. Machado, and Frank Saueressig. Asymptotic safety in higher-derivative gravity. *Mod. Phys. Lett. A*, 24:2233–2241, 2009.
- [50] Dario Benedetti, Pedro F. Machado, and Frank Saueressig. Taming perturbative divergences in asymptotically safe gravity. *Nucl. Phys. B*, 824:168–191, 2010.
- [51] Dario Benedetti and Francesco Caravelli. The Local potential approximation in quantum gravity. *JHEP*, 06:017, 2012. [Erratum: *JHEP* 10, 157 (2012)].
- [52] Nobuyoshi Ohta and Roberto Percacci. Higher Derivative Gravity and Asymptotic Safety in Diverse Dimensions. *Class. Quant. Grav.*, 31:015024, 2014.
- [53] Nicolai Christiansen, Benjamin Knorr, Jan M. Pawłowski, and Andreas Rodigast. Global Flows in Quantum Gravity. *Phys. Rev. D*, 93(4):044036, 2016.
- [54] Holger Gies, Benjamin Knorr, Stefan Lippoldt, and Frank Saueressig. Gravitational Two-Loop Counterterm Is Asymptotically Safe. *Phys. Rev. Lett.*, 116(21):211302, 2016.
- [55] Tobias Denz, Jan M. Pawłowski, and Manuel Reichert. Towards apparent convergence in asymptotically safe quantum gravity. *Eur. Phys. J. C*, 78(4):336, 2018.
- [56] Kevin Falls, Nobuyoshi Ohta, and Roberto Percacci. Towards the determination of the dimension of the critical surface in asymptotically safe gravity. *Phys. Lett. B*, 810:135773, 2020.
- [57] Djamel Dou and Roberto Percacci. The running gravitational couplings. *Class. Quant. Grav.*, 15:3449–3468, 1998.
- [58] Roberto Percacci and Daniele Perini. Constraints on matter from asymptotic safety. *Phys. Rev. D*, 67:081503, 2003.
- [59] Roberto Percacci and Daniele Perini. Asymptotic safety of gravity coupled to matter. *Phys. Rev. D*, 68:044018, 2003.
- [60] Mikhail Shaposhnikov and Christof Wetterich. Asymptotic safety of gravity and the Higgs boson mass. *Phys. Lett. B*, 683:196–200, 2010.
- [61] Gaurav Narain and Christoph Rahmede. Renormalization Group Flow in Scalar-Tensor Theories. II. *Class. Quant. Grav.*, 27:075002, 2010.
- [62] O. Zanusso, L. Zambelli, G. P. Vacca, and R. Percacci. Gravitational corrections to Yukawa systems. *Phys. Lett. B*, 689:90–94, 2010.
- [63] Astrid Eichhorn and Holger Gies. Light fermions in quantum gravity. *New J. Phys.*, 13:125012, 2011.
- [64] Astrid Eichhorn. Quantum-gravity-induced matter self-interactions in the asymptotic-safety scenario. *Phys. Rev. D*, 86:105021, 2012.

- [65] Pietro Donà, Astrid Eichhorn, and Roberto Percacci. Matter matters in asymptotically safe quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 89(8):084035, 2014.
- [66] Peter Labus, Roberto Percacci, and Gian Paolo Vacca. Asymptotic safety in  $O(N)$  scalar models coupled to gravity. *Phys. Lett. B*, 753:274–281, 2016.
- [67] Kin-ya Oda and Masatoshi Yamada. Non-minimal coupling in Higgs–Yukawa model with asymptotically safe gravity. *Class. Quant. Grav.*, 33(12):125011, 2016.
- [68] Yuta Hamada and Masatoshi Yamada. Asymptotic safety of higher derivative quantum gravity non-minimally coupled with a matter system. *JHEP*, 08:070, 2017.
- [69] Astrid Eichhorn and Aaron Held. Viability of quantum-gravity induced ultraviolet completions for matter. *Phys. Rev. D*, 96(8):086025, 2017.
- [70] Astrid Eichhorn, Yuta Hamada, Johannes Lumma, and Masatoshi Yamada. Quantum gravity fluctuations flatten the Planck-scale Higgs potential. *Phys. Rev. D*, 97(8):086004, 2018.
- [71] Astrid Eichhorn and Aaron Held. Top mass from asymptotic safety. *Phys. Lett. B*, 777:217–221, 2018.
- [72] Natália Alkofer and Frank Saueressig. Asymptotically safe  $f(R)$ -gravity coupled to matter I: the polynomial case. *Annals Phys.*, 396:173–201, 2018.
- [73] Gustavo P. De Brito, Yuta Hamada, Antonio D. Pereira, and Masatoshi Yamada. On the impact of Majorana masses in gravity-matter systems. *JHEP*, 08:142, 2019.
- [74] Christof Wetterich and Masatoshi Yamada. Variable Planck mass from the gauge invariant flow equation. *Phys. Rev. D*, 100(6):066017, 2019.
- [75] Manuel Reichert and Juri Smirnov. Dark Matter meets Quantum Gravity. *Phys. Rev. D*, 101(6):063015, 2020.
- [76] Jesse Daas, Wouter Oosters, Frank Saueressig, and Jian Wang. Asymptotically safe gravity with fermions. *Phys. Lett. B*, 809:135775, 2020.
- [77] Astrid Eichhorn and Martin Pauly. Constraining power of asymptotic safety for scalar fields. 9 2020.
- [78] Gustavo P. de Brito, Astrid Eichhorn, and Marc Schiffer. Light charged fermions in quantum gravity. *Phys. Lett. B*, 815:136128, 2021.
- [79] Gustavo P. de Brito, Antonio D. Pereira, and Arthur F. Vieira. Exploring new corners of asymptotically safe unimodular quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 103(10):104023, 2021.
- [80] D. J. Gross and Frank Wilczek. Asymptotically Free Gauge Theories - I. *Phys. Rev. D*, 8:3633–3652, 1973.



- [81] Gaurav Narain and Roberto Percacci. Renormalization Group Flow in Scalar-Tensor Theories. I. *Class. Quant. Grav.*, 27:075001, 2010.
- [82] K. G. Wilson and John B. Kogut. The Renormalization group and the epsilon expansion. *Phys. Rept.*, 12:75–199, 1974.
- [83] Kenneth G. Wilson. The Renormalization Group: Critical Phenomena and the Kondo Problem. *Rev. Mod. Phys.*, 47:773, 1975.
- [84] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.
- [85] Robert Percacci. *An Introduction to Covariant Quantum Gravity and Asymptotic Safety*, volume 3 of *100 Years of General Relativity*. World Scientific, 2017.
- [86] Kenneth G. Wilson and Michael E. Fisher. Critical exponents in 3.99 dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 28:240–243, 1972.
- [87] A. Agodi, G. Andronico, P. Cea, M. Consoli, and L. Cosmai. The  $(\lambda \Phi^4)(4)$  theory on the lattice: Effective potential and triviality. *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, 63:637–639, 1998.
- [88] L. F. Abbott. The Background Field Method Beyond One Loop. *Nucl. Phys. B*, 185:189–203, 1981.
- [89] Arthur Ferreira Vieira. *Gravitação Quântica Assintoticamente Segura: Aspectos Fundamentais e a Teoria Unimodular*. Master’s thesis, Niteroi, Fluminense U., 2020.
- [90] Daniel F. Litim. Optimized renormalization group flows. *Phys. Rev. D*, 64:105007, 2001.
- [91] O. Lauscher and M. Reuter. Ultraviolet fixed point and generalized flow equation of quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 65:025013, 2002.
- [92] P Jordan. Five dimensional cosmology. *Astr. Nachr*, 276:193–208, 1948.
- [93] Pascual Jordan. The present state of dirac’s cosmological hypothesis. *Z. Phys*, 157:112–121, 1959.
- [94] C. Brans and R. H. Dicke. Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.*, 124:925–935, 1961.
- [95] Carl H Brans. *Mach’s principle and a varying gravitational constant*. PhD thesis, Princeton University, 1961.
- [96] Peter W. Higgs. Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 13:508–509, 1964.
- [97] Peter W. Higgs. Broken symmetries, massless particles and gauge fields. *Phys. Lett.*, 12:132–133, 1964.
- [98] F. Englert and R. Brout. Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons. *Phys. Rev. Lett.*, 13:321–323, 1964.

- [99] Georges Aad et al. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Phys. Lett. B*, 716:1–29, 2012.
- [100] Clare Burrage, Edmund J. Copeland, and Peter Millington. Radial acceleration relation from symmetron fifth forces. *Phys. Rev. D*, 95(6):064050, 2017. [Erratum: *Phys.Rev.D* 95, 129902 (2017)].
- [101] Joachim Janz, Michele Cappellari, Aaron J Romanowsky, Luca Ciotti, Adebusola Alabi, and Duncan A Forbes. The mass discrepancy acceleration relation in early-type galaxies: extended mass profiles and the phantom menace to *mond*. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 461(3):2367–2373, 2016.
- [102] Clare Burrage, Edmund J. Copeland, Christian Käding, and Peter Millington. Symmetron scalar fields: Modified gravity, dark matter, or both? *Phys. Rev. D*, 99(4):043539, 2019.
- [103] Alan H. Guth. The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. *Phys. Rev. D*, 23:347–356, 1981.
- [104] Andrei D. Linde. A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems. *Phys. Lett. B*, 108:389–393, 1982.
- [105] F. D. Mazzitelli, J. P. Paz, and C. El Hasi. Reheating of the Universe and Evolution of the Inflaton. *Phys. Rev. D*, 40:955–966, 1989.
- [106] Andrei D Linde. Chaotic inflation. *Physics Letters B*, 129(3-4):177–181, 1983.
- [107] David Lovelock. The einstein tensor and its generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, 12(3):498–501, 1971.
- [108] David Lovelock. The four-dimensionality of space and the einstein tensor. *Journal of Mathematical Physics*, 13(6):874–876, 1972.
- [109] Tulio Ottoni Ferreira da Costa. Estrelas de Nêutrons com Rotação em Teorias Modificadas da Gravidade. Master’s thesis, Niteroi, Fluminense U., 2020.
- [110] Bernardo França de Aguiar. Neutron stars and screening mechanisms. Master’s thesis, Niteroi, Fluminense U., 2020.
- [111] Paul AM Dirac. The cosmological constants. *Nature*, 139(3512):323–323, 1937.
- [112] Israel Quiros. Selected topics in scalar–tensor theories and beyond. *Int. J. Mod. Phys. D*, 28(07):1930012, 2019.
- [113] S. Pokorski. *GAUGE FIELD THEORIES*. Cambridge University Press, 1 2005.
- [114] W. Greiner and J. Reinhardt. *Field quantization*. 1996.

- [115] Tom Lancaster and Stephen J. Blundell. *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*. Oxford University Press, 2014.
- [116] Ashok Das. *Field Theory: A Path Integral Approach*, volume 83. WSP, 2019.
- [117] Ashok Das. *Lectures on quantum field theory*. 2008.
- [118] Manuel Reichert. Lecture notes: Functional Renormalisation Group and Asymptotically Safe Quantum Gravity. *PoS*, 384:005, 2020.
- [119] Dario Benedetti, Kai Groh, Pedro F. Machado, and Frank Saueressig. The Universal RG Machine. *JHEP*, 06:079, 2011.