



INSTITUTO DE FÍSICA  

---

Universidade Federal Fluminense

Matheus Dalpra de Oliveira

Soluções analíticas da equação de Dirac com  
simetrias exatas de spin e pseudo-spin em  
espaço-tempo curvo

Volta Redonda

2020

**Matheus Dalpra de Oliveira**

**Soluções analíticas da equação de Dirac com  
simetrias exatas de spin e pseudo-spin em  
espaço-tempo curvo**

Tese apresentada ao curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Alexandre Grezzi de Miranda Schmidt

Volta Redonda

2020

Ficha catalográfica automática - SDC/BIF  
Gerada com informações fornecidas pelo autor

D278s De oliveira, Matheus Dalpra  
Soluções analíticas da equação de Dirac com simetrias  
exatas de spin e pseudo-spin em espaço-tempo curvo / Matheus  
Dalpra De oliveira ; Alexandre Grezzi de Miranda Schmidt,  
orientador. Niterói, 2020.  
189 f. : il.

Tese (doutorado)-Universidade Federal Fluminense, Niterói,  
2020.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22409/PPGF.2020.d.13736168730>

1. Equação de Dirac. 2. Espaço-tempo curvo. 3. Simetria  
de spin. 4. Simetria de pseudo-spin. 5. Produção  
intelectual. I. Schmidt, Alexandre Grezzi de Miranda,  
orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de  
Física. III. Título.

CDD -

Bibliotecário responsável: Sandra Lopes Coelho - CRB7/3389

Dedico esse trabalho a minha família, que tanto amo e que  
sempre me apoiou.

## Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus pela minha vida e saúde para poder estudar.

Agradeço também a minha família e amigos pelo apoio em todos os momentos.

Assim como aos professores que tive ao longo de tantos anos de estudo, em particular a meu orientador prof. Alexandre, me ajudando a crescer como pessoa e em conhecimento até chegar nesse momento.

Por fim, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Equação de Dirac com simetrias exatas de spin e pseudo-spin em espaço-tempo curvo</b>	<b>12</b>
2.1	Equação de Dirac na presença de um campo eletromagnético em espaço-tempo curvo . . . . .	13
2.2	Campo EM com simetria esférica . . . . .	20
2.2.1	Função de onda espinorial angular . . . . .	21
2.3	Métrica com $f(r) = g(r)$ e função de onda radial . . . . .	31
2.3.1	Desacoplamento da equação radial com transformação unitária . . . . .	33
2.3.2	Desacoplamento da equação radial com simetrias exatas de spin e pseudo-spin . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Soluções exatas da equação de Dirac em espaço-tempo curvo</b>	<b>40</b>
3.1	Átomo de Hidrogênio . . . . .	40
3.2	Potencial Dirac-Morse . . . . .	45
3.3	Potencial radial linear . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Oscilador de Dirac com potenciais escalar e vetor quadrático radial</b>	<b>55</b>

4.1	Simetria exata de spin . . . . .	56
4.2	Simetria exata de pseudo-spin . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Oscilador modificado de Dirac com potenciais escalar e vetor quadrático radial</b>	<b>69</b>
5.1	Simetria exata de spin . . . . .	70
5.2	Simetria exata de pseudo-spin . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Potenciais vetor e escalar anarmônico com potencial tensor do tipo <math>Ar + B/r^3</math></b>	<b>85</b>
6.1	Simetria exata de spin . . . . .	86
6.2	Simetria exata de pseudo-spin . . . . .	91
<b>7</b>	<b>Potenciais escalar e vetor tipo-Coulomb e potencial tensor tipo-Mie</b>	<b>96</b>
7.1	Simetria exata de spin . . . . .	97
7.2	Simetria exata de pseudo-spin . . . . .	101
<b>8</b>	<b>Potenciais escalar e vetor tipo-Morse e potencial tensor Hellmann</b>	<b>106</b>
8.1	Simetria exata de spin . . . . .	107
8.2	Simetria exata de pseudo-spin . . . . .	113
<b>9</b>	<b>Conclusões e projetos futuros</b>	<b>119</b>
<b>A</b>	<b>Identidades úteis dos polinômios de Jacobi e Legendre associados</b>	<b>123</b>
<b>B</b>	<b>Cálculos das constantes de normalização do capítulo 3</b>	<b>125</b>
B.1	Átomo de Hidrogênio . . . . .	126

B.2	Potencial Dirac-Morse . . . . .	126
B.3	Potencial radial linear . . . . .	127
<b>C</b>	<b>Geodésica radial em espaço-tempo curvo</b>	<b>130</b>
<b>D</b>	<b>Constantes de normalização e tabelas de espectros de energia do capítulo 4</b>	<b>134</b>
D.1	Cálculos das constantes de normalização . . . . .	134
D.2	Tabelas de espectros de energia . . . . .	137
<b>E</b>	<b>Constantes de normalização e tabelas de espectros de energia do capítulo 5</b>	<b>140</b>
E.1	Cálculos das constantes de normalização . . . . .	140
E.2	Tabelas de espectros de energia . . . . .	142
<b>F</b>	<b>Constantes de normalização e tabelas de espectros de energia do capítulo 6</b>	<b>145</b>
F.1	Cálculos das constantes de normalização . . . . .	145
F.2	Tabelas de espectros de energia . . . . .	148
<b>G</b>	<b>Constantes de normalização e tabelas de espectros de energia do capítulo 7</b>	<b>150</b>
G.1	Cálculos das constantes de normalização . . . . .	150
G.2	Tabelas de espectros de energia . . . . .	153
<b>H</b>	<b>Tabelas de espectros de energia do capítulo 8</b>	<b>156</b>



# Lista de Figuras

- 3.1 Gráficos das densidades de probabilidade radiais  $|\Psi_0(r)|^2 = r^2(1 + \alpha^2 b/r)^2 |\Psi_c|^2$  em um espaço curvo com o elemento de linha dada por (3.10) para  $n = 0$ . Traçamos a densidade de probabilidade em espaço-tempo plano ( $b = 0$ ) e, à medida que o parâmetro  $b$  aumenta, observamos que as curvas se aproximam da origem. Como o problema também pode ser interpretado como uma partícula com massa dependente da posição, observamos que, como no caso não-relativístico [135], a densidade de probabilidade se torna mais alta na região em que a partícula se torna mais massiva —  $m(r) = (1 + \alpha^2 b/r)$ . Usamos unidades atômicas. . . . . 44
- 3.2 Gráficos das densidades de probabilidade radiais  $|\Psi_1(r)|^2 = r^2(1 + \alpha^2 b/r)^2 |\Psi_c|^2$  em espaço-tempo curvo com elemento de linha dado por (3.10) for  $n = 1$ . Para  $b = 0$ , traçamos a densidade de probabilidade em espaço-tempo plano, e de acordo com que o parâmetro  $b$  aumenta observamos que a acurva se aproxima da origem. Como no caso anterior a figura da densidade de probabilidade se aproxima da região onde a massa é maior —  $m(r) = (1 + \alpha^2 b/r)$ . Usamos unidades atômicas. . . 45

3.3	<p>Gráficos das densidades de probabilidade radiais <math> \Psi_0(r) ^2 = r^2(1 + \alpha^2 b e^{-\delta r})^2  \Psi_c ^2</math> em espaço-tempo curvo com o potencial Dirac-Morse (<math>b = 0.1</math> e <math>b = 0.2</math>) e espaço-tempo plano (<math>b = 0</math>) para <math>n = 0</math>. Como <math>\delta</math> é pequeno, não observamos a contribuição em massa dependente da posição — <math>m(r) = 1 + \alpha^2 b e^{-\delta r}</math>. Valores dos parâmetros são: <math>C = 0.9999500</math>, <math>S = 0.0099995</math>, <math>a = 1</math>, <math>\delta = 0.05</math> e usamos unidades atômicas. . . . .</p>	49
3.4	<p>Gráficos das densidades de probabilidade radiais <math> \Psi_0(r) ^2 = r^2(1 + \alpha^2 b r)^2  \Psi_c ^2</math> para o potencial radial linear em espaço-tempo curvo e parâmetros <math>b = 0.3</math> (curva laranja) e <math>b = 0.7</math> (curva verde) e espaço-tempo plano <math>b = 0</math> (curva azul) para <math>n = 0</math>. Neste exemplo a densidade de probabilidade não se concentra em torno de onde a massa efetiva é maior — <math>m(r) = (1 + \alpha^2 b r)</math>. Os parâmetros são: <math>k = 1</math>, <math>a = 0.1</math> e usamos unidades atômicas. . . . .</p>	53
3.5	<p>Gráficos das densidades de probabilidade radiais <math> \Psi_1(r) ^2 = r^2(1 + \alpha^2 b r)^2  \Psi_c ^2</math> para o potencial radial linear em espaço-tempo curvo com parâmetro <math>b = 0.3</math> (curva laranja) e <math>b = 0.7</math> (curva verde) e espaço-tempo plano <math>b = 0</math> (curva azul) para <math>n = 1</math>. Assim como para <math>n = 0</math>, aqui a densidade de probabilidade não se concentra em torno de onde a massa efetiva é maior — <math>m(r) = (1 + \alpha^2 b r)</math>. Os parâmetros são: <math>k = 1</math>, <math>a = 0.1</math> e usamos as unidades atômicas. . . . .</p>	53
4.1	<p>Gráficos de alguns espectros de energia para valores diferentes de <math>\beta_1</math>, onde usamos <math>\mu = 10</math> e <math>\epsilon^+</math>. Notamos que para <math>\beta_1 \neq 0</math> haverá quebra de degenerescência nos dupletos. Usamos unidades atômicas. . . . .</p>	60

4.2	Gráficos das densidades de probabilidade radiais $ \Psi_c(r) ^2 = r^2(1 + \alpha^2\mu r^2)^2 \Psi_c ^2$ em espaço-tempo curvo com elemento de linha dado por (4.17) para $n = 0$ . Traçamos as densidades de probabilidade em espaço-tempo plano ( $\mu = 0$ ), e em espaço-tempo curvo de acordo com que o valor de $\mu$ aumenta. Observamos que as curvas em espaço-tempo curvo se aproximam da origem quanto maior o valor de $\mu$ , onde a massa é menor — $m(r) = 1 + \alpha^2\mu r^2$ . . . . .	61
4.3	Gráficos de alguns espectros de energia para valores diferentes de $\beta_2$ , onde usamos $\mu = 10$ e $\epsilon^+$ . Notamos que para $\beta_2 \neq 0$ haverá quebra de degenerescência nos dupletos. Usamos unidades atômicas. . . . .	65
4.4	Gráficos das densidades de probabilidade radiais $ \Psi_c(r) ^2 = r^2(1 - \alpha^2\mu r^2)^2 \Psi_c ^2$ em espaço-tempo curvo com elemento de linha dado por (4.28) para $\tilde{n} = 0$ . Traçamos a densidade de probabilidade em espaço-tempo plano ( $\mu = 0$ ), e de acordo com que o valor do parâmetro $\mu$ aumenta observamos que as curvas se aproximam da origem. Desta vez, as densidades se aproximam de regiões onde a massa é maior — $m(r) = 1 - \alpha^2\mu r^2$ . . . . .	66
5.1	Gráficos de alguns espectros de energia para valores diferentes de $\beta_1$ , onde usamos $A = 0$ , $\mu = 10$ e $\epsilon^+$ . Notamos que para $\beta_1 \neq 0$ haverá quebra de degenerescência nos dupletos. Usamos unidades atômicas. . . . .	74
5.2	Gráficos de alguns espectros de energia para valores diferentes de $A$ , onde usamos $\beta_1 = 0$ , $\mu = 10$ e $\epsilon^+$ . Notamos que para $A \neq 0$ haverá quebra de degenerescência nos dupletos. Usamos unidades atômicas. . . . .	75

5.3	Gráficos das densidades de probabilidade radiais normalizadas $ \Psi_c(r) ^2 = r^2(1 + \alpha^2\mu r^2)^2 \Psi_c ^2$ em espaço-tempo curvo com elemento de linha dado por (5.18) para $n = 0$ . A curva para $\mu = 0$ representa a densidade de probabilidade em espaço-tempo plano, as curvas para $\mu \neq 0$ representam as densidades de probabilidade em espaço-tempo curvo. Notamos que as densidades se aproximam de regiões onde a massa é menor — $m(r) = 1 + \alpha^2\mu r^2$ . . . . .	76
5.4	Gráficos de alguns espectros de energia para valores diferentes de $\beta_2$ , com $A = 0$ , $\mu = 10$ e usamos $\epsilon^+$ . Notamos que para $\beta_2 \neq 0$ haverá quebra de degenerescência nos dupletos. Usamos unidades atômicas. . . . .	80
5.5	Gráficos de alguns espectros de energia para valores diferentes de $A$ , com $\beta_2 = 0$ , $\mu = 10$ e usamos $\epsilon^+$ . Notamos que para $A \neq 0$ haverá quebra de degenerescência nos dupletos. Usamos unidades atômicas. . . . .	81
5.6	Gráficos das densidades de probabilidade radiais normalizadas $ \Psi_c(r) ^2 = r^2(1 - \alpha^2\mu r^2)^2 \Psi_c ^2$ em espaço-tempo curvo com elemento de linha dado por (5.32) para $\tilde{n} = 0$ . As curvas para $\mu = 0$ e $\mu \neq 0$ representam as densidades de probabilidade em espaço-tempos plano e curvo, respectivamente. Observamos, neste caso que, as densidades para $\mu \neq 0$ , estão se aproximando de regiões onde a massa é maior — $m(r) = 1 - \alpha^2\mu r^2$ . . . . .	82
6.1	Gráficos de alguns espectros de energia para valores diferentes de $\beta_1$ e usamos $\mu = 1$ . Notamos que para $\beta_1 \neq 0$ haverá quebra de degenerescência nos dupletos. Usamos unidades atômicas. . . . .	88

- 6.2 Gráficos das densidades de probabilidade radiais normalizadas  $|\Psi_c(r)|^2 = r^2(1 + \alpha^2\mu r^2 + \alpha^2\mu/r^2)^2|\Psi_c|^2$  em espaço curvo com elemento de linha dado por (6.13) com  $n = 0$  para  $\mu \neq 0$  e  $\mu = 0$  em espaço-tempos curvo e plano, respectivamente. Observamos que para  $\mu \neq 0$ , as densidades se aproxima da origem, onde a massa é maior —  $m(r) = 1 + \alpha^2\mu(r^2 + 1/r^2)$ . . 90
- 6.3 Gráficos de alguns espectros de energia para valores diferentes de  $\beta_2$  e usamos  $\mu = 1$ . Notamos que para  $\beta_2 \neq 0$  haverá quebra de degenerescência nos dupletos. Usamos unidades atômicas. . 93
- 6.4 Gráficos das densidades de probabilidade radiais normalizadas  $|\Psi_c(r)|^2 = r^2(1 + \alpha^2\mu r^2 + \alpha^2\mu/r^2)^2|\Psi_c|^2$  em espaço-tempo curvo com elemento de linha dado em (6.13) para  $\tilde{n} = 0$ . Mais uma vez notamos que quanto maior o valor de  $\mu$ , mais as densidades se aproximam de  $r = 0$ , onde a massa é maior —  $m(r) = 1 + \alpha^2\mu(r^2 + 1/r^2)$ . . . . . 94
- 7.1 Gráficos de alguns espectros de energia para valores diferentes de  $D$  e usamos  $\mu = 1$ . Notamos que para  $D \neq 0$  haverá quebra de degenerescência nos dupletos. Usamos unidades atômicas. . 99
- 7.2 Gráficos das densidades de probabilidade radiais  $|\Psi_c(r)|^2 = r^2(1 + \mu\alpha^2/r)^2|\Psi_c|^2$  para  $n = 0$  em espaço-tempo curvo com elemento de linha dado por (7.10). Fizemos as densidades de probabilidade radiais para  $\mu = (1, 2, 3)$ . Observamos que quanto maior o valor de  $\mu$ , mais densidades se aproxima da origem, onde a partícula é mais massiva —  $m(r) = 1 + \mu\alpha^2/r$ . 100
- 7.3 Gráficos de alguns espectros de energia para valores diferentes de  $D$  e usamos  $\mu = 1$ . Notamos que para  $D \neq 0$  haverá quebra de degenerescência nos dupletos. Usamos unidades atômicas. . 103

7.4	Gráficos das densidades de probabilidade $ \Psi_c(r) ^2 = r^2(1 + \mu\alpha^2/r)^2 \Psi_c ^2$ para $\tilde{n} = 0$ em espaço-tempo curvo com elemento de linha dado por (7.10). Fizemos as densidades de probabilidade radiais para $\mu = (1, 2, 3)$ . Observamos que quanto maior o valor de $\mu$ , mais as densidades se aproxima da origem, onde a partícula é mais massiva — $m(r) = 1 + \mu\alpha^2/r$ . . . . .	104
8.1	Gráficos de alguns espectros de energia para valores diferentes de $A$ , onde usamos $\mu = 0.01$ , $r_e = 2.40873$ e $\delta = 0.988879$ . Notamos que para $A \neq 0$ haverá quebra de degenerescência nos dupletos. Usamos unidades atômicas. . . . .	110
8.2	Gráficos de alguns espectros de energia para valores diferentes de $A$ , onde usamos $\mu = 0.01$ , $r_e = 2.40873$ e $\delta = 0.988879$ . Notamos que para $A \neq 0$ haverá quebra de degenerescência nos dupletos. Usamos unidades atômicas. . . . .	115
C.1	Gráficos das geodésicas radiais do elemento de linha dado em (3.10) onde a figura na esquerda mostra o comportamento de $r(q)$ em espaço-tempo curvo ( $b = 1$ ) com o espaço-tempo plano ( $b = 0$ ). Na figura da direita plotamos $t(q)$ e ambas as curvas, calculadas com parâmetros $b = 0$ e $b = 1$ , estão sobrepostas. . . . .	132
C.2	Gráficos das geodésicas radiais do elemento de linha dado em (3.22) onde a figura da esquerda mostra o comportamento de $r(q)$ em espaço-tempo curvo ( $b = 0.2$ ) com espaço-tempo plano ( $b = 0$ ). Na figura da direita plotamos $t(q)$ e ambas as curvas, calculadas com parâmetros $b = 0$ e $b = 1$ , estão sobrepostas. . . . .	133

C.3 Gráficos das geodésicas radiais do elemento de linha dado em (3.37) onde a figura da esquerda mostra o comportamento de  $r(q)$  em espaço-tempo curvo ( $b = 0.7$ ) com espaço-tempo plano ( $b = 0$ ). Na figura da direita plotamos  $t(q)$  e ambas as curvas, calculadas com os parâmetros  $b = 0$  e  $b = 1$ , estão sobrepostas. 133

# Lista de Tabelas

D.1	Alguns valores de energia para o sistema com e sem simetria exata de spin. Usamos unidades atômicas. . . . .	138
D.2	Alguns valores de energia para o sistema com e sem simetria exata de pseudo-spin. Usamos unidades atômicas. . . . .	139
E.1	Alguns valores de energia para o sistema com e sem simetria exata de spin. Usamos unidades atômicas. . . . .	143
E.2	Alguns valores de energia para o sistema com e sem simetria exata de pseudo-spin. . . . .	144
F.1	Alguns valores de energia para o sistema com e sem simetria exata de spin. Usamos unidades atômicas. . . . .	148
F.2	Alguns valores de energia para o sistema com e sem simetria exata de pseudo-spin. . . . .	149
G.1	Alguns valores de energia para o sistema com e sem simetria exata de spin. Usamos unidades atômicas. . . . .	154
G.2	Alguns valores de energia para o sistema com e sem simetria exata de pseudo-spin. . . . .	155



H.1	Alguns valores de energia para o sistema com e sem simetria exata de spin, onde $r_e = 2.40873$ e $\delta = 0.988879$ . Usamos unidades atômicas. . . . .	157
H.2	Alguns valores de energia para o sistema com e sem simetria exata de pseudo-spin, onde $r_e = 2.40873$ e $\delta = 0.988879$ . . . .	158

## Resumo

Neste trabalho mostramos ser possível, à princípio teoricamente, analisar as simetrias exatas de spin e pseudo-spin, que se manifestam em dinâmica de núcleons em núcleos atômicos deformados ou exóticos, através do acoplamento de uma partícula única a um campo eletromagnético (EM) e espaço-tempo curvo que representa os núcleos atômicos deformados. Para isso calculamos a equação de Dirac com campo EM simetricamente esférico  $A_\mu = (V(r), cA(r), 0, 0)$  em espaço-tempo curvo com um elemento de linha simetricamente esférico generalizado dado por  $ds^2 = e^{2f(r)}dt^2 - e^{2g(r)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2$ , onde  $f(r)$  e  $g(r)$  são funções dependentes da coordenada radial  $r$ . Obtemos o espinor angular de Dirac, de maneira exata, independentemente da escolha de  $V(r)$ ,  $A(r)$ ,  $f(r)$  e  $g(r)$ . Considerando  $f = g$ , conseguimos escrever o espinores em espaço-tempos curvo e plano conectados da seguinte forma:  $\Psi^{curvo} = e^{-f(r)/2}\Psi^{plano}$ . As funções de onda radiais são analisadas de duas formas. Primeiro, analisamos sistemas físicos sem simetrias exatas de spin e pseudo-spin, e por fim, analisamos sistemas físicos com simetrias exatas de spin e pseudo-spin. Os resultados, obtidos com ou sem simetrias, podem possivelmente, serem simulados em laboratório utilizando a técnica de dinâmica de átomos ultra-frios em métricas ópticas.

**Palavras-chave:** Soluções analíticas, equação de Dirac, espaço-tempo curvo, simetria de spin e simetria de pseudo-spin.

## Abstract

In this work we show that it is possible, at first theoretically, to analyze the exact spin and pseudo-spin symmetries, which are manifested in nucleon dynamics in deformed or exotic nuclei, through the coupling of a single particle to an (EM) electromagnetic field and curved space-time that represents the deformed core. For this, we calculate the Dirac equation with a symmetrically spherical EM field  $A_\mu = (V(r), cA(r), 0, 0)$  in curved space-time with a generalized symmetrically spherical line element given by  $ds^2 = e^{2f(r)}dt^2 - e^{2g(r)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2$ , where  $f(r)$  and  $g(r)$  are functions dependent on the radial coordinate  $r$ . We obtain the Dirac angular spinor, exactly, independent of the choice of  $V(r)$ ,  $A(r)$ ,  $f(r)$  and  $g$ . Considering  $f = g$ , we can write the spinors in curved and flat space-time connected as follows:  $\Psi^{curved} = e^{-f(r)/2}\Psi^{flat}$ . The radial wave functions are analyzed in two ways. First, we analyze physical systems without exact spin and pseudo-spin symmetries, and finally, we analyze physical systems with exact spin and pseudo-spin symmetries. The results obtained, with or without symmetries, can possibly, be simulated in the laboratory using an ultra-cold atom dynamics technique in optical metrics.

**Keywords:** Analytical solutions, Dirac equation, curved space-time, spin symmetry and pseudospin symmetry.

# Lista de publicações

- M. D. de Oliveira and A.G.M. Schmidt. **Exact solutions of Dirac equation on a static curved space-time.** Ann. Phys., 401:21, (2019).
- M. D. de Oliveira and A. G. M. Schmidt. **Exact solution for the Dirac oscillator in curved spacetime.** Phys. Scr., 95:5, (2020).
- As publicações acima anteciparam novas submissões para publicações, que foram efetuadas após a conclusão desta tese, referentes aos resultados obtidos nos capítulos de (5) ao (8) deste trabalho.

# Capítulo 1

## Introdução

Habitualmente usamos o conceito de simetria para representar a semelhança de aspectos de objetos e a similaridade em sua aparência. Pode ser definida como uma relação de paridade em respeito a altura, largura e comprimento das partes necessárias para formar um corpo ou objeto. Em nosso dia-dia o conceito de simetria é aplicado em várias áreas, tais como artes, arquitetura e em ciência naturais. No meio científico, particularmente na Física, define-se simetria como uma modificação num dado sistema, tal que após essa modificação, o sistema permanece o mesmo, ou seja, simetria na Física é uma invariância de um objeto ou sistema com respeito a uma transformação. Tais transformações são aplicadas em várias áreas da Física Clássica, como na Mecânica Clássica, Eletromagnetismo e Óptica quando efetuamos, por exemplo, uma rotação, reflexão ou transladamos um corpo. Se essas transformações não modificam o sistema ou as leis físicas, dizemos que há invariâncias rotacional, de reflexão e de translação, respectivamente. Essas simetrias atestam um importante teorema matemático e muito aplicado na Física, que é o Teorema de Neother [1], no qual afirma que para cada simetria das leis físicas existe conservação de uma grandeza física correspondente.

Porém, tais simetrias citadas e o teorema de Neother, não se restringem somente na Física Clássica.

Em Física Quântica, observamos as mesmas simetrias já citadas acima, com sistemas que possuem invariâncias rotacional, de reflexão e translação. Porém, no regime quântico, surgem simetrias tais como simetrias CPT, com invariância sob transformações na carga, paridade e tempo, supersimetria, que consiste em uma simetria entre bósons e férmions, tais como novas simetrias relacionadas ao spin como as simetrias de spin e pseudo-spin. Em particular, essas duas últimas simetrias, as simetrias de spin e pseudo-spin, serão objetos de estudos neste trabalho.

Em 1971, Smith e Tassie [2] observaram simetrias relativísticas após tentativas de calcular massas de mésons usando hamiltoniano de Dirac com potenciais externos, afim de estudarem a dinâmica entre um quark e anti-quark, que compõem os mésons. Foi verificado pelos autores que se considerassem dois potenciais externos, um do tipo escalar e o outro sendo a componente temporal de um campo eletromagnético (EM), com a subtração de um potencial pelo outro igual a uma constante, as massas medidas não dependiam da orientação do spin. Com base neste resultado e pelo fato de que em regimes relativísticos há separação de spin-órbita, separação essa que pode fazer com que as energias do sistema dependam da orientação do spin, achava-se que essas degenerescências eram não-relativísticas. Porém, neste mesmo trabalho foi mostrado que quando os potenciais escalar e vetor são iguais e com contribuição muito maior com relação a massa dos quarks, o hamiltoniano de Dirac se torna ultra-relativístico e produz degenerescência no espectro de massa com relação ao spin. Em 1975, Bell e Ruegg [3] mostraram que o hamiltoniano de Dirac generalizado possui simetria de spin caso os potenciais escalar e as 4 componentes de um campo EM fossem relacionados de uma

determinada maneira, isso também foi demonstrado por Ginnochio em [4]. Foi verificado então, que a simetria de spin é um caso particular das simetrias de Bell e Ruegg. Já em 2001, Page e colaboradores [5] verificaram a simetria de spin para mésons com quark (anti-quark) leve e seu anti-quark (quark) pesado. Tal resultado não foi obtido no trabalho de 1971, onde só foi obtido a simetria considerando a contribuição dos potenciais muito maior que a massa, pois nas primeiras tentativas para calcular as massas dos mésons foi usado o hamiltoniano de Dirac para uma partícula, que não é uma boa aproximação para quarks leves que compõem os mésons. Em resumo, a simetria de spin é uma simetria relativística que se manifesta no hamiltoniano de Dirac e pode ser detectada pelo espectro de massa ou energia, sem precisar levar em consideração a forma do acoplamento spin-órbita, ou seja, do alinhamento do spin da partícula e anti-partícula com o momento angular orbital. Além disso, a simetria de spin será dada pela degenerescência de energia entre os estados dupletos  $(n, l, l - 1/2)$  e  $(n, l, l + 1/2)$ . Assim, teremos simetria de spin com degenerescência, por exemplo, nos estados dupletos  $(1p_{1/2}, 1p_{3/2})$  não-alinhado e alinhado com relação ao momento angular orbital  $l = 1$ , respectivamente. Na equação de Dirac, a simetria de spin se manifesta quando os potenciais vetor  $V(r)$  (que é a componente temporal do campo EM) e escalar  $U(r)$  satisfazem a condição  $\Delta(r) = V(r) - U(r) = \text{constante}$ . Assim ao desacoplarmos a equação radial, as equações diferenciais resultantes para os espinores radiais superior ou inferior não dependerão do termo de acoplamento spin-órbita, nominalmente  $\lambda$ , pois em tais equações diferenciais resultantes  $\lambda$  surge nos seguintes termos,

$$\frac{1}{E + m - \Delta} \frac{\lambda}{r} \frac{d\Delta(r)}{dr}, \quad \frac{\lambda(\lambda + 1)}{r^2}. \quad (1.1)$$

O primeiro termo, comumente chamado de potencial spin-órbita, será

nulo nesta simetria, e o segundo termo chamado de pseudo-centrífugo ou potencial órbita-órbita, não dependerá de  $\lambda$ , pois  $\lambda(\lambda + 1) = l(l + 1)$ , como veremos na seção (2.3.2) do capítulo (2).

Alguns anos antes do descobrimento da simetria de spin, em 1969, Hecht e Adler [6] e Arima e colaboradores [7], baseado na observação de espectros empíricos de partículas individuais, observaram a quase-degenerescência entre, por exemplo, os estados  $(1s_{1/2}, 0d_{3/2})$  tal como  $(1p_{3/2}, 0f_{5/2})$  em isótopos de Ni. Tais quase-degenerescências foram generalizados aos estados  $(n, l, j = l + 1/2)$  e  $(n - 1, l + 2, j = l + 3/2)$ . Assim, foi introduzido pelos autores a chamada simetria de pseudo-spin, onde eles definiram os estados dupletos com quase-degenerescência sendo representados por pseudo-números quânticos  $(\tilde{n}, \tilde{l}, \tilde{j})$ . Tais estados dupletos são  $(\tilde{n}, \tilde{l}, \tilde{j} = \tilde{l} \pm 1/2)$ , onde  $\tilde{n} = n - 1$  é o pseudo-número quântico orbital,  $\tilde{l} = l + 1$  é definido como pseudo-momento angular orbital,  $\tilde{j} = j + 1$  é o pseudo-momento angular total e  $\tilde{s} = s$  é o pseudo-spin. Verifica-se então que a origem da simetria de pseudo-spin é baseado em espectros empíricos de partículas únicas, assim como a simetria de spin. Em 1982, buscando compreender a origem da simetria de pseudo-spin, Bohr e colaboradores [8] analisaram tal simetria em potenciais nucleares em rotação, encontrando que a simetria de pseudo-spin elucidada de maneira qualitativa o movimento de quase-partículas em potenciais rotativos. Para isso, eles analisaram o sistema com o potencial spin-órbita introduzido no hamiltoniano, assim como no Modelo de Nilsson [9, 10], utilizando o modelo de casca. Estudos posteriores [11, 12, 13, 14], mostraram que a origem da simetria de pseudo-spin está ligada a relação entre as forças de interação spin-órbita e órbita-órbita. Assim, analisando a equação de Dirac esférica para essa simetria, quando desacoplarmos os espinores radiais, as equações diferenciais resultantes para se obter o espinores superior ou inferior, depen-



derão do termo de acoplamento spin-órbita  $\lambda$ . Esses termos são comumente dados por,

$$\frac{1}{E - \Sigma - m} \frac{\lambda}{r} \frac{d\Sigma(r)}{dr}, \quad \frac{\lambda(\lambda - 1)}{r^2}, \quad (1.2)$$

onde  $\Sigma(r) = V(r) + U(r)$ , o termo da esquerda é chamado de potencial pseudo-spin-órbita e o da direita chamado de barreira pseudo-centrífuga. Para a simetria de pseudo-spin se manifestar, ou seja, termos uma quase degenerescência entre os estados dupletos, já citados acima, a relação entre a barreira pseudo-centrífuga e o potencial pseudo-spin-órbita tem que satisfazer a condição abaixo,

$$\left| \frac{1}{E - \Sigma - m} \frac{\lambda}{r} \frac{d\Sigma(r)}{dr} \right| \ll \left| \frac{\lambda(\lambda - 1)}{r^2} \right|. \quad (1.3)$$

A dependência de  $\lambda$  nas autoenergias será por conta somente do potencial pseudo-spin-órbita, já que  $\lambda(\lambda - 1) = \tilde{l}(\tilde{l} + 1)$ , como veremos na seção (2.3.2) do capítulo (2). Com isso, se a condição (1.3) for satisfeita, a variação de energia com relação aos dois valores possíveis de  $\lambda$  (os dois valores possíveis são por conta da orientação do spin) será muito pequena, com isso obtem-se uma quase-degenerescência nos estados dupletos  $(\tilde{n}, \tilde{l}, \tilde{j} = \tilde{l} \pm 1/2)$ .

Em 1990, Byrski e colaboradores [15] descobriram uma super-deformação nuclear das bandas de rotação, com isso foi notado posteriormente que a simetria de pseudo-spin pode elucidar algumas características que ocorrem em estrutura nuclear, tais como núcleos super-deformados [16, 17] e bandas idênticas [17, 18, 19], duplo decaimento beta [20, 21], assim como outros fenômenos nucleares [22, 23, 24, 25, 26, 27, 28]. Nota-se então que essa simetria se torna um importante conceito para elucidar estruturas nucleares.

Em 1992, Bahri e sua equipe [11] usou a abordagem de campo médio relativístico para de maneira aproximada explicar a relação entre as forças de in-

teração spin-órbita e órbita-órbita, observando desse modo uma relação entre simetria de pseudo-spin e a teoria do campo médio relativístico [29, 30, 31]. Tendo obtido a relação entre simetria de pseudo-spin e campos relativísticos, um candidato natural para analisarmos sistemas com este tipo de simetria é a equação de Dirac, que por sinal já governa o movimento dos prótons e nêutrons presente nos núcleos. Desse modo em 1997, Ginocchio [32] demonstrou que a simetria de pseudo-spin é uma simetria relativística do hamiltoniano de Dirac estudando a dinâmica de núcleons e que o pseudo-momento angular orbital  $\tilde{l}$  é o momento angular orbital da componente inferior do espinor de Dirac, que difere em 1 unidade do momento angular orbital da componente superior  $l$ , ou seja,  $\tilde{l} = l + 1$ .

Foi demonstrado também que a simetria de pseudo-spin nos núcleos pode se manifestar quando temos degenerescência exata nos estados dupletos já citados, isso acontece quando o potencial escalar  $U(r)$  somado ao potencial vetor  $V(r)$  é nulo ou igual a uma constante. Desse modo, analisando novamente a equação de Dirac esférica para essa simetria, e voltando a condição (1.3), temos que para  $\Sigma(r) = \text{constante}$  ou  $\Sigma(r) = 0$ , o potencial pseudo-spin-órbita será nulo e o termo da direita não dependerá de  $\lambda$ , como já citamos acima. Assim, as autoenergias do sistema não dependerão do termo de acoplamento spin-órbita  $\lambda$ , fazendo com que as degenerescências nos estados dupletos,  $(\tilde{n}, \tilde{l}, j = \tilde{l} \pm 1/2)$ , sejam exatas. Como notamos, a simetria de pseudo-spin possui duas maneiras de se manifestar, quando temos degenerescência aproximada, satisfazendo a condição (1.3), e a degenerescência exata, nos estados dupletos  $(\tilde{n}, \tilde{l}, \tilde{j} = \tilde{l} \pm 1/2)$ . Portanto, a partir deste momento, nomearemos a simetria de pseudo-spin, quando a degenerescência for aproximada, e simetria exata de pseudo-spin, quando tivermos degenerescência exata, nos dupletos  $(\tilde{n}, \tilde{l}, \tilde{j} = \tilde{l} \pm 1/2)$ . Do mesmo modo, para seguir

um mesmo padrão, renomearemos a simetria de spin para simetria exata de spin, já que também temos degenerescência exata nos dupletos desta simetria.

Resumindo, podemos afirmar que a simetria exata de pseudo-spin se manifesta quando  $d\Sigma(r)/dr = 0$  na equação de Dirac esférica [33]. Entretanto, a simetria exata de pseudo-spin não se manifesta somente em núcleos esféricos, que são núcleos que tem forma perfeitamente esférica. Assim, a análise foi posteriormente amplificada para os núcleos deformados [34, 35], que são núcleos que podem conter um halo de nêutrons, ou até mesmo possuir a forma de um elipsóide por conta de um achatamento na sua forma inicial esférica. Tal condição nos leva a impor que a simetria exata de pseudo-spin se torna muito melhor para um potencial altamente difuso para núcleos exóticos [36], que são núcleos instáveis que contém um número de nêutrons maior que o de prótons como, por exemplo, os isótopos.

Com isso, verificamos que ambas simetrias (exatas ou não) de spin e pseudo-spin são relativísticas tendo origem na equação de Dirac através da dinâmica dos núcleons. Neste trabalho queremos analisar em particular as simetrias exatas de spin e pseudo-spin. Como sabemos, tais simetrias se manifestam em núcleos deformados ou exóticos, e tal deformação se dá, por exemplo, em isótopos. Essa deformação pode ser considerada geométrica, fazendo com que o núcleo não se apresente mais de forma simetricamente esférica usual, mas sim com algum tipo de alteração. Diante disso, a idéia neste trabalho é representar tais deformações geométricas utilizando a equação de Dirac em espaço-tempo curvo, e assim analisar se as simetrias exatas de spin e pseudo-spin se manifestam quando uma partícula única de spin 1/2, fora do núcleo, acopla com um campo EM em espaço-tempo curvo. Desse modo, conseguiríamos estudar fenômenos nucleares que se manifestam através das

simetrias citadas sem necessariamente ter que analisar núcleos atômicos.

A Física da teoria quântica relativística para partículas de spin  $1/2$  em espaço-tempo de Minkowski está muito bem estabelecida e é governada pela equação de Dirac. Possui aplicações do nível mais fundamental [37] a várias aplicações em sistemas de matéria condensada [38], relativístico em molécula de  $H_2^+$  [39], a interação entre a mecânica quântica relativista e Hamiltonianos não-hermitiano [40], bem como contribuições geométricas de superfícies curvas [41]. De fato, há uma busca por soluções exatas em ambos os regimes, não-relativísticos e relativísticos, das equações da mecânica quântica: Schrödinger [42], Pauli [43] e Dirac [44, 45]. As soluções exatas dão origem simulações muito interessantes, ou mapeamentos, entre sistemas que podem ser construídos em laboratório - um férmion de spin  $1/2$  interagindo com um potencial externo - e sistemas que, por sua vez, não são acessíveis para nós no laboratório nem na natureza, como: buracos de minhoca [46], monopólos magnéticos de Dirac [47], simetria PT usando sistemas de massas dependentes da posição [48], efeitos sutis previstos por Dirac como o chamado *zitterbewegung* [49] ou mesmo operações não unitárias não-físicas [50].

Em particular, o desenvolvimento teórico de férmions em espaço-tempo curvo, como na monografia de Parker e Toms [51], foi estudado por Santos e Barros [52] que resolveram a equação de Dirac nas métricas de Melvin, bem como por Panahi e Jahangiri [53] que resolveram a equação de Dirac em espaço-tempo curvo na presença de um campo EM. Além disso, existem aplicações na física da matéria condensada como o interessante trabalho de Vozmediano e colaboradores [38], que trata da relação entre partículas sem massa de Dirac e espaço-tempo curvo em grafeno. Rodríguez-Laguna e colaboradores [54], que propuseram simular o campo de Dirac próximo a um horizonte de eventos usando átomos ultrafrios em uma rede óptica e um si-

mulador quântico que permite uma observação do célebre efeito Unruh [55]. Átomos frios foram usados para produzir um campo gravitacional artificial, e os férmions que se propagavam em um espaço-tempo curvo podiam ser simulados em um sistema desse tipo [56].

Neste trabalho estudaremos soluções analíticas para a equação de Dirac com simetria esférica em espaço-tempo curvo no qual o elemento de linha é dado por,

$$ds^2 = e^{2f(r)} dt^2 - e^{2g(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1.4)$$

onde  $f(r)$  and  $g(r)$  são funções arbitrárias da coordenada radial  $r$ . A equação (1.4) tem como casos especiais, por exemplo, as métricas de Schwarzschild [57] e anti-de-Sitter [58]. Além de conhecer soluções exatas da equação de Dirac em espaço curvo — o que é importante do ponto de vista teórico — nossa metodologia nos permite mapear essa equação diferencial, escrita em uma geometria complicada, em outro mapeamento em um espaço-tempo plano, onde as contribuições da curvatura do espaço estão todas contidas ou em um potencial externo ou em um campo EM.

No entanto, estudar a equação de Dirac em um espaço-tempo curvo não é uma tarefa simples, não é uma simples questão de aplicar regra de cadeia para transformar derivadas parciais. É preciso transformar as matrizes gama, bem como a derivadas parciais e a conexão spin. Em primeiro lugar, precisamos anotá-la corretamente, considerando as contribuições geométricas corretas [41, 59] e isso é feito usando tetrada. No nosso caso, a parte angular da equação não muda, pois no elemento de linha temos o habitual  $-r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$ , por outro lado, as componentes radial e temporal produzirão termos extras na equação de Dirac. Por esse motivo, os autovalores de energia também terão contribuições geométricas.

Tais simetrias (exatas ou não) de spin e pseudo-spin possuem várias aplicações na equação de Dirac em espaço-tempo plano usual, dentre as quais temos vários tipos de potenciais já analisados, como por exemplo, o oscilador harmônico esférico [60, 61, 62, 63, 64], o oscilador harmônico deformado [65, 66, 67, 68], oscilador anarmônico [69, 70, 71], Coulomb [72, 73, 74, 75], Eckart [76, 77], Hellmann [78], Hulthén [79, 80, 81], Manning–Rosen [82, 83, 84], tipo-Mie [85, 86, 87], Morse [88, 89, 90, 91], Pöschl–Teller [92, 93, 94, 95, 96], Rosen–Morse [97, 98, 99], Tietz–Hua [100], Woods–Saxon [101, 102, 103, 104], Yukawa [105, 106, 107], Hartmann [108, 109], Kratzer [110], Makarov [111] e Manning–Rosen [112]. Temos também análises feitas com campo médio relativísticos para núcleos esféricos [26, 113, 114, 115, 116] e deformados [34, 35, 117, 118], bem como o efeito de potencial tensor nas simetrias de spin e pseudo-spin [26, 61, 119, 120].

Diante disso, não faltam sistemas candidatos a serem analisados na equação de Dirac com elemento de linha dado em (1.4) com simetrias exatas de spin e pseudo-spin. Neste trabalho vamos analisar as influências do acoplamento da curvatura do espaço-tempo com um campo EM nas simetrias exatas de spin e pseudo-spin. Para isso consideraremos alguns potenciais que já possuem análises em espaço-tempo plano como citado acima, tais como: oscilador harmônico esférico, ou oscilador de Dirac, oscilador harmônico deformado ou modificado, potencial anarmônico, potencial tipo-Coulomb, potencial tipo-Mie, potencial tipo-Morse, Hellman e tipo-Yukawa.

A estrutura do trabalho é a seguinte: no capítulo (II) apresentaremos a abordagem matemática para obtermos a equação de Dirac em espaço-tempo curvo e encontraremos tal equação simetricamente esférica para o elemento de linha (1.4) e campo EM externo para dois gauges diferentes do tretada, gauges diagonal e cartesiano. Encontraremos o espinor angular de maneira

exata independente da escolha das funções  $f(r)$  e  $g(r)$  e do campo EM. Iremos também definir um caso particular onde  $f(r) = g(r)$  e analisar a equação radial resultante com simetrias exatas de spin e pseudo-spin. No capítulo (III), encontraremos as funções de onda radiais de maneira exata tais como as autoenergias através de uma transformação unitária e auxílio de um potencial tensor para três sistemas diferentes: Coulomb, Morse, potencial radial linear. No capítulo (IV) e (V), resolveremos de maneira exata o oscilador de Dirac e oscilador de Dirac modificado, respectivamente, com simetrias exatas de spin e pseudo-spin. Obteremos as autoenergias, e analisaremos a influência dos potenciais tensores na quebra de degenerescência dos estados dupletos para ambas as simetrias. No capítulo (VI), resolveremos a equação de Dirac, de maneira quase-exata, com os potenciais vetor e escalar anarmônico e potencial tensor do tipo  $Ar + B/r^3$  com simetrias exatas de spin e pseudo-spin. Obteremos as autoenergias e, novamente, analisaremos a influência dos potenciais tensores na quebra de degenerescência dos estados dupletos para ambas as simetrias. No capítulo (VII), novamente resolveremos de maneira quase-exata a equação de Dirac com os potenciais vetor e escalar tipo-Coulomb e potencial tensor tipo-Mie. Mais uma vez, obteremos as autoenergias e analisaremos a influência dos potenciais tensores na quebra de degenerescência dos estados dupletos para ambas as simetrias. No capítulo (VIII), agora de maneira aproximada, usando o método de Pekeris, resolveremos a equação de Dirac com os potenciais vetor e escalar tipo-Morse e potencial tensor Hellmann. Assim, obteremos as autoenergias e vamos analisar o efeito da influência do potenciais tensores nas mesmas, para ambas as simetrias. Por fim, no capítulo (IX) apresentamos as conclusões e os projetos futuros.

## Capítulo 2

# Equação de Dirac com simetrias exatas de spin e pseudo-spin em espaço-tempo curvo

Neste capítulo vamos apresentar a construção da equação de Dirac com campo EM externo em espaço-tempo curvo, para um elemento de linha generalizado simetricamente esférico que depende de duas funções arbitrárias,  $f(r)$  e  $g(r)$ , que variam somente com a coordenada radial  $r$ . Para isso, vamos utilizar o formalismo do tetrada que fará a conexão entre a equação de Dirac usual em espaço-tempo plano para o espaço-tempo curvo, assim como as transformações do espinor e as matrizes de Dirac para o espaço-tempo curvo. Vamos mostrar também que com o elemento de linha e campo EM simetricamente esféricos conseguimos calcular a componente angular do espinor de Dirac independentemente da escolha das funções  $f$  e  $g$  ou dos potenciais do campo EM, ou seja, não precisamos especificar qual sistema vamos analisar para calcular a componente angular do espinor de maneira exata. E por fim, tendo encontrado o espinor angular de Dirac, ficaremos com a equação de Di-



rac construída em espaço-tempo curvo dependendo somente da coordenada radial  $r$ , de modo que vamos trabalhar com essa equação de duas formas, com e sem simetrias exatas de spin e pseudo-spin.

## 2.1 Equação de Dirac na presença de um campo eletromagnético em espaço-tempo curvo

Nesta seção vamos construir a equação de Dirac em espaço-tempo curvo na presença de um campo EM. Assim, começaremos considerando uma curvatura genérica do espaço-tempo cujo elemento de linha é dado por  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ , onde  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico e usando a convenção de soma de Einstein, onde os índices gregos e latinos repetidos vão de 0 a 3 (pela convenção de Einstein, os índices latinos correm de 1 a 3, mas aqui, particularmente, vamos considerar de 0 a 3). Toda informação com respeito ao tipo de curvatura do espaço-tempo está contida no tensor métrico genérico  $g_{\mu\nu}$ , assim a equação de Dirac, em unidades atômicas, para esta métrica será dada por,

$$(i\gamma^\mu\nabla_\mu - c)\psi = 0, \quad (2.1)$$

onde  $c = 1/\alpha$  é a velocidade da luz e  $\alpha$  é a constante de estrutura fina. A derivada covariante generalizada, para uma métrica qualquer, é dada por  $\nabla_\mu = \partial_\mu + \Omega_\mu$ , com  $\partial_\mu$  sendo a derivada parcial na coordenada a ser utilizada. Os termos  $\Omega_\mu$  são matrizes 4x4 para cada valor de  $\mu$  e dadas por  $\Omega_\mu = \omega_{ab\mu}(x)[\gamma^a, \gamma^b]/8$ , onde  $\omega_{ab\mu}(x)$  são as conexões spin que são uma generalização das conexões afim, ou seja, o objeto matemático que efetua o

transporte paralelo em 4 dimensões, e definido por,

$$\omega_{ab\nu} = \eta_{ac}\omega_{b\nu}^c = \eta_{ac}[e_\mu^c\partial_\nu(e_b^\mu) + e_\mu^c e_b^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\mu], \quad (2.2)$$

onde  $\omega_{ab\nu}$  é anti-simétrico nos dois primeiros índices, isto é,  $\omega_{ab\nu} = -\omega_{ba\nu}$ . Os termos  $\Gamma_{\sigma\nu}^\mu$  são os símbolos de Christoffel, que por sua vez são funções das coordenadas espaciais, obtidos através das derivadas parciais do tensor métrico e definidos por,

$$\Gamma_{\sigma\nu}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}(\partial_\sigma g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\sigma} - \partial_\rho g_{\sigma\nu}), \quad (2.3)$$

sendo simétrico nos índices de baixo, ou seja,  $\Gamma_{\sigma\mu}^\nu = \Gamma_{\mu\sigma}^\nu$ , e são muito utilizados em cálculos de relatividade geral [57]. As matrizes de Dirac em espaço-tempo curvo são dadas por  $\gamma^\mu = e_a^\mu \gamma^a$ , com  $\mu$  representando a coordenada geral (espaço-tempo curvo), e  $a$  a coordenada local (espaço-tempo plano). As matrizes  $\gamma^\mu$  devem satisfazer a bem conhecida relação de anti-comutação  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}_4$ , sendo  $\mathbf{1}_4$  a matriz identidade. A grandeza  $e_a^\mu$  é conhecida como tetrada, que é uma abordagem da relatividade geral que generaliza a transformação de coordenada local para global, ou seja, a transformação entre duas métricas diferentes, sendo definida por,

$$e_a^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a}, \quad e_\mu^a = (e_a^\mu)^{-1} = \frac{\partial y^a}{\partial x^\mu}, \quad (2.4)$$

e diagonaliza o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  da seguinte forma,

$$e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu} = \eta_{ab}, \quad e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} = g_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

onde  $\eta_{ab}$  é o tensor métrico diagonal em coordenada local.

A partir desde momento vamos definir um caso particular cujo elemento

de linha em espaço-tempo curvo em coordenadas esféricas será dada por,

$$ds^2 = e^{2f(r)} dt^2 - e^{2g(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.6)$$

ou seja, temos um elemento de linha diagonal e simetricamente esférico, consequentemente, o tensor métrico é diagonal e dado por,

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left( e^{2f(r)}, -e^{2g(r)}, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta \right), \quad (2.7)$$

sua inversa será,

$$g^{\mu\nu} = \text{diag} \left( e^{-2f(r)}, -e^{-2g(r)}, -\frac{1}{r^2}, -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right). \quad (2.8)$$

Usando (2.5) e considerando a matriz diagonal  $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , em espaço-tempo de Minkowski, optamos por trabalhar com o tetrada no gauge diagonal, assim  $e_a^\mu$  e sua inversa  $e_\mu^a$  serão dados por,

$$e_a^\mu = \text{diag} \left( e^{-f(r)}, e^{-g(r)}, \frac{1}{r}, \frac{1}{r \sin \theta} \right), \quad e_\mu^a = \text{diag} \left( e^{f(r)}, e^{g(r)}, r, r \sin \theta \right). \quad (2.9)$$

Tendo definido o elemento de linha que vamos trabalhar, vamos agora definir o campo EM que irá acoplar na equação de Dirac para este tipo de curvatura. Assim, seja o campo EM dado por  $A_\mu = (A_0, c\vec{A})$ , de modo que vamos acoplar este campo com o quadri-momento  $p_\mu$  através da substituição mínima da seguinte forma,  $p_0 \rightarrow p_0 - A_0/c$  e  $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - i\beta\vec{A}$ , onde  $\beta$  é a matriz de Dirac de ordem 0,  $p_0 = i\partial_0 + i\Omega_0$  e  $\vec{p} = -i\vec{\partial} - i\vec{\Omega}$ , onde  $\Omega_0$  e  $\vec{\Omega}$  são as componentes da matriz  $\Omega_\mu$ . Com isso, as componentes da derivada covariante ficarão,  $\nabla_0 = \partial_0 + \Omega_0 + iA_0/c$  e  $\vec{\nabla} = \vec{\partial} + \vec{\Omega} + \beta\vec{A}$ .

Assim, usando a equação de Dirac dada em (2.1) e expandindo a soma

dos índice  $\mu$  e  $a$  de 0 a 3 obtemos,

$$\begin{aligned}
& [ie_0^0\gamma^0(\partial_0 + iA_0/c + \Omega_0) + ie_1^1\gamma^1(\partial_1 + \beta A_1 + \Omega_1) + ie_2^2\gamma^2(\partial_2 + \beta A_2 + \Omega_2) \\
& \quad + ie_3^3\gamma^3(\partial_3 + \beta A_3 + \Omega_3) - c] \psi = 0,
\end{aligned}
\tag{2.10}$$

onde a partir de agora vamos usar  $(\partial_0, \vec{\partial}) = (\partial_t/c, \partial_r, \partial_\theta, \partial_\phi)$  e  $(A_0, c\vec{A}) = (V(r), cA_r, cA_\theta, cA_\phi)$ . Aqui, nomearemos a componente temporal do campo EM, dado por  $V(r)$ , de potencial vetor, mas na literatura também é comum encontramos como potencial escalar ou potencial elétrico. A componente vetorial do campo EM é dada por  $\vec{A} = (A_r, A_\theta, A_\phi)$ , onde as componentes  $(A_r, A_\theta, A_\phi)$  são chamados de potenciais tensores. Os valores de  $e_a^\mu$  são dados diretamente da equação (2.5). Para determinar os valores dos símbolos de Christoffel usaremos as equações (2.3) e (2.8), assim obtemos,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^1 &= f'_r e^{2f-2g}, & \Gamma_{10}^0 &= \Gamma_{01}^0 = f'_r, & \Gamma_{11}^1 &= g'_r, \\
\Gamma_{21}^2 &= \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{31}^3 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-2g}, \\
\Gamma_{32}^3 &= \Gamma_{23}^3 = \cot \theta, & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta e^{-2g}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta,
\end{aligned}
\tag{2.11}$$

onde a notação  $f'_r$  representa a derivada primeira em  $r$ , e o restante dos símbolos de Christoffel são nulos. Com isso podemos agora calcular os valores das conexões spin, assim usando a equação (2.2) obtemos,

$$\begin{aligned}
\omega_{100} &= -\omega_{010} = -f'_r e^{f-g}, & \omega_{001} &= f'_r, & \omega_{111} &= -g'_r, \\
\omega_{221} &= -\frac{1}{r}, & \omega_{331} &= -\frac{1}{r}, & \omega_{122} &= -\omega_{212} = e^{-g}, \\
\omega_{133} &= -\omega_{313} = -\sin \theta e^{-g}, & \omega_{233} &= -\omega_{323} = -\cos \theta,
\end{aligned}
\tag{2.12}$$

com o restante dos termos de conexão spin sendo nulos. Usando os valores encontrados dos símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\sigma\mu}^\nu$  e conexões spin  $w_{ab\mu}$ , obtemos

as matrizes  $\Omega_\mu = \omega_{ab\mu}(x)[\gamma^a, \gamma^b]/8$  em termos de  $f$ ,  $g$  e dos comutadores das matrizes de Dirac,

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= \frac{f'_r}{4}e^{f-g}[\gamma^0, \gamma^1], & \Omega_2 &= \frac{e^{-g}}{4}[\gamma^1, \gamma^2] \\ \Omega_3 &= -\frac{\sin(\theta)e^{-g}}{4}[\gamma^1, \gamma^3] + \frac{\cos(\theta)}{4}[\gamma^2, \gamma^3]\end{aligned}, \quad (2.13)$$

com  $\Omega_1 = 0$ . As matrizes  $(\gamma^0, \gamma^i)$  são as matrizes de Dirac padrão em espaço-tempo plano dadas por,

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

onde  $\sigma^i$  são as matrizes de Pauli. Assim, calculando os comutadores em (2.13) e aplicando os valores obtidos de  $\Omega_\mu$  em (2.10), obtemos a equação de Dirac no gauge diagonal,

$$\begin{aligned}\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\psi_D &= \left[ -ie^{f-g}\alpha_D^r \left( \partial_r + \frac{1}{r} + \frac{f'_r}{2} + \beta A_r \right) - i\alpha_D^\theta \frac{e^f}{r} \left( \partial_\theta + \frac{\cot \theta}{2} + \beta A_\theta \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{ie^f}{r \sin \theta} \alpha_D^\phi (\partial_\phi + \beta A_\phi) + c\beta e^f + \frac{V(r)}{c} \right] \psi_D,\end{aligned} \quad (2.15)$$

com  $\alpha_D^i = \beta\gamma_D^i$ . No entanto, esse não é o único gauge que podemos representar o tetrada, por mais que este seja o menos complicado de trabalhar. Temos também o tetrada no gauge cartesiano, que usualmente é aplicado para calcular a componente angular do espinor em função dos harmônicos esféricos de sistemas que possuem simetria esférica. Assim, temos duas formas de representação do gauge, e consequentemente da equação de Dirac em espaço-tempo curvo. Esses gauges estão relacionados através de uma transformação unitária  $Z$  nas matrizes de Dirac e espinores da seguinte forma:

$\gamma_C^\mu = Z\gamma_D^\mu Z^{-1}$  e  $\psi_C = Z\psi_D$ , onde o índice  $C$  é de cartesiano e  $D$  é de diagonal. Essa abordagem da transformação unitária que leva o sistema de um gauge a outro já foi utilizada em outros trabalhos [121, 122]. Pelo fato de  $e_a^\mu$  ser uma matriz diagonal, a transformação unitária das matrizes em espaço-tempo curvo poderá ser escrita como  $\gamma_C^\mu = e_a^\mu Z\gamma_D^a Z^{-1}$ , onde a matriz  $Z$  será dada por,

$$Z = \exp\left(\frac{\phi}{2}\gamma^1\gamma^2\right) \exp\left(\frac{\theta}{2}\gamma^3\gamma^1\right) \frac{1}{2}(\mathbf{1}_4 + \gamma^2\gamma^1 + \gamma^1\gamma^3 + \gamma^3\gamma^2), \quad (2.16)$$

e sua inversa  $Z^{-1}$  será,

$$Z^{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{1}_4 - \gamma^2\gamma^1 - \gamma^1\gamma^3 - \gamma^3\gamma^2) \exp\left(-\frac{\theta}{2}\gamma^3\gamma^1\right) \exp\left(-\frac{\phi}{2}\gamma^1\gamma^2\right), \quad (2.17)$$

com as matrizes  $\gamma^i$  em  $Z$  sendo as matrizes de Dirac padrão. Com isso, no gauge cartesiano as matrizes de Dirac em espaço-tempo plano serão,

$$\begin{aligned} \gamma_C^0 &= \beta, & \gamma_C^1 &= (\gamma^1 \cos \phi + \gamma^2 \sin \phi) \sin \theta + \gamma^3 \cos \theta \\ \gamma_C^2 &= (\gamma^1 \cos \phi + \gamma^2 \sin \phi) \cos \theta - \gamma^3 \sin \theta & , & \\ \gamma_C^3 &= -\gamma^1 \sin \phi + \gamma^2 \cos \phi \end{aligned} \quad (2.18)$$

observamos que as matrizes de Dirac obtidas são projeções no eixo cartesiano em coordenadas esféricas. Para obtermos a equação de Dirac no gauge cartesiano, multiplicamos a transformação unitária dada em (2.16) à esquerda da equação de Dirac no gauge diagonal dada em (2.15) e usando  $\psi_D = Z^{-1}\psi_C$

temos,

$$\begin{aligned} \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} (ZZ^{-1}\psi_C) = & \left[ -ie^{f-g} Z\alpha_D^r \left( \partial_r + \frac{1}{r} + \frac{f'_r}{2} + \beta A_r \right) Z^{-1} - i\frac{e^f}{r} Z\alpha_D^\theta \times \right. \\ & \left. \left( \partial_\theta + \frac{\cot \theta}{2} + \beta A_\theta \right) Z^{-1} - \frac{ie^f}{r \sin \theta} Z\alpha_D^\phi (\partial_\phi + \beta A_\phi) Z^{-1} + c\beta e^f + \frac{V(r)}{c} \right] \psi_C. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Usando o fato de que  $ZZ^{-1} = \mathbf{1}_4$  e calculando as transformações unitárias em (2.19) obtemos,

$$\begin{aligned} Z\alpha_D^r \left( \partial_r + \frac{1}{r} + \frac{f'_r}{2} + \beta A_r \right) Z^{-1} &= \alpha_C^r \left( \partial_r + \frac{1}{r} + \frac{f'_r}{2} + \beta A_r \right) \\ Z\alpha_D^\theta \left( \partial_\theta + \frac{\cot \theta}{2} + \beta A_\theta \right) Z^{-1} &= -\frac{\alpha_C^r}{2} + \alpha_C^\theta \left( \partial_\theta + \frac{\cot \theta}{2} + \beta A_\theta \right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$Z\alpha_D^\phi (\partial_\phi + \beta A_\phi) Z^{-1} = -\frac{1}{2}(\sin \theta \alpha_C^r + \cos \theta \alpha_C^\theta) + \alpha_C^\phi (\partial_\phi + \beta A_\phi)$$

onde usamos o fato de que  $\alpha_C^i = \beta \gamma_C^i$ ,  $\alpha_C^i = Z\alpha_D^i Z^{-1}$  e  $\alpha_C^i \beta = Z\alpha_D^i \beta Z^{-1}$ , com  $i = (r, \theta, \phi)$ . Por fim, substituindo (2.20) em (2.19), obtemos a equação de Dirac em espaço-tempo curvo no gauge cartesiano,

$$\begin{aligned} \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \psi_C = & \left[ -ie^{f-g} \alpha_C^r \left( \partial_r + \frac{1}{r} - \frac{e^g}{r} + \frac{f'_r}{2} + \beta A_r \right) - i\alpha_C^\theta \frac{e^f}{r} (\partial_\theta + \beta A_\theta) \right. \\ & \left. - \frac{ie^f}{r \sin \theta} \alpha_C^\phi (\partial_\phi + \beta A_\phi) + c\beta e^f + \frac{V(r)}{c} \right] \psi_C. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Comparando as equações de Dirac, (2.15) e (2.21), nos dois gauges, notamos que além das matrizes serem naturalmente diferentes, surgem outras diferenças na equação de Dirac no gauge cartesiano como, por exemplo, o surgimento do termo  $e^g/r$  acoplado com  $\alpha_C^r$  e a ausência do termo  $(\cot \theta)/2$  no acoplamento com  $\alpha_C^\theta$ . Com isso, obtivemos as equações de Dirac para a

métrica dada em (2.6) no gauge diagonal e cartesiano, e na próxima seção iremos analisar sistemas com campo EM simetricamente esférico.

## 2.2 Campo EM com simetria esférica

Nesta seção vamos considerar um caso particular para o campo EM com simetria esférica dado por  $A_\mu = (V(r), cA(r), 0, 0)$ , onde  $A_r = A(r)$ , e mostraremos que é possível encontrar o espinor angular de maneira independente da escolha de  $V(r), A(r)$  tal como  $f(r)$  e  $g(r)$ .

Um detalhe importante aqui, é que não vamos trabalhar com o campo EM em um gauge fixo. Porém, se fossemos trabalhar com um gauge fixo como, por exemplo, o gauge de Lorentz, teríamos que impor a condição  $A(r) \propto r^{-2}e^{-f}$  ou  $A(r) = 0$ , mas neste trabalho não vamos considerar potenciais tensores deste tipo.

Devido ao campo EM e elemento de linha dado em (2.7) possuírem simetria esférica, temos que consequentemente a equação de Dirac também é simetricamente esférica. O espinor angular de Dirac para sistemas com simetria esférica é dado pelas funções angulares de spin, que são escritas como combinação linear dos harmônicos esféricos. Portanto, queremos encontrar o espinor de Dirac neste caso em função dos harmônicos esféricos, que são autofunções do operador momento angular  $L^2$  escrito nos eixos cartesianos em coordenadas esféricas. Assim, teremos que utilizar a equação de Dirac no gauge cartesiano que contém o operador  $L^2$  citado e consequentemente obter os harmônicos esféricos, para assim obter as funções angulares de spin. Porém, como já vimos na seção anterior, a equação de Dirac neste gauge faz com que surjam algumas complicações devido às projeções das matrizes  $\gamma^a$  nos eixos cartesianos. Para contornar esse problema podemos



usar o fato de que o espinor  $\Psi_C$  que queremos encontrar se relaciona com o espinor  $\Psi_D$ , no gauge diagonal, através de uma transformação unitária, que como já vimos é dado por  $\Psi_C = Z\Psi_D$ . Assim, ao invés de trabalharmos com a equação de Dirac no gauge cartesiano, vamos trabalhar no gauge diagonal, e tendo encontrado o espinor de Dirac neste gauge podemos obter facilmente  $\Psi_C$  via transformação unitária. Antes de partirmos para o cálculo do espinor de Dirac, precisamos garantir que  $\Psi_C$  seja quadrado integrável no elemento de volume  $d^3\vec{r} = r^2 e^{g(r)+f(r)} \sin\theta dr d\theta d\phi$ , para isso vamos definir as condições de contorno como no trabalho [123]. Assim, as condições de contorno para  $\Psi_C(r, \theta, \phi)$  são:  $r \exp[(f(r)+g(r))/2]\Psi_C(r)|_{r=0} =$  valor finito e  $r \exp[(f(r)+g(r))/2]\Psi_C(r)|_{r\rightarrow\infty} = 0$ ,  $\sqrt{\sin\theta}\Psi_C(\theta)|_{(\theta=0,\pi)} =$  valor finito e periódico no angulo azimutal, nomeadamente  $\Psi_C(\phi + 2\pi) = \Psi_C(\phi)$ . Esta última condição implica numa anti-periodicidade de  $\Psi_D$ , ou seja,  $\Psi_D(\phi + 2\pi) = -\Psi_D(\phi)$ , já que  $Z(\phi + 2\pi) = -Z(\phi)$ . Na próxima seção calcularemos o espinor angular de maneira exata.

### 2.2.1 Função de onda espinorial angular

Considerando o campo EM dado por  $A_\mu = (V(r), cA(r), 0, 0)$  e aplicando  $H_D = i\partial/\partial t$  na equação de Dirac obtida em (2.15) encontramos um problema de autovalor  $H_D\Psi_D = E\Psi_D$  que será,

$$\frac{H_D}{c}\Psi_D = \left[ -ie^{f-g}\alpha^1 \left( \partial_r + \frac{1}{r} + \frac{f'_r}{2} + \beta A(r) \right) + c\beta e^f + \frac{V(r)}{c} - i\frac{e^f}{r} \times \left\{ \alpha^2 \left( \partial_\theta + \frac{\cot\theta}{2} \right) + \frac{\alpha^3}{\sin\theta} \partial_\phi \right\} \right] \Psi_D = \frac{E}{c}\Psi_D, \quad (2.22)$$

onde a partir deste ponto vamos usar  $(\alpha_D^r, \alpha_D^\theta, \alpha_D^\phi) = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ . Temos que  $\Psi_D$  é um autoespinor de 4-componentes,  $E$  as autoenergias do sistema e

o Hamiltoniano é dado por,

$$\begin{aligned} \frac{H_D}{c} = & -ie^{f-g}\alpha^1 \left( \partial_r + \frac{1}{r} + \frac{f'_r}{2} + \beta A(r) \right) - i\frac{e^f}{r} \left\{ \alpha^2 \left( \partial_\theta + \frac{\cot\theta}{2} \right) + \right. \\ & \left. \frac{\alpha^3}{\sin\theta} \partial_\phi \right\} + c\beta e^f + \frac{V(r)}{c}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Observamos, a partir do hamiltoniano acima, que as componentes radial e angular parecem estar desacopladas, o que indica que poderíamos encontrar os espinores radial e angular independentes um do outro. Porém, se considerarmos o acoplamento das componentes radiais e angulares através das matrizes  $\alpha^i$  que são dadas por,

$$\alpha^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ \sigma^3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

na forma matricial  $4 \times 4$  do hamiltoniano acima, teremos termos na diagonal secundária dependentes de  $r$  e  $\theta$ , por conta das matrizes de Pauli  $\sigma^1$  e  $\sigma^2$  só possuírem termos na diagonal secundária. Já na diagonal principal, teremos termos dependentes de  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$  por conta da matriz  $\sigma^3$  possuir termos somente na diagonal principal, ou seja, as componentes das coordenadas  $(r, \theta, \phi)$  no hamiltoniano estão totalmente acopladas, desse modo ainda não podemos resolver o espinor angular. Precisamos então desacoplar as variáveis radial e angulares, e para isso, vamos fazer uma rotação nas matrizes  $\alpha^i$  e consequentemente nas matrizes de Pauli  $\sigma^i$ . Essa rotação será efetuada através de uma transformação unitária dada por  $T = \frac{1}{2}(\mathbf{1}_4 + \gamma^2\gamma^1 + \gamma^1\gamma^3 + \gamma^3\gamma^2)$ , onde  $T$  é o mesmo termo presente em  $Z$ , e pode ser escrito como,

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 + i(\sigma^1 + \sigma^2 + \sigma^3) & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_2 + i(\sigma^1 + \sigma^2 + \sigma^3) \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Assim aplicando (2.25) em (2.22) obtemos,

$$\left[ -ie^{f-g}\alpha^3 \left( \partial_r + \frac{1}{r} + \frac{f'_r}{2} + \beta A(r) \right) - i\frac{e^f}{r} \left\{ \alpha^1 \left( \partial_\theta + \frac{\cot \theta}{2} \right) + \frac{\alpha^2}{\sin \theta} \partial_\phi \right\} \right. \\ \left. + ce^f \beta + \frac{V(r)}{c} \right] \Psi' = \frac{E}{c} \Psi', \quad (2.26)$$

com  $H' = T(H_D/c)T^\dagger$ ,  $\Psi' = T\Psi_D$  e as transformações nas matrizes  $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$  ficarão  $T\alpha^1T^{-1} = \alpha^3$ ,  $T\alpha^2T^{-1} = \alpha^1$ ,  $T\alpha^3T^{-1} = \alpha^2$  e  $T\alpha^1\beta T^{-1} = \alpha^3\beta$ . Da equação (2.26), notamos que a componente radial agora está na diagonal principal, pois acopla com as matrizes  $\alpha^3$  e  $\mathbf{1}$ , e as componentes angulares estarão na diagonal secundária, pois acoplam com  $\alpha^1$  e  $\alpha^2$ . Com isso, de (2.26) identificamos o operador da componente angular, que será dado por,

$$\hat{I} = \sigma^1 \left( \partial_\theta + \frac{\cot \theta}{2} \right) + \sigma^2 \frac{\partial_\phi}{\sin \theta}. \quad (2.27)$$

Assim, a equação em (2.26) escrita na forma matricial  $2 \times 2$  ficará,

$$\begin{pmatrix} e^f + \alpha^2 V(r) - \epsilon & -i\alpha e^{f-g}\sigma^3 [\partial_r + w_1(r)] - i\alpha \frac{e^f}{r} \hat{I} \\ -i\alpha e^{f-g}\sigma^3 [\partial_r + w_2(r)] - i\alpha \frac{e^f}{r} \hat{I} & -e^f + \alpha^2 V(r) - \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi'_1 \\ \Psi'_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (2.28)$$

onde  $w_1(r) = 1/r + f'_r/2 - A(r)$ ,  $w_2(r) = 1/r + f'_r/2 + A(r)$ ,  $\epsilon = E/c^2$ , e partir de agora  $\alpha = 1/c$  é a constante de estrutura fina e  $\alpha^2 = 1/c^2$ . O sinal de  $A(r)$  é negativo e positivo em  $w_1$  e  $w_2$ , respectivamente, por conta do produto de matrizes  $\alpha^3\beta$ , já que,

$$\alpha^3\beta = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^3 \\ \sigma^3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Agora, vamos supor o seguinte *ansatz*,

$$\begin{pmatrix} \Psi'_1 \\ \Psi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1(r)\chi(\theta, \phi) \\ -i\sigma^3 r_2(r)\chi(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

onde  $\chi(\theta, \phi)$  é o espinor angular de duas componentes, tal que  $\Psi'$  é um vetor coluna de 4-componentes, com  $r_1(r)$  e  $r_2(r)$  sendo as funções de onda radiais para a partícula e anti-partícula, respectivamente. Assim, aplicando o *ansatz* (2.30) em (2.28) e multiplicando as matrizes obtemos,

$$\begin{cases} (\alpha^2 V + e^f - \epsilon)r_1\chi - \alpha e^{f-g} [\partial_r + w_1(r)] r_2\chi - \alpha \frac{e^f}{r} r_2(\hat{I}\sigma^3)\chi = 0 \\ (\alpha^2 V - e^f - \epsilon)r_2\chi + \alpha e^{f-g} [\partial_r + w_2(r)] r_1\chi + \alpha \frac{e^f}{r} r_1(\hat{I}\sigma^3)\chi = 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

Como observamos na equação (2.31), para encontrarmos o espinor angular vamos nos concentrar somente no termo  $(\hat{I}\sigma^3)\chi$ . Portanto, assumindo que  $(\hat{I}\sigma^3)\chi = -\lambda\chi$ , com  $\lambda = \pm(j + 1/2)$ ,  $j = l \pm 1/2$  sendo o momento angular total e  $l$  o momento angular orbital, obtemos,

$$\begin{pmatrix} 0 & -\left(\partial_\theta + \frac{\cot \theta}{2}\right) + \frac{i}{\sin \theta} \partial_\phi \\ \left(\partial_\theta + \frac{\cot \theta}{2}\right) + \frac{i}{\sin \theta} \partial_\phi & 0 \end{pmatrix} \chi = -\lambda\chi. \quad (2.32)$$

Considerando uma solução para a componente  $\phi$  temos que,

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi^+(\theta) \\ \chi^-(\theta) \end{pmatrix} \frac{e^{i|m|\phi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (2.33)$$

com  $m$  semi-inteiro ( $m = \pm 1/2, \pm 3/2, \dots$ ), pois  $\Psi'(\phi + 2\pi) = -\Psi'(\phi)$ , logo a

equação (2.32) ficará,

$$\begin{pmatrix} 0 & -\partial_\theta - \frac{\cot \theta}{2} - \frac{|m|}{\sin \theta} \\ \partial_\theta + \frac{\cot \theta}{2} - \frac{|m|}{\sin \theta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^+ \\ \chi^- \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} \chi^+ \\ \chi^- \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Agora, só nos resta resolver o espinor da componente  $\theta$  do espinor angular, assim desacoplando  $\chi^+$  e  $\chi^-$  em (2.34), obtemos,

$$\chi^\pm = \pm \frac{1}{\lambda} \left[ \partial_\theta + \frac{\cot \theta}{2} \pm \frac{|m|}{\sin \theta} \right] \chi^\mp. \quad (2.35)$$

Usando (2.35), conseguimos chegar a equação diferencial ordinária (EDO) com que  $\chi^+$  ou  $\chi^-$  deve satisfazer, que será,

$$\left[ \frac{d^2}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{d}{d\theta} - \frac{|m|^2 \mp |m| \cos \theta + 1/4}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{4} + \lambda^2 \right] \chi^\pm = 0. \quad (2.36)$$

Devemos encontrar as funções  $\chi^+$  e  $\chi^-$  que satisfazem a equação (2.36), para isso vamos começar fazendo uma mudança de variável dada por  $x = \cos \theta$ , a equação (2.36) pode ser reescrita como,

$$\left[ (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} - \frac{|m|^2 \mp |m|x + 1/4}{1-x^2} + \lambda^2 - \frac{1}{4} \right] \chi^\pm(x) = 0. \quad (2.37)$$

Esta EDO é do tipo hipergeométrica [124] e sua solução pode ser escrita como uma função hipergeométrica de Gauss  ${}_2F_1$  ou em termos dos polinômios de Jacobi [124], logo vamos escrever a solução em função dos polinômios de Jacobi dada por,

$$\chi^\pm(x) = A_n (1-x)^a (1+x)^b P_n^{(\mu, \nu)}(x), \quad (2.38)$$

onde  $P_n^{(\mu, \nu)}$  são os polinômios de Jacobi, com  $(\mu, \nu) > -1$ ,  $(a, b) > 0$ ,  $n$  um

inteiro não-negativo, para garantir que  $\chi^\pm$  seja quadrado integrável, e  $A_n$  a constante de normalização. Como a EDO em (2.37) tem algumas diferenças para a EDO na qual é satisfeita pelos polinômios de Jacobi, as funções  $(1-x)^a(1+x)^b$  foram adicionadas para compensar tais diferenças. Substituindo (2.38) em (2.37) e usando a identidade dos Polinômios de Jacobi dada por,

$$\frac{d^2 P_n^{(\mu,\nu)}}{dx^2} = -\frac{(\nu - \mu - (\mu + \nu + 2)x) dP_n^{(\mu,\nu)}}{1-x^2} \frac{dP_n^{(\mu,\nu)}}{dx} - \frac{n(n + \mu + \nu + 1)}{1-x^2} P_n^{(\mu,\nu)}, \quad (2.39)$$

obtemos,

$$\begin{aligned} & \{2(b-a) + \mu - \nu + [-2(b+a) + \mu + \nu]x\} \frac{dP_n^{(\mu,\nu)}}{dx} \\ & + \{a(a-1)(x+1)^2 + b(b-1)(x-1)^2 - [2ab + n(n + \mu + \nu + 1)] \times \\ & (1-x^2) - (|m|^2 \mp |m|x + \frac{1}{4}) + (\lambda^2 - \frac{1}{4})(1-x^2) + -2(b-a)x + \\ & 2(b+a)x^2\} \frac{P_n^{(\mu,\nu)}}{1-x^2} = 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Como  $P_n^{(\mu,\nu)} \neq 0$  e  $dP_n^{(\mu,\nu)}/dx \neq 0$ , podemos impor que os termos entre chaves na equação acima tem que ser igual a zero, com isso temos que calcular os valores de  $a, b, \mu$  e  $\nu$  para que seja satisfeita a igualdade acima para qualquer valor de  $x$ , logo caímos num sistema e o resolvendo obtemos que  $a = \mu^\pm/2$ ,  $b = \nu^\pm/2$ , com  $\mu^\pm = |m| \mp 1/2$ ,  $\nu^\pm = |m| \pm 1/2$  e  $n = j - |m| \geq 0$ . Concluimos então o cálculo de  $\chi^\pm$  que será dado por,

$$\chi^\pm(\theta) = A_n (1 - \cos \theta)^{(|m| \mp 1/2)/2} (1 + \cos \theta)^{(|m| \pm 1/2)/2} P_{j-|m|}^{(|m| \mp 1/2, |m| \pm 1/2)}(\cos \theta), \quad (2.41)$$

onde  $|m| \leq j$ . Retornando ao espinor de 2-componentes  $\chi$  temos,

$$\chi(\theta, \phi) = A_n \begin{pmatrix} (1 - \cos \theta)^{-1/4} (1 + \cos \theta)^{1/4} P_{j-|m|}^{(|m|-1/2, |m|+1/2)}(\cos \theta) \\ (1 - \cos \theta)^{1/4} (1 + \cos \theta)^{-1/4} P_{j-|m|}^{(|m|+1/2, |m|-1/2)}(\cos \theta) \end{pmatrix} \times (\sin \theta)^{|m|} \frac{e^{i|m|\phi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (2.42)$$

onde a constante de normalização é dada por [123],

$$A_n = 2^{-1/2-|m|} \frac{\sqrt{(j-|m|)!(j+|m|)!}}{(j-1/2)!}. \quad (2.43)$$

Retornando a função de onda espinorial de 4-componentes,  $\Psi_C$  será dada por  $\Psi_C = Z\Psi_D = ZT^\dagger\Psi'$ , isto é,

$$\Psi_c(r, \theta, \phi) = A_n \begin{pmatrix} r_1(r) \exp\left(-i\frac{\phi}{2}\sigma^3\right) \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\sigma^2\right) \begin{pmatrix} \chi^+ \\ \chi^- \end{pmatrix} \\ -ir_2(r) \exp\left(-i\frac{\phi}{2}\sigma^3\right) \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\sigma^2\right) \begin{pmatrix} \chi^+ \\ -\chi^- \end{pmatrix} \end{pmatrix} \frac{e^{i|m|\phi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (2.44)$$

onde o termo que restou da transformação unitária  $Z$  pode ser escrito como,

$$\exp\left(-i\frac{\phi}{2}\sigma^3\right) \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\sigma^2\right) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} & -e^{i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{-i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2} & e^{i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Efetuada a multiplicação das matrizes no espinor angular e usando as identidades dos polinômios de Jacobi e a relação entre os polinômios de Jacobi e Legendre associados (ver apêndice A), podemos escrever os espinores

angulares em (2.44) como dependentes das funções angulares de spin,

$$\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} & -e^{i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{-i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2} & e^{i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^+ \\ \chi^- \end{pmatrix} \frac{e^{i|m|\phi}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{(-2)^{|m|+1/2} (j-1/2)!}{\sqrt{(j+|m|)!(j-|m|)!}} \times \mathcal{Y}_{j+1/2}^{|m|j}(\theta, \phi), \quad (2.46)$$

e

$$\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} & -e^{i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{-i\frac{\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2} & e^{i\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^+ \\ -\chi^- \end{pmatrix} \frac{e^{i|m|\phi}}{\sqrt{2\pi}} = -\frac{(-2)^{|m|+1/2} (j-1/2)!}{\sqrt{(j+|m|)!(j-|m|)!}} \times \mathcal{Y}_{j-1/2}^{|m|j}(\theta, \phi). \quad (2.47)$$

Com isso, temos que  $\mathcal{Y}_l^{j,m}$  são as já citadas e bem conhecidas funções angulares de spin [125],

$$\mathcal{Y}_l^{j=l\pm 1/2,m}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \pm \sqrt{l \pm m + \frac{1}{2}} Y_l^{m-1/2}(\theta, \phi) \\ \sqrt{l \mp m + \frac{1}{2}} Y_l^{m+1/2}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

onde  $l = j \mp 1/2$  e  $Y_l^m(\theta, \phi)$  são os harmônicos esféricos (ver apêndice A). Substituindo (2.46) e (2.47) em (2.44) e usando o valor de  $A_n$  obtemos,

$$\Psi_c(r, \theta, \phi) = N \begin{pmatrix} r_1(r) \mathcal{Y}_{\tilde{l}}^{|m|j}(\theta, \phi) \\ ir_2(r) \mathcal{Y}_l^{|m|j}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

onde  $l = j - 1/2$  e  $\tilde{l} = l + 1 = j + 1/2$ ,  $N$  é a constante de normalização. As funções de onda radiais  $r_1(r)$  e  $r_2(r)$  devem satisfazer o sistema acoplado de



EDOs,

$$\begin{cases} (\alpha^2 V + e^f - \epsilon)r_1 - \alpha e^{f-g} \left[ \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{f'}{2} + \lambda \frac{e^g}{r} - A(r) \right] r_2(r) = 0 \\ (\alpha^2 V - e^f - \epsilon)r_2 + \alpha e^{f-g} \left[ \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{f'}{2} - \lambda \frac{e^g}{r} + A(r) \right] r_1(r) = 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

Da equação (2.49), notamos que o momento angular orbital do espinor superior difere em 1 unidade do inferior, ou seja, obtemos o pseudo-momento angular  $\tilde{l} = l + 1$  no espinor superior. O termo de acoplamento spin-órbita possui dois valores possíveis para o momento angular orbital  $l$  e pseudo-momento angular orbital  $\tilde{l}$ ,

$$\begin{cases} \lambda = (j + \frac{1}{2}) = l + 1, & j = l + \frac{1}{2}, & \lambda > 0 \\ \lambda = -(j + \frac{1}{2}) = -l, & j = l - \frac{1}{2}, & \lambda < 0 \end{cases}, \quad (2.51)$$

e

$$\begin{cases} \lambda = (j + \frac{1}{2}) = \tilde{l}, & \tilde{j} = \tilde{l} - \frac{1}{2}, & \lambda > 0 \\ \lambda = -(j + \frac{1}{2}) = -(\tilde{l} + 1), & \tilde{j} = \tilde{l} + \frac{1}{2}, & \lambda < 0 \end{cases}. \quad (2.52)$$

Porém, como já mencionamos na introdução, Ginnochio [32] mostrou que para a dinâmica dos núcleons o pseudo-momento angular orbital  $\tilde{l}$  pertence ao espinor inferior, e como vemos em (2.49), obtemos que o espinor superior está com  $\tilde{l}$ , que representa a dinâmica dos anti-núcleons. Como nosso objetivo é analisar as simetrias exatas de spin e pseudo-spin que se manifestam em núcleons, temos que obter o pseudo-momento angular orbital no espinor inferior. Para isso, temos que efetuar a troca dos momentos  $\tilde{l} \leftrightarrow l$  em (2.49), desse modo, faremos  $\lambda \rightarrow -\lambda$  nas equações (2.49) e (2.50), pois

assim efetuamos a troca  $\tilde{l} \leftrightarrow l$  em (2.51) e (2.52) que ficarão,

$$\begin{cases} \lambda = (j + \frac{1}{2}) = -(l + 1), & j = l + \frac{1}{2}, & \lambda < 0 \\ \lambda = -(j + \frac{1}{2}) = l, & j = l - \frac{1}{2}, & \lambda > 0 \end{cases}, \quad (2.53)$$

e

$$\begin{cases} \lambda = (j + \frac{1}{2}) = -\tilde{l}, & \tilde{j} = \tilde{l} - \frac{1}{2}, & \lambda < 0 \\ \lambda = -(j + \frac{1}{2}) = \tilde{l} + 1, & \tilde{j} = \tilde{l} + \frac{1}{2}, & \lambda > 0 \end{cases}. \quad (2.54)$$

Assim, obtemos finalmente,

$$\Psi_c(r, \theta, \phi) = N \begin{pmatrix} r_1(r) \mathcal{Y}_l^{m|j}(\theta, \phi) \\ ir_2(r) \mathcal{Y}_{\tilde{l}}^{m|\tilde{j}}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

onde  $r_1(r)$  e  $r_2(r)$  devem satisfazer agora,

$$\begin{cases} (\alpha^2 V + e^f - \epsilon) r_1 - \alpha e^{f-g} \left[ \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{f'}{2} - \lambda \frac{e^g}{r} - A(r) \right] r_2(r) = 0 \\ (\alpha^2 V - e^f - \epsilon) r_2 + \alpha e^{f-g} \left[ \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{f'}{2} + \lambda \frac{e^g}{r} + A(r) \right] r_1(r) = 0 \end{cases} \quad (2.56)$$

Encontramos, nesta seção, o espinor angular da equação de Dirac dependentes das funções angulares de spin como queríamos pelo fato de haver simetria esférica no sistema. Para isso utilizamos a equação de Dirac no gauge diagonal, diante da complexidade de resolver no gauge cartesiano, assim mostramos que independente da escolha de um elemento de linha ou campo EM específico. Notamos também que as autoenergias serão dadas resolvendo os sistemas radiais. Na próxima seção vamos analisar um caso particular entre as funções  $f(r)$  e  $g(r)$ .

## 2.3 Métrica com $f(r) = g(r)$ e função de onda radial

Tendo determinado a função da onda angular do sistema, nos resta resolver as equações diferenciais radiais, dadas por (2.56), para partícula e anti-partícula,  $r_1(r)$  e  $r_2(r)$ , respectivamente. Primeiramente, precisamos definir de maneira explícita o tipo de elemento de linha que vamos analisar a partir de agora, ou seja, definir como serão as funções  $f(r)$  e  $g(r)$ . Fazendo uma pesquisa conseguimos encontrar alguns trabalhos que já utilizaram um elemento de linha do mesmo tipo dado em (2.6) para casos particulares entre as funções  $f(r)$  e  $g(r)$ , como por exemplo, (i) o caso onde  $f \neq 0$  e  $g = 0$  foi estudado em [54]; (ii) Vozmediano e colaboradores estudaram um sistema onde  $f = 0$  e  $g \neq 0$  [38]; e (iii) Barros [126] estudou um sistema onde  $f = 1/g$ . Diante disso, surgiu a curiosidade e até mesmo necessidade de analisar uma partícula de spin  $1/2$  para o elemento de linha dado em (2.6) para um comportamento diferente e ainda não estudado na literatura das funções  $f$  e  $g$ . Portanto, aqui vamos trabalhar com  $f = g$ , pois até onde sabemos, não existem soluções exatas da equação de Dirac para este caso, e propomos preencher essa lacuna. Além disso, considerando as simulações experimentais da equação de Dirac [49, 127, 128] usando métodos óticos bem como armadilhas de íons [129]; e até mesmo para espaço-tempo curvo [56] usando átomos ultra-frios, temos um segunda motivação que é o estudo de outros modelos que poderiam, em princípio, serem realizados em laboratório via técnicas de matéria condensada. Definiremos  $e^f = 1 + \alpha^2 U(r)$  de modo a eliminar o termo exponencial e poderemos expressar toda a informação da curvatura do espaço-tempo no

potencial escalar  $U(r)$  na equação de Dirac. Assim, a equação (2.56) ficará,

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + \alpha^2(V + U) - \epsilon)r_1 - \alpha \left[ \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{f'}{2} - \lambda \frac{(1 + \alpha^2 U)}{r} - A(r) \right] \times \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad r_2(r) = 0 \\ \\ (-1 + \alpha^2(V - U) - \epsilon)r_2 + \alpha \left[ \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{f'}{2} + \lambda \frac{(1 + \alpha^2 U)}{r} + A(r) \right] \times \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad r_1(r) = 0 \end{array} \right. \quad (2.57)$$

Com isso, tomando os *ansatz*  $r_1(r) = (R_1(r)/r) \exp(-f/2)$  e  $r_2(r) = (R_2(r)/r) \exp(-f/2)$ , substituindo em (2.57) e reescrevendo na forma matricial obtemos,

$$\left( \begin{array}{cc} 1 + \alpha^2(V(r) + U(r)) - \epsilon & -\alpha \left[ \frac{d}{dr} - \frac{\lambda}{r} - \frac{\lambda \alpha^2}{r} U(r) - A(r) \right] \\ \alpha \left[ \frac{d}{dr} + \frac{\lambda}{r} + \frac{\lambda \alpha^2}{r} U(r) + A(r) \right] & -1 + \alpha^2(V(r) - U(r)) - \epsilon \end{array} \right) \times \quad (2.58)$$

$$\begin{pmatrix} R_1(r) \\ R_2(r) \end{pmatrix} = 0.$$

Observando a equação (2.58), podemos interpretá-la como o problema de autovalor para as funções de onda  $R_1$  e  $R_2$  em espaço-tempo plano, com massa dependente da posição  $m(r) = 1 + \alpha^2 U(r)$ , potencial vetor ou de interação  $V(r)$  e potencial tensor efetivo  $A_{ef}(r) = \lambda \alpha^2 U(r)/r + A(r)$ . Concluimos assim, que partimos de um problema para obter o espinor de Dirac em espaço-tempo curvo, encontramos o espinor angular análogo ao do espaço-tempo plano, e caímos num problema para obter o espinor radial também em espaço-tempo plano por conta das substituições  $r_1(r) = (R_1(r)/r) \exp(-f/2)$  e  $r_2(r) = (R_2(r)/r) \exp(-f/2)$ . Pois,  $r_1$  e  $r_2$  são as funções de onda radiais em espaço-tempo curvo e  $R_1$  e  $R_2$  são as funções de onda radiais em

espaço-tempo plano.

Nas próximas duas seções, vamos considerar duas abordagens diferentes para resolver as equações radiais dada em (2.58). A primeira será na seção (2.3.1), onde resolveremos a equação radial através de uma transformação unitária para desacoplar as funções de onda  $R_1(r)$  e  $R_2(r)$  com auxílio do potencial tensor  $A(r)$  que dependerá dos potenciais vetor  $V(r)$  e escalar  $U(r)$ . O segundo caso, na seção (2.3.2), vamos analisar o sistema com simetrias exatas de spin e pseudo-spin que surgem através da relação entre os potenciais vetor e escalar.

### 2.3.1 Desacoplamento da equação radial com transformação unitária

A principal dificuldade para se resolver as equações radiais satisfeitas por  $R_1(r)$  e  $R_2(r)$  vem do fato de que elas estão acopladas, pois tem dependência radial em todos os elementos da matriz, e se tentarmos desacoplar na forma que estão, cairemos em uma EDO muito complicada de trabalhar. Com isso, assim como fizemos na seção anterior, onde efetuamos uma rotação na equação de Dirac afim de desacoplarmos as componentes radial e angular, aqui faremos o mesmo, aplicando uma rotação em (2.58). Porém, nosso objetivo agora é tentar eliminar a dependência radial de um dos termos da diagonal principal e com isso conseguirmos desacoplar as funções  $R_1(r)$  e  $R_2(r)$  e obtermos uma EDO que consigamos resolver de maneira mais fácil. Assim, vamos usar a abordagem de Alhaidari [130], que consiste em fazer uma transformação unitária dada por  $U' = \exp(i\eta\sigma^2)$ , onde  $-\pi/4 \leq \eta \leq \pi/4$ , de modo que consigamos eliminar a dependência radial em um dos termos da diagonal principal e encontramos uma EDO tipo-Schrödinger ao desacoplarmos as funções de onda. Portanto, aplicando  $U'$  em (2.58)

obtemos,

$$\begin{pmatrix} C + 2\alpha^2 V(r) - \epsilon & -S + \frac{\alpha^2}{S}(CV(r) - U(r)) - \alpha \frac{d}{dr} \\ -S + \frac{\alpha^2}{S}(CV(r) - U(r)) + \alpha \frac{d}{dr} & -C - \epsilon \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (2.59)$$

onde  $C = \cos(2\eta)$ ,  $S = \sin(2\eta)$  e

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = U' \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Desse modo, conseguimos eliminar a dependência radial de um dos termos na diagonal principal com o auxílio do potencial tensor  $A(r)$  que será dado por,

$$A(r) = \frac{\alpha C}{S} \left[ \frac{V(r)}{C} - U(r) \right] - \frac{\lambda}{r} [1 + \alpha^2 U(r)]. \quad (2.61)$$

Efetuada a multiplicação de matrizes em (2.59), obtemos o sistema de equações diferenciais,

$$\begin{cases} (C + 2\alpha^2 V(r) - \epsilon)\rho_1 + \left[ -S + \frac{\alpha^2}{S}(CV(r) - U(r)) - \alpha \frac{d}{dr} \right] \rho_2 = 0 \\ (C + \epsilon)\rho_2 - \left[ -S + \frac{\alpha^2}{S}(CV(r) - U(r)) - \alpha \frac{d}{dr} \right] \rho_1 = 0 \end{cases} \quad (2.62)$$

Resolvendo a segunda equação em (2.62) para  $\rho_2$  obtemos,

$$\rho_2(r) = \frac{\alpha}{C + \epsilon} \left[ -\frac{S}{\alpha} + \frac{\alpha}{S}(CV(r) - U(r)) + \frac{d}{dr} \right] \rho_1(r), \quad (2.63)$$

e substituindo (2.63) na primeira equação em (2.62) obtemos que a função

de onda  $\rho_1$  deve satisfazer a EDO dada por,

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\alpha}{S} \frac{d(CV - U)}{dr} - 2(U + \epsilon V) - \frac{\alpha^2}{S^2} (CV - U)^2 + \frac{\epsilon^2 - 1}{\alpha^2} \right] \rho_1(r) = 0. \quad (2.64)$$

Como observamos, obtemos uma equação tipo-Schrödinger para a função de onda  $\rho_1$ . Um caso particular que vamos considerar neste trabalho é quando os potenciais vetor e escalar dependem de uma mesma função da seguinte maneira:  $V(r) = az(r)$  e  $U(r) = bz(r)$ , onde  $(a, b)$  são constantes reais. Assim, queremos analisar sistemas físicos com potenciais vetor e escalar dados por uma mesma função  $z(r)$ , porém com parâmetros de acoplamentos diferentes ( $a \neq b$ ). Com isso, finalmente obtemos,

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\alpha}{S} (aC - b)z'(r) - 2(b + \epsilon a)z(r) - \frac{\alpha^2}{S^2} (aC - b)^2 z^2(r) + \frac{\epsilon^2 - 1}{\alpha^2} \right] \rho_1(r) = 0. \quad (2.65)$$

Da equação (2.65) podemos investigar alguns casos particulares definindo  $z(r)$ . Desse modo, se pudermos encontrar a solução para  $\rho_1(r)$  substituímos o resultado em (2.63) e encontramos  $\rho_2$ . Então calculamos  $R_1(r)$  e  $R_2(r)$  via,

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \eta & -\sin \eta \\ \sin \eta & \cos \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

No capítulo (3) vamos analisar alguns sistemas definindo três formas diferentes para a função  $z(r)$ .

### 2.3.2 Desacoplamento da equação radial com simetrias exatas de spin e pseudo-spin

Nesta seção vamos considerar a componente radial da equação de Dirac em espaço-tempo curvo com simetrias exatas de spin e pseudo-spin. Desse modo, mostraremos como desacoplar a equação (2.58) para as funções de onda  $R_1$  e  $R_2$  de maneira mais direta, sem precisar aplicar nenhum tipo de transformação como no caso anterior. Assim, considere a equação radial dada em (2.58),

$$\begin{pmatrix} 1 + \alpha^2(V(r) + U(r)) - \epsilon & -\alpha \left[ \frac{d}{dr} - \frac{\lambda}{r} - \frac{\lambda\alpha^2}{r}U(r) - A(r) \right] \\ \alpha \left[ \frac{d}{dr} + \frac{\lambda}{r} + \frac{\lambda\alpha^2}{r}U(r) + A(r) \right] & -1 + \alpha^2(V(r) - U(r)) - \epsilon \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_1(r) \\ R_2(r) \end{pmatrix} = 0, \quad (2.67)$$

considerando  $\Sigma(r) = V(r) + U(r)$  e  $\Delta(r) = V(r) - U(r)$  temos,

$$\begin{pmatrix} 1 + \alpha^2\Sigma(r) - \epsilon & -\alpha \left[ \frac{d}{dr} - \frac{\lambda}{r} - \frac{\lambda\alpha^2}{r}U(r) - A(r) \right] \\ \alpha \left[ \frac{d}{dr} + \frac{\lambda}{r} + \frac{\lambda\alpha^2}{r}U(r) + A(r) \right] & -1 + \alpha^2\Delta(r) - \epsilon \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_1(r) \\ R_2(r) \end{pmatrix} = 0. \quad (2.68)$$

Da equação (2.68) obtemos,

$$\begin{cases} (1 + \alpha^2\Sigma(r) - \epsilon)R_1 = \alpha \left[ \frac{d}{dr} - \frac{\lambda}{r} - \frac{\lambda\alpha^2}{r}U(r) - A(r) \right] R_2 \\ (-1 + \alpha^2\Delta(r) - \epsilon)R_2 = -\alpha \left[ \frac{d}{dr} + \frac{\lambda}{r} + \frac{\lambda\alpha^2}{r}U(r) + A(r) \right] R_1 \end{cases} \quad (2.69)$$



Temos duas formas de desacoplar as funções de onda  $R_1$  e  $R_2$  na equação (2.69), a primeira forma é considerando o sistema com simetria exata de spin. Para isso, as autoenergias terão que depender do momento angular orbital  $l$ , portanto ao desacoplar (2.69) teremos que obter uma EDO para a componente superior  $R_1$ , já que é nessa componente que acopla  $l$ , como vemos em (2.55). Assim, da segunda equação em (2.69), obtemos para a função de onda  $R_2$ ,

$$R_2 = \frac{\alpha}{1 + \epsilon - \alpha^2 \Delta(r)} \left[ \frac{d}{dr} + \frac{\lambda}{r} (1 + \alpha^2 U(r)) + A(r) \right] R_1, \quad (2.70)$$

substituindo (2.70) na primeira equação em (2.69), concluímos que  $R_1$  deve satisfazer,

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{dr} \left[ \frac{\lambda}{r} (1 + \alpha^2 U(r)) + A(r) \right] - \left[ \frac{\lambda}{r} (1 + \alpha^2 U(r)) + A(r) \right]^2 \right. \\ \left. + \alpha^2 \frac{d\Delta}{dr} \frac{\left[ \frac{d}{dr} + \frac{\lambda}{r} (1 + \alpha^2 U(r)) + A(r) \right]}{1 + \epsilon - \alpha^2 \Delta(r)} - (1 - \epsilon + \alpha^2 \Sigma(r)) \times \frac{(1 + \epsilon - \alpha^2 \Delta(r))}{\alpha^2} \right\} R_1 = 0, \quad (2.71)$$

portanto, para a simetria exata de spin se manifestar, temos que  $V(r) = U(r)$ , ou seja,  $\Delta(r) = 0$ , logo, (2.71) ficará,

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{dr} \left[ \frac{\lambda}{r} (1 + \alpha^2 U) + A(r) \right] - \left[ \frac{\lambda}{r} (1 + \alpha^2 U) + A(r) \right]^2 \right. \\ \left. - \frac{(1 - \epsilon + \alpha^2 \Sigma(r))(1 + \epsilon)}{\alpha^2} \right\} R_1 = 0. \quad (2.72)$$

Notamos que a função de onda  $R_1$  deverá satisfazer uma equação do tipo-Schrödinger como obtemos em (2.72), pois temos somente a segunda derivada em  $r$ . Nessa simetria observamos que o termo de acoplamento spin-órbita  $\lambda$

possui dois valores possíveis, como na equação (2.53), dados por,

$$\begin{cases} \lambda = (j + \frac{1}{2}) = l, & j = l - \frac{1}{2}, & \lambda > 0 \\ \lambda = -(j + \frac{1}{2}) = -(l + 1), & j = l + \frac{1}{2}, & \lambda < 0 \end{cases}, \quad (2.73)$$

onde  $l$  é o momento angular orbital, e para  $\lambda < 0$  e  $\lambda > 0$  temos que o spin está alinhado e não-alinhado com o momento angular orbital, respectivamente.

A segunda forma para desacoplar a equação (2.69) é considerando a simetria exata de pseudo-spin. Para isso, agora as autoenergias terão que depender do pseudo-momento angular orbital  $\tilde{l}$ , portanto ao desacoplar (2.69) teremos que obter uma EDO para a componente superior  $R_2$ , já que é nessa componente que acopla  $\tilde{l}$ , como vemos em (2.55). Assim, da primeira equação em (2.69), obtemos para a função de onda  $R_1$ ,

$$R_1 = \frac{\alpha}{1 - \epsilon + \alpha^2 \Sigma(r)} \left[ \frac{d}{dr} - \frac{\lambda}{r} (1 + \alpha^2 U(r)) - A(r) \right] R_2, \quad (2.74)$$

substituindo (2.74) na segunda equação em (2.69), concluímos que  $R_2$  deve satisfazer,

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{d}{dr} \left[ \frac{\lambda}{r} (1 + \alpha^2 U(r)) + A(r) \right] - \left[ \frac{\lambda}{r} (1 + \alpha^2 U(r)) + A(r) \right]^2 \right. \\ \left. + \alpha^2 \frac{d\Sigma}{dr} \frac{\left[ \frac{d}{dr} - \frac{\lambda}{r} (1 + \alpha^2 U(r)) - A(r) \right]}{1 - \epsilon + \alpha^2 \Sigma(r)} - (1 - \epsilon + \alpha^2 \Sigma(r)) \times \frac{(1 + \epsilon - \alpha^2 \Delta(r))}{\alpha^2} \right\} R_2 = 0 \quad (2.75)$$

Portanto, para a simetria exata de pseudo-spin se manifestar, temos que

$V(r) = -U(r)$ , ou seja,  $\Sigma(r) = 0$ , logo, (2.75) ficará,

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{d}{dr} \left[ \frac{\lambda}{r} (1 + \alpha^2 U) + A(r) \right] - \left[ \frac{\lambda}{r} (1 + \alpha^2 U) + A(r) \right]^2 - \frac{(1 - \epsilon)(1 + \epsilon - \alpha^2 \Delta(r))}{\alpha^2} \right\} R_2 = 0. \quad (2.76)$$

Encontramos novamente uma EDO tipo-Schrödinger, agora para  $R_2$ . Nessa simetria, o termo de acoplamento spin-órbita será, como na equação (2.54), dado por,

$$\begin{cases} \lambda = (\tilde{j} + \frac{1}{2}) = \tilde{l} + 1, & \tilde{j} = \tilde{l} + \frac{1}{2}, & \lambda > 0 \\ \lambda = -(\tilde{j} + \frac{1}{2}) = -\tilde{l}, & \tilde{j} = \tilde{l} - \frac{1}{2}, & \lambda < 0 \end{cases}, \quad (2.77)$$

onde  $\tilde{l}$  é o pseudo-momento angular orbital, que é introduzido nesta simetria, e agora para  $\lambda < 0$  e  $\lambda > 0$  temos que o spin está não-alinhado e alinhado com o pseudo-momento angular orbital [131], respectivamente. Notamos que o alinhamento do spin para a simetria exata de pseudo-spin está invertida com relação a simetria exata de spin, isso se justifica porque as simetrias se invertem através da troca  $\lambda \rightarrow -\lambda$ , como vimos na seção (2.2.1).

Um fato interessante é que, nos capítulos onde faremos aplicações das simetrias exatas de spin e pseudo-spin, surgirão termos do tipo  $\lambda(\lambda + 1)$  e  $\lambda(\lambda - 1)$  nas EDOs (2.72) e (2.76), respectivamente. Assim, utilizando os dois valores possíveis de  $\lambda$  dados em (2.73) e (2.77), obtemos  $\lambda(\lambda + 1) = l(l + 1)$  e  $\lambda(\lambda + 1) = \tilde{l}(\tilde{l} + 1)$ , para as simetrias exatas de spin e pseudo-spin, respectivamente.

Por fim, para conseguirmos obter as funções de onda  $R_1(r)$  e  $R_2(r)$  e as autoenergias  $\epsilon$  precisamos definir os potenciais  $V(r)$ ,  $U(r)$  e  $A_r(r)$ . A partir do capítulo (4) vamos resolver alguns sistemas de acordo com diferentes formas dos potenciais.

## Capítulo 3

# Soluções exatas da equação de Dirac em espaço-tempo curvo

Neste capítulo analisaremos alguns sistemas sem simetrias exatas de spin e pseudo-spin. Para isso vamos utilizar o resultado obtido na seção (2.3.1) e assim calcular as funções de onda radial  $R_1(r)$  e  $R_2(r)$  para três casos diferentes: (i) Átomo de Hidrogênio, (ii) Potencial Dirac-Morse e (iii) Potencial radial linear.

**As constantes calculadas neste capítulo se aplica somente ao mesmo, apenas a constante de estrutura fina  $\alpha = 1/137$  tem o mesmo valor em todos os capítulos.**

### 3.1 Átomo de Hidrogênio

Neste primeiro caso vamos considerar o átomo de Hidrogênio, para isso vamos definir  $z(r) = 1/r$  e  $a = Z$ , assim  $V(r) = Z/r$  e  $U(r) = b/r$ , onde  $Z$  é o

número atômico. Logo da equação (2.65), temos que,

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\alpha}{S}(ZC - b) \left( \frac{\alpha}{S}(ZC - b) - 1 \right) \frac{1}{r^2} - 2(b + \epsilon Z) \frac{1}{r} + \frac{\epsilon^2 - 1}{\alpha^2} \right] \rho_1 = 0, \quad (3.1)$$

onde  $z(r) = 1/r$  e  $a = Z$ . Esta equação diferencial acima é análoga a equação que foi resolvida no trabalho de Alhaidari [132] — onde ele estudou o átomo de Hidrogênio com a massa dependendo da posição, logo tal equação é dada por,

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\gamma(\gamma + 1)}{r^2} - \frac{2(\mu + Z\epsilon)}{r} + \frac{\epsilon^2 - 1}{\alpha^2} \right] \Phi = 0, \quad (3.2)$$

onde  $\Phi$  é dado por,

$$\Phi(r) = r^{\gamma+1} \exp\left(-\frac{\omega r}{2}\right) L_n^{2\gamma+1}(\omega r), \quad (3.3)$$

com  $L_n^k(x)$  sendo os polinômios de Laguerre associados [133],  $\omega$  e  $\gamma$  dados por,

$$\omega = \frac{2|\mu + Z\epsilon|}{n + \gamma + 1}, \quad \gamma = \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2(\mu^2 - Z^2)} > 0, \quad (3.4)$$

e as autoenergias  $\epsilon$  são,

$$\epsilon = \left[ 1 + \left( \frac{\alpha Z}{n + \gamma + 1} \right)^2 \right]^{-1} \left[ -\frac{\alpha^2 \mu Z}{(n + \gamma + 1)^2} \pm \sqrt{1 + \frac{\alpha^2(Z^2 - \mu^2)}{(n + \gamma + 1)^2}} \right]. \quad (3.5)$$

Assim, podemos mapear nossa equação diferencial dada em (3.1) com (3.2) e obter a solução imediatamente. Identificamos os parâmetros  $\mu = b$ ,  $\gamma = \alpha(ZC - b)/S$ , e fazendo  $S = \sqrt{1 - C^2}$  obtemos,

$$C = \frac{\alpha^2 b Z \pm \lambda \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2(b^2 - Z^2)}}{\lambda^2 + \alpha^2 b^2} > 0, \quad (3.6)$$

onde  $C > 0$ , pois como  $C$  também é definido por  $C = \cos 2\eta$ , ele será sempre

positivo no intervalo  $-\pi/4 \leq \eta \leq \pi/4$ . Usando (3.3) temos,

$$\rho_1(r) = r^{\gamma+1} \exp(-\rho_n r) L_n^{2\gamma+1}(2\rho_n r), \quad (3.7)$$

e de (2.63) obtemos que  $\rho_2$  será,

$$\rho_2(r) = \left[ \left( \alpha - \frac{S}{\rho_n} \right) (2\gamma + n + 1) L_n^{2\gamma}(2\rho_n r) + \left( \alpha + \frac{S}{\rho_n} \right) \times \right. \\ \left. (n + 1) L_{n+1}^{2\gamma}(2\rho_n r) \right] \frac{r^\gamma e^{-\rho_n r}}{2(C + \epsilon)}, \quad (3.8)$$

onde  $\rho_n = |b + Z\epsilon|/(n + \gamma + 1)$ . Conhecendo as soluções para  $\rho_1$  e  $\rho_2$  obtemos as funções de onda  $R_1$  e  $R_2$  usando a equação (2.66). Desse modo, conseguimos finalmente escrever a função de onda espinorial completa  $\Psi_c$  usando (2.48) que será,

$$\Psi_c(r, \theta, \phi) = \frac{N}{\sqrt{2r}} \left( 1 + \frac{\alpha^2 b}{r} \right)^{-1/2} \begin{pmatrix} [\sqrt{1 + C}\rho_1 - \sqrt{1 - C}\rho_2] \mathcal{Y}_{j-\frac{1}{2}}^{m|j}(\theta, \phi) \\ i [\sqrt{1 - C}\rho_1 + \sqrt{1 + C}\rho_2] \mathcal{Y}_{j+\frac{1}{2}}^{m|j}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

onde  $N$  é a constante de normalização que foi calculada no apêndice (B). Notamos que podemos escrever o espinor em (3.9) como um produto  $\Psi^{curvo} = (1 + \alpha^2 b/r)^{-1/2} \Psi^{plano}$ , onde  $\Psi^{plano}$  é o espinor de Dirac do átomo de Hidrogênio em espaço-tempo plano com massa dependendo da posição  $m(r) = (1 + \alpha^2 b/r)$ . Em outras palavras, o espinor de Dirac em espaço-tempo curvo é um produto do espinor em espaço-tempo plano com o primeiro elemento de linha da métrica dado em (3.10),  $(g_{tt})^{-1/4} = (1 + \alpha^2 b/r)^{-1/2}$ . Esse fator está relacionado à velocidade de Fermi, que por sua vez é proporcional a  $(g_{tt})^{1/2}$ , isso é bem conhecido óptica, onde a luz se propaga em uma métrica óptica possuindo índice de refração igual a  $(g_{tt})^{1/2}$ . Portanto, os espinores de Dirac

em espaço-tempos curvo e plano são conectados via velocidade de Fermi ou pelo índice de refração da luz em uma métrica óptica. Essa abordagem de relacionar sistemas de espaço-tempos curvo e plano através da velocidade de Fermi é explorada por meio de métricas ópticas nos trabalhos [54, 127, 128, 56, 134], onde a contribuição vem exclusivamente de  $g_{tt}$ .

O elemento de linha será,

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\alpha^2 b}{r}\right)^2 (dt^2 - dr^2) - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.10)$$

temos que para  $b = -1$  a energia em (3.5) deverá ser a com sinal negativo na raiz quadrada, pois para o sinal positivo a energia será  $\epsilon = 1$ , fazendo com que o espinor (3.9) se torna divergente independente da posição no espaço-tempo — isto se dá porque  $\rho_n$  é nulo quando  $b = -1$  e  $\epsilon = 1$ . A curvatura escalar [57] de (3.10) é dada por,

$$R = \frac{2\alpha^4 b^2}{(r + \alpha^2 b)^4} - \frac{4\alpha^2 b}{(r + \alpha^2 b)^3} - \frac{2}{(r + \alpha^2 b)^2} + \frac{2}{r^2}, \quad (3.11)$$

com isso temos que para  $r \rightarrow 0$  implica  $R \rightarrow \infty$ , isto é, a curvatura é máxima e isto indica a presença de uma singularidade na origem. Quando  $r \rightarrow \infty$  isso implica  $R \rightarrow 0$ , assim obtemos uma curvatura nula, logo o espaço-tempo será plano neste limite. O fato que temos uma singularidade em  $r \rightarrow 0$  poderia implicar numa divergência na densidade de probabilidade  $r^2(1 + \alpha^2 b/r)^2 |\Psi|^2$ , mas isso não acontece devido ao acoplamento do potencial tensor  $A(r)$  em (2.61) que compensa a singularidade devido ao potencial escalar  $U(r)$ . Analisamos a geodésica radial de (3.10) no apêndice C.

O potencial tensor é dado por  $A(r) = -\alpha^2 \lambda b / r^2$  e o campo EM  $A_\mu = (Z/r, -\alpha \lambda b / r^2, 0, 0)$ . Em um caso especial em espaço-tempo plano quando tomamos  $b = 0$ , recuperamos as bem conhecidas autofunções e autoenergias

do átomo de Hidrogênio métricas [130].

Por fim, nas figuras (3.1) e (3.2), traçamos as densidades de probabilidade radiais normalizadas  $|\Psi_c|^2$  para obter informações sobre a contribuição do acoplamento do espaço curvo com o campo EM. Para isso, vamos analisar as densidades de probabilidade radiais para alguns valores de  $b$ , de modo que vamos estar variando a curvatura e o campo EM.

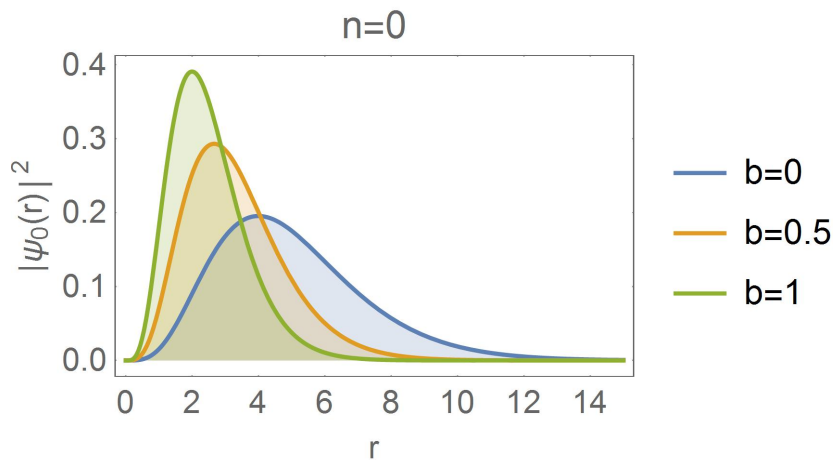


Figura 3.1: Gráficos das densidades de probabilidade radiais  $|\Psi_0(r)|^2 = r^2(1 + \alpha^2 b/r)^2 |\Psi_c|^2$  em um espaço curvo com o elemento de linha dada por (3.10) para  $n = 0$ . Traçamos a densidade de probabilidade em espaço-tempo plano ( $b = 0$ ) e, à medida que o parâmetro  $b$  aumenta, observamos que as curvas se aproximam da origem. Como o problema também pode ser interpretado como uma partícula com massa dependente da posição, observamos que, como no caso não-relativístico [135], a densidade de probabilidade se torna mais alta na região em que a partícula se torna mais massiva —  $m(r) = (1 + \alpha^2 b/r)$ . Usamos unidades atômicas.



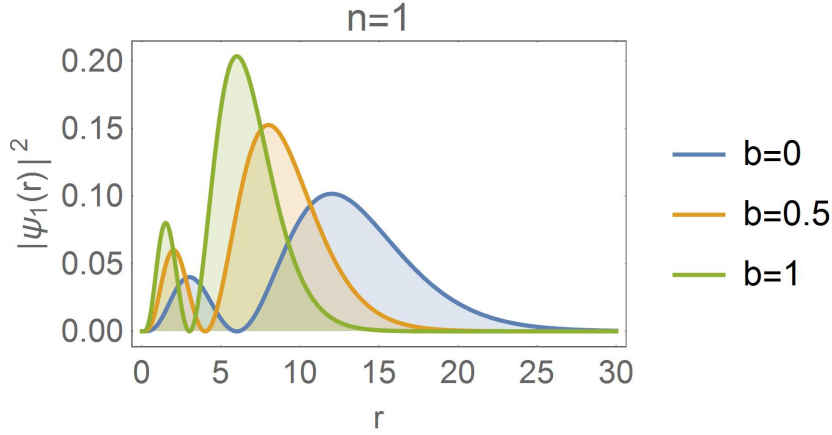


Figura 3.2: Gráficos das densidades de probabilidade radiais  $|\Psi_1(r)|^2 = r^2(1 + \alpha^2 b/r)^2 |\Psi_c|^2$  em espaço-tempo curvo com elemento de linha dado por (3.10) for  $n = 1$ . Para  $b = 0$ , traçamos a densidade de probabilidade em espaço-tempo plano, e de acordo com que o parâmetro  $b$  aumenta observamos que a curva se aproxima da origem. Como no caso anterior a figura da densidade de probabilidade se aproxima da região onde a massa é maior —  $m(r) = (1 + \alpha^2 b/r)$ . Usamos unidades atômicas.

Observamos que as densidades de probabilidade traçadas como curvas laranja e verde estão mais próximas da origem, se comparadas com a azul, que representa a densidade de probabilidade em um espaço-tempo plano. Podemos interpretar esse efeito observando que na equação de Dirac (2.19) o termo  $\beta c e^f$  desempenha o papel de  $\beta m$  onde  $m$  é a massa da partícula. Como  $e^f = 1 + \alpha^2 U(r)$  significa que temos uma massa dependente da posição  $m(r) = 1 + \alpha^2 b/r$ , e é um fato conhecido de que uma partícula com uma massa dependente da posição se concentra onde a massa é maior [135].

### 3.2 Potencial Dirac-Morse

Como segunda aplicação vamos considerar o potencial tipo-Morse, para isso fazemos  $z(r) = e^{-\delta r}$  e  $a \rightarrow -a$ , assim temos  $V(r) = -a e^{-\delta r}$ , onde  $(a, \delta)$  são

constantes reais. A equação (2.65) produz,

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\alpha^2}{S^2} (aC + b)^2 e^{-2\delta r} + \left\{ \frac{\alpha\delta}{S} (aC + b) + 2(\epsilon a - b) \right\} e^{-\delta r} + \frac{\epsilon^2 - 1}{\alpha^2} \right] \times \quad (3.12)$$

$$\rho_1(r) = 0.$$

Temos que a EDO dada acima é análoga ao caso não-relativístico do potencial Morse resolvido em [136] que é dado por,

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - A^2 e^{-2\delta r} + A(\delta + 2B)e^{-\delta r} + 2E \right] \Phi = 0, \quad (3.13)$$

onde  $\Phi$  é,

$$\Phi(r) = (\mu e^{-\delta r})^{\nu_n} \exp\left(-\frac{\mu}{2} e^{-\delta r}\right) L_n^{2\nu_n}(\mu e^{-\delta r}), \quad (3.14)$$

com  $\mu = 2A/\delta$ ,  $\nu_n = B/\delta - n$  e os autovalores de energia são  $E_n = -\delta^2 \nu_n^2/2$ . Novamente podemos encontrar  $\rho_1$  fazendo um mapeamento entre as equações (3.12) e (3.13), assim identificamos,

$$A = \frac{\alpha(aC + b)}{S}, \quad B = S\alpha^{-1} \frac{\epsilon a - b}{aC + b}, \quad E = \frac{\epsilon^2 - 1}{2\alpha^2}, \quad (3.15)$$

e

$$\mu = \frac{2\alpha(aC + b)}{\delta S}, \quad \nu_n = \frac{S(\epsilon a - b)}{(aC + b)\alpha\delta} - n \geq 0, \quad (3.16)$$

onde  $\nu_n$  tem que ser maior que zero pra  $\Phi$  ser quadrado integrável. As autoenergias  $\epsilon_n$  serão,

$$\epsilon_n = \left[ \frac{abS^2}{(aC + b)^2} + \frac{a\alpha\delta Sn}{aC + b} \pm \sqrt{1 + \frac{a^2 S^2}{(aC + b)^2} - \left( n\alpha\delta + \frac{bS}{aC + b} \right)^2} \right] \times \quad (3.17)$$

$$\left( 1 + \frac{a^2 S^2}{(aC + b)^2} \right)^{-1},$$

e para as autoenergias  $\epsilon_n$  serem reais,  $n$  tem que satisfazer a seguinte condiçãõ,

$$0 \leq n \leq \left( -\frac{bS}{aC+b} + \sqrt{\frac{1+a^2S^2}{(aC+b)^2}} \right) / |\alpha\delta|. \quad (3.18)$$

Usando (3.14) e (2.63) obtemos as funções radiais  $\rho_1$  e  $\rho_2$  que serão,

$$\rho_1(r) = (\mu e^{-\delta r})^{\nu_n} \exp \left[ -\frac{\mu}{2} e^{-\delta r} \right] L_n^{2\nu_n} (\mu e^{-\delta r}), \quad (3.19)$$

e

$$\rho_2(r) = \left[ -\frac{2a\alpha}{\mu\delta} L_n^{2\nu_n} (\mu e^{-\delta r}) + \frac{\alpha\delta}{C+\epsilon} (n+2\nu_n) L_{n-1}^{2\nu_n} (\mu e^{-\delta r}) \right] (\mu e^{-\delta r})^{\nu_n} \times \exp \left[ -\frac{\mu}{2} e^{-\delta r} \right]. \quad (3.20)$$

As funções de onda radiais  $R_1$  e  $R_2$  podem ser facilmente calculadas usando (2.66) e usando (2.48) obtemos a função de onda espinorial geral do sistema  $\Psi_c$ ,

$$\Psi_c(r, \theta, \phi) = N \frac{(1 + \alpha^2 b e^{-\delta r})^{-1/2}}{\sqrt{2}r} \begin{pmatrix} [\sqrt{1+C}\rho_1 - \sqrt{1-C}\rho_2] \mathcal{Y}_{j-\frac{1}{2}}^{|m|j}(\theta, \phi) \\ i [\sqrt{1-C}\rho_1 + \sqrt{1+C}\rho_2] \mathcal{Y}_{j+\frac{1}{2}}^{|m|j}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

onde  $N$  é a constante de normalização que calculamos explicitamente no apêndice B.

Como no caso anterior, podemos escrever (3.21) como um produto  $\Psi^{curvo} = (1 + \alpha^2 b e^{-\delta r})^{-1/2} \Psi^{plano}$ , onde  $\Psi^{plano}$  é o espinor em espaço-tempo plano com a massa dependendo da posição  $m(r) = (1 + \alpha^2 b e^{-\delta r})$ . Obtemos novamente o espinor de Dirac em espaço-tempo curvo como um produto do espinor em espaço-tempo plano com o elemento da métrica em (3.22),  $(g_{tt})^{-1/4} =$

$(1 + \alpha^2 b e^{-\delta r})^{-1/2}$ . O elemento de linha é,

$$ds^2 = (1 + \alpha^2 b e^{-\delta r})^2 (dt^2 - dr^2) - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.22)$$

e o número de espinores quadrado integráveis, dado por (3.21), depende de  $b$ , pois o parâmetro dos polinômios de Laguerre associados  $\nu_n$  tem que ser não-negativo. A curvatura escalar neste caso é dada por,

$$R = \frac{2\alpha^4 \delta^2 b^2 e^{-2\delta r}}{(1 + \alpha^2 b e^{-\delta r})^4} - \frac{2\alpha^2 \delta^2 b e^{-\delta r}}{(1 + \alpha^2 b e^{-\delta r})^3} + \frac{2}{r^2} \left( 1 - \frac{1}{(1 + \alpha^2 b e^{-\delta r})^2} \right), \quad (3.23)$$

que tem um comportamento análogo ao caso anterior: diverge quando  $r \rightarrow 0$ ; tende a zero no limite  $r \rightarrow \infty$ ; e também, como no caso anterior, a densidade de probabilidade não diverge na origem por causa do acoplamento com o potencial tensor  $A(r)$  que compensa a singularidade devido ao potencial escalar  $U(r)$ . Analisamos a geodésica radial de (3.22) no apêndice C.

O potencial tensor será,

$$A(r) = - \left( \frac{\alpha(aC + b)}{S} + \alpha^2 b \frac{\lambda}{r} \right) e^{-\delta r} - \frac{\lambda}{r}, \quad (3.24)$$

e o campo EM será dado por,

$$A_\mu = \left( -a e^{-\delta r}, - \left[ \frac{aC + b}{S} + \alpha b \frac{\lambda}{r} \right] e^{-\delta r} - \frac{\lambda}{\alpha r}, 0, 0 \right). \quad (3.25)$$

Para  $b = 0$  recuperamos a função de onda espinorial e os autovalores de energia em espaço-tempo plano calculado por Alhaidari [130]. Na figura (3.3), traçamos as densidades de probabilidade radiais normalizadas  $|\Psi_c|^2$  para diferentes valores de  $b$  bem como para  $b = 0$  de maneira a comparar o efeito produzido pelo acoplamento da curvatura do espaço com o campo EM.

Neste caso temos que quanto maior o valor de  $b$  maior será a massa,

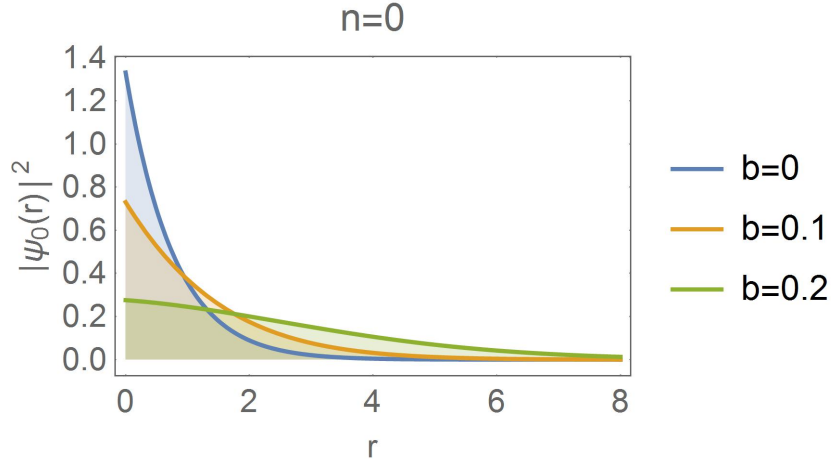


Figura 3.3: Gráficos das densidades de probabilidade radiais  $|\Psi_0(r)|^2 = r^2(1 + \alpha^2 b e^{-\delta r})^2 |\Psi_c|^2$  em espaço-tempo curvo com o potencial Dirac-Morse ( $b = 0.1$  e  $b = 0.2$ ) e espaço-tempo plano ( $b = 0$ ) para  $n = 0$ . Como  $\delta$  é pequeno, não observamos a contribuição em massa dependente da posição —  $m(r) = 1 + \alpha^2 b e^{-\delta r}$ . Valores dos parâmetros são:  $C = 0.9999500$ ,  $S = 0.0099995$ ,  $a = 1$ ,  $\delta = 0.05$  e usamos unidades atômicas.

porém, quanto menor o valor de  $r$  maior será o valor da massa pois  $m(r) = 1 + \alpha^2 b e^{-\delta r}$ , assim como no caso anterior. Porém, observamos na figura (3.3) que a densidade de probabilidade está se afastando da origem quanto maior o valor de  $r$ , ou seja, está confinando em regiões onde o valor da massa é menor, diferentemente do caso anterior, onde a densidade de probabilidade é confinada onde tínhamos o valor de maior massa. Isso se dá porque quando variamos o valor de  $b$ , além de variar a forma da geometria, estamos variando também o campo EM, e esse acoplamento produz esse efeito observado na densidade de probabilidade.

### 3.3 Potencial radial linear

Como última aplicação deste capítulo, vamos considerar o potencial linear radial, para isso seja  $z(r) = r$ , assim temos  $V(r) = ar$ , onde  $(a, b)$  são cons-

tantes reais. Usando a mesma metodologia das seções anteriores, a equação (2.65) produz,

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\alpha^2}{S^2} (aC - b)^2 \left\{ r^2 + \frac{2S^2(b + \epsilon a)}{\alpha^2(b - aC)^2} r \right\} - \frac{\alpha}{S} (b - aC) + \frac{\epsilon^2 - 1}{\alpha^2} \right] \rho_1(r) = 0. \quad (3.26)$$

Completando quadrado no termo entre chaves, e fazendo as substituições,

$$y = r + \frac{S^2(b + \epsilon a)}{\alpha^2(b - aC)^2}, \quad \gamma = \frac{S^2(b + \epsilon a)^2}{\alpha^2(b - aC)^2} - \frac{\alpha(b - aC)}{S}, \quad (3.27)$$

obtemos,

$$\left[ \frac{d^2}{dy^2} - \left( \frac{\alpha^2}{S^2} (b - aC)^2 y^2 - \gamma + \frac{1 - \epsilon^2}{\alpha^2} \right) \right] \rho_1(y) = 0. \quad (3.28)$$

A equação (3.28) é análoga ao oscilador harmônico não-relativístico [137] que é dado por,

$$\left[ \frac{d}{dx^2} - \tau x^2 + 2E \right] \psi = 0, \quad (3.29)$$

que tem solução bem conhecida em termos dos polinômios de Hermite dada por,

$$\psi(x) = \exp\left(-\frac{\sqrt{\tau}}{2} x^2\right) H_n(\tau^{1/4} x), \quad (3.30)$$

onde  $H_n(x)$  são os polinômios de Hermite [124] e as autoenergias  $E = (n + 1/2)\sqrt{\tau}$ , com  $n \geq 0$ . Assim, fazendo o mapeamento de (3.28) com (3.29) obtemos,

$$\rho_1(r) = \exp\left(-\frac{k}{2} y^2\right) H_n(\sqrt{k} y), \quad (3.31)$$

onde  $k = \alpha(b - aC)/S > 0$  e  $(1 - \epsilon^2)/\alpha^2 - \gamma = -(2n + 1)k$ , logo as autoenergias são,

$$\epsilon_n = \frac{-ab\alpha^2 \pm \sqrt{(k^2 + a^2\alpha^2)(1 + 2\alpha^2(n + 1)k) - b^2\alpha^2}}{k^2 + \alpha^2 a^2}. \quad (3.32)$$

Fazendo  $S = \sqrt{1 - C^2}$  e usando  $k = \alpha(b - aC)/S$ , conseguimos obter,

$$C = \frac{ab\alpha^2 + k\sqrt{k^2 + \alpha^2(b^2 - a^2)}}{k^2 + a^2\alpha^2}, \quad (3.33)$$

ou seja, escrevemos  $S$  e  $C$  em função de um parâmetro  $k$  qualquer e por definição  $C > 0$ . Assim a função de onda  $\rho_1$  será,

$$\rho_1(r) = \exp\left[-\frac{k}{2}(r + r_0)^2\right] H_n\left[\sqrt{k}(r + r_0)\right], \quad (3.34)$$

onde  $r_0 = (b + \epsilon a)/k^2$  e substituindo (3.31) em (2.63) a função de onda  $\rho_2$  será,

$$\rho_2(r) = -\left\{\beta H_n\left[\sqrt{k}(r + r_0)\right] + \sqrt{k}H_{n+1}\left[\sqrt{k}(r + r_0)\right]\right\} \times \left(\frac{\alpha}{C + \epsilon}\right) \exp\left[-\frac{k}{2}(r + r_0)^2\right], \quad (3.35)$$

com  $\beta = S/\alpha + (b + \epsilon a)(1 - 2k)/k^2$ . Finalmente, as funções de onda radiais  $R_1$  e  $R_2$  são calculadas usando (2.66) e usando (2.48) obtemos o espinor de Dirac geral do sistema dado por,

$$\Psi_c(r, \theta, \phi) = N \frac{(1 + \alpha^2 br)^{-1/2}}{\sqrt{2}r} \begin{pmatrix} [\sqrt{1 + C}\rho_1 - \sqrt{1 - C}\rho_2] \mathcal{Y}_{j-\frac{1}{2}}^{|m|j}(\theta, \phi) \\ i [\sqrt{1 - C}\rho_1 + \sqrt{1 + C}\rho_2] \mathcal{Y}_{j+\frac{1}{2}}^{|m|j}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

onde  $N$  é a constante de normalização calculada no apêndice B. Esta é a função de onda espinorial de 4-componentes para uma partícula de Dirac se movendo em espaço-tempo curvo, e novamente, podemos escrever (3.36) como  $\Psi^{curvo} = (1 + \alpha^2 br)^{-1/2} \Psi^{plano}$ , onde  $\Psi^{plano}$  é o espinor do sistema em espaço-tempo plano com massa dependendo da posição  $m(r) = (1 + \alpha^2 br)$ . O espinor em espaço-tempo curvo é o produto do espinor em espaço-tempo plano com o elemento de linha da métrica em (3.37),  $(g_{tt})^{-1/4} = (1 + \alpha^2 b/r)^{-1/2}$ . O

elemento de linha é,

$$ds^2 = (1 + \alpha^2 br)^2(dt^2 - dr^2) - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.37)$$

onde  $b > aC$ . A curvatura escalar neste caso é dada por,

$$R = \frac{2\alpha^4 b^2}{(1 + \alpha^2 br)^4} + \frac{2}{r^2} \left( 1 - \frac{1}{(1 + \alpha^2 br)^2} \right), \quad (3.38)$$

isso mostra que no limite de  $r \rightarrow 0$  a curvatura se torna  $R \rightarrow \infty$ ; e inversamente, para  $r \rightarrow \infty$  o espaço-tempo se torna plano, isto é,  $R \rightarrow 0$ . A densidade de probabilidade não vai para zero na origem como nos casos anteriores. Analisamos a geodésica radial de (3.37) no apêndice C.

O potencial tensor é  $A(r) = kr - \lambda(1 + \alpha^2 br)/r$  e o campo EM é dado por,

$$A_\mu = \left( ar, \frac{k}{\alpha} r - \frac{\lambda}{\alpha} \left( \frac{1}{r} + \alpha^2 b \right), 0, 0 \right). \quad (3.39)$$

Tanto quanto sabemos, a solução para o caso especial em espaço-tempo plano, quando  $b = 0$ , não foi calculada antes. É importante notar que no limite  $b \rightarrow 0$  o campo elétrico se torna uniforme. Por outro lado, em espaço-tempo curvo o campo elétrico não é uniforme devido a contribuição de  $e^f = 1 + \alpha^2 br$ . Nas figuras (3.4) e (3.5) fizemos os gráficos das densidades de probabilidade radiais normalizadas  $|\Psi_c(r)|^2$  como uma função da coordenada radial. As funções de onda tem um comportamento parecido se comparado com o caso anterior do potencial tipo-Morse: eles se concentram em torno da região onde a massa é menor, sendo  $m(r) = 1 + \alpha^2 br$ .



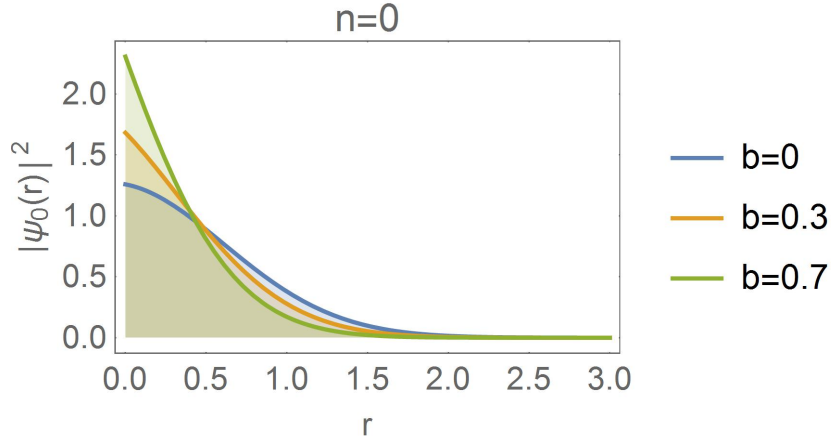


Figura 3.4: Gráficos das densidades de probabilidade radiais  $|\Psi_0(r)|^2 = r^2(1 + \alpha^2 br)^2 |\Psi_c|^2$  para o potencial radial linear em espaço-tempo curvo e parâmetros  $b = 0.3$  (curva laranja) e  $b = 0.7$  (curva verde) e espaço-tempo plano  $b = 0$  (curva azul) para  $n = 0$ . Neste exemplo a densidade de probabilidade não se concentra em torno de onde a massa efetiva é maior —  $m(r) = (1 + \alpha^2 br)$ . Os parâmetros são:  $k = 1$ ,  $a = 0.1$  e usamos unidades atômicas.

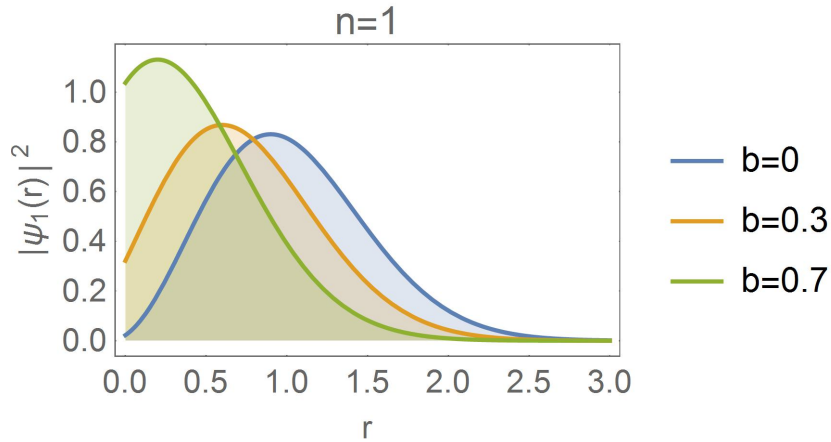


Figura 3.5: Gráficos das densidades de probabilidade radiais  $|\Psi_1(r)|^2 = r^2(1 + \alpha^2 br)^2 |\Psi_c|^2$  para o potencial radial linear em espaço-tempo curvo com parâmetro  $b = 0.3$  (curva laranja) e  $b = 0.7$  (curva verde) e espaço-tempo plano  $b = 0$  (curva azul) para  $n = 1$ . Assim como para  $n = 0$ , aqui a densidade de probabilidade não se concentra em torno de onde a massa efetiva é maior —  $m(r) = (1 + \alpha^2 br)$ . Os parâmetros são:  $k = 1$ ,  $a = 0.1$  e usamos as unidades atômicas.

Com isso concluímos este capítulo tendo feito três aplicações de sistemas em espaço-tempo curvo, e observamos que para os três casos a função de onda  $\rho_1$  satisfaz uma equação análoga no regime não-relativístico, ou seja, equação tipo-Schrödinger, assim como quando fazemos  $b = 0$  recuperamos o espinor de Dirac assim como as autoenergias em espaço-tempo plano. Notamos também para todos os casos estudados, conseguimos mostrar que o espinor de Dirac em espaço-tempo curvo tem relação direta com o espinor em espaço-tempo plano através do primeiro termo do elemento de linha  $g_{tt}$ . Esse elemento de linha está relacionado com a velocidade de Fermi e com o índice de refração da luz em uma métrica óptica. Por fim, analisamos como o acoplamento do campo EM com o espaço-tempo curvo afeta as densidades de probabilidade radiais. Diante disso, observamos que no primeiro caso do átomo de Hidrogênio a partícula confina em regiões onde a massa é maior com relação a  $r$ , diferentemente dos outros dois casos onde a partícula confina em regiões com massa menor com relação a  $r$ . Esses resultados foram publicados em [138].

## Capítulo 4

# Oscilador de Dirac com potenciais escalar e vetor quadrático radial

O oscilador harmônico relativístico, ou oscilador de Dirac, foi estudado pela primeira vez em 1967 por Itô e Carriere [139]. Anos mais tarde, em 1989, Moshinsky and Szczepaniak [140], resolveram de maneira exata o oscilador de Dirac, para isso os autores consideraram um potencial tensor radial linear acoplado ao sistema através do método de substituição mínima da seguinte forma,  $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - im\omega\beta\vec{r}$ . Desde então, esse sistema tornou-se muito importante, possuindo várias aplicações [141, 142, 143, 144]. Neste capítulo, consideraremos o oscilador de Dirac, com simetrias exatas de spin e pseudo-spin em espaço-tempo curvo. Para isso, vamos considerar a equação de Dirac com o potencial tensor linear radial, mas agora com o acoplamento da curvatura do espaço e potencial vetor presente no campo EM. Assim, vamos analisar a influência da curvatura do espaço e campo EM nas autoenergias e densidades de probabilidade radiais do sistema.

As constantes calculadas neste capítulo se aplica somente ao mesmo, apenas a constante de estrutura fina  $\alpha = 1/137$  tem o mesmo valor em todos os capítulos.

## 4.1 Simetria exata de spin

A primeira análise que faremos é a do oscilador de Dirac com simetria exata de spin. Assim, vamos utilizar as equações (2.70) e (2.72) para obtermos as funções de onda  $R_2$  e  $R_1$ , respectivamente. Para isso, considere  $A(r) = \omega r$ ,  $\Delta(r) = 0$  e  $\Sigma = 2V(r)$ , ou seja,  $U(r) = V(r)$ , com o potencial vetor radial quadrático  $V(r) = \mu r^2$ , onde  $\mu$  e  $\omega$  são constantes reais. Assim, de (2.72) obtemos,

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2} - \{\beta_1^2 + 2\mu(1+\epsilon)\}r^2 + \beta(1-2\lambda) + \frac{\epsilon^2-1}{\alpha^2} \right] R_1 = 0, \quad (4.1)$$

onde  $\beta_1 = \alpha^2\mu\lambda + \omega$  é a constante de acoplamento do potencial tensor efetivo dado por  $A_{ef}(r) = \beta_1 r$ . Da equação (2.73), temos dois valores possíveis para  $\lambda$ , e para ambos os valores obtemos  $\lambda(\lambda+1) = l(l+1)$ . Usando esse resultado e tomando a mudança de variável  $x = \delta r^2$ , com  $\delta = \sqrt{\beta_1^2 + 2\mu(1+\epsilon)}$ , e supondo o *ansatz*  $R_1 = x^{-1/4}F(x)$  em (4.1) obtemos,

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - \left\{ \frac{l(l+1)}{4} - \frac{3}{16} \right\} \frac{1}{x^2} + \left\{ \frac{\beta_1(1-2\lambda)}{4\delta} + \frac{\epsilon^2-1}{4\delta\alpha^2} \right\} \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \right] F = 0. \quad (4.2)$$

Uma EDO análoga a obtida em (4.2) já foi resolvida por Maghsoodi e Zarrinkama [145] usando o método Nikiforov-Uvarov [146], essa EDO é dada por,

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + C \right] G(x) = 0, \quad (4.3)$$

onde a função  $G(x)$  que satisfaz a equação (4.3) é dada por,

$$G(x) = (\sqrt{-Cx})^{1/2+\sqrt{1/4-B}} e^{-\sqrt{-Cx}} L_n^2 \sqrt{1/4-B} (2\sqrt{-Cx}), \quad (4.4)$$

onde  $L_n^k$  são os polinômios de Laguerre associados com  $A$ ,  $B$  e  $C$  tendo que satisfazer a condição,

$$\left( 2n + 1 + 2\sqrt{\frac{1}{4} - B} \right) \sqrt{-C} - A = 0. \quad (4.5)$$

Portanto, podemos encontrar a função  $F(x)$  que satisfaz a equação (4.2) fazendo um mapeamento com a equação (4.3). Assim identificamos,

$$A = \frac{\epsilon^2 - 1}{4\delta\alpha^2}, \quad B = -\frac{l(l+1)}{4} + \frac{3}{16}, \quad C = -\frac{1}{4}, \quad (4.6)$$

logo de (4.4) obtemos,

$$F(x) = x^{(1+l+1/2)/2} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) L_n^{l+1/2}(x). \quad (4.7)$$

Usando a notação  $R_1 = R_{nl}^1$  e  $R_2 = R_{nl}^2$  de agora em diante temos,

$$R_{nl}^1(r) = (\sqrt{\delta}r)^{1+l} \exp\left(-\frac{\delta r^2}{2}\right) L_n^{l+1/2}(\delta r^2), \quad (4.8)$$

e usando (2.70) a função de onda  $R_{nl}^2$  será,

$$R_{nl}^2(r) = \frac{\alpha}{1+\epsilon} \left[ \left\{ \frac{\lambda-l}{r} + (\beta_1 - \delta)r \right\} L_n^{l+1/2}(\delta r^2) + \frac{(2n+2l+1)}{r} \times \right. \\ \left. L_n^{l-1/2}(\delta r^2) \right] (\sqrt{\delta}r)^{1+l} \exp\left(-\frac{\delta r^2}{2}\right). \quad (4.9)$$

Por fim, para calcular as autoenergias usamos (4.5), assim substituindo

os valores de  $A, B$  e  $C$  encontramos o polinômio de quarta ordem dado por,

$$\epsilon^4 + 2a\epsilon^2 - 2\mu b^2\epsilon + c = 0, \quad (4.10)$$

onde,

$$a = -1 + \alpha^2\beta_1(1 - 2\lambda), \quad b = 2\alpha^2 \left( 2n + l + \frac{3}{2} \right), \quad c = a^2 - b^2(\beta_1^2 + 2\mu). \quad (4.11)$$

Para obter as 4 raízes de (4.10) usamos a solução de Ferrari [147] que produz,

$$\epsilon = \left[ -a(\pm)_1 \frac{\mu b^2}{\sqrt{2m}} (\pm)_1 (\pm)_2 \sqrt{-m^2 - 2am(\pm)_1 \mu b^2 \sqrt{2m}} \right]^{1/2}, \quad (4.12)$$

onde a escolha do sinal em  $(\pm)_1$  independente da escolha em  $(\pm)_2$ , fazendo com que possua 4 combinações diferentes em  $(\pm)_1(\pm)_2$ , e  $m$  é dado por,

$$m = -\frac{2a}{3} + \left( -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{q^3}{27}} \right)^{1/3} + \left( -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{q^3}{27}} \right)^{1/3}, \quad (4.13)$$

com,

$$p = -\frac{2a^3}{27} + \frac{2ac}{3} - \frac{\mu^2 b^4}{2}, \quad q = -\frac{a^2}{3} - c. \quad (4.14)$$

Obtemos quatro valores diferentes para as autoenergias, porém a interpretação física correta da equação de Dirac impõem que só podem haver dois valores diferentes de energias. Assim, para encontrar as duas autoenergias corretas vamos aplicar a condição de que quando fazemos  $\mu = 0$  eliminamos os potenciais escalar e vetor, fazendo com que a curvatura do espaço seja nula e o potencial tensor seja somente dado por  $\omega r$ . Com isso recuperamos o problema do oscilador de Dirac sem simetria exata de spin em espaço-tempo plano que já foi resolvido no trabalho de Alhaidari [130], cuja energia é dada

por  $\epsilon_0 = \sqrt{1 + 2\alpha^2\omega(2n + \lambda + l + 1)}$ . Portanto, fazendo  $\mu = 0$  em (4.12), as autoenergias que satisfizerem  $\epsilon(\mu = 0) = \epsilon_0$  serão as autoenergias corretas do sistema que desejamos encontrar. Assim, obtemos que as autoenergias que satisfazem essa condição são,

$$\epsilon_{nl}^{\pm} = \left[ -a(\pm) \frac{\mu b^2}{\sqrt{2m}} + \sqrt{-m^2 - 2am(\pm)\mu b^2 \sqrt{2m}} \right]^{1/2}. \quad (4.15)$$

É importante notar que para cada escolha de valor dos parâmetros  $\omega$  e  $\mu$  obteremos um número finito para  $n$  no qual as autoenergias (4.15) são reais, consequentemente teremos um número finito de espinores quadrado integráveis. Outro fato importante é que por conta do acoplamento do campo EM com o elemento de linha em espaço-tempo curvo as autoenergias dependem do termo de acoplamento spin-órbita  $\lambda$ . Dependência essa que se dá por conta do acoplamento do termo  $\lambda/r$  com o potencial tensor efetivo dado por  $A_{ef}(r) = \lambda\alpha^2 U(r)/r + A(r)$ , como observamos na equação (2.72), que neste caso se torna  $\lambda/r + \beta_1 r$ , com  $\beta_1 = \omega + \lambda\alpha^2\mu$ . Da equação (2.73) notamos que  $\lambda$  possui dois valores possíveis e para cada valor obteremos um valor de energia diferente. Isso faz com que seja quebrada a degenerescência entre os estados  $(n, l, l - 1/2)$  e  $(n, l, l + 1/2)$  e consequentemente quebrada a simetria exata de spin. Porém, há um caso particular quando o potencial tensor efetivo é nulo, ou seja, quando fazemos  $\omega = -\alpha^2\lambda\mu$ , desse modo  $\beta_1 = 0$  e eliminamos a dependência do acoplamento spin-órbita  $\lambda$  nas autoenergias. Isso faz com que seja restaurada a simetria exata de spin, com degenerescência, por exemplo, nos estados  $(2d_{3/2}, 2d_{5/2})$ , como notamos na figura (4.1). Observamos também, na figura (4.1) e na tabela (D.1) do apêndice D, que quanto maior o valor de  $\beta_1$ , maior será a contribuição do potencial tensor efetivo  $A_{ef}$ , fazendo com que fique cada vez maior a separação de energia dos estados dupletos.

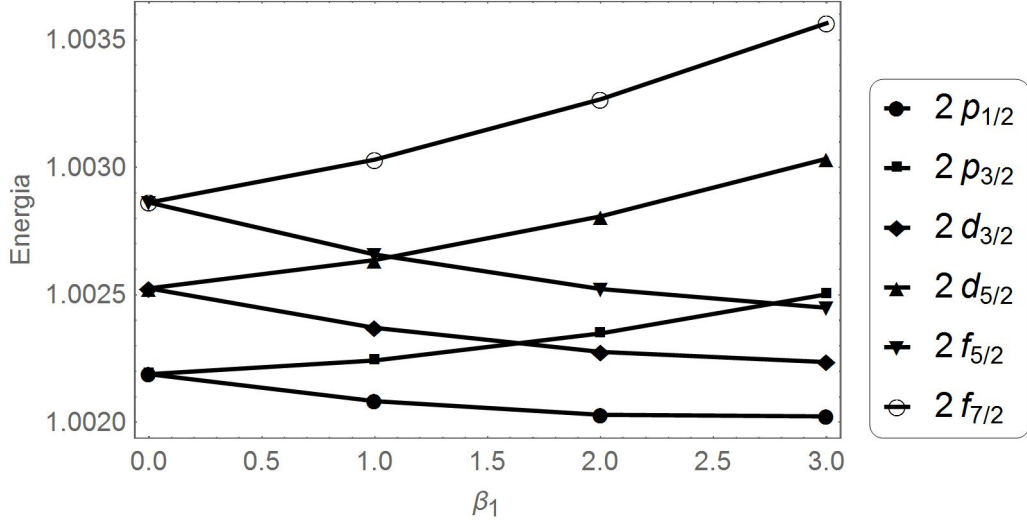


Figura 4.1: Gráficos de alguns espectros de energia para valores diferentes de  $\beta_1$ , onde usamos  $\mu = 10$  e  $\epsilon^+$ . Notamos que para  $\beta_1 \neq 0$  haverá quebra de degenerescência nos dupletos. Usamos unidades atômicas.

Por fim, obtemos a função de onda espinorial total, que será,

$$\Psi_c(r, \theta, \phi) = N_{nl} \frac{(1 + \alpha^2 \mu r^2)^{-1/2}}{r} \begin{pmatrix} R_{nl}^1(r) \mathcal{Y}_l^{|m|j}(\theta, \phi) \\ i R_{nl}^2(r) \mathcal{Y}_l^{|m|j}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

onde a constante de normalização  $N_{nl}$  é calculada no apêndice D. É interessante notar que, como no capítulo anterior, a função de onda espinorial obtida na equação (4.16) pode ser escrita como  $\Psi^{curvo} = (g_{tt})^{-1/4} \Psi^{plano}$ , onde  $g_{tt} = (1 + \alpha^2 \mu r^2)^2$  é o primeiro elemento de linha dado em (4.17). O espinor  $\Psi^{plano}$  é a função de onda espinorial do sistema com simetria exata de spin em espaço-tempo plano com massa dependente da posição dada por  $m(r) = 1 + \alpha^2 \mu r^2$  e campo EM dado por  $A'_\mu = (\mu r^2, c\beta_1 r, 0, 0)$ . Com isso, conseguimos novamente determinar uma equivalência entre o espinores do oscilador de Dirac em espaço-tempos curvo e plano através da velocidade de Fermi ou índice de refração da luz em métrica óptica.



Na figura (4.2), traçamos os gráficos das densidades de probabilidade radiais normalizadas  $|\Psi_c(r)|^2$  para alguns valores do parâmetro  $\mu$ , afim de analisar como o acoplamento do espaço curvo com o campo EM afeta a posição da partícula. Usamos  $\omega = 1$ ,  $j = 1/2$ ,  $\epsilon^+$  e  $\lambda > 0$  em (2.73) com  $\lambda = l = 1$ .

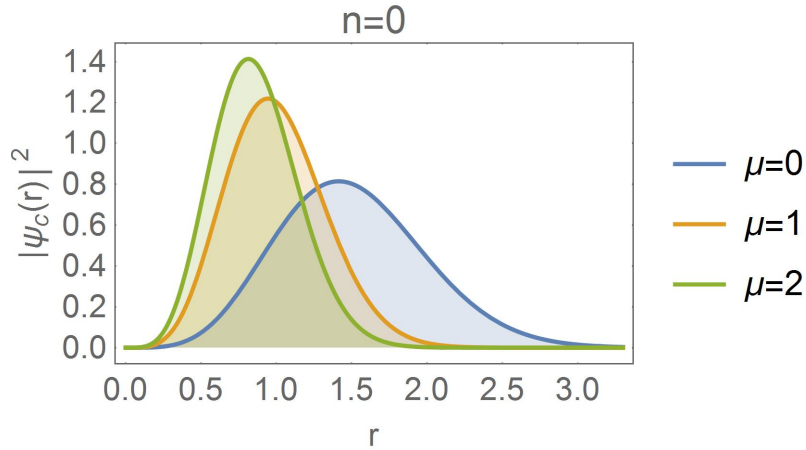


Figura 4.2: Gráficos das densidades de probabilidade radiais  $|\Psi_c(r)|^2 = r^2(1 + \alpha^2\mu r^2)^2|\Psi_c|^2$  em espaço-tempo curvo com elemento de linha dado por (4.17) para  $n = 0$ . Traçamos as densidades de probabilidade em espaço-tempo plano ( $\mu = 0$ ), e em espaço-tempo curvo de acordo com que o valor de  $\mu$  aumenta. Observamos que as curvas em espaço-tempo curvo se aproximam da origem quanto maior o valor de  $\mu$ , onde a massa é menor —  $m(r) = 1 + \alpha^2\mu r^2$ .

Observamos na figura (4.2) que à medida em que o valor de  $\mu$  aumenta, a densidade de probabilidade se aproxima cada vez mais da origem. Porém sabemos que quanto maior o valor de  $r$ , maior será a massa que é dada por  $m(r) = 1 + \alpha^2\mu r^2$ , ou seja, a partícula está sendo confinada em regiões onde temos um valor menor da massa. Isso acontece por conta do acoplamento do espaço curvo com o campo EM, fazendo com que a partícula não seja confinada em regiões onde sua massa é maior.

Em resumo, calculamos de maneira exata a função de onda espinorial dada em (4.16) e as autoenergias dada em (4.15) do oscilador de Dirac com

simetria exata de spin em espaço-tempo curvo cujo elemento de linha é,

$$ds^2 = (1 + \alpha^2 \mu r^2)^2 (dt^2 - dr^2) - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (4.17)$$

onde  $\mu \geq 0$ . A curvatura escalar deste problema é dada por,

$$R = \frac{8\alpha^4 \mu^2 r^2}{(1 + \alpha^2 \mu r^2)^4} - \frac{4\mu\alpha^2}{(1 + \alpha^2 \mu r^2)^3} + \frac{2}{r^2} \left[ 1 - \frac{1}{(1 + \alpha^2 \mu r^2)^2} \right], \quad (4.18)$$

de modo que no limite de  $r \rightarrow 0$  implica que  $R \rightarrow 0$ , isto é, a curvatura é nula, o mesmo acontece quando  $r \rightarrow \infty$  implica que  $R \rightarrow 0$ , assim obtemos também que a curvatura é nula neste limite, o que significa que o espaço-tempo é plano nos dois limites.

## 4.2 Simetria exata de pseudo-spin

Nesta seção analisaremos o oscilador de Dirac, mas agora com simetria exata de pseudo-spin. Assim, considere novamente  $A(r) = \omega r$ ,  $\Sigma(r) = 0$  e  $\Delta(r) = 2V(r)$ , ou seja,  $U(r) = -V(r)$ . O potencial vetor radial quadrático  $V(r) = \mu r^2$ , onde  $\mu$  e  $\omega$  são constantes reais. Como resultado de (2.76) obtemos,

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\lambda(\lambda - 1)}{r^2} - \{\beta_2^2 - 2\mu(1 - \epsilon)\}r^2 - \beta_2(1 + 2\lambda) + \frac{\epsilon^2 - 1}{\alpha^2} \right] R_2 = 0, \quad (4.19)$$

onde agora  $\beta_2 = \omega - \alpha^2 \mu \lambda$  é a constante de acoplamento do potencial tensor efetivo  $A_{ef}(r) = \beta_2 r$  e usando (2.77), conseguimos escrever  $\lambda(\lambda - 1) = \tilde{l}(\tilde{l} + 1)$ . Tomando a mudança de variável  $x = \gamma r^2$ , com  $\gamma = \sqrt{\beta_2^2 - 2\mu(1 - \epsilon)}$ , e

supondo o *ansatz*  $R_2 = x^{-1/4}G(x)$  em (4.19) obtemos,

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - \left\{ \frac{\tilde{l}(\tilde{l}+1)}{4} - \frac{3}{16} \right\} \frac{1}{x^2} + \left\{ \frac{\epsilon^2 - 1}{4\delta\alpha^2} - \frac{\beta_2(1+2\lambda)}{4\delta} \right\} \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \right] G = 0. \quad (4.20)$$

Como no caso anterior podemos encontrar a função  $G(x)$  que satisfaz a equação (4.20) usando (4.4). Assim identifica-se facilmente,

$$A = \frac{\epsilon^2 - 1}{4\delta\alpha^2} - \frac{\beta_2(1+2\lambda)}{4\gamma}, \quad B = -\frac{\tilde{l}(\tilde{l}+1)}{4} + \frac{3}{16}, \quad C = -\frac{1}{4}, \quad (4.21)$$

logo obtemos,

$$G(x) = x^{(\tilde{l}+3/2)/2} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) L_n^{\tilde{l}+1/2}(x). \quad (4.22)$$

Usando a notação  $R_2 = R_{\tilde{n}\tilde{l}}^2$  e  $R_1 = R_{\tilde{n}\tilde{l}}^1$  de agora em diante temos,

$$R_{\tilde{n}\tilde{l}}^2(r) = (\sqrt{\gamma}r)^{\tilde{l}+1} \exp\left(-\frac{\gamma r^2}{2}\right) L_{\tilde{n}}^{\tilde{l}+1/2}(\gamma r^2), \quad (4.23)$$

e usando (2.74) escrevemos  $R_{\tilde{n}\tilde{l}}^1$  que será,

$$R_{\tilde{n}\tilde{l}}^1(r) = \frac{\alpha}{1-\epsilon} \left[ \left\{ \frac{\tilde{l} - \lambda + 1}{r} + (\gamma - \beta_2)r \right\} L_{\tilde{n}}^{\tilde{l}+1/2}(\gamma r^2) - 2\gamma r L_{\tilde{n}}^{\tilde{l}+3/2}(\gamma r^2) \right] \times (\sqrt{\gamma}r)^{\tilde{l}+1} \exp\left(-\frac{\gamma r^2}{2}\right). \quad (4.24)$$

Para encontrarmos as autoenergias, novamente usamos (4.5), assim obtemos o mesmo polinômio de quarta ordem dado em (5.11), porém agora com,

$$a = -1 - \alpha^2\beta_2(1+2\lambda), \quad b = 2\alpha^2\left(2\tilde{n} + \tilde{l} + 3/2\right), \quad c = a^2 - b^2(\beta_2^2 - 2\mu). \quad (4.25)$$

Portanto as autoenergias serão dadas por (4.12), mas com os valores de

$a$ ,  $b$  e  $c$  são diferentes. Como anteriormente, teremos que encontrar as duas soluções das autoenergias que, agora satisfazem a condição,  $\epsilon(\mu = 0) = \sqrt{1 + 2\alpha^2\omega(2\tilde{n} + \lambda + \tilde{l} + 2)}$ , assim obtemos,

$$\epsilon_{\tilde{n}\tilde{l}}^{\pm} = \left[ -a(\pm) \frac{\mu b^2}{\sqrt{2m}} + \sqrt{-m^2 - 2am(\pm)\mu b^2 \sqrt{2m}} \right]^{1/2}, \quad (4.26)$$

onde  $m$  é dado por (4.13). Mais uma vez notamos que para cada escolha de valor dos parâmetros  $\omega$  e  $\mu$  obtemos um número finito para  $\tilde{n}$  no qual as autoenergias em (4.26) são reais, conseqüentemente teremos um número finito de espinores quadrado integráveis. Observamos também que as autoenergias contém o termo de acoplamento spin-órbita  $\lambda$  por conta do potencial tensor efetivo. Assim, teremos um valor diferente de energia para cada escolha de  $\lambda$  em (2.77), com isso está quebrada a simetria exata de pseudo-spin pois não há degenerescência entre os estados dupletos  $(\tilde{n}, \tilde{l}, \tilde{l} - 1/2)$  e  $(\tilde{n}, \tilde{l}, \tilde{l} + 1/2)$ . Contudo, quando tivermos um potencial tensor nulo, ou seja,  $\beta_2 = 0$  quando  $\omega = \lambda\alpha^2\mu$ , eliminamos a dependência do termo  $\lambda$  nas autoenergias, fazendo com que retorne a simetria exata de pseudo-spin com degenerescência entre, por exemplo, os estados  $(2\tilde{p}_{1/2}, 2\tilde{p}_{3/2})$ , como vemos na figura (4.3). Observamos também na figura (4.3), uma pequena separação de energia na ordem de  $10^{-6}$  e  $10^{-7}$  entre os dupletos para valores de  $\beta_2 \propto 10^{-3}$ . Porém, para valores maiores de  $\beta_2$ , maior será a separação de energia dos dupletos, como vemos na tabela (D.2) do apêndice D.

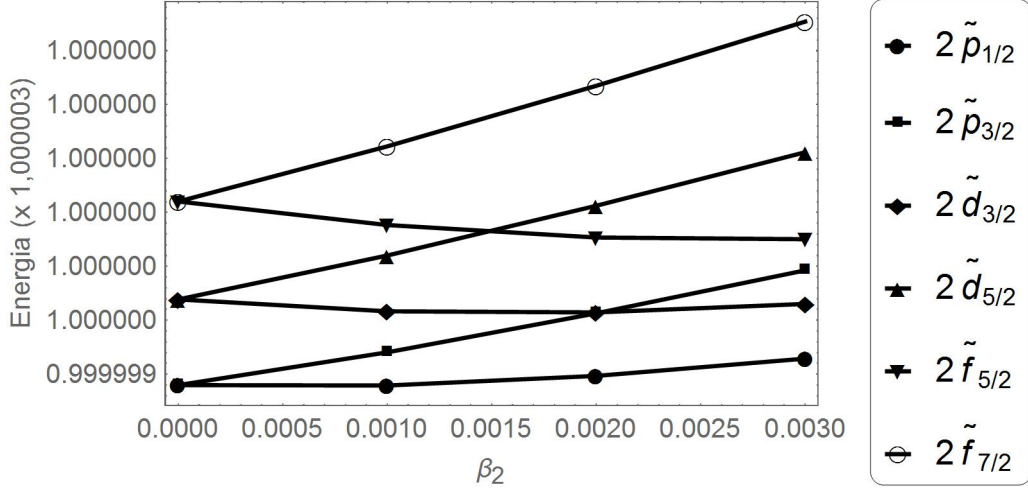


Figura 4.3: Gráficos de alguns espectros de energia para valores diferentes de  $\beta_2$ , onde usamos  $\mu = 10$  e  $\epsilon^+$ . Notamos que para  $\beta_2 \neq 0$  haverá quebra de degenerescência nos dupletos. Usamos unidades atômicas.

Finalmente, escrevendo a função de onda espinorial total obtemos,

$$\Psi_c(r, \theta, \phi) = N_{\tilde{n}\tilde{l}} \frac{(1 - \alpha^2 \mu r^2)^{-1/2}}{r} \begin{pmatrix} R_{\tilde{n}\tilde{l}}^1(r) \mathcal{Y}_l^{|m|j}(\theta, \phi) \\ i R_{\tilde{n}\tilde{l}}^2(r) \mathcal{Y}_l^{|m|j}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

onde a constante de normalização  $N_{\tilde{n}\tilde{l}}$  é calculada no apêndice D. Novamente, a função de onda espinorial em (4.27) pode ser escrita como  $\Psi^{curvo} = (g_{tt})^{-1/4} \Psi^{plano}$  onde  $g_{tt} = (1 - \alpha^2 \mu r^2)^2$  é o primeiro elemento da métrica dada em (4.28) e  $\Psi^{plano}$  é a função de onda espinorial em espaço-tempo plano com simetria exata de pseudo-spin, massa efetiva  $m(r) = 1 - \alpha^2 \mu r^2$  e campo EM  $A'_\mu = (\mu r^2, c\beta_2 r, 0, 0)$ . Na figura (4.4), traçamos algumas densidades de probabilidade radiais para  $\mu \neq 0$  e  $\mu = 0$ , quando  $\omega = 1$  e  $\lambda < 0$  em (2.77), com  $\lambda = -\tilde{l} = -1$ .

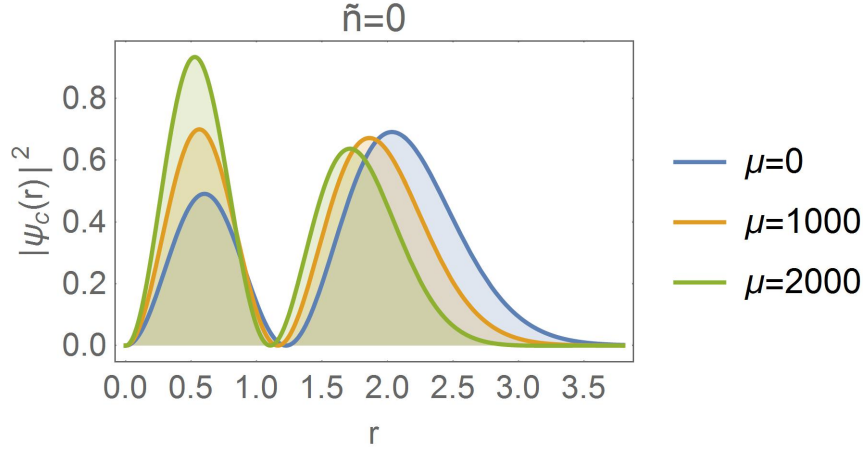


Figura 4.4: Gráficos das densidades de probabilidade radiais  $|\Psi_c(r)|^2 = r^2(1 - \alpha^2 \mu r^2)^2 |\Psi_c|^2$  em espaço-tempo curvo com elemento de linha dado por (4.28) para  $\tilde{n} = 0$ . Traçamos a densidade de probabilidade em espaço-tempo plano ( $\mu = 0$ ), e de acordo com que o valor do parâmetro  $\mu$  aumenta observamos que as curvas se aproximam da origem. Desta vez, as densidades se aproximam de regiões onde a massa é maior —  $m(r) = 1 - \alpha^2 \mu r^2$ .

No presente caso a partícula tem massa efetiva  $m(r) = 1 - \alpha^2 \mu r^2$ , e o acoplamento com o espaço-tempo curvo e campo EM faz com que a densidade de probabilidade seja confinada próxima da origem, como podemos observar na figura (4.4). Diferentemente da seção anterior, notamos que a partícula agora confina em regiões onde sua massa é maior. Um fato importante também é que neste caso, observamos que os valores de  $\mu \neq 0$  estão na ordem de  $\propto 10^3$  para conseguirmos notar algum descolamento das densidades de probabilidades com relação a  $\mu = 0$ . Isso acontece por conta da relação dos potenciais  $V(r)$  e  $U(r)$  nesta simetria em particular onde,  $U(r) = -V(r)$ , portanto na simetria exata de pseudo-spin, a curvatura se modifica com relação ao caso da simetria exata de spin, onde tínhamos  $U(r) = V(r)$ . Isso faz com que para esses potenciais terem uma contribuição efetiva na variação de energia com relação a  $\mu = 0$ , e conseqüentemente no comportamento da partícula, eles devem possuir um parâmetro de acoplamento  $\mu$  próximo na ordem de

$\propto 10^3$ .

Em resumo, calculamos de maneira exata a função de onda espinorial dada em (4.27), e as autoenergias dada em (4.26), do oscilador de Dirac com simetria exata de pseudo-spin em espaço-tempo curvo cujo elemento de linha é dado por,

$$ds^2 = (1 - \alpha^2 \mu r^2)^2 (dt^2 - dr^2) - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (4.28)$$

onde  $\mu \geq 0$ . A curvatura escalar [57] deste problema é dada por,

$$R = \frac{8\alpha^4 \mu^2 r^2}{(1 - \alpha^2 \mu r^2)^4} + \frac{4\mu\alpha^2}{(1 - \alpha^2 \mu r^2)^3} + \frac{2}{r^2} \left[ 1 - \frac{1}{(1 - \alpha^2 \mu r^2)^2} \right], \quad (4.29)$$

de modo que no limite de  $r \rightarrow 0$  implica que  $R \rightarrow 0$ , isto é, a curvatura é nula, o mesmo acontece quando  $r \rightarrow \infty$  implica que  $R \rightarrow 0$ , assim obtemos também que a curvatura é nula neste limite, o que significa que o espaço-tempo é plano nos dois limites.

Analisamos neste capítulo o oscilador de Dirac com um campo EM fixo  $A_\mu = (V(r), c\omega r, 0, 0)$  e dois elementos de linha diferentes, onde a curvatura é representada pelo potencial escalar  $U(r)$ . Considerando  $U(r) = V(r)$  e  $U(r) = -V(r)$ , conseguimos analisar as duas simetrias desejadas, as simetrias exatas de spin e pseudo-spin, respectivamente. Notamos que ambas as simetrias exatas de spin e pseudo-spin são quebradas por conta do potencial tensor efetivo que é composto com termos do elemento de linha e campo EM, porém retornamos com as simetrias para um caso particular. Observamos que para a simetria exata de spin a partícula é confinada em regiões onde a massa é menor com relação a  $r$ , diferente da simetria exata de pseudo-spin, onde a partícula confina em regiões onde a massa é maior com relação a  $r$ . Esses confinamentos acontecem para valores de  $\mu$  em ordem de grandezas

diferentes para as simetrias. Isso acontece por conta da forma com que os potenciais acoplam no hamiltoniano do sistema, já que temos dois elementos de linha diferentes para ambas as simetrias, como foi citado acima. Com isso, o parâmetro de acoplamento  $\mu$  dos potenciais  $V(r)$  e  $U(r)$  tem que ser na ordem de  $10^0$  e  $10^3$  nas simetrias exatas de spin e pseudo-spin, respectivamente, para haver uma variação de energia suficiente para que as densidades de probabilidade radiais se desloquem para diferentes valores de  $\mu$ , como observamos nas figuras (4.2) e (4.4). Um resultado importante também, é que conseguimos relacionar os espinores de Dirac em espaço-tempos curvo e plano através do elemento de linha  $g_{tt}$ , que está relacionado com a velocidade de Fermi assim como o índice de refração da luz em uma métrica óptica. Esses resultados foram publicados em [148].



## Capítulo 5

# Oscilador modificado de Dirac com potenciais escalar e vetor quadrático radial

Neste capítulo, analisaremos o sistema com os potenciais escalar e vetor quadrático radial e potencial tensor linear radial mais um termo tipo-Coulomb com as simetrias exatas de spin e pseudo-spin em espaço-tempo curvo. Esse sistema pode ser descrito como o oscilador de Dirac modificado pelo fato de que agora trabalharemos com um termo adicional tipo-Coulomb no potencial tensor como em [149], o que diferencia do oscilador de Dirac visto no capítulo anterior. Obteremos as funções de onda radiais  $R_1(r)$  e  $R_2(r)$  de maneira exata, assim como o espectro de energia para cada simetria. Faremos análise do comportamento das autoenergias e densidades de probabilidade radiais normalizadas para verificarmos como o acoplamento do espaço curvo com o campo EM afeta a partícula.

**As constantes calculadas neste capítulo se aplica somente ao mesmo, apenas a constante de estrutura fina  $\alpha = 1/137$  tem o mesmo**

valor em todos os capítulos.

## 5.1 Simetria exata de spin

O primeiro caso que vamos analisar é o sistema com simetria exata de spin. Para isso considere o potencial escalar e vetor dados por  $V(r) = U(r) = \mu r^2$  e o potencial tensor dado por  $A(r) = \omega r + A/r$ , onde  $\mu$ ,  $\omega$  e  $A$  são constantes reais, assim temos que  $\Delta(r) = 0$  e  $\Sigma(r) = 2V(r)$ . Como verificamos no capítulo (2), por conta do acoplamento do campo EM com o elemento de linha em espaço-tempo curvo surge um potencial tensor efetivo que aqui será dado por  $A_{ef}(r) = A/r + \beta_1 r$ , onde  $\beta_1 = \omega + \alpha^2 \lambda \mu$ . Logo da equação (2.72) escrevemos,

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\lambda(\lambda + 1) + A(2\lambda + A + 1)}{r^2} - \delta^2 r^2 + \beta + \frac{\epsilon^2 - 1}{\alpha^2} \right] R_1 = 0, \quad (5.1)$$

onde,

$$\delta = \sqrt{\beta_1^2 + 2\mu(1 + \epsilon)}, \quad \beta = \beta_1(1 - 2\lambda - 2A). \quad (5.2)$$

Usando a equação (2.73), independente da escolha de  $\lambda$ , teremos  $\lambda(\lambda + 1) = l(l + 1)$ . Assim, efetuando a mudança de variável  $x = \delta r^2$  e supondo o *ansatz*  $R_1 = x^{-1/4} F(x)$  na equação (5.1) obtemos,

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - \left\{ \frac{l(l + 1) + A(2\lambda + A + 1)}{4} - \frac{3}{16} \right\} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} + \left\{ \frac{\beta}{4\delta} + \frac{\epsilon^2 - 1}{4\delta\alpha^2} \right\} \frac{1}{x} \right] F = 0. \quad (5.3)$$

A função de onda  $F(x)$  que satisfaz a EDO dada na equação (5.3) já foi encontrada no capítulo anterior fazendo um mapeamento com o resultado

obtido no trabalho de Maghsoodi e Zarrinkamar [145]. Os autores obtiveram uma função de onda que satisfaz uma EDO parecida com (5.3) usando o método Nikiforov-Uvarov [146]. Assim, utilizando a solução encontrada em [145], onde a função  $F(x)$  que satisfaz a EDO em (4.3) é dada por,

$$F(x) = (\sqrt{-Cx})^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - B}} e^{-\sqrt{-Cx}} L_n^{2\sqrt{\frac{1}{4} - B}}(2\sqrt{-Cx}), \quad (5.4)$$

onde  $L_n^k(x)$  são os polinômios de Laguerre associados. Identificamos que,

$$D = \frac{\beta}{4\delta} + \frac{\epsilon^2 - 1}{4\delta\alpha^2}, \quad B = -\frac{l(l+1)}{4} - \frac{A(2\lambda + A + 1)}{4} + \frac{3}{16}, \quad C = -\frac{1}{4}, \quad (5.5)$$

e devem satisfazer a relação abaixo,

$$\left(2n + 1 + 2\sqrt{\frac{1}{4} - B}\right) \sqrt{-C} - D = 0. \quad (5.6)$$

Assim da equação (5.4) obtemos,

$$F(x) = x^{\gamma+1/2} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) L_n^{2\gamma}(x), \quad (5.7)$$

com isso escrevendo a função de onda radial  $R_1 = R_{nl}^1$  que foi definida como  $R_1(r) = (\delta r^2)^{-1/4} F(\delta r^2)$  teremos,

$$R_{nl}^1(r) = (\sqrt{\delta}r)^{2\gamma+1/2} \exp\left(-\frac{\delta r^2}{2}\right) L_n^{2\gamma}(\delta r^2), \quad (5.8)$$

onde,

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{4} - B} = \frac{1}{2} \sqrt{(l+1/2)^2 + A(2\lambda + A + 1)}. \quad (5.9)$$

Usando  $R_2 = R_{nl}^2$  e a equação (2.70) obtemos,

$$R_{nl}^2(r) = \frac{\alpha}{1 + \epsilon} \left[ \left\{ \frac{2\gamma + \lambda + A + 1/2}{r} + (\beta_1 + \delta)r \right\} L_n^{2\gamma}(\delta r^2) - 2\delta r L_n^{2\gamma+1}(\delta r^2) \right] (\sqrt{\delta}r)^{2\gamma+1/2} \exp\left(-\frac{\delta r^2}{2}\right). \quad (5.10)$$

Agora nos resta determinar os valores das autoenergias, para isso vamos utilizar a equação (5.6), assim substituindo os valores de  $B$ ,  $C$  e  $D$  obtemos,

$$\epsilon^4 + 2a\epsilon^2 - 2\mu b^2\epsilon + a^2 - b^2c = 0, \quad (5.11)$$

onde,

$$a = -1 + \alpha^2\beta, \quad b = 2\alpha^2(2n + 2\gamma + 1), \quad c = 2\mu + \beta_1^2. \quad (5.12)$$

Vemos que assim como no capítulo anterior, as autoenergias são as raízes de um polinômio de quarto grau dado em (5.11). Portanto, para encontrar essas raízes usaremos novamente a solução de Ferrari [147], assim obtemos quatro soluções para as autoenergias que são dadas por,

$$\epsilon = \left[ -a(\pm)_1 \frac{\mu b^2}{\sqrt{2m}} - (\pm)_1(\pm)_2 \sqrt{-m^2 - 2am(\pm)_1 \mu b^2 \sqrt{2m}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.13)$$

onde  $m$  é dado por,

$$m = -\frac{2a}{3} + \left( -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{q^3}{27}} \right)^{\frac{1}{3}} + \left( -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{q^3}{27}} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (5.14)$$

com,

$$p = -\frac{2a^3}{27} + \frac{2ac}{3} - \frac{\mu^2 b^4}{2}, \quad q = -\frac{4a^2}{3} + b^2c. \quad (5.15)$$

Obtemos quatro valores diferentes para as autoenergias, e sabemos que o sistema na equação de Dirac impõem que só pode haver dois valores diferentes de energias. Assim, para encontrar as duas autoenergias corretas vamos aplicar a condição de que fazendo  $\mu = 0$  e  $A = 0$  eliminamos os potenciais escalar e vetor e o termo coulombiano do potencial tensor, respectivamente, fazendo com que a curvatura do espaço seja nula e o potencial tensor seja somente dado por  $\omega r$ . Com isso, recuperamos o sistema do oscilador de Dirac sem simetria exata de spin em espaço-tempo plano que já foi resolvido no trabalho de Alhaidari [130], que como já mencionamos, as autoenergias são dadas por  $\epsilon_0 = \sqrt{1 + 2\alpha^2\omega(2n + \lambda + l + 1)}$ . Portanto, fazendo  $\mu = A = 0$  nas 4 autoenergias encontradas, as que satisfizerem a condição  $\epsilon(\mu = 0, A = 0) = \epsilon_0$  serão as autoenergias corretas do sistema que desejamos encontrar. Com isso, usando a equação (5.13) obtemos que autoenergias serão,

$$\epsilon_{nl}^{\pm} = \left[ -a(\pm) \frac{\mu b^2}{\sqrt{2m}} + \sqrt{-m^2 - 2am(\pm)\mu b^2\sqrt{2m}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.16)$$

Vale ressaltar que novamente as autoenergias dependem do termo de acoplamento spin-órbita  $\lambda$ , dependência essa que se dá por conta do acoplamento do termo  $\lambda/r$  com o potencial tensor efetivo dado por  $A_{ef}(r)$  que neste caso se torna,  $\lambda/r + A/r + \beta_1 r$ . Da equação (2.73), observamos que  $\lambda$  possui dois valores possíveis e para cada valor teremos um valor de energia diferente. Isso faz com que seja quebrada a degenerescência entre os estados dupletos  $(n, l, l - 1/2)$  e  $(n, l, l + 1/2)$  e conseqüentemente quebrada a simetria exata de spin. Porém, quando o potencial tensor efetivo é nulo, ou seja, quando fazemos  $\beta_1 = 0$  e  $A = 0$ , eliminamos a dependência do acoplamento spin-órbita  $\lambda$  nas autoenergias, fazendo com que seja restaurada a simetria exata de spin, com degenerescência, por exemplo, nos estados  $(1p_{1/2}, 1p_{3/2})$ , como

notamos nas figuras (5.1) e (5.2). Observamos também, nas figuras (5.1) e (5.2), que quanto maior o valor de  $\beta_1$  e  $A$ , respectivamente, maior será a contribuição do potencial tensor efetivo  $A_{ef}$ , fazendo com que fique cada vez maior a separação de energia dos estados dupletos. Na tabela (E.1), do apêndice E, apresentamos valores de energia para alguns dupletos com e sem simetria exata de spin.

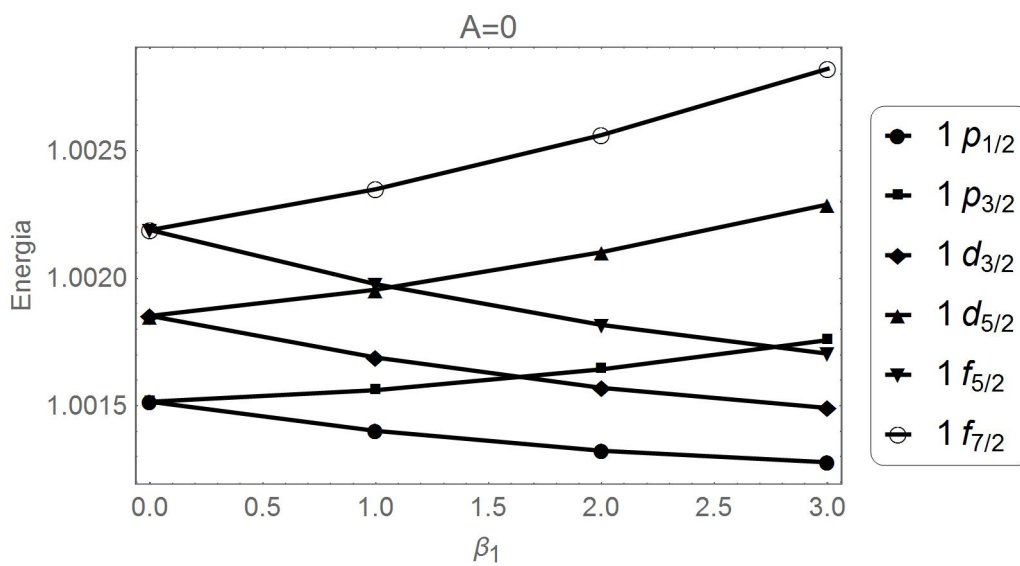


Figura 5.1: Gráficos de alguns espectros de energia para valores diferentes de  $\beta_1$ , onde usamos  $A = 0$ ,  $\mu = 10$  e  $\epsilon^+$ . Notamos que para  $\beta_1 \neq 0$  haverá quebra de degenerescência nos dupletos. Usamos unidades atômicas.

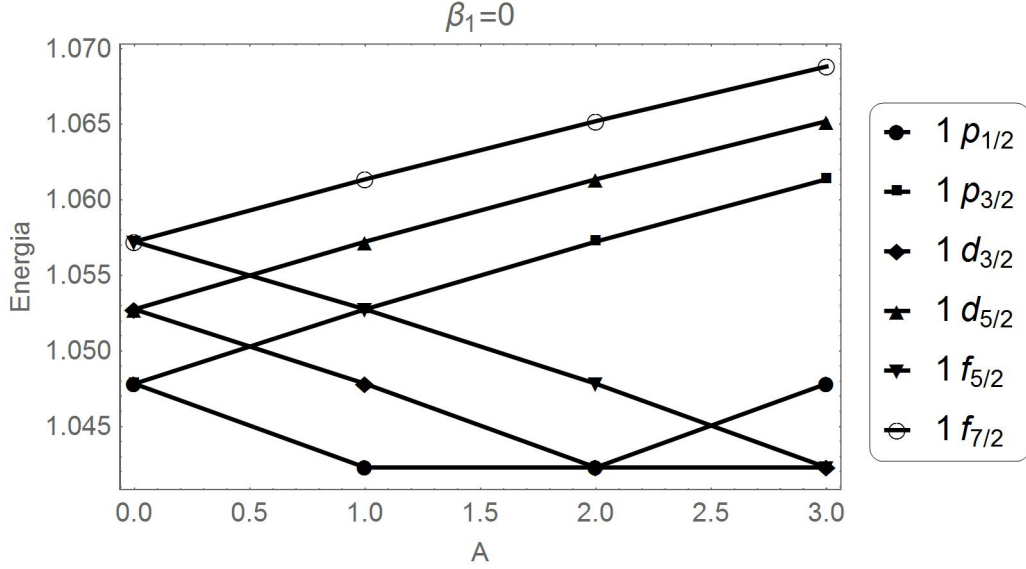


Figura 5.2: Gráficos de alguns espectros de energia para valores diferentes de  $A$ , onde usamos  $\beta_1 = 0$ ,  $\mu = 10$  e  $\epsilon^+$ . Notamos que para  $A \neq 0$  haverá quebra de degenerescência nos dupletos. Usamos unidades atômicas.

Finalmente, a função de onda espinorial total será dada por,

$$\Psi_c(r, \theta, \phi) = N_{nl} \frac{(1 + \alpha^2 \mu r^2)^{-1/2}}{r} \begin{pmatrix} R_{nl}^1(r) \mathcal{Y}_l^{|m|j}(\theta, \phi) \\ i R_{nl}^2(r) \mathcal{Y}_l^{|m|j}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

onde  $N_{nl}$  é a constante de normalização e calculada no apêndice E. É interessante notar que novamente a função de onda espinorial dada na equação (5.17) pode ser escrita como  $\Psi^{curvo} = (g_{tt})^{-1/4} \Psi^{plano}$ , onde  $g_{tt} = (1 + \alpha^2 \mu r^2)^2$  é o primeiro elemento de linha dado em (5.18). O espinor  $\Psi^{plano}$  é a função de onda espinorial do sistema com simetria exata de spin em espaço-tempo plano com massa dependente da posição dada por  $m(r) = 1 + \alpha^2 \mu r^2$  e campo EM dado por  $A'_\mu = (\mu r^2, cA/r + c\beta_1 r, 0, 0)$ . Com isso conseguimos mostrar mais uma vez que os espinores de Dirac em espaço-tempos curvo e plano se conectam através da velocidade de Fermi ou índice de refração da luz em

métrica óptica que são escritos em termos de  $g_{tt}$ .

Para finalizar, traçamos as densidades de probabilidade radiais normalizadas  $|\Psi_c(r)|^2$  para diferentes valores de  $\mu$ , a fim de verificar como o acoplamento do campo EM e a curvatura do espaço influencia no comportamento da partícula. Na figura (5.3), as densidades de probabilidade radiais estão representadas com  $\lambda = -l - 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $A = 1$ , usando  $\epsilon^+$  e  $l = 0$ .

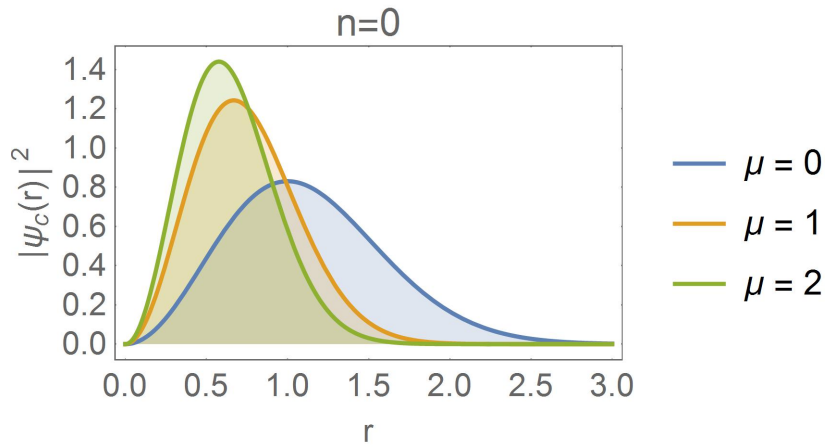


Figura 5.3: Gráficos das densidades de probabilidade radiais normalizadas  $|\Psi_c(r)|^2 = r^2(1 + \alpha^2\mu r^2)^2|\Psi_c|^2$  em espaço-tempo curvo com elemento de linha dado por (5.18) para  $n = 0$ . A curva para  $\mu = 0$  representa a densidade de probabilidade em espaço-tempo plano, as curvas para  $\mu \neq 0$  representam as densidades de probabilidade em espaço-tempo curvo. Notamos que as densidades se aproximam de regiões onde a massa é menor —  $m(r) = 1 + \alpha^2\mu r^2$ .

Como observamos na figura (5.3), a curva para  $\mu = 2$  está mais próxima da origem do que as curvas com  $\mu = 1$  e  $\mu = 0$ , e como  $m(r) = 1 + \alpha^2\mu r^2$ , quanto maior o valor de  $\mu$  maior será a massa da partícula. Porém é interessante notar que as densidades para  $\mu \neq 0$  não estão sendo confinadas em regiões onde temos um valor maior da massa com relação a posição  $r$ . Isso acontece porque ao mesmo tempo que temos a curvatura do espaço influenciando a partícula fazendo com que sua massa dependa da posição, temos



também o campo EM atuando na mesma, de modo que esse acoplamento faz com que quanto maior for o valor de  $\mu$  mais a densidade de probabilidade se aproximará da origem.

Em resumo, calculamos de maneira exata a função de onda espinorial dado em (5.17) e as autoenergias dadas em (5.16) para o oscilador de Dirac modificado com potenciais escalar e vetor quadrático radial com simetria exata de spin em espaço-tempo curvo cujo elemento de linha é dado por,

$$ds^2 = (1 + \alpha^2 \mu r^2)^2 (dt^2 - dr^2) - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (5.18)$$

onde  $\mu \geq 0$ . A curvatura escalar [57] do elemento de linha (5.18) é dado por,

$$R = \frac{8\alpha^4 \mu^2 r^2}{(1 + \alpha^2 \mu r^2)^4} - \frac{4\mu\alpha^2}{(1 + \alpha^2 \mu r^2)^3} + \frac{2}{r^2} \left( 1 - \frac{1}{(1 + \alpha^2 \mu r^2)^2} \right), \quad (5.19)$$

de modo que no limite de  $r \rightarrow 0$  implica que  $R \rightarrow 0$ , isto é, a curvatura é nula, o mesmo acontece quando  $r \rightarrow \infty$  implica que  $R \rightarrow 0$ , assim obtemos também que a curvatura é nula neste limite, o que significa que o espaço-tempo é plano nos dois limites.

## 5.2 Simetria exata de pseudo-spin

Neste segundo caso analisaremos o sistema com simetria exata de pseudo-spin. Assim, considere o potencial escalar e vetor dados por  $V(r) = -U(r) = \mu r^2$  e o potencial tensor é o mesmo do caso anterior dado por  $A(r) = \omega r + A/r$ , onde  $\mu$ ,  $\omega$  e  $A$  são constantes reais. Portanto temos  $\Delta(r) = 2V(r)$ ,  $\Sigma(r) = 0$ , e o potencial tensor efetivo será  $A_{ef}(r) = A/r + \beta_2 r$ , onde  $\beta_2 = \omega - \alpha^2 \lambda \mu$ .

Logo da equação (2.76) obtemos,

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\lambda(\lambda - 1) + A(2\lambda + A - 1)}{r^2} - \delta^2 r^2 - \beta + \frac{\epsilon^2 - 1}{\alpha^2} \right] R_2 = 0, \quad (5.20)$$

onde,

$$\delta = \sqrt{\beta_2^2 - 2\mu(1 - \epsilon)}, \quad \beta = \beta_2(1 + 2\lambda + 2A). \quad (5.21)$$

Fazendo a mudança de variável  $x = \delta r^2$  e supondo o *ansatz*  $R_2 = x^{-\frac{1}{4}}G(x)$  em (5.20) escrevemos,

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - \left\{ \frac{\tilde{l}(\tilde{l} + 1) + A(2\lambda + A - 1)}{4} - \frac{3}{16} \right\} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} + \left\{ \frac{\epsilon^2 - 1}{4\delta\alpha^2} - \frac{\beta}{4\delta} \right\} \frac{1}{x} \right] G = 0, \quad (5.22)$$

onde independente da escolha de  $\lambda$  em (2.77), temos  $\lambda(\lambda - 1) = \tilde{l}(\tilde{l} + 1)$ . Como no caso anterior, obtemos a função de onda  $G(x)$  que satisfaz a EDO dada em (5.22) fazendo mapeamento com a equação (4.3), logo identificamos,

$$D = \frac{\epsilon^2 - 1}{4\delta\alpha^2} - \frac{\beta}{4\delta}, \quad B = -\frac{\tilde{l}(\tilde{l} + 1)}{4} - \frac{A(2\lambda + A - 1)}{4} + \frac{3}{16}, \quad C = -\frac{1}{4}, \quad (5.23)$$

assim,

$$G(x) = x^{\gamma+1/2} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) L_n^{2\gamma}(x), \quad (5.24)$$

portanto escrevendo a função de onda  $R_2 = R_{\tilde{n}\tilde{l}}^2$  obtemos,

$$R_{\tilde{n}\tilde{l}}^2(r) = (\sqrt{\delta}r)^{2\gamma+1/2} \exp\left(-\frac{\delta r^2}{2}\right) L_{\tilde{n}}^{2\gamma}(\delta r^2). \quad (5.25)$$

Usando a equação (2.74) obtemos que a função de onda  $R_1 = R_{\tilde{n}\tilde{l}}^1$  que

será,

$$R_{\tilde{n}\tilde{l}}^1(r) = \frac{\alpha}{1-\epsilon} \left[ \left\{ \frac{2\gamma - \lambda - A + 1/2}{r} - (\beta_2 - \delta)r \right\} L_{\tilde{n}}^{2\gamma}(\delta r^2) - 2\delta r \times \right. \\ \left. L_{\tilde{n}}^{2\gamma+1}(\delta r^2) \right] (\sqrt{\delta}r)^{2\gamma+1} \exp\left(-\frac{\delta r^2}{2}\right), \quad (5.26)$$

onde  $\gamma = \sqrt{(\tilde{l} + 1/2)^2 + A(2\lambda + A - 1)}/2$ . As autoenergias podem ser obtidas usando novamente a equação (4.5), e assim como no caso anterior temos que as autoenergias serão as raízes de um polinômio de quarto grau dado por,

$$\epsilon^4 + 2a\epsilon^2 - 2\mu b^2\epsilon + a^2 - b^2c = 0, \quad (5.27)$$

onde,

$$a = -1 - \alpha^2\beta, \quad b = 2\alpha^2(2\tilde{n} + 2\gamma + 1), \quad c = \beta_2^2 - 2\mu, \quad (5.28)$$

Notamos, em (5.27), o mesmo polinômio de quarto grau obtido no caso anterior na equação (5.11), mas com valores diferentes para  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Assim, teremos as mesmas 4 soluções para as autoenergias dadas em (4.12), e usando o mesmo raciocínio do caso anterior obtemos as duas únicas autoenergias corretas do sistema. Logo fazendo  $\mu = A = 0$ , temos que obter  $\epsilon(\mu = 0, A = 0) = \sqrt{1 + 2\alpha^2\omega(2\tilde{n} + \tilde{l} + \lambda + 2)}$ . Assim as autoenergias serão dadas por,

$$\epsilon_{\tilde{n}\tilde{l}}^{\pm} = \left[ -a(\pm) \frac{\mu b^2}{\sqrt{2m}} + \sqrt{-m^2 - 2am(\pm)\mu b^2\sqrt{2m}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.29)$$

onde  $m$  é dado em (5.14) com,

$$p = -\frac{2a^3}{27} + \frac{2ac}{3} - \frac{\mu^2 b^4}{2}, \quad q = -\frac{4a^2}{3} + b^2c. \quad (5.30)$$

Novamente temos que as autoenergias dadas em (5.29) dependem do termo de acoplamento spin-órbita  $\lambda$  por conta da soma do termo  $\lambda/r$  com o potencial tensor efetivo dado  $A_{ef}(r) = A/r + \beta_2 r$ . Como  $\lambda$  tem dois valores possíveis diferentes, isso faz com que sejam quebradas a degenerescência entre os estados dupletos  $(\tilde{n}, \tilde{l}, \tilde{l} - 1/2)$  e  $(\tilde{n}, \tilde{l}, \tilde{l} + 1/2)$ , assim como a simetria exata de pseudo-spin. Porém, quando temos que o potencial tensor efetivo é nulo, ou seja, fazendo  $\beta_2 = 0$  e  $A = 0$ , eliminamos a dependência do acoplamento spin-órbita  $\lambda$  nas autoenergias, fazendo com que seja restaurada a simetria exata de pseudo-spin, com degenerescência por exemplo nos estados  $(1\tilde{p}_{1/2}, 1\tilde{p}_{3/2})$ , como notamos nas figuras (5.4) e (5.5). Observamos também, nas figuras (5.4) e (5.5), que quanto maior o valor de  $\beta_2$  e  $A$ , respectivamente, maior será a contribuição do potencial tensor efetivo  $A_{ef}$ , fazendo com que fique cada vez maior a separação de energia dos estados dupletos. Na tabela (E.1) do apêndice E, apresentamos valores de energia para alguns dupletos com e sem simetria exata de pseudo-spin.

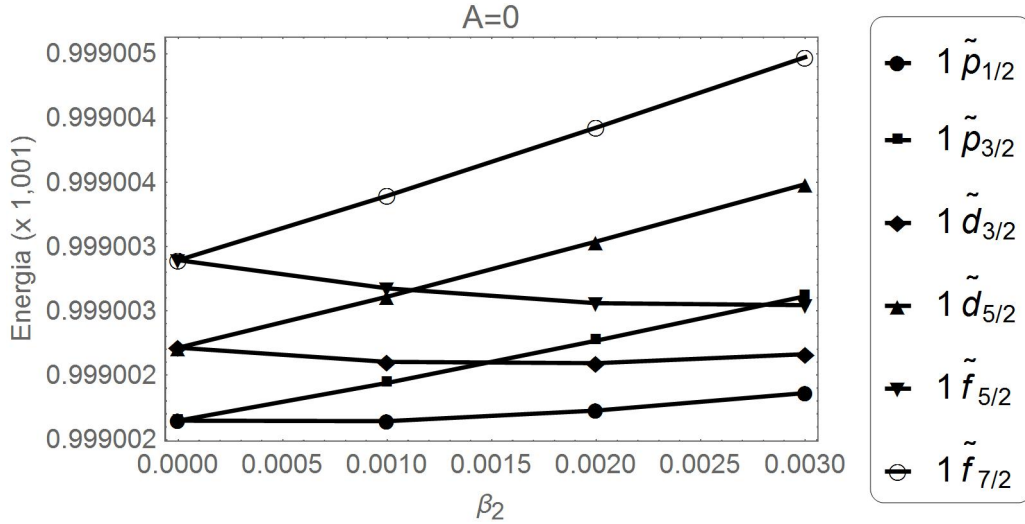


Figura 5.4: Gráficos de alguns espectros de energia para valores diferentes de  $\beta_2$ , com  $A = 0$ ,  $\mu = 10$  e usamos  $\epsilon^+$ . Notamos que para  $\beta_2 \neq 0$  haverá quebra de degenerescência nos dupletos. Usamos unidades atômicas.

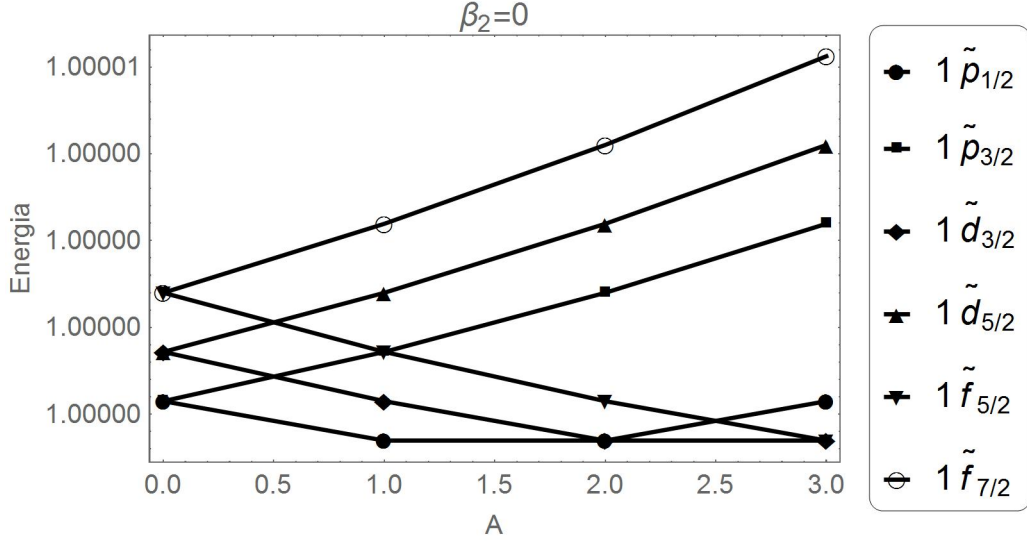


Figura 5.5: Gráficos de alguns espectros de energia para valores diferentes de  $A$ , com  $\beta_2 = 0$ ,  $\mu = 10$  e usamos  $\epsilon^+$ . Notamos que para  $A \neq 0$  haverá quebra de degenerescência nos dupletos. Usamos unidades atômicas.

Voltando a função de onda espinorial total obtemos,

$$\Psi_c(r, \theta, \phi) = N_{\tilde{n}\tilde{l}} \frac{(1 - \alpha^2 \mu r^2)^{-1/2}}{r} \begin{pmatrix} R_{\tilde{n}\tilde{l}}^1(r) \mathcal{Y}_l^{|m|j}(\theta, \phi) \\ i R_{\tilde{n}\tilde{l}}^2(r) \mathcal{Y}_l^{|m|j}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (5.31)$$

onde  $N_{\tilde{n}\tilde{l}}$  é a contante de normalização calculada no apêndice E. Mais uma vez podemos escrever  $\Psi^{curvo} = (g_{tt})^{-1/4} \Psi^{plano}$ , onde  $g_{tt} = (1 - \alpha^2 \mu r^2)^2$  é dado em (5.32). O espinor  $\Psi^{plano}$  é a função de onda espinorial do sistema com simetria exata de pseudo-spin em espaço-tempo plano com massa dependente da posição dada por  $m(r) = 1 - \alpha^2 \mu r^2$  e campo EM dado por  $A'_\mu = (\mu r^2, cA/r + c\beta_2 r, 0, 0)$ . Isso mostra que independentemente da simetria exata ser de spin ou pseudo-spin conseguimos escrever o espinores do oscilador de Dirac modificado em espaço-tempos curvo e plano conectados através do elemento de linha  $g_{tt}$ , como comentado no final da seção (2.2).

Por fim, faremos uma análise gráfica das densidades de probabilidade

radiais normalizadas  $|\Psi_c(r)|^2$  para diferentes valores de  $\mu$  afim de verificarmos como o acoplamento do campo EM e a curvatura do espaço influência no comportamento da partícula, assim como no caso anterior. Na figura (5.6), as densidades de probabilidade radiais estão representadas com  $\lambda = -\tilde{l}$ ,  $\omega = 1$ ,  $A = 1$ , usando  $\epsilon^+$  e  $\tilde{l} = 1$ .

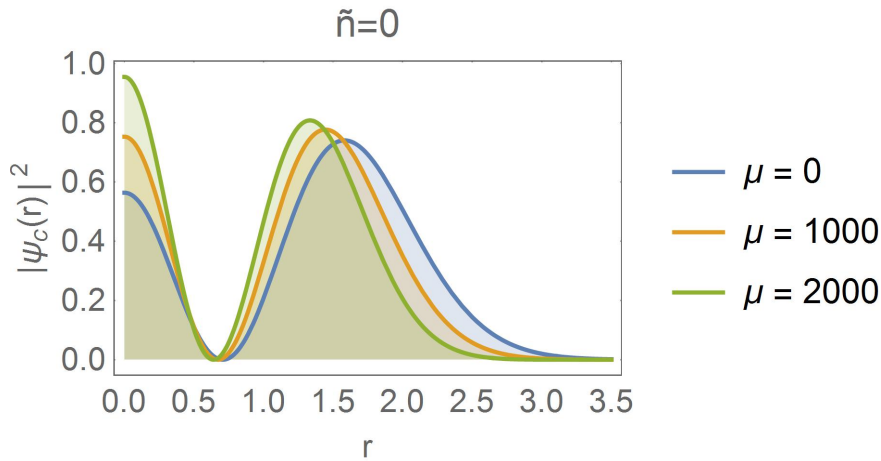


Figura 5.6: Gráficos das densidades de probabilidade radiais normalizadas  $|\Psi_c(r)|^2 = r^2(1 - \alpha^2\mu r^2)^2|\Psi_c|^2$  em espaço-tempo curvo com elemento de linha dado por (5.32) para  $\tilde{n} = 0$ . As curvas para  $\mu = 0$  e  $\mu \neq 0$  representam as densidades de probabilidade em espaço-tempos plano e curvo, respectivamente. Observamos, neste caso que, as densidades para  $\mu \neq 0$ , estão se aproximando de regiões onde a massa é maior —  $m(r) = 1 - \alpha^2\mu r^2$ .

Do mesmo modo que na seção anterior, vemos na figura (5.6) que a curva para o maior valor de  $\mu$  está mais próxima da origem do que as curvas com  $\mu = 1000$  e  $\mu = 0$ . Já que a massa é dada por  $m(r) = 1 - \alpha^2\mu r^2$ , verificamos que a partícula está sendo confinada em regiões onde tem maior massa.

Um fato também interessante, é que assim como na seção (4.2) do capítulo anterior, observamos que os valores de  $\mu \neq 0$  estão na ordem de  $\propto 10^3$  para conseguirmos notar algum descolamento das densidades de probabilidades com relação a  $\mu = 0$ . Isso acontece por conta da relação dos potenciais  $V(r)$  e  $U(r)$  nesta simetria em particular onde,  $U(r) = -V(r)$ , portanto na

simetria exata de pseudo-spin, a curvatura se modifica com relação ao caso da simetria exata de spin, onde tínhamos  $U(r) = V(r)$ . Isso faz com que para esses potenciais terem uma contribuição efetiva na variação de energia com relação a  $\mu = 0$ , e conseqüentemente no comportamento da partícula, eles devem possuir um parâmetro de acoplamento  $\mu$  próximo na ordem de  $\propto 10^3$ .

Em resumo, calculamos de maneira exata a função de onda espinorial dada em (5.31) e suas autoenergias dadas em (5.29) para o oscilador modificado de Dirac com potenciais escalar e vetor quadrático radial com simetria exata de pseudo-spin em espaço-tempo curvo cujo elemento de linha é dado por,

$$ds^2 = (1 - \alpha^2 \mu r^2)^2 (dt^2 - dr^2) - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (5.32)$$

com  $\mu \geq 0$ . A curvatura escalar [57] do elemento de linha dado em (5.32) é dado por,

$$R = \frac{8\alpha^4 \mu^2 r^2}{(1 - \alpha^2 \mu r^2)^4} + \frac{4\mu\alpha^2}{(1 - \alpha^2 \mu r^2)^3} + \frac{2}{r^2} \left( 1 - \frac{1}{(1 - \alpha^2 \mu r^2)^2} \right), \quad (5.33)$$

de modo que no limite de  $r \rightarrow 0$  implica que  $R \rightarrow 0$ , isto é, a curvatura é nula, o mesmo acontece quando  $r \rightarrow \infty$  implica que  $R \rightarrow 0$ , assim obtemos também que a curvatura é nula neste limite, o que significa que o espaço-tempo é plano nos dois limites.

Verificamos neste capítulo que conseguimos resultados análogos ao capítulo anterior, e de fato os sistemas são parecidos, já que aqui estamos analisando o oscilador de Dirac modificado por conta de um termo adicional tipo-Coulomb no potencial tensor  $A(r)$ . Para isso, fixamos um campo EM  $A_\mu = (V(r), cA/r + c\omega r, 0, 0)$  e consideramos dois elementos de linha diferentes, onde a curvatura é representada pelo potencial escalar  $U(r)$ . Conside-

rando  $U(r) = V(r)$  e  $U(r) = -V(r)$ , conseguimos analisar as duas simetrias desejadas, as simetrias exatas de spin e pseudo-spin, respectivamente. Observamos também que ambas as simetrias exatas de spin e pseudo-spin são quebradas por conta do potencial tensor efetivo que é composto com termos do elemento de linha e campo EM, mas retornamos com as simetrias para um caso particular. Notamos que para a simetria exata de spin a partícula confina em regiões onde a massa é menor com relação a  $r$ , diferente da simetria exata de pseudo-spin, onde a partícula confina em regiões onde a massa é maior com relação a  $r$ . Confinamentos esses que acontecem para valores de  $\mu$  em ordem de grandezas diferentes para as simetrias. Novamente, como no capítulo anterior, isso acontece por conta dos diferentes tipos de acoplamento dos potenciais  $V(r)$  e  $U(r)$  no hamiltoniano, pois para cada simetria temos um elemento de linha diferente. Com isso, o parâmetro de acoplamento  $\mu$  dos potenciais  $V(r)$  e  $U(r)$  tem que ser na ordem de  $10^0$  e  $10^3$  para as simetrias exatas de spin e pseudo-spin, respectivamente, para que haja uma variação de energia suficiente para descolar as densidades de probabilidades, para diferentes valores de  $\mu$ , como vemos nas figuras (5.3) e (5.6). Por fim, conseguimos novamente, encontrar que os espinores de Dirac em espaço-tempos curvo e plano estão conectados através do elemento de linha  $g_{tt}$ .



## Capítulo 6

# Potenciais vetor e escalar anarmônico com potencial tensor do tipo $Ar + B/r^3$

Neste capítulo analisaremos a equação de Dirac com potenciais vetor e escalar anarmônico e potencial tensor do tipo  $Ar + B/r^3$ , com simetrias exatas de spin e pseudo-spin em espaço-tempo curvo. Assim, de maneira parecida com que fizemos nos capítulos anteriores, obteremos o espinor de Dirac e suas respectivas autoenergias para ambas as simetrias. Tais espinores de Dirac serão obtidos de maneira quase-exata, ou seja, consideraremos o potencial tensor com um valor específico da constante de acoplamento  $B$ . Tendo obtido esses resultados, vamos analisar como as simetrias se comportam nessa configuração assim como as densidades de probabilidade radiais.

**As constantes calculadas neste capítulo se aplica somente ao mesmo, apenas a constante de estrutura fina  $\alpha = 1/137$  tem o mesmo valor em todos os capítulos.**

## 6.1 Simetria exata de spin

Na primeira seção, vamos considerar o sistema com simetria exata de spin. Assim, sejam os potenciais vetor e escalar anarmônico dado por  $V(r) = U(r) = \mu(r^2 + 1/r^2)$ , onde  $\mu$  é uma constante real e positiva, portanto,  $\Delta(r) = 0$  e  $\Sigma(r) = 2\mu(r^2 + 1/r^2)$ . O potencial tensor será dado por  $A(r) = \omega r - \lambda\alpha^2\mu/r^3$ , com isso, escrevemos o potencial tensor efetivo  $A_{ef}(r) = \beta_1 r$ , onde  $\beta_1 = \omega + \alpha^2\lambda\mu$ . Assim, usando (2.72) obtemos,

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\beta}{r^2} - \delta^2 r^2 - \beta_1(2\lambda - 1) + \frac{\epsilon^2 - 1}{\alpha^2} \right] R_1 = 0, \quad (6.1)$$

onde,

$$\delta = \sqrt{2\mu(1 + \epsilon) + \beta_1^2}, \quad \beta = l(l + 1) + 2\mu(1 + \epsilon), \quad (6.2)$$

com  $\lambda(\lambda + 1) = l(l + 1)$ . Efetuando a mudança de variável  $x = \delta r^2$  e supondo o *ansatz*  $R_1 = x^{-1/4}F(x)$  em (6.1) escrevemos,

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + \left\{ \frac{3}{16} - \frac{\beta}{4} \right\} \frac{1}{x^2} + \left\{ \frac{\beta_1(1 - 2\lambda)}{4\delta} + \frac{\epsilon^2 - 1}{4\delta\alpha^2} \right\} \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \right] F = 0. \quad (6.3)$$

Tal EDO em (6.3) já foi resolvida nos capítulos anteriores através de um mapeamento com a seguinte EDO,

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + C \right] F(x) = 0, \quad (6.4)$$

onde  $F(x)$  é dado por,

$$F(x) = (\sqrt{-Cx})^{1/2 + \sqrt{1/4 - B}} e^{-\sqrt{-Cx}} L_n^{2\sqrt{1/4 - B}}(2\sqrt{-Cx}), \quad (6.5)$$

onde  $L_n^k(x)$  são os polinômios de Laguerre associados e os termos  $A$ ,  $B$  e  $C$

devem satisfazer a condição,

$$\left(2n + 1 + 2\sqrt{\frac{1}{4} - B}\right) \sqrt{-C} - A = 0. \quad (6.6)$$

Comparando (6.3) com (6.4) identificamos,

$$A = \frac{\epsilon^2 - 1}{4\delta\alpha^2} + \frac{\beta_1(1 - 2\lambda)}{4\delta}, \quad B = \frac{3}{16} - \frac{\beta}{4}, \quad C = -\frac{1}{4} \quad (6.7)$$

assim de (6.5) obtemos,

$$F(x) = x^{\gamma+1/2} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) L_n^{2\gamma}(x), \quad (6.8)$$

onde  $\gamma = \sqrt{(l + 1/2)^2 + 2\mu(1 + \epsilon)}/2$ . Usando a notação  $R_1 = R_{nl}^1$  e  $R_2 = R_{nl}^2$  obtemos,

$$R_{nl}^1(r) = (\delta r^2)^{\gamma+1/4} \exp\left(-\frac{\delta r^2}{2}\right) L_n^{2\gamma}(\delta r^2), \quad (6.9)$$

e usando (2.70) temos,

$$R_{nl}^2(r) = \frac{\alpha}{1 + \epsilon} \left[ \left\{ \frac{2\gamma + \lambda + 1/2}{r} + (\delta + \beta_1)r \right\} L_n^{2\gamma}(\delta r^2) - 2\delta r \times \right. \\ \left. L_n^{2\gamma+1}(\delta r^2) \right] (\delta r^2)^{\gamma+1/4} \exp\left(-\frac{\delta r^2}{2}\right). \quad (6.10)$$

Por fim, para obtermos autoenergias vamos usar a equação (6.6), assim encontramos que elas deverão satisfazer,

$$\left(\frac{\epsilon^2 - 1}{2\alpha^2} - \frac{\beta_1(2\lambda - 1)}{2}\right) = \left(2n + 1 + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\mu(1 + \epsilon)}\right) \times \\ \sqrt{2\mu(1 + \epsilon) + \beta_1^2}, \quad (6.11)$$

diante da complexidade de obter os valores de  $\epsilon$  em (6.11) de maneira analítica,

as autoenergias podem ser calculadas numericamente. É importante notar que as autoenergias obtidas em (6.11) vão depender de  $\lambda$ , por conta do parâmetro de acoplamento  $\beta_1$  do potencial tensor efetivo. Pela definição em (2.73),  $\lambda$  tem dois valores possíveis, assim para cada valor de  $\lambda$  teremos um valor diferente de energia, isso produz uma quebra de degenerescência, causando a quebra de simetria exata de spin. Porém, assim como nos capítulos anteriores, aqui conseguimos retornar com a simetria em um caso particular quando  $\beta_1 = 0$ , isso faz com que o potencial tensor efetivo seja nulo e eliminamos a dependência de  $\lambda$  nas autoenergias. Portanto, teremos degenerescência, por exemplo, nos dupletos ( $1p_{1/2}, 1p_{3/2}$ ) assim como em outros dupletos como notamos na figura (6.1) e tabela (F.1) do apêndice F.

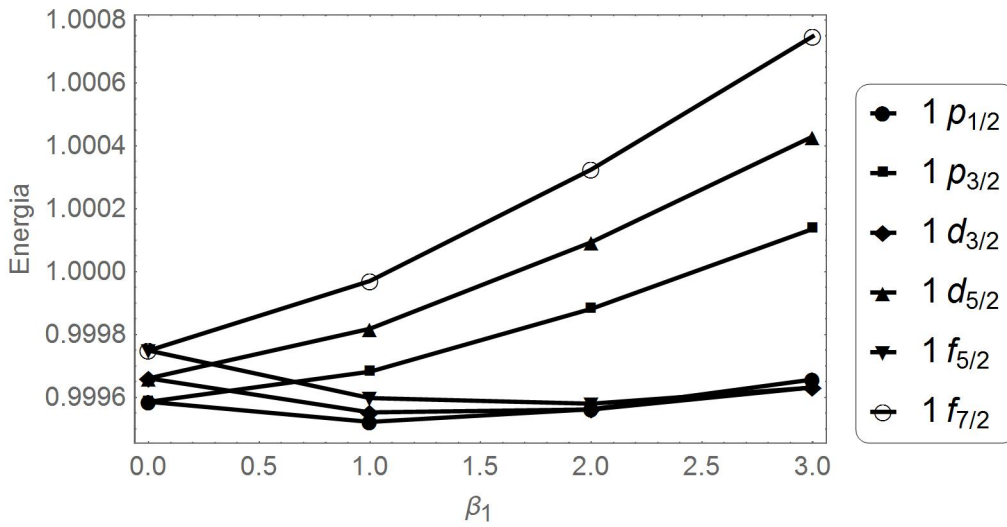


Figura 6.1: Gráficos de alguns espectros de energia para valores diferentes de  $\beta_1$  e usamos  $\mu = 1$ . Notamos que para  $\beta_1 \neq 0$  haverá quebra de degenerescência nos dupletos. Usamos unidades atômicas.

Finalmente, obtemos a função de onda espinorial total,

$$\Psi_c(r, \theta, \phi) = \frac{N_{nl}}{r} \left[ 1 + \alpha^2 \mu \left( r^2 + \frac{1}{r^2} \right) \right]^{-1/2} \begin{pmatrix} R_{nl}^1(r) \mathcal{Y}_l^{|m|j}(\theta, \phi) \\ i R_{nl}^2(r) \mathcal{Y}_l^{|m|j}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (6.12)$$

a constante de normalização  $N_{nl}$  é calculada no apêndice F. Conseguimos novamente escrever o espinor (6.12) como  $\Psi^{curvo} = (g_{tt})^{-1/4} \Psi^{plano}$ , onde  $g_{tt} = (1 + \alpha^2 \mu r^2 + \alpha^2 \mu / r^2)^2$  é o primeiro elemento da métrica em (6.13) e  $\Psi^{plano}$  é a função de onda espinorial em espaço-tempo plano com simetria exata de spin, massa efetiva dada por  $m(r) = 1 + \alpha^2 \mu (r^2 + 1/r^2)$  e campo EM  $A'_\mu = (\mu(r^2 + r^{-2}), c\beta_1 r, 0, 0)$ . Um detalhe importante é que, quando  $\mu = 0$  não retornamos ao problema do oscilador anarmônico de Dirac em espaço-tempo plano, mas sim ao problema do oscilador de Dirac em espaço-tempo plano, assim como ocorreu nos capítulos anteriores.

Na figura (6.2), traçamos as densidades de probabilidade radiais normalizadas  $|\Psi_c|^2$  para alguns valores de  $\mu$ , afim de comparar o comportamento da partícula para os casos onde  $\mu \neq 0$  e  $\mu = 0$ , onde este último representa o sistema do oscilador de Dirac em espaço-tempo plano. Utilizamos  $\lambda = l$  e  $l = 1$ .

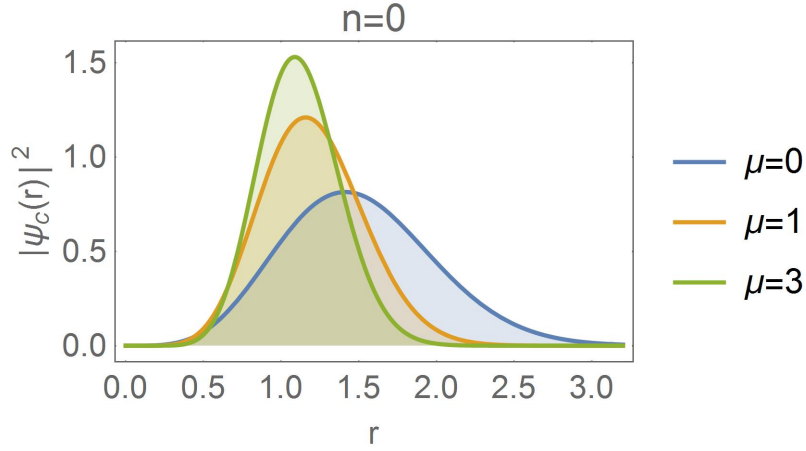


Figura 6.2: Gráficos das densidades de probabilidade radiais normalizadas  $|\Psi_c(r)|^2 = r^2(1 + \alpha^2\mu r^2 + \alpha^2\mu/r^2)^2|\Psi_c|^2$  em espaço curvo com elemento de linha dado por (6.13) com  $n = 0$  para  $\mu \neq 0$  e  $\mu = 0$  em espaço-tempos curvo e plano, respectivamente. Observamos que para  $\mu \neq 0$ , as densidades se aproximam da origem, onde a massa é maior —  $m(r) = 1 + \alpha^2\mu(r^2 + 1/r^2)$ .

Notamos neste problema que a partícula se comporta como se tivesse uma massa efetiva dependente da coordenada radial  $r$ , ou seja,  $m(r) = 1 + \alpha^2\mu(r^2 + 1/r^2)$  e este efeito vem da curvatura do espaço. Da figura (6.2), observamos que as densidades de probabilidade radiais estão se aproximando da origem em  $r$  quanto maior é o valor de  $\mu$ . Com isso, verifica-se que a partícula é confinada, por conta do acoplamento do campo EM com a curvatura do espaço-tempo, em regiões onde ela é mais massiva.

Em resumo, calculamos de maneira quase-exata a função de onda espinorial dada em (6.12) da equação de Dirac para os potenciais vetor e escalar anarmônico com potencial tensor do tipo  $Ar + B/r^3$ , com simetria exata de spin em espaço-tempo, curvo cujo elemento de linha é,

$$ds^2 = \left[ 1 + \alpha^2\mu \left( r^2 + \frac{1}{r^2} \right) \right]^2 (dt^2 - dr^2) - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (6.13)$$

A curvatura escalar deste problema é dado por,

$$R = \frac{2\alpha^4 2\mu(r - 1/r^3)^2}{(1 + \alpha^2\mu r^2 + \alpha^2\mu/r^2)^4} - \frac{2\alpha^2\mu(2 + 6/r^4)}{(1 + \alpha^2\mu r^2 + \alpha^2\mu/r^2)^3} + \frac{2}{r^2} \times \left[ 1 - \frac{1}{(1 + \alpha^2\mu r^2 + \alpha^2\mu/r^2)^2} \right], \quad (6.14)$$

tal que no limite de  $r \rightarrow 0$  implica que  $R \rightarrow \infty$ , isto é, a curvatura é infinita. Por outro lado, quando  $r \rightarrow \infty$  implica que  $R \rightarrow 0$ , obtemos uma curvatura nula, o que significa que o espaço-tempo é plano neste limite.

## 6.2 Simetria exata de pseudo-spin

Nesta seção, vejamos a simetria exata de pseudo-spin. Consideraremos os potenciais vetor e escalar anarmônico da seguinte forma  $V(r) = -U(r) = -\mu(r^2 + 1/r^2)$ , onde novamente  $\mu$  é real constante positiva, e temos  $\Delta(r) = -2\mu(r^2 + 1/r^2)$  e  $\Sigma(r) = 0$ . Como no caso anterior o potencial tensor é dado por  $A(r) = \omega r - \lambda\alpha^2\mu/r^3$ , portanto, o potencial efetivo é escrito como  $A_{ef}(r) = \beta_2 r$ , com  $\beta_2 = \omega + \alpha^2\lambda\mu$ . Assim, usando (2.76) obtemos,

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\beta}{r^2} - \delta^2 r^2 - \beta_2(2\lambda + 1) + \frac{\epsilon^2 - 1}{\alpha^2} \right] R_2 = 0, \quad (6.15)$$

onde,

$$\delta = \sqrt{2\mu(1 - \epsilon) + \beta_2^2}, \quad \beta = \tilde{l}(\tilde{l} + 1) + 2\mu(1 - \epsilon), \quad (6.16)$$

com  $\lambda(\lambda - 1) = \tilde{l}(\tilde{l} + 1)$ . Tomando a mudança de variável  $x = \delta r^2$  e  $R_2 = x^{-1/4}G(x)$  em (6.15) escrevemos,

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + \left\{ \frac{3}{16} - \frac{\beta}{4} \right\} \frac{1}{x^2} + \left\{ \frac{-\beta_2(1 + 2\lambda)}{4\delta} + \frac{\epsilon^2 - 1}{4\delta\alpha^2} \right\} \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \right] G = 0. \quad (6.17)$$

A EDO obtida em (6.17) é do mesmo tipo que já resolvemos na seção

anterior em (6.3), assim utilizando (6.5) obtemos

$$G(x) = x^{\gamma+1/2} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) L_n^{2\gamma}(x), \quad (6.18)$$

onde  $\gamma = \sqrt{(\tilde{l} + 1/2)^2 + 2\mu(1 - \epsilon)}/2$ . Usando a notação  $R_1 = R_{\tilde{n}\tilde{l}}^1$  e  $R_2 = R_{\tilde{n}\tilde{l}}^2$  temos,

$$R_{\tilde{n}\tilde{l}}^2(r) = (\delta r^2)^{\gamma+1/4} \exp\left(-\frac{\delta r^2}{2}\right) L_{\tilde{n}}^{2\gamma}(\delta r^2), \quad (6.19)$$

e usando (2.74)  $R_{\tilde{n}\tilde{l}}^1$  será,

$$R_{\tilde{n}\tilde{l}}^1(r) = \frac{\alpha}{1 - \epsilon} \left[ \left\{ \frac{2\gamma - \lambda + 1/2}{r} + (\delta - \beta_2)r \right\} L_{\tilde{n}}^{2\gamma}(\delta r^2) - 2\delta r \times \right. \\ \left. L_{\tilde{n}}^{2\gamma+1}(\delta r^2) \right] (\delta r^2)^{\gamma+1/4} \exp\left(-\frac{\delta r^2}{2}\right). \quad (6.20)$$

Para calcular as autoenergias usamos (6.6), assim as autoenergias  $\epsilon$  devem satisfazer,

$$\left( \frac{\epsilon^2 - 1}{2\alpha^2} - \frac{\beta_2(2\lambda + 1)}{2} \right) = \left( 2\tilde{n} + 1 + \sqrt{\left(\tilde{l} + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\mu(1 - \epsilon)} \right) \times \\ \sqrt{2\mu(1 - \epsilon) + \beta_2^2}. \quad (6.21)$$

Novamente, como no caso anterior, diante da complexidade de obter os valores de  $\epsilon$  em (6.11) de maneira analítica, as autoenergias podem ser calculadas numericamente. É importante notar também que, novamente, as autoenergias obtidas em (6.21) dependem de  $\lambda$ , por conta do parâmetro de acoplamento  $\beta_2$  do potencial tensor efetivo  $A_{ef}(r) = \beta_2 r$ . Da equação (2.77) observamos que  $\lambda$  tem dois valores possíveis, assim para cada valor de  $\lambda$  teremos um valor diferente de energia, isso produz uma quebra de degenerescência, causando a quebra de simetria exata de pseudo-spin. Porém, conseguimos retornar com a simetria em um caso particular quando  $\beta_2 = 0$ , isso



faz com que o potencial tensor efetivo seja nulo e eliminamos a dependência de  $\lambda$  nas autoenergias. Portanto, teremos degenerescência, por exemplo, nos estados dupletos ( $1\tilde{p}_{1/2}, 1\tilde{p}_{3/2}$ ), assim como em outros dupletos como notamos na figura (6.3) e tabela (F.2) do apêndice F.

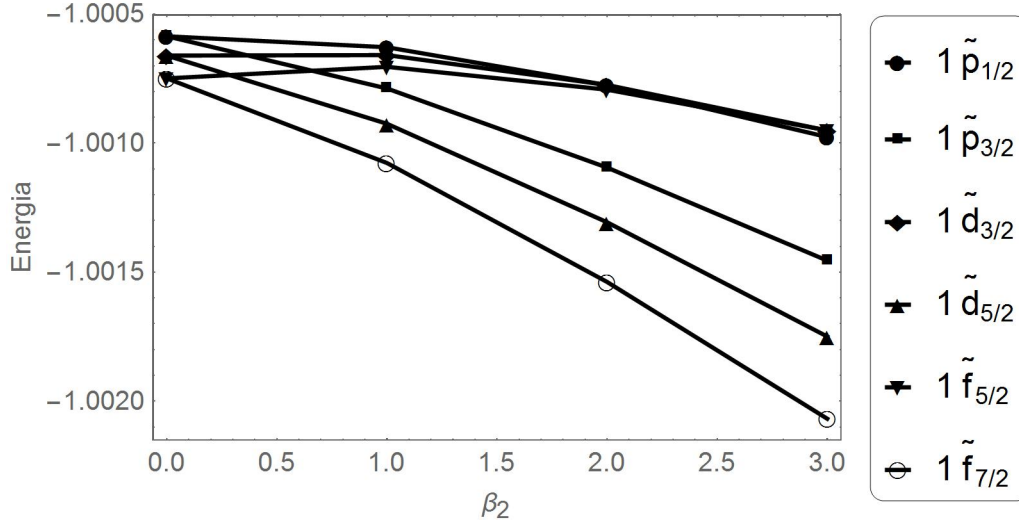


Figura 6.3: Gráficos de alguns espectros de energia para valores diferentes de  $\beta_2$  e usamos  $\mu = 1$ . Notamos que para  $\beta_2 \neq 0$  haverá quebra de degenerescência nos dupletos. Usamos unidades atômicas.

Finalmente, obtemos a função de onda espinorial total,

$$\Psi_c(r, \theta, \phi) = \frac{N_{\tilde{n}\tilde{l}}}{r} \left[ 1 + \alpha^2 \mu \left( r^2 + \frac{1}{r^2} \right) \right]^{-1/2} \begin{pmatrix} R_{\tilde{n}\tilde{l}}^1(r) \mathcal{Y}_l^{|m|j}(\theta, \phi) \\ i R_{\tilde{n}\tilde{l}}^2(r) \mathcal{Y}_l^{|m|j}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (6.22)$$

onde constante de normalização  $N_{\tilde{n}\tilde{l}}$  é calculada no apêndice F. A função de onda espinorial em (6.22) pode ser escrita como  $\Psi^{curvo} = (g_{tt})^{-1/4} \Psi^{plano}$ , onde  $g_{tt} = (1 + \alpha^2 \mu r^2 + \alpha^2 \mu / r^2)^2$  é o primeiro elemento da métrica dada em (6.13) e  $\Psi^{plano}$  é a função de onda espinorial em espaço-tempo plano com simetria exata de pseudo-spin, massa efetiva dada por  $m(r) = 1 + \alpha^2 \mu (r^2 + 1/r^2)$  e campo EM  $A'_\mu = (-\mu(r^2 + r^{-2}), c\beta_2 r, 0, 0)$ .

Na figura (6.4), traçamos as densidades de probabilidade radiais normalizadas  $|\Psi_c|^2$  para alguns valores de  $\mu$ , afim de comparar o comportamento da partícula para os casos onde  $\mu \neq 0$  e  $\mu = 0$ , onde novamente,  $\mu = 0$  representa o sistema do oscilador de Dirac em espaço-tempo plano. Utilizamos  $\lambda = \tilde{l} + 1$  e  $\tilde{l} = 1$ .

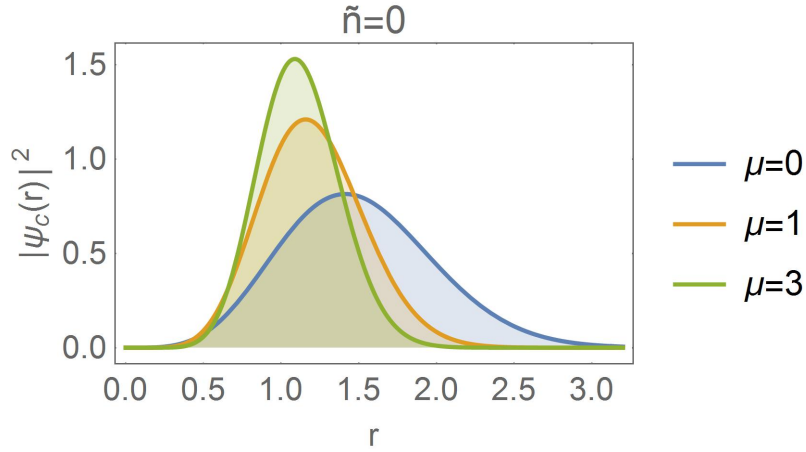


Figura 6.4: Gráficos das densidades de probabilidade radiais normalizadas  $|\Psi_c(r)|^2 = r^2(1 + \alpha^2\mu r^2 + \alpha^2\mu/r^2)^2|\Psi_c|^2$  em espaço-tempo curvo com elemento de linha dado em (6.13) para  $\tilde{n} = 0$ . Mais uma vez notamos que quanto maior o valor de  $\mu$ , mais as densidades se aproximam de  $r = 0$ , onde a massa é maior —  $m(r) = 1 + \alpha^2\mu(r^2 + 1/r^2)$ .

Notamos que, assim como na seção anterior, a partícula se comporta como se tivesse uma massa efetiva dependente da coordenada radial  $r$ , ou seja,  $m(r) = 1 + \alpha^2\mu(r^2 + 1/r^2)$  e este efeito vem da curvatura do espaço. Da figura (6.4), observamos que as densidades de probabilidade radiais estão se aproximando da origem em  $r$  quanto maior é o valor de  $\mu$ . Com isso, novamente, verifica-se que a partícula é confinada, por conta do acoplamento do campo EM com a curvatura do espaço-tempo, em regiões onde ela é mais massiva. O elemento de linha e a curvatura escalar são os mesmos da seção anterior, dados em (6.13) e (6.14), respectivamente.

Verificamos neste capítulo que conseguimos obter os espinores de Dirac de maneira quase-exata para os potenciais vetor e escalar anarmônico em espaço-tempo curvo com simetrias exatas de spin e pseudo-spin. Para isso consideramos o mesmo elemento de linha em ambos os casos, onde a curvatura é dada pelo mesmo potencial tensor  $U(r)$  e consideramos dois potenciais vetores diferentes,  $V(r) = U(r)$  e  $V(r) = -U(r)$ , para as simetrias exatas de spin e pseudo-spin, respectivamente. Em ambos os casos as simetrias foram quebradas por um potencial tensor efetivo, porém recuperamos as simetrias num caso particular, quando o parâmetro de acoplamento deste potencial é nulo. Observamos também as separações das energias dos dupletos em ambas as simetrias devido ao potencial tensor efetivo, como vemos nas figuras (6.1) e (6.3). Notamos, que para ambas as simetrias, a partícula confina em regiões onde a massa é maior com relação a  $r$ . Confinamentos esses que, diferentemente dos capítulos anteriores, acontecem para valores de  $\mu$  na mesma ordem de grandeza, pois neste capítulo as simetrias exatas de spin e pseudo-spin se manifestam fixando o elemento de linha e variando o campo EM. Com isso, valores de  $\mu$  na mesma ordem de grandeza, já fazem com que as variações de energia sejam suficiente para descolar as densidades de probabilidades, em ambas as simetrias, como vemos nas figuras (6.2) e (6.4). Obtemos, também, uma conexão entre os espinores de Dirac em espaço-tempo curvo e plano através do elemento de linha  $g_{tt}$ .

## Capítulo 7

# Potenciais escalar e vetor tipo-Coulomb e potencial tensor tipo-Mie

Neste capítulo vamos analisar os potenciais escalar e vetor tipo-Coulomb e potencial tensor tipo-Mie em espaço-tempo curvo com simetrias exatas de spin e pseudo-spin. O potencial Mie foi proposto por Gustav Mie em 1903 [150] para descrever a interação intermolecular e é dado por,

$$\phi_{12}(r) = A_{mn} \left[ \left( \frac{r_0}{r} \right)^n - \left( \frac{r_0}{r} \right)^m \right], \quad (7.1)$$

onde os índices 1 e 2 representam duas partículas interagindo,  $r = |r_1 - r_2|$ ,  $r_0$  é o valor de  $r$  quando  $\phi_{12}(r) = 0$  e  $A_{mn}$  é uma constante que depende dos parâmetros  $m$  e  $n$  que define o tipo de potencial Mie a ser considerado. Um exemplo conhecido desse potencial é o de Lennard-Jones quando  $n = 12$  e  $m = 6$ . Desse modo, um potencial do tipo-Mie generalizado pode ser escrito na forma,  $A/r + B/r^2 + C$ , como em [85]. De acordo com os valores

das constantes  $(A, B, C)$  temos tipos diferentes desse potencial [151, 152, 153]. No nosso caso, consideraremos  $C = 0$  e um valor de  $B$  específico, assim, obteremos os espinores de Dirac e suas autoenergias de forma quase-exata para ambas as simetrias. Com isso, analisaremos as autoenergias e o comportamento das densidades de probabilidade radiais para ambas as simetrias em espaço-tempo curvo.

**As constantes calculadas neste capítulo se aplica somente ao mesmo, apenas a constante de estrutura fina  $\alpha = 1/137$  tem o mesmo valor em todos os capítulos.**

## 7.1 Simetria exata de spin

Nesta seção analisaremos o potencial vetor e escalar tipo-Coulomb e o potencial tensor tipo-Mie com simetria exata de spin, assim teremos  $\Delta(r) = 0$ ,  $\Sigma(r) = 2V(r) = 2\mu/r$ , onde  $\mu$  é constante real positivo. Seja o potencial tensor do tipo-Mie  $A(r) = D/r - \alpha^2\lambda\mu/r^2$ , onde  $D$  é constante real positivo. O potencial tensor efetivo será  $A_{ef}(r) = D/r$ . Logo, de (2.72) obtemos,

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1) + 2D\lambda + D + D^2}{r^2} - \frac{2\mu(1+\epsilon)}{r} + \frac{\epsilon^2 - 1}{\alpha^2} \right] R_1 = 0, \quad (7.2)$$

onde usamos  $\lambda(\lambda+1) = l(l+1)$ . Nos capítulos anteriores, obtemos funções de ondas que satisfazem EDOs análogas a obtida em (7.2) fazendo mapeamento com (4.3). Assim, comparando (7.2) com (4.3) identificamos os termos,

$$A = -2\mu(1+\epsilon), \quad B = -l(l+1) - 2\lambda D - D - D^2, \quad C = \frac{\epsilon^2 - 1}{\alpha^2}. \quad (7.3)$$

Portanto, de (4.4) obtemos,

$$R_{nl}^1(r) = r^{1/2+\beta} \exp(-\rho r) L_n^{2\beta}(2\rho r), \quad (7.4)$$

onde  $L_n^k(x)$  são os polinômios de Laguerre associados e,

$$\rho = \frac{2\mu|1+\epsilon|}{2n+2\beta+1}, \quad \beta = \sqrt{(l+1/2)^2 + D(2\lambda+D+1)}, \quad (7.5)$$

assim usando (2.70) obtemos,

$$R_{nl}^2(r) = \frac{\alpha}{1+\epsilon} \left[ \left( n - \beta + \lambda + D - \frac{1}{2} + \rho r \right) L_n^{2\beta} + (n+1)L_{n+1}^{2\beta} \right] \times r^{\beta-1/2} \exp(-\rho r). \quad (7.6)$$

As autoenergias serão obtidas usando os valores de  $A$ ,  $B$  e  $C$  em (4.5) logo,

$$\epsilon_{nl} = \frac{-4\mu^2\alpha^2 + (2n+1+2\sqrt{(l+1/2)^2 + D(2\lambda+D+1)})^2}{4\mu^2\alpha^2 + (2n+1+2\sqrt{(l+1/2)^2 + D(2\lambda+D+1)})^2}. \quad (7.7)$$

Como notamos em (2.73)  $\lambda$  pode assumir valores positivo ou negativo, com isso para as autoenergias  $\epsilon_{nl}$  serem reais e  $\Psi_c$  ser quadrado integrável temos que  $\beta \geq 1$ , assim para satisfazermos essas condições, o momento angular orbital  $l$  deverá ser,

$$\begin{cases} 0 \leq D - \frac{3}{2} \geq l \geq D + \frac{1}{2}, & \text{para } \lambda < 0 \\ 0 \leq l \geq -\frac{1}{2} - D + \sqrt{1+2D}, & \text{para } \lambda > 0 \end{cases}. \quad (7.8)$$

A dependência de  $\lambda$  nas autoenergias se dá por conta do potencial efetivo  $A_{ef}(r) = D/r$ , assim as autoenergias terão valores diferente para cada escolha

de  $\lambda$  em (2.73). Isso faz com que seja quebrada a simetria exata de spin, pois não teremos degenerescência entre os estados dupletos  $(n, l, l + 1/2)$  e  $(n, l, l - 1/2)$ . Entretanto, quando fazemos  $D = 0$  eliminamos a dependência de  $\lambda$  nas autoenergias, fazendo com que retorne a degenerescência nos estados citados e conseqüentemente a simetria exata de spin, como podemos observar na figura (7.1) e tabela (G.1) no apêndice G.

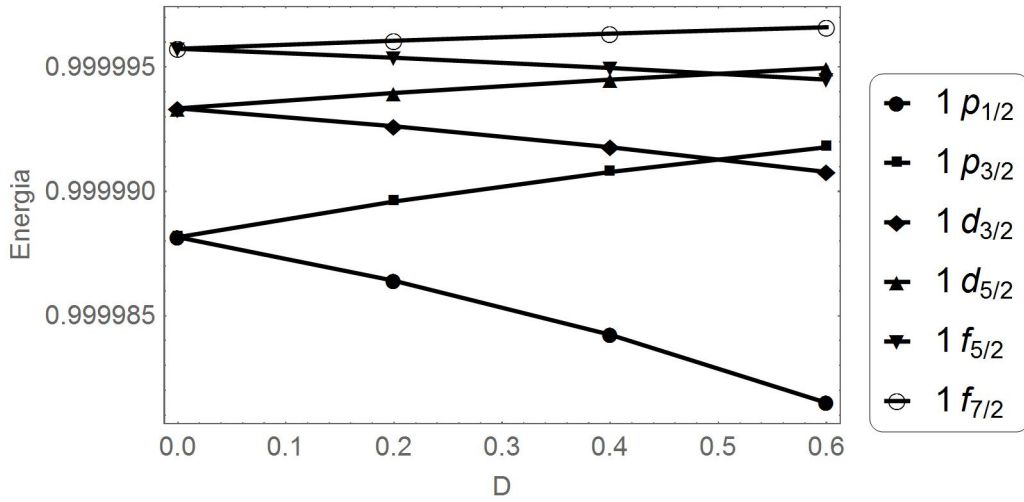


Figura 7.1: Gráficos de alguns espectros de energia para valores diferentes de  $D$  e usamos  $\mu = 1$ . Notamos que para  $D \neq 0$  haverá quebra de degenerescência nos dupletos. Usamos unidades atômicas.

Finalmente obtemos a função de onda espinorial total,

$$\Psi_c(r, \theta, \phi) = \frac{N_{nl}}{r} \left(1 + \frac{\mu\alpha^2}{r}\right)^{-1/2} \begin{pmatrix} R_{nl}^1(r) \mathcal{Y}_l^{|m|j}(\theta, \phi) \\ iR_{nl}^2(r) \mathcal{Y}_l^{|m|j}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (7.9)$$

a constante de normalização  $N_{nl}$  é calculada no apêndice G. O espinor de Dirac obtido em (7.9) pode ser escrito novamente como  $\Psi^{curvo} = (g_{tt})^{-1/4} \Psi^{plano}$ , onde  $g_{tt} = (1 + \mu\alpha^2/r)^2$  é o primeiro elemento de linha dado em (7.10) e  $\Psi^{plano}$  é a função de onda espinorial em espaço-tempo plano com massa efetiva  $m(r) = 1 + \mu\alpha^2/r$ , campo EM  $A'_\mu = (\mu/r, cD/r, 0, 0)$  e simetria exata

de spin. Faremos agora uma análise nas densidades de probabilidade radiais normalizadas  $|\Psi_c(r)|^2$  para diferentes valores de  $\mu$  afim de analisar a influência do acoplamento do do campo EM com o espaço-tempo curvo. Na figura (7.2), as densidades de probabilidade radiais são representadas com  $D = 1$ ,  $\lambda = l$  e  $l = 1$ .

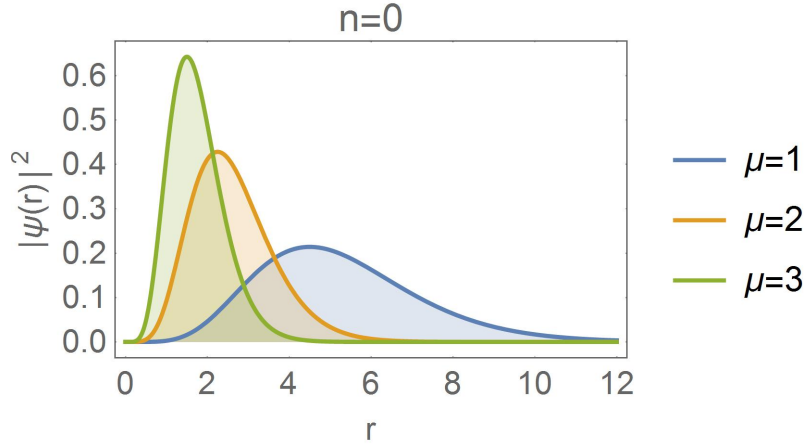


Figura 7.2: Gráficos das densidades de probabilidade radiais  $|\Psi_c(r)|^2 = r^2(1 + \mu\alpha^2/r)^2|\Psi_c|^2$  para  $n = 0$  em espaço-tempo curvo com elemento de linha dado por (7.10). Fizemos as densidades de probabilidade radiais para  $\mu = (1, 2, 3)$ . Observamos que quanto maior o valor de  $\mu$ , mais densidades se aproxima da origem, onde a partícula é mais massiva —  $m(r) = 1 + \mu\alpha^2/r$ .

Notamos que as densidades de probabilidade estão sendo confinadas em regiões próxima de ( $r = 0$ ) quanto maior o valor de  $\mu$ . Como já comentamos, esse problema pode ser interpretado em espaço-tempo plano com uma partícula com massa dependente da posição,  $m(r) = 1 + \mu\alpha^2/r$ . Assim, observamos na figura (7.2) que, por conta do acoplamento do campo EM com o espaço-tempo curvo, as densidades de probabilidades estão confinadas em regiões onde a partícula é mais massiva.

Em resumo, calculamos o espinor de Dirac de maneira exata dado em (7.9) e suas autoenergias dadas em (7.7) para os potenciais vetor e escalar tipo-Coulomb e o potencial tensor tipo-Mie com simetria exata de spin em



espaço-tempo curvo cujo elemento de linha é,

$$ds^2 = (1 + \mu\alpha^2/r)^2(dt^2 - dr^2) - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2, \quad (7.10)$$

a curvatura escalar de (7.10) é dada por,

$$R = \frac{2\alpha^4\mu^2}{(r + \mu\alpha^2)^4} - \frac{4\alpha^2\mu}{(r + \mu\alpha^2)^3} + 2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r + \mu\alpha^2)^2}\right), \quad (7.11)$$

assim temos que para  $r \rightarrow 0$  implica  $R \rightarrow \infty$ , logo a curvatura é infinita, portanto temos uma singularidade. Quando  $r \rightarrow \infty$  implica que  $R \rightarrow 0$ , assim obtemos que a curvatura é nula, logo o espaço-tempo será plano neste limite.

## 7.2 Simetria exata de pseudo-spin

Neste segundo caso analisaremos novamente os potenciais escalar e vetor tipo-Coulomb e o potencial tensor tipo-Mie, mas agora com simetria exata de pseudo-spin. Portanto temos  $\Sigma(r) = 0$ ,  $\Delta(r) = 2V(r) = -2\mu/r$  e  $A(r) = D/r - \alpha^2\lambda/r^2$ , onde  $D$  e  $\mu$  são constantes reais positivas. O potencial tensor efetivo será  $A_{ef}(r) = D/r$ , Assim, de (2.76), obtemos,

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\tilde{l}(\tilde{l} + 1) + 2D\lambda - D + D^2}{r^2} - \frac{2\mu(1 - \epsilon)}{r} + \frac{\epsilon^2 - 1}{\alpha^2} \right] R_2 = 0, \quad (7.12)$$

onde usamos  $\lambda(\lambda - 1) = \tilde{l}(\tilde{l} + 1)$ . Analogamente como na seção anterior, a função de onda que satisfaz a EDO acima será dada por,

$$R_{\tilde{n}\tilde{l}}^2(r) = r^{1/2+\beta} \exp(-\rho r) L_{\tilde{n}}^{2\beta}(2\rho r), \quad (7.13)$$

onde agora vamos usar a notação  $R_2 = R_{\tilde{n}\tilde{l}}^2$ ,  $R_1 = R_{\tilde{n}\tilde{l}}^1$  e temos que,

$$\rho = \frac{2\mu|1-\epsilon|}{2\tilde{n}+2\beta+1}, \quad \beta = \sqrt{(\tilde{l}+1/2)^2 + D(2\lambda+D-1)}. \quad (7.14)$$

Usando (2.74) obtemos,

$$R_{\tilde{n}\tilde{l}}^1(r) = \frac{\alpha}{1-\epsilon} \left[ - \left( \tilde{n} + \beta + \lambda + D + \frac{1}{2} - \rho r \right) L_{\tilde{n}}^{2\beta} + (\tilde{n}+1)L_{\tilde{n}+1}^{2\beta} \right] \times r^{\beta-1/2} \exp(-\rho r). \quad (7.15)$$

Mais uma vez as autoenergias serão dadas por (4.5), mas agora usando,

$$A = 2\mu(1-\epsilon), \quad B = -\tilde{l}(\tilde{l}+1) - D(2\lambda+D-1), \quad C = \frac{\epsilon^2-1}{\alpha^2}, \quad (7.16)$$

logo,

$$\epsilon_{\tilde{n}\tilde{l}} = \frac{4\mu^2\alpha^2 - (2\tilde{n}+1+2\sqrt{(\tilde{l}+1/2)^2 + D(2\lambda+D-1)})^2}{4\mu^2\alpha^2 + (2\tilde{n}+1+2\sqrt{(\tilde{l}+1/2)^2 + D(2\lambda+D-1)})^2}. \quad (7.17)$$

Notamos novamente que as autoenergias dependem de  $\lambda$  que pode assumir valor positivo ou negativo, assim para  $\epsilon_{\tilde{n}\tilde{l}}$  ser real e  $\Psi_c$  quadrado integrável devemos ter  $\beta \geq 1$ , assim para satisfazer tais condições o momento angular orbital  $\tilde{l}$  deverá ser,

$$\begin{cases} 0 \leq D - 3/2 \geq \tilde{l} \geq D + 1/2, & \text{para } \lambda < 0 \\ \tilde{l} \geq 1, & \text{para } \lambda > 0 \end{cases}. \quad (7.18)$$

Observamos também que, mais uma vez, a simetria exata de pseudo-spin está quebrada, pois as autoenergias dependem do termo  $\lambda$ , por conta do potencial tensor efetivo  $A_{ef}(r) = D/r$ . Entretanto conseguimos retornar com

a simetria quando fazemos  $D = 0$ , pois teremos degenerescência nos estados dupletos  $(\tilde{n}, \tilde{l}, \tilde{l} - 1/2)$  e  $(\tilde{n}, \tilde{l}, \tilde{l} + 1/2)$ , como podemos observar na figura (7.3) e na tabela (G.2) do apêndice G.

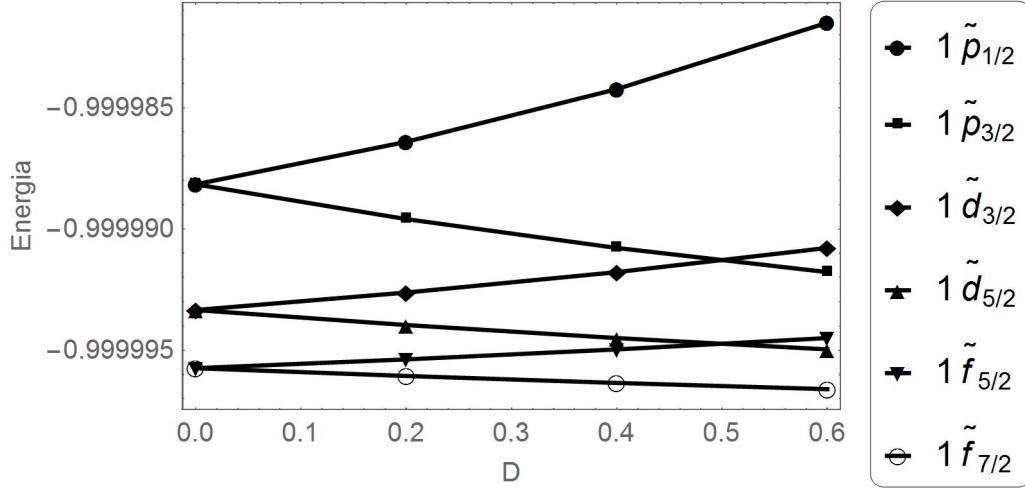


Figura 7.3: Gráficos de alguns espectros de energia para valores diferentes de  $D$  e usamos  $\mu = 1$ . Notamos que para  $D \neq 0$  haverá quebra de degenerescência nos dupletos. Usamos unidades atômicas.

Finalmente, a função de onda espinorial total será,

$$\Psi_c(r, \theta, \phi) = \frac{N_{\tilde{n}\tilde{l}}}{r} \left(1 + \frac{\mu\alpha^2}{r}\right)^{-1/2} \begin{pmatrix} R_{\tilde{n}\tilde{l}}^1(r) \mathcal{Y}_l^{m|j}(\theta, \phi) \\ iR_{\tilde{n}\tilde{l}}^2(r) \mathcal{Y}_l^{m|j}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (7.19)$$

onde a constante de normalização  $N_{\tilde{n}\tilde{l}}$  é calculada no apêndice G. Como no caso anterior, a função de onda espinorial (7.19) pode ser escrita como  $\Psi^{curvo} = (g_{tt})^{-1/4} \Psi^{plano}$  onde  $g_{tt} = (1 + \mu\alpha^2/r)^2$  é o primeiro elemento de linha dado em (7.10) e  $\Psi^{plano}$  é o espinor de Dirac em espaço-tempo plano com massa efetiva  $m(r) = 1 + \mu\alpha^2/r$ , campo EM  $A'_\mu = (-\mu/r, cD/r, 0, 0)$  e simetria exata de pseudo-spin. Na figura (7.4), analisaremos as densidades de probabilidade radiais normalizadas  $|\Psi_c(r)|^2$  para alguns valores de  $\mu$  afim de de comparar diferentes tipos de acoplamento do campo EM com o espaço-

tempo curvo. Para isso usamos  $D = 1$ ,  $\lambda = \tilde{l} + 1$  e  $\tilde{l} = 2$ .

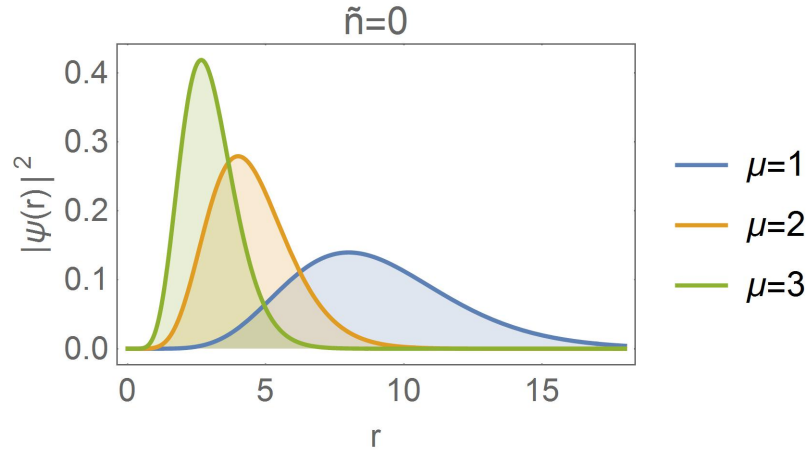


Figura 7.4: Gráficos das densidades de probabilidade  $|\Psi_c(r)|^2 = r^2(1 + \mu\alpha^2/r)^2|\Psi_c|^2$  para  $\tilde{n} = 0$  em espaço-tempo curvo com elemento de linha dado por (7.10). Fizemos as densidades de probabilidade radiais para  $\mu = (1, 2, 3)$ . Observamos que quanto maior o valor de  $\mu$ , mais as densidades se aproxima da origem, onde a partícula é mais massiva —  $m(r) = 1 + \mu\alpha^2/r$ .

Novamente, como na seção anterior, notamos que as densidades de probabilidade estão sendo confinadas em regiões próxima de ( $r = 0$ ) quanto maior o valor de  $\mu$ . Como já comentamos, esse problema pode ser interpretado em espaço-tempo plano com uma partícula com massa dependente da posição,  $m(r) = 1 + \mu\alpha^2/r$ . Assim, observamos na figura (7.2) que, por conta do acoplamento do campo EM com o espaço-tempo curvo, as densidades de probabilidades estão confinadas em regiões onde a partícula é mais massiva. O elemento de linha e a curvatura escalar são os mesmos da seção anterior, dados em (7.10) e (7.11), respectivamente.

Obtemos, neste capítulo, os espinores de Dirac de maneira quase-exata para o potencial vetor e escalar tipo-Coulomb com potencial tensor tipo-Mie com simetrias exatas de spin e pseudo-spin em espaço-tempo curvo. Para isso, fixamos o elemento de linha e variamos o potencial vetor do seguinte

modo:  $V(r) = U(r)$  e  $V(r) = -U(r)$ , para as simetrias exatas de spin e pseudo-spin, respectivamente. Destes resultados, observamos que houve quebra de ambas as simetrias devido ao potencial tensor efetivo  $A_{ef}(r) = D/r$ , porém quando zeramos sua constante de acoplamento  $D$ , retornamos com as simetrias, como observamos nas figuras (7.1) e (7.3). Verificamos, assim como no capítulo anterior, que as densidades de probabilidade radiais é confinada próxima de ( $r = 0$ ) quanto maior o valor da constante de acoplamento dos potenciais vetor e escalar  $\mu$ . Neste caso, mais uma vez,  $\mu$  tem a mesma ordem de grandeza, para ambas as simetrias, para que consigamos observar um deslocamento das densidades de probabilidade, como nas figuras (7.2) e (7.4). Novamente, obtemos uma conexão entre os espinores de Dirac em espaço-tempo curvo e plano através do elemento de linha  $g_{tt}$ .

# Capítulo 8

## Potenciais escalar e vetor tipo-Morse e potencial tensor Hellmann

Como última aplicação deste trabalho, analisaremos o sistema com os potenciais escalar e vetor tipo-Morse e potencial tensor Hellmann com simetrias exatas de spin e pseudo-spin em espaço-tempo curvo. Potenciais tipo-Morse são aplicados em sistemas para descrever vibrações em torno de uma posição de equilíbrio dado por  $r_e$ , enquanto que o potencial Hellmann é aplicado para descrever sistemas que contém interações do tipo-Coulomb somado a um termo tipo-Yukawa. Para obtermos as funções de onda radiais  $R_1(r)$  e  $R_2(r)$  tal como as autoenergias de maneira analítica, resolveremos o sistema de forma aproximada utilizando a abordagem da aproximação Pekeris [154] e analisaremos o comportamento de ambas as simetrias sem perda de generalidade por conta da aproximação feita.

**As constantes calculadas neste capítulo se aplica somente ao mesmo, apenas a constante de estrutura fina  $\alpha = 1/137$  tem o mesmo**

valor em todos os capítulos.

## 8.1 Simetria exata de spin

Nesta primeira seção analisaremos o sistema com simetria exata de spin, assim temos  $\Delta(r) = 0$ ,  $\Sigma(r) = 2V(r) = 2\mu \exp[-\delta(r - r_e)]$  e  $A(r) = A/r - \alpha^2 \lambda \mu \exp[-\delta(r - r_e)]/r$ , onde  $A$  e  $\mu$  são constantes reais. Assim, o potencial tensor efetivo será  $A_{ef}(r) = A/r$ . Logo, da equação (2.72) obtemos,

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\lambda(\lambda + 1) + 2A\lambda + A + A^2}{r^2} - 2\mu(1 + \epsilon)e^{-\delta(r-r_e)} + \frac{\epsilon^2 - 1}{\alpha^2} \right] R_1 = 0, \quad (8.1)$$

fazendo a mudança de variável  $x = (r - r_e)/r_e$  em (8.1) escrevemos,

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\beta}{(1+x)^2} - 2\mu r_e^2(1 + \epsilon)e^{-\delta r_e x} + \frac{r_e^2(\epsilon^2 - 1)}{\alpha^2} \right] R_1 = 0, \quad (8.2)$$

onde  $\beta = l(l + 1) + A(2\lambda + A + 1)$ , com  $\lambda(\lambda + 1) = l(l + 1)$ . A EDO dada em (8.2) não possui solução exata para todo domínio em  $x$ , assim uma maneira de contornar esse problema é analisar o sistema para  $x \approx 0$ , ou seja, para pequenas vibrações em torno da posição de equilíbrio  $r_e$  ao invés de todo domínio de  $r$ . Desse modo, tentaremos reescrever a EDO dada em (8.2), para assim podermos obter a função de onda  $R_1$  e as autoenergias do sistema, que é o nosso principal objetivo, pois queremos analisar a simetria spin exata do sistema. Portanto, o que faremos é tentar reescrever o termo centrífugo dado por  $1/(1+x)^2$  na equação (8.2) na forma de exponencial através de uma expansão em torno de  $x \approx 0$  ( $r \approx r_e$ ) utilizando a aproximação Pekeris, pois assim conseguiremos escrever a equação (8.2) de uma forma que tenha solução conhecida. Assim, consideremos a aproximação Pekeris, que é uma expansão em série de Taylor no termo centrífugo  $1/(1+x)^2$  em torno de  $x \approx 0$

( $r \approx r_e$ ) até segunda ordem, pois queremos escrever o termo centrífugo da seguinte forma,

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \beta_0 + \beta_1 e^{-\delta r_e x} + \beta_2 e^{-2\delta r_e x}. \quad (8.3)$$

Efetuada tal expansão em  $1/(1+x)^2$  obtemos,

$$\frac{1}{(1+x)^2} \approx 1 - 2x + 3x^2 + O(x^3), \quad (8.4)$$

e expandindo as exponenciais na equação (8.3) até segunda ordem obtemos,

$$\begin{aligned} \beta_0 + \beta_1 e^{-\delta r_e x} + \beta_2 e^{-2\delta r_e x} \approx \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 - (\beta_1 + 2\beta_2)\delta r_e x + \\ \left(\frac{\beta_1}{2} + 2\beta_2\right) \delta^2 r_e^2 x^2 + O(x^3). \end{aligned} \quad (8.5)$$

Portanto, igualando as equações (8.4) e (8.5) temos,

$$1 - 2x + 3x^2 = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 - (\beta_1 + 2\beta_2)\delta r_e x + \left(\frac{\beta_1}{2} + 2\beta_2\right) \delta^2 r_e^2 x^2. \quad (8.6)$$

Com isso, os valores de  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  que satisfazem a igualdade em (8.6) serão,

$$\beta_0 = 1 + \frac{3}{\delta^2 r_e^2} - \frac{3}{\delta r_e}, \quad \beta_1 = \frac{4}{\delta r_e} - \frac{6}{\delta^2 r_e^2}, \quad \beta_2 = \frac{3}{\delta^2 r_e^2} - \frac{1}{\delta r_e}. \quad (8.7)$$

Portanto, a equação (8.2) ficará,

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - [\beta\beta_1 + 2\mu r_e^2(1 + \epsilon)] \exp(-\delta r_e x) - \beta\beta_2 \exp(-2\delta r_e x) - \beta\beta_0 + \frac{r_e^2}{\alpha^2}(\epsilon^2 - 1) \right] R_1(x) = 0. \quad (8.8)$$

Assim obtemos uma EDO que conseguimos obter a função de onda  $R_1$



que a satisfaz, assim como as autoenergias  $\epsilon$ , pois tal EDO dada em (8.8) é análoga ao do potencial Morse unidimensional na equação de Schrödinger. Desse modo, a função de onda  $R_1(x)$  que satisfaz a EDO dada em (8.8) pode ser obtida fazendo o mapeamento com o caso não-relativístico do potencial Morse resolvido em [136] que é dado por,

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - C^2 e^{-2\theta r} + C(\theta + 2B)e^{-\theta r} + 2E \right\} \Psi = 0, \quad (8.9)$$

onde  $\Psi$  é dado por,

$$\Psi(r) = \left( \frac{2C}{\theta} e^{-\theta r} \right)^{\nu_n} \exp \left( -\frac{C}{\theta} e^{-\theta r} \right) L_n^{\nu_n} \left( \frac{2C}{\theta} e^{-\theta r} \right), \quad (8.10)$$

onde  $L_n^k(x)$  são os polinômios de Laguerre associados, com  $\nu_n = B/\delta - n$  e  $E = -\delta^2(B/\delta - n)^2/2$ . Assim, identificamos no nosso caso,

$$\theta = \delta r_e, \quad C = \sqrt{\beta\beta_2}, \quad B = -\frac{\delta r_e}{2} - \frac{\beta\beta_1}{2\sqrt{\beta\beta_2}} - \frac{\mu r_e^2(1 + \epsilon)}{\sqrt{\beta\beta_2}}. \quad (8.11)$$

Com isso, as autoenergias serão,

$$\epsilon = \pm \sqrt{\zeta \left( \frac{\beta\beta_0}{\delta r_e^2} + \frac{1}{\delta^2 \alpha^2} \right) - \frac{1}{\alpha^2 \delta^2} \left( \frac{\gamma}{\delta r_e} - n \right)^2} \zeta^{-1} + \left( \frac{\gamma}{\delta r_e} - n \right) \times \frac{\mu r_e}{\delta \sqrt{\beta\beta_2}} \zeta^{-1}, \quad (8.12)$$

onde,

$$\zeta = \frac{1}{\alpha^2 \delta^2} + \frac{\mu^2 r_e^2}{\delta^2 \beta \beta_2}, \quad \gamma = -\frac{\delta r_e}{2} - \frac{\beta\beta_1}{2\sqrt{\beta\beta_2}} - \frac{\mu r_e^2}{\sqrt{\beta\beta_2}}. \quad (8.13)$$

Para as autoenergias serem reais o número quântico  $n$  terá que satisfazer

a seguinte condição,

$$-\alpha\delta\sqrt{\zeta\left(\frac{\beta\beta_0}{\delta r_e^2} + \frac{1}{\delta^2\alpha^2}\right)} \leq n - \frac{\gamma}{\delta r_e} \leq \alpha\delta\sqrt{\zeta\left(\frac{\beta\beta_0}{\delta r_e^2} + \frac{1}{\delta^2\alpha^2}\right)}. \quad (8.14)$$

É importante notar também que com o surgimento do potencial tensor efetivo dado por  $A_{ef} = A/r$ , isso faz com que as autoenergias dadas em (8.12) dependam do termo de acoplamento spin-órbita dado por  $\lambda$ . Desse modo, que para cada escolha de  $\lambda$  dado em (2.73) teremos um valor de autoenergia diferente, resultando assim na quebra de degenerescência entre os estados dupletos  $(n, l, l - 1/2)$  e  $(n, l, l + 1/2)$ , fazendo com que seja quebrada a simetria exata de spin. Entretanto, quando fazemos  $A = 0$  eliminamos a dependência do termo  $\lambda$  nas autoenergias, ou seja, retornamos a simetria exata de spin com degenerescência, por exemplo, nos estados dupletos  $(1p_{1/2}, 1p_{3/2})$ , como observamos na figura (8.1) e tabela (H.1) no apêndice H.

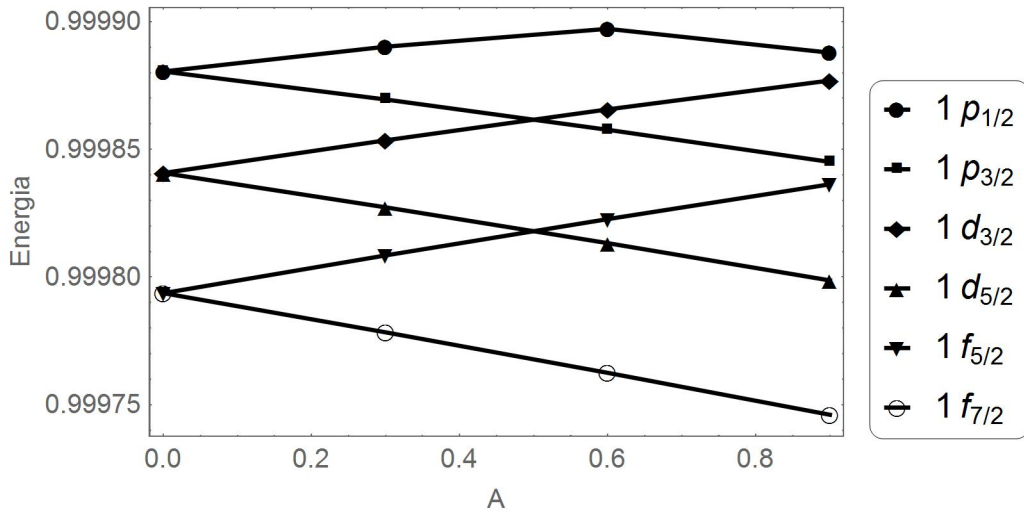


Figura 8.1: Gráficos de alguns espectros de energia para valores diferentes de  $A$ , onde usamos  $\mu = 0.01$ ,  $r_e = 2.40873$  e  $\delta = 0.988879$ . Notamos que para  $A \neq 0$  haverá quebra de degenerescência nos dupletos. Usamos unidades atômicas.

Voltando a função de onda  $R_1$  obtemos,

$$R_1(r) \approx (2se^{-\delta r})^{\nu_n} \exp(-se^{-\delta r}) L_n^{\nu_n}(2se^{-\delta r}), \quad (8.15)$$

com,

$$s = \frac{\sqrt{\beta\beta_2} e^{\delta r_e}}{\delta r_e}, \quad \nu_n = - \left( \frac{\delta r_e}{2} + \frac{\beta\beta_1}{2\sqrt{\beta\beta_2}} + \frac{\mu r_e^2}{\sqrt{\beta\beta_2}} \right) / (\delta r_e) - n, \quad (8.16)$$

onde  $\nu_n \geq 0$ . Finalmente, usando (2.70), a função de onda  $R_2$  será dada por,

$$R_2(r) = \frac{\alpha}{1+\epsilon} \left[ \frac{d}{dr} + \frac{\lambda+A}{r} \right] R_1(r), \quad (8.17)$$

assim, similarmente ao que fizemos em  $1/r^2$ , onde expandimos em torno de  $r_e$  e reescrevendo como exponencial, aqui faremos o mesmo procedimento com o termo  $1/r$ . Então, substituindo  $x = (r - r_e)/r_e$  e expandindo  $1/(1+x)$  em série de Taylor, em torno de  $x \approx 0$  até segunda ordem, obtemos,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_e(1+x)} \approx k_0 + k_1 e^{-\delta r_e x} + k_2 e^{-2\delta r_e x}, \quad (8.18)$$

com,

$$k_0 = 1 + \frac{1}{\delta^2 r_e^2} - \frac{3}{2\delta r_e}, \quad k_1 = \frac{2}{\delta r_e} - \frac{2}{\delta^2 r_e^2}, \quad k_2 = \frac{1}{\delta^2 r_e^2} - \frac{1}{2\delta r_e}, \quad (8.19)$$

assim obtemos,

$$\begin{aligned} R_2(r) \approx & \frac{\alpha}{1+\epsilon} \left[ \left( k_0(\lambda+A) - \delta\nu_n + \left( k_1(\lambda+A) - \frac{\sqrt{\beta\beta_2}}{r_e} \right) e^{-\delta(r-r_e)} \right) \times \right. \\ & L_n^{\nu_n}(2se^{-\delta r}) + k_2(\lambda+A) e^{-2\delta(r-r_e)} L_n^{\nu_n}(2se^{-\delta r}) + 2\delta s e^{-\delta r} \times \\ & \left. L_n^{\nu_n+1}(2se^{-\delta r}) \right] (2se^{-\delta r})^{\nu_n} \exp(se^{-\delta r}). \end{aligned} \quad (8.20)$$

Finalmente, a função de onda espinorial total  $\Psi_c$  para  $r \approx r_e$  será,

$$\Psi_c(r, \theta, \phi) \approx \frac{(1 + \alpha^2 \mu e^{-\delta(r-r_e)})^{-1/2}}{r} \begin{pmatrix} R_{nl}^1(r) \mathcal{Y}_l^{|m|j}(\theta, \phi) \\ i R_{nl}^2(r) \mathcal{Y}_l^{|m|j}(\theta, \phi) \end{pmatrix}. \quad (8.21)$$

Como nos capítulos anteriores, mesmo analisando o sistema de forma aproximada, conseguimos escrever o espinor de Dirac dado em (8.21) na forma  $\Psi^{curvo} = (g_{tt})^{-1/4} \Psi^{plano}$ , onde  $g_{tt} = (1 + \alpha^2 \mu \exp[-\delta(r - r_e)])^2$  é o primeiro elemento de linha dado em (8.22) e  $\Psi^{plano}$  é o espinor de Dirac em espaço-tempo plano do potencial tipo-Morse com massa efetiva dada por  $m(r) = 1 + \alpha^2 \mu \exp[-\delta(r - r_e)]$ , campo EM  $A'_\mu = (2\mu \exp[-\delta(r - r_e)], cA/r, 0, 0)$  e simetria exata de spin.

Um detalhe importante, é que se pelo fato de termos obtido esses resultados para um caso aproximado ( $r \approx r_e$ ), pode ter havido perda de generalidade na análise da quebra de simetria por conta do potencial tensor. Mas, é interessante notar que independente da forma que fizemos a expansão do termo  $1/(1+x)^2$  em (8.4), ou seja, independente se expandirmos em torno de  $x \approx 0$  ou não, e formos até segunda ordem ou superior, o que irá mudar será somente a quantidade e os valores dos parâmetros que precisarão ser ajustados, que no nosso caso foram chamados de  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$ . De fato, vemos que a contribuição do potencial tensor nas autoenergias se dá por conta do parâmetro  $\beta$  na equação (8.8), com isso conclui-se que haverá quebra de simetria exata de spin para todo domínio de  $r$  neste sistema, sem perda de generalidade.

Em resumo, obtemos o espinor de Dirac de maneira aproximada dado em (8.21), assim como suas autoenergias dadas em (8.12), para os potenciais escalar e vetor do tipo-Morse e potencial tensor Hellmann com simetria exata

de spin em espaço-tempo curvo cujo elemento de linha é dado por,

$$ds^2 = (1 + \alpha^2 \mu e^{-\delta(r-r_e)})^2 (dt^2 - dr^2) - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (8.22)$$

e a curvatura escalar de (8.22) é dada por,

$$R = \frac{2\alpha^4 \delta^2 \mu^2 e^{-2\delta(r-r_e)}}{(1 + \alpha^2 \mu e^{-\delta(r-r_e)})^4} - \frac{2\alpha^2 \delta^2 \mu e^{-\delta(r-r_e)}}{(1 + \alpha^2 \mu e^{-\delta(r-r_e)})^3} + \frac{2}{r^2} - 2 \left( \frac{1}{r + \alpha^2 \mu r e^{-\delta(r-r_e)}} \right)^2, \quad (8.23)$$

portanto temos que para  $r \rightarrow 0$  implica em  $R \rightarrow \infty$ , logo temos uma curvatura infinita, assim temos uma possível singularidade. Quando  $r \rightarrow \infty$  implica que  $R \rightarrow 0$ , assim obtemos uma curvatura nula, logo o espaço-tempo será plano neste limite.

## 8.2 Simetria exata de pseudo-spin

Neste segundo caso, analisaremos o sistema com simetria exata de pseudo-spin, para isso vamos considerar que  $\Sigma(r) = 0$ ,  $\Delta(r) = 2V(r) = 2\mu \exp[-\delta(r-r_e)]$  e  $A(r) = A/r + \alpha^2 \lambda \mu \exp[-\delta(r-r_e)]/r$ , onde  $A$  e  $\mu$  são constantes reais. Novamente, o potencial tensor efetivo será  $A_{ef}(r) = A/r$ . Logo, da equação (2.76) obtemos,

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\lambda(\lambda+1) + 2A\lambda - A + A^2}{r^2} + 2\mu(1-\epsilon)e^{-\delta(r-r_e)} + \frac{\epsilon^2 - 1}{\alpha^2} \right] R_2(r) = 0, \quad (8.24)$$

fazendo a mudança de variável  $x = (r-r_e)/r_e$  em (8.24) temos,

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\beta}{(1+x)^2} + 2\mu(1-\epsilon)e^{-\delta r_e x} + \frac{r_e^2}{\alpha^2} (\epsilon^2 - 1) \right] R_2(x) = 0, \quad (8.25)$$

com  $\beta = \tilde{l}(\tilde{l} + 1) + 2A\lambda - A + A^2$ . Assim como no caso anterior, vamos usar a aproximação Pekeris no termo centrífugo  $1/(1+x)^2$  para reescrever a EDO em (8.25). Portanto, usando as equações (8.4) e (8.6), a equação (8.25) ficará,

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} - (\beta\beta_1 - 2\mu r_e^2(1-\epsilon))e^{-\delta r_e x} - \beta\beta_2 e^{-2\delta r_e x} - \beta\beta_0 \frac{r_e^2}{\alpha^2}(\epsilon^2 - 1) \right\} R_2(x) = 0, \quad (8.26)$$

desse modo fazendo um mapeamento da equação (8.26) com a equação (8.9) obtemos,

$$\theta = \delta r_e, \quad C = \sqrt{\beta\beta_2}, \quad B = -\frac{\delta r_e}{2} - \frac{\beta\beta_1}{2\sqrt{\beta\beta_2}} + \frac{\mu r_e^2(1-\epsilon)}{\sqrt{\beta\beta_2}}. \quad (8.27)$$

Com isso, as autoenergias serão,

$$\epsilon_{\tilde{n}\tilde{l}} = \pm \sqrt{\zeta \left( \frac{\beta\beta_0}{\delta r_e^2} + \frac{1}{\delta^2 \alpha^2} \right) - \frac{1}{\alpha^2 \delta^2} \left( \frac{\gamma}{\delta r_e} - \tilde{n} \right)^2} \zeta^{-1} + \left( \frac{\gamma}{\delta r_e} - \tilde{n} \right) \times \frac{\mu r_e}{\delta \sqrt{\beta\beta_2}} \zeta^{-1}, \quad (8.28)$$

onde,

$$\zeta = \frac{1}{\alpha^2 \delta^2} + \frac{\mu^2 r_e^2}{\delta^2 \beta\beta_2}, \quad \gamma = -\frac{\delta r_e}{2} - \frac{\beta\beta_1}{2\sqrt{\beta\beta_2}} + \frac{\mu r_e^2}{\sqrt{\beta\beta_2}}. \quad (8.29)$$

Para as autoenergias serem reais o número quântico  $n$  terá que satisfazer a condição abaixo,

$$-\alpha\delta \sqrt{\zeta \left( \frac{\beta\beta_0}{\delta r_e^2} + \frac{1}{\delta^2 \alpha^2} \right)} \leq \tilde{n} - \frac{\gamma}{\delta r_e} \leq \alpha\delta \sqrt{\zeta \left( \frac{\beta\beta_0}{\delta r_e^2} + \frac{1}{\delta^2 \alpha^2} \right)}. \quad (8.30)$$

Observamos, assim como no caso anterior, que surge um potencial tensor efetivo dado por  $A_{ef} = A/r$ , isso faz com que as autoenergias dadas em (8.28)

dependam do acoplamento spin-órbita dado por  $\lambda$ , e como  $\lambda$  possui dois valores possíveis, para cada um desses valores teremos um valor de energia diferente resultando assim na quebra de degenerescência entre os estados dupletos  $(\tilde{n}, \tilde{l}, \tilde{l} - 1/2)$  e  $(\tilde{n}, \tilde{l}, \tilde{l} + 1/2)$ , fazendo com que seja quebrada a simetria exata de pseudo-spin. Contudo, novamente quando fazmos  $A = 0$  eliminamos a dependência do termo  $\lambda$  nas autoenergias, ou seja, retorna a simetria exata de pseudo-spin com degenerescência, por exemplo, nos estados  $(1\tilde{p}_{1/2}, 1\tilde{p}_{3/2})$ , como notamos na figura (8.2) e tabela (H.2) no apêndice H.

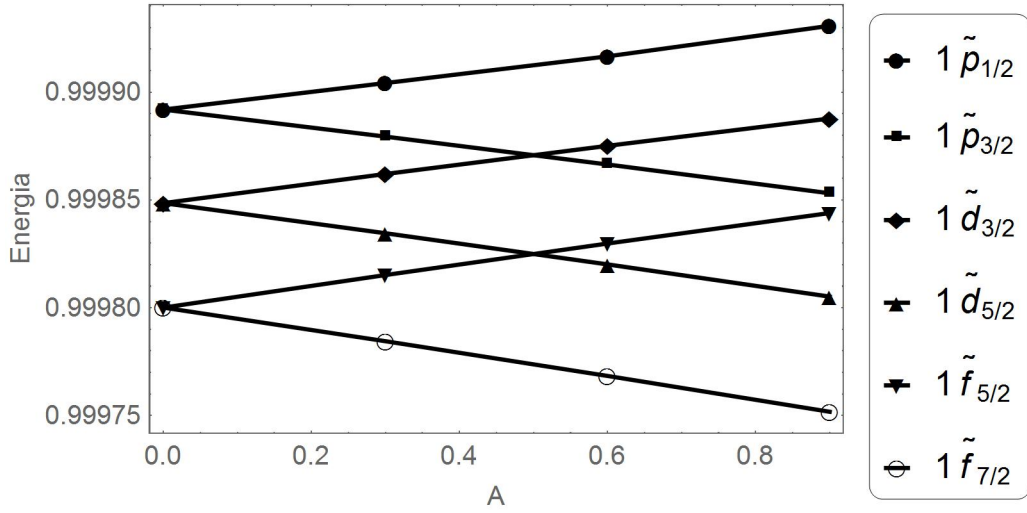


Figura 8.2: Gráficos de alguns espectros de energia para valores diferentes de  $A$ , onde usamos  $\mu = 0.01$ ,  $r_e = 2.40873$  e  $\delta = 0.988879$ . Notamos que para  $A \neq 0$  haverá quebra de degenerescência nos dupletos. Usamos unidades atômicas.

Voltando a função de onda  $R_2$  e usando (8.10) obtemos,

$$R_{\tilde{n}\tilde{l}}^2(r) \approx (2se^{-\delta r})^{\nu_{\tilde{n}}} \exp(-se^{-\delta r}) L_{\tilde{n}}^{\nu_{\tilde{n}}}(2se^{-\delta r}), \quad (8.31)$$

onde,

$$s = \frac{\sqrt{\beta\beta_2}e^{\delta r_e}}{\delta r_e}, \quad \nu_{\tilde{n}} = - \left( \frac{\delta r_e}{2} + \frac{\beta\beta_1}{2\sqrt{\beta\beta_2}} - \frac{\mu r_e^2}{\sqrt{\beta\beta_2}} \right) / (\delta r_e) - \tilde{n}, \quad (8.32)$$

com  $\nu_{\tilde{n}} \geq 0$ . Finalmente, usando a equação (2.74), a função de onda  $R_1$  será dada por,

$$R_{\tilde{n}i}^1(r) = \frac{\alpha}{1-\epsilon} \left[ \frac{d}{dr} - \frac{\lambda + A}{r} \right] R_{\tilde{n}i}^2, \quad (8.33)$$

efetuando a mudança de variável  $x = (r - r_e)/r_e$  e usando novamente a aproximação Pekeris no termo  $1/x$  dado em (8.18), obtemos,

$$\begin{aligned} R_{\tilde{n}i}^1(r) \approx & \frac{\alpha}{\epsilon - 1} \left[ \left( k_0(\lambda + A) + \delta\nu_{\tilde{n}} + \left( k_1(\lambda + A) - \frac{\sqrt{\beta\beta_2}}{r_e} \right) e^{-\delta(r-r_e)} \right) \times \right. \\ & L_{\tilde{n}}^{\nu_{\tilde{n}}} (2se^{-\delta r}) + k_2(\lambda + A)e^{-2\delta(r-r_e)} L_{\tilde{n}}^{\nu_{\tilde{n}}} (2se^{-\delta r}) - 2\delta se^{-\delta r} \times \\ & \left. L_{\tilde{n}}^{\nu_{\tilde{n}}+1} (2se^{-\delta r}) \right] (2se^{-\delta r})^{\nu_{\tilde{n}}} \exp(se^{-\delta r}). \end{aligned} \quad (8.34)$$

Com isso, finalmente obtemos a função de onda espinorial total  $\Psi_c$  para  $r \approx r_e$ ,

$$\Psi_c(r, \theta, \phi) \approx \frac{(1 - \alpha^2 \mu e^{-\delta(r-r_e)})^{-1/2}}{r} \begin{pmatrix} R_{\tilde{n}i}^1(r) \mathcal{Y}_l^{|m|j}(\theta, \phi) \\ i R_{\tilde{n}i}^2(r) \mathcal{Y}_i^{|m|j}(\theta, \phi) \end{pmatrix}. \quad (8.35)$$

Novamente, o espinor de Dirac em (8.35) pode ser escrito como  $\Psi^{curvo} = (g_{tt})^{-1/4} \Psi^{plano}$ , onde  $g_{tt} = (1 - \alpha^2 \mu \exp[-\delta(r - r_e)])^2$  é o primeiro termo do elemento de linha dado em (8.36) e  $\Psi^{plano}$  é o espinor de Dirac em espaço-tempo plano para a partícula com massa efetiva dada por  $m(r) = 1 - \alpha^2 \mu \exp[-\delta(r - r_e)]$ , campo EM  $A'_\mu = (\mu \exp[-\delta(r - r_e)], cA/r, 0, 0)$  e simetria exata de pseudo-spin.

Notamos, assim como na seção anterior, que o sistema analisado em espaço-tempo curvo é tal que com o acoplamento do campo EM com o elemento de linha dado em (8.36) caímos num problema análogo em espaço-tempo plano para as funções de onda  $R_1$  e  $R_2$  de uma partícula com massa dependente da posição dada por  $m(r) = 1 - \alpha^2 \mu \exp[-\delta(r - r_e)]$ , poten-



cial vetor  $V(r) = \mu \exp[-\delta(r - r_e)]$  e potencial tensor dado por  $A/r$  com simetria exata de pseudo-spin. Seguindo a mesma análise do caso anterior, é importante notar que novamente a contribuição do potencial tensor nas autoenergias se dá por conta do parâmetro  $\beta$  na equação (8.26), com isso conclui-se que haverá quebra de simetria exata de pseudo-spin para todo domínio de  $r$  neste sistema sem perda de generalidade devido a aproximação utilizada.

Em resumo, calculamos de maneira aproximada a função de onda espinorial dada em (8.35) e suas respectivas autoenergias dadas em (8.28) da equação de Dirac com os potenciais escalar e vetor tipo-Morse e potencial tensor Hellmann com simetria exata de pseudo-spin em espaço-tempo curvo cujo elemento de linha é dado por,

$$ds^2 = (1 - \alpha^2 \mu e^{-\delta(r-r_e)})^2 (dt^2 - dr^2) - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (8.36)$$

A curvatura escalar de (8.36) é dado por,

$$R = \frac{2\alpha^4 \delta^2 \mu^2 e^{-2\delta(r-r_e)}}{(1 - \alpha^2 \mu e^{-\delta(r-r_e)})^4} + \frac{2\alpha^2 \delta^2 \mu e^{-\delta(r-r_e)}}{(1 - \alpha^2 \mu e^{-\delta(r-r_e)})^3} + \frac{2}{r^2} - 2 \left( \frac{1}{r - \alpha^2 \mu r e^{-\delta(r-r_e)}} \right)^2, \quad (8.37)$$

assim temos que para  $r \rightarrow 0$  implica em  $R \rightarrow \infty$ , logo a curvatura é infinita, tendo uma possível singularidade. Quando  $r \rightarrow \infty$  implica que  $R \rightarrow 0$ , assim obtemos uma curvatura nula, logo o espaço-tempo irá ser plano neste limite.

Analisamos neste capítulo o sistema com potencial escalar e vetor tipo-Morse com potencial tensor Hellmann com simetrias exatas de spin e pseudo-spin, para isso consideramos duas formas de acoplamento do campo EM com o elemento de linha. Para isso, fixamos o potencial vetor e consideramos

dois potenciais tensores  $A(r)$  diferentes, assim como dois elementos de linha, com  $U(r)$  diferentes. Desse modo, para combinação dos dois campos EM com os dois valores de  $U(r)$ , as simetrias exatas de spin e pseudo-spin se manifestaram. Conseguimos obter de maneira aproximada o espinor de Dirac e suas autoenergias para o potencial escalar e vetor tipo-Morse com potencial tensor Hellmann em espaço-tempo curvo para ambas as simetrias. Observamos que ambas as simetrias foram quebradas devido ao potencial tensor efetivo  $A/r$ , porém quando fazemos  $A = 0$ , retornamos as simetrias como notamos, por exemplo, nas figuras (8.1) e (8.2). Tal análise foi feita para o caso aproximado para  $r \approx r_e$ , mas como observamos, não houve perda de generalidade, ou seja, haverá quebra de simetria devido ao potencial tensor efetivo para todo domínio de  $r$ .

## Capítulo 9

### Conclusões e projetos futuros

Resolvemos a equação de Dirac simetricamente esférica com campo EM externo, sem gauge fixo, dado por  $A_\mu = (V(r), cA_r(r), 0, 0)$  em espaço-tempo curvo considerando um elemento de linha escrito em termos de duas funções arbitrárias  $f(r)$  e  $g(r)$ , ou seja,  $ds^2 = e^{2f(r)} dt^2 - e^{2g(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$ . Devido a simetria esférica e seguindo a abordagem usual, no capítulo (2) desacoplamos as equações radial e angular e depois resolvemos a equação angular de maneira exata obtendo as funções angulares de spin. Feito isso, nos restou calcular somente as funções de onda radiais  $r_1(r)$  e  $r_2(r)$ , que supondo um *ansatz* para ambas, chegamos em um problema para encontrar as novas funções de onda radiais  $R_1(r)$  e  $R_2(r)$ . Verificamos duas formas de analisar as funções de onda radiais: primeiro desacoplamos  $R_1$  e  $R_2$  através da abordagem de uma transformação unitária e auxílio de um potencial tensor, depois desacoplamos usando as simetrias exatas de spin e pseudo-spin. No capítulo (3), fizemos algumas aplicações para a primeira abordagem de desacoplamento citado acima. Assim, analisamos e obtivemos o espinor de maneira exata para três diferentes sistemas físicos: átomo de Hidrogênio, Dirac-Morse, potencial radial linear. Nos capítulos posteriores, analisamos

alguns sistemas físicos com simetrias exatas de spin e pseudo-spin, de modo que encontramos as funções de onda radiais  $R_1$  e  $R_2$  de maneiras diferentes: de maneira exata nos capítulos (4), que foi publicado em [148], e (5), de maneira quase-exata nos capítulos (6) e (7) e de maneira aproximada no capítulo (8). Em todos os casos analisados, com e sem simetrias, notamos que os espinores de Dirac em espaço-tempos curvo e plano se conectam através do primeiro termo do elemento de linha  $g_{tt}$  da seguinte forma:  $\Psi^{curvo} = (g_{tt})^{-1/4}\Psi^{plano}$ . De modo que, os espinores em espaço-tempos plano foram interpretados como sistemas com (ou sem, como no capítulo 3) simetrias exatas de spin e pseudo-spin cuja partícula possui massa dependente da posição dada por  $m(r) = (1 + \alpha^2 U(r))$ , com  $U(r)$  vindo da curvatura do espaço e campo EM  $A'_\mu = (V(r), cA_{ef}(r), 0, 0)$ . Outra questão interessante, é que o fator  $g_{tt}$  está relacionado à velocidade de Fermi, que por sua vez é proporcional a  $(g_{tt})^{1/2}$ , isso é bem conhecido para a luz, que se propaga em uma métrica óptica como em um meio que tem um índice de refração igual a  $(g_{tt})^{1/2}$ . Em outras palavras, os espinores Dirac em espaço-tempos curvo e plano são conectados via velocidade de Fermi ou pelo índice de refração da luz em uma métrica óptica. Essa abordagem de relacionar sistemas em espaço-tempos curvo e plano através da velocidade de Fermi é explorada por meio de métricas ópticas nos trabalhos [54, 127, 128, 56, 134], onde a contribuição da curvatura vem exclusivamente de  $g_{tt}$ . Em princípio, esses sistemas analisados em espaço-tempo é curvo poderiam ser realizados em laboratório usando átomos ultrafrios. Outro resultado importante, foi que nos capítulos em que analisamos sistemas com simetrias exatas de spin e pseudo-spin, observamos que ambas as simetrias são quebradas em todos os casos por conta da curvatura e do campo EM, pois esse acoplamento produz um potencial tensor efetivo, que é dado por  $A_{ef}(r) = \lambda\alpha^2 U(r)/r + A(r)$ . Tal potencial tensor

efetivo fez com que as autoenergias dos sistemas dependessem do parâmetro de acoplamento spin-órbita  $\lambda$ , que, como sabemos, pode ter valor positivo ou negativo, sendo assim a degenerescência entre  $\epsilon_{\lambda < 0}$  e  $\epsilon_{\lambda > 0}$ , nos estados dupletos, foram quebradas. Entretanto, verificamos nos capítulos de (4) a (8), que para o caso particular quando ajustamos os parâmetros de acoplamento do potencial tensor efetivo, eliminamos a dependência de  $\lambda$  nas autoenergias. Isso fez com que  $\epsilon_{\lambda < 0}$  e  $\epsilon_{\lambda > 0}$  fossem degenerados e conseqüentemente retornamos as simetrias exatas de spin e pseudo-spin.

Concluimos com base nos resultados obtidos que, quando temos o acoplamento do campo EM dado por  $A_\mu = (V(r), cA(r), 0, 0)$  com a equação de Dirac em espaço-tempo curvo cujo elemento de linha é  $ds^2 = (1 + \alpha^2 U(r))^2 (dt^2 - dr^2) - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$  e  $A(r) = -\lambda \alpha^2 U(r)/r$ , sempre haverá manifestação das simetrias exatas de spin e pseudo-spin, quando  $V(r) - U(r) = 0$  e  $V(r) + U(r) = 0$ , respectivamente. Entretanto, quando  $A(r) \neq -\lambda \alpha^2 U(r)/r$ , não há manifestação das simetrias, pois potenciais tensores fazem com que as degenerescências de energia dos estados dupletos, com relação ao spin, sejam quebradas, fazendo com que, conseqüentemente, sejam quebradas ambas as simetrias.

Portanto, à princípio teoricamente, as simetrias exatas de spin e pseudo-spin, podem se manifestar fora do núcleo atômico em sistemas dinâmicos com acoplamento de um campo EM com espaço-tempo curvo. Assim podemos, possivelmente, simular e analisar em laboratório estruturas nucleares, sem necessariamente precisar de um núcleo atômico.

Concluimos também que, com o acoplamento do campo EM e elemento de linha considerado neste trabalho, os espinores de Dirac em espaço-tempos curvo e plano estão conectados através de  $g_{tt}$  da seguinte forma:  $\Psi^{curvo} = (g_{tt})^{-1/4} \Psi^{plano}$ . Assim, tais simulações ou análises de ambas as simetrias, po-

deriam ser feitas, por exemplo, utilizando dinâmicas de átomos ultrafrios em métricas ópticas através da velocidade de Fermi ou índice de refração da luz, que são dados por  $(g_{tt})^{1/2}$ . As estruturas nucleares que poderiam ser simuladas e analisadas dessa forma podem ser, por exemplo: super-deformação nuclear [16, 17], bandas nucleares idênticas [17, 18, 19], duplo decaimento beta [20, 21], entre outros fenômenos nucleares [22, 23, 24, 25, 26, 27, 28]. As publicações dos resultados dos capítulos (3) e (4) anteciparam novas publicações referentes aos resultados obtidos nos capítulos de (5) ao (8).

Como projetos futuros, tem-se o objetivo de analisar outros sistemas físicos para as simetrias exatas de spin e pseudo-spin com o mesmo tipo de elemento de linha considerado aqui com  $f = g$ . Temos também o objetivo de analisar a equação de Dirac com essa mesma configuração, porém com campo EM com gauge fixo, por exemplo, no gauge de Lorentz. Assim como, analisar as simetrias exatas de spin e pseudo-spin, para sistemas onde o campo EM não é simetricamente esférico, quando por exemplo  $A_r = A_r(\theta, \phi)$  e  $A_\theta$  e/ou  $A_\phi$  são diferentes de zero.

# Apêndice A

## Identidades úteis dos polinômios de Jacobi e Legendre associados

Neste apêndice listamos abaixo algumas identidades úteis dos polinômios de Jacobi, assim como sua relação com os polinômios de Legendre associados que utilizamos no capítulo (2) para calcular a componente angular da equação de Dirac. Assim, sejam as identidades dos polinômios de Jacobi [124],

$$(1+x)P_n^{(\alpha, \beta+1)}(x) - (1-x)P_n^{(\alpha+1, \beta)}(x) = 2 \left[ (\beta - \alpha)P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + 2(n+1)P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) \right] (2n + \alpha + \beta + 1)^{-1}, \quad (\text{A.1})$$

$$(1-x)P_n^{(\alpha+1, \beta)}(x) + (1+x)P_n^{(\alpha, \beta+1)}(x) = 2P_n^{(\alpha, \beta)}(x), \quad (\text{A.2})$$

$$P_n^{(\alpha, \beta-1)}(x) + P_n^{(\alpha-1, \beta)}(x) = \frac{2(\alpha + \beta + n)}{\alpha + \beta + 2n} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + \frac{(\alpha - \beta)}{\alpha + \beta + 2n} P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x), \quad (\text{A.3})$$

$$P_n^{(\alpha, \beta-1)}(x) - P_n^{(\alpha-1, \beta)}(x) = P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x). \quad (\text{A.4})$$

Ambos os polinômios, de Jacobi e Legendre associados, são relacionados via,

$$P_{l-m}^{(m,m)}(x) = \frac{2^m l!}{(l+m)!} (1-x^2)^{-m/2} P_l^m(x), \quad (\text{A.5})$$

onde  $P_l^m(x)$  são os polinômios de Legendre associados. E finalmente, a relação entre os harmônicos esféricos e  $P_l^m(x)$  é,

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}. \quad (\text{A.6})$$



## Apêndice B

### Cálculos das constantes de normalização do capítulo 3

Neste apêndice mostramos explicitamente como podemos calcular as constantes de normalização para as funções de onda espinorial que estudamos no capítulo (3) deste trabalho. A condição de normalização para cada sistema é dado por,

$$\int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\Psi_c(r, \theta, \phi)|^2 r^2 (1 + \alpha^2 U(r))^2 \sin \theta \, dr d\theta d\phi = 1. \quad (\text{B.1})$$

Uma vez que as integrais em  $\theta$  e  $\phi$  são unitárias impomos,

$$N^2 \int_0^\infty (|\rho_1|^2 + |\rho_2|^2) (1 + \alpha^2 U(r)) dr = 1, \quad (\text{B.2})$$

onde  $N$  deve ser calculado.

## B.1 Átomo de Hidrogênio

Usando (B.2), (3.7), (3.8),  $U(r) = b/r$  e as integrais 17 e 19 da seção 2.19.14 de [155] obtemos,

$$\begin{aligned}
 N = & \frac{2(C + \epsilon)}{\alpha(2\rho)^{-\gamma-1/2}} \left[ \frac{(C + \epsilon)^2}{\alpha^2 \rho^2 n!} (n + 2\gamma + 1)! (2n + 2\gamma + 2 + 2\alpha^2 b\rho) + \right. \\
 & \left(1 - \frac{S}{\alpha\rho}\right)^2 \frac{(2\gamma + n + 1)^2}{n!} ((2\gamma + n)! + 2\alpha^2 b\rho(2\gamma + 1)_n (2\gamma - 1)!) + \\
 & \left(1 + \frac{S}{\alpha\rho}\right)^2 \frac{(n + 1)}{n!} ((2\gamma + n + 1)! + 2\alpha^2 b\rho(2\gamma + 1)_{n+1} (2\gamma - 1)!) + \\
 & \left. 4\alpha^2 b\rho \left(1 - \frac{S^2}{\alpha^2 \rho^2}\right) (1 + 2\gamma)_n \frac{(n + 1)}{n!} (2\gamma + n + 1)(2\gamma - 1)! \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{B.3})
 \end{aligned}$$

onde  $(x)_n$  é o simbolo de Pochhammer que é definido por  $(x)_n = \frac{\Gamma(x + n)}{\Gamma(x)}$ .

## B.2 Potencial Dirac-Morse

Embora o cálculo da constante de normalização anterior tenha sido direto, para as funções de onda do potencial Dirac-Morse, algumas integrais que surgem no cálculo não são tabeladas. Eles contêm produtos de polinômios de Laguerre associados com exponenciais em seu argumento.

Usando (B.2), (3.19) e (3.20),  $U(r) = be^{-\delta r}$  obtemos,

$$\begin{aligned}
 N = & \left[ \left(1 + \frac{4\alpha^2 a^2}{\delta^2 \mu^2}\right) \{I_{n,n}(2\nu_n, 2\nu_n, 2\nu_n) + \frac{\alpha^2 b}{\mu} I_{n,n}(2\nu_n - 1, 2\nu_n, 2\nu_n)\} - \right. \\
 & \frac{4\alpha^2 a(n + 2\nu_n)}{\mu(C + \epsilon)} \{I_{n,n-1}(2\nu_n, 2\nu_n, 2\nu_n) + \frac{\alpha^2 b}{\mu} I_{n,n-1}(2\nu_n - 1, 2\nu_n, 2\nu_n)\} \\
 & + \frac{\alpha^2 \delta^2}{(C + \epsilon)^2} (n + 2\nu_n)^2 I_{n-1,n-1}(2\nu_n, 2\nu_n, 2\nu_n) + \frac{\alpha^2 \delta^2}{(C + \epsilon)^2} (n + 2\nu_n)^2 \times \\
 & \left. \frac{\alpha^2 b}{\mu} I_{n-1,n-1}(2\nu_n - 1, 2\nu_n, 2\nu_n) \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.4})
 \end{aligned}$$

onde  $I_{m,n}$  é dado por,

$$I_{m,n}(\alpha, \beta, \gamma) = \int_0^\infty (\mu e^{-\delta r})^\alpha \exp[-\mu e^{-\delta r}] L_m^\beta(\mu e^{-\delta r}) L_n^\gamma(\mu e^{-\delta r}) dr, \quad (\text{B.5})$$

que pode ser calculado usando a representação em série dos polinômios de Laguerre associados [156],

$$L_n^k = \sum_{i=0}^n \binom{k+n}{n-i} \frac{(-x)^i}{i!}, \quad (\text{B.6})$$

substituindo a série acima em (B.5) temos,

$$I_{m,n}(\alpha, \beta, \gamma) = \mu^\alpha \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^\infty \frac{(-\mu)^{k+i+j}}{i!j!k!} \binom{\beta+m}{m-i} \binom{\gamma+n}{n-j} \times \int_0^\infty \exp[-\delta(\alpha+k+i+j)r] dr, \quad (\text{B.7})$$

assim obtemos o resultado,

$$I_{m,n}(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\mu^\alpha}{\delta} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^\infty \frac{(-\mu)^{k+i+j}}{i!j!k!} \binom{\beta+m}{m-i} \binom{\gamma+n}{n-j} \times (\alpha+k+i+j)^{-1}, \quad (\text{B.8})$$

que substituído em (B.4) produz um resultado exato para  $N$  como função dos números quânticos da função de onda espinorial.

### B.3 Potencial radial linear

Para realizar o cálculo da constante de normalização do último sistema estudado no capítulo (3)- um férmion interagindo com um potencial linear radial - seguimos a mesma metodologia das seções anteriores. Usando (B.2), (3.34),

(3.35) e  $U(r) = br$  obtemos,

$$\begin{aligned}
N = & \left[ \left( 1 + \frac{\alpha^2 \beta^2}{(C + \epsilon)^2} \right) \{ (1 - \alpha b^2 z_0) \mathcal{J}_{n,n}(z_0, 0, \sqrt{k}) + \alpha^2 b \mathcal{J}_{n,n}(z_0, 1, \sqrt{k}) \} \right. \\
& + \frac{2\beta \alpha^2 \sqrt{k}}{(C + \epsilon)^2} \{ (1 - \alpha b^2 z_0) \mathcal{J}_{n,n+1}(z_0, 0, \sqrt{k}) + \alpha^2 b \mathcal{J}_{n,n+1}(z_0, 1, \sqrt{k}) \} + \\
& \left. \frac{\alpha^2 \sqrt{k}}{(C + \epsilon)^2} \{ (1 - \alpha b^2 z_0) \mathcal{J}_{n+1,n+1}(z_0, 0, \sqrt{k}) + \alpha^2 b \mathcal{J}_{n+1,n+1}(z_0, 1, \sqrt{k}) \} \right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{B.9}
\end{aligned}$$

com  $z_0 = (b + \epsilon a)/k^2$  e  $\mathcal{J}_{m,n}$  é obtido substituindo  $z = r + (b + \epsilon a)/k^2$ , assim usando (B.2) escrevemos,

$$\mathcal{J}_{m,n}(z_0, b, c) = \int_{z_0}^{\infty} z^b H_n(cz) H_m(cz) \exp(-c^2 z^2) dz, \tag{B.10}$$

usando a representação em série de potência dos polinômios de Hermite [124],

$$H_k(x) = k! \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(-1)^i}{i!(k-2i)!} (2x)^{k-2i}, \tag{B.11}$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{m,n}(z_0, b, c) = & m!n! \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{(-1)^{i+j} (2c)^{m+n-2j-2i}}{i!j!(n-2i)!(m-2j)!} \times \\
& \int_{z_0}^{\infty} z^{b+n+m-2i-2j} \exp(-c^2 z^2) dz, \tag{B.12}
\end{aligned}$$

usando o resultado número 2.33.10 da referência [156] obtemos  $\mathcal{J}_{m,n}$ ,

$$\mathcal{J}_{m,n}(z_0, b, c) = \frac{n!m!2^{n+m-1}}{c^{b+1}} \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{(-4)^{-i-j}}{i!j!(n-2i)!(m-2j)!} \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}, c^2 z_0^2\right), \tag{B.13}$$

onde  $\gamma = b + m + n - 2i - 2j + 1$  e a função gamma incompleta  $\Gamma(b, a)$  é dada por,

$$\Gamma(b, a) = \int_a^{\infty} t^{b-1} e^{-t} dt. \quad (\text{B.14})$$

# Apêndice C

## Geodésica radial em espaço-tempo curvo

Nesta seção calculamos a geodésica radial em espaço-tempo curvo aplicada no capítulo (3). Portanto, seja a geodésica em espaço-tempo curvo [57] dada por,

$$\frac{d^2 x^\lambda}{dq^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{dq} \frac{dx^\nu}{dq} = 0, \quad (\text{C.1})$$

onde  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  é o símbolo de Christoffel e  $q$  é o fator de parametrização da métrica. Considerando um espaço-tempo, cujo elemento de linha é do tipo  $ds^2 = w(r)(dt^2 - dr^2) - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$ , e usando os valores  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  para este elemento de linha, (C.1) será,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\theta}{dq^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{dq} \frac{dr}{dq} - \sin\theta \cos\theta \left( \frac{d\phi}{dq} \right)^2 = 0 \\ \frac{d^2\phi}{dq^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dq} \frac{dr}{dq} + 2 \cot\theta \frac{d\phi}{dq} \frac{d\theta}{dq} = 0 \\ \frac{d^2t}{dq^2} + \frac{1}{w} \frac{dw}{dr} \frac{dt}{dq} \frac{dr}{dq} = 0 \\ \frac{d^2r}{dq^2} + \frac{1}{2w} \frac{dw}{dr} \left( \frac{dr}{dq} \right)^2 - \frac{r}{w} \left( \frac{d\theta}{dq} \right)^2 - \frac{r \sin^2\theta}{w} \left( \frac{d\phi}{dq} \right)^2 + \\ \frac{c^2}{2w} \frac{dw}{dr} \left( \frac{dt}{dq} \right)^2 = 0 \end{array} \right. \quad . \quad (C.2)$$

Um caso particular e interessante que vamos analisar é a geodésica radial, onde o momento angular orbital  $L = 0$ , isto implica que  $\theta$  e  $\phi$  são constantes. Assim  $d\theta/dq = d\phi/dq = 0$ , então (C.2) pode ser escrito como,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dt}{dq} = \frac{1}{w} \\ \frac{d^2r}{dq^2} + \frac{1}{2w} \frac{dw}{dr} \left( \frac{dr}{dq} \right)^2 + \frac{c^2}{2w^3} \frac{dw}{dr} = 0 \end{array} \right. \quad . \quad (C.3)$$

Resolvendo este sistema de equações numericamente através do programa *Mathematica*, obtemos a geodésica  $t(q)$  e  $r(q)$  para os três sistemas estudados no capítulo (3). Em todos os casos usamos as seguintes condições iniciais:  $t(0) = 0$ ,  $r(0) = 0.01$ ,  $r'(0) = 0.5$  para  $q \in (0, 1)$ . Na figura (C.1), apresentamos as geodésicas para o átomo de Hidrogênio comparando os resultados nos espaço-tempos curvo e plano. Note que o comportamento de  $r(q)$  muda completamente de  $b = 0$  (plano) para  $b \neq 0$  (curvo) devido a curvatura do espaço se afastando da origem em ( $b = 1$ ) e quase constante em ( $b = 0$ ). Por

outro lado,  $t(q)$  tem exatamente o mesmo comportamento para os espaço-tempos curvo e plano.

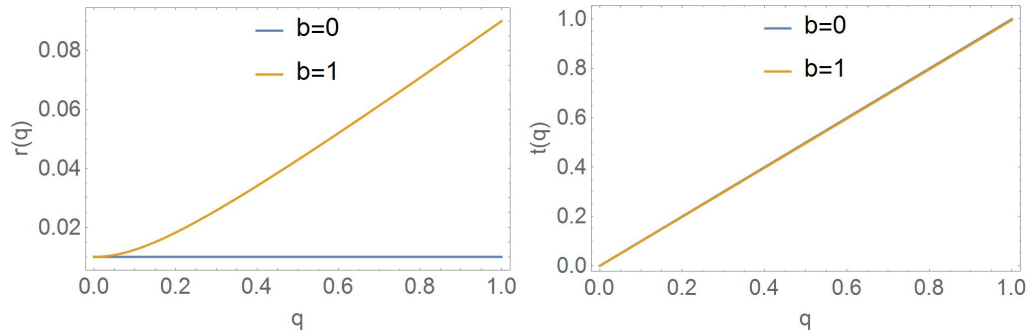


Figura C.1: Gráficos das geodésicas radiais do elemento de linha dado em (3.10) onde a figura na esquerda mostra o comportamento de  $r(q)$  em espaço-tempo curvo ( $b = 1$ ) com o espaço-tempo plano ( $b = 0$ ). Na figura da direita plotamos  $t(q)$  e ambas as curvas, calculadas com parâmetros  $b = 0$  e  $b = 1$ , estão sobrepostas.

Na figura (C.2), traçamos as geodésicas do sistema Dirac-Morse. Observamos que ambas as curvas  $r(q)$  estão muito próximas até  $q \approx 0.3$  e então elas se separam. A geodésica para  $b \neq 0$  se torna maior que sua contraparte em espaço-tempo plano. Na figura da direita, mostramos o  $t(q)$  e as duas curvas, como no caso anterior, são sobrepostas.



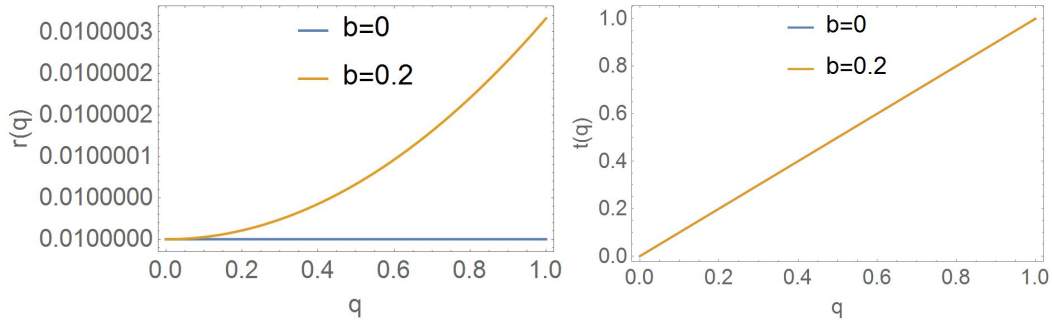


Figura C.2: Gráficos das geodésicas radiais do elemento de linha dado em (3.22) onde a figura da esquerda mostra o comportamento de  $r(q)$  em espaço-tempo curvo ( $b = 0.2$ ) com espaço-tempo plano ( $b = 0$ ). Na figura da direita plotamos  $t(q)$  e ambas as curvas, calculadas com parâmetros  $b = 0$  e  $b = 1$ , estão sobrepostas.

Na figura (C.3), traçamos as geodésicas para o potencial radial linear. Agora, quando o parâmetro  $q$  aumenta a curva  $r(q)$  para  $b \neq 0$  aumenta ligeiramente. Sua contraparte em espaço-tempo plano não possui esse comportamento. Na figura da direita, mostramos o  $t(q)$  e as duas curvas, como nos casos anteriores, são sobrepostas.

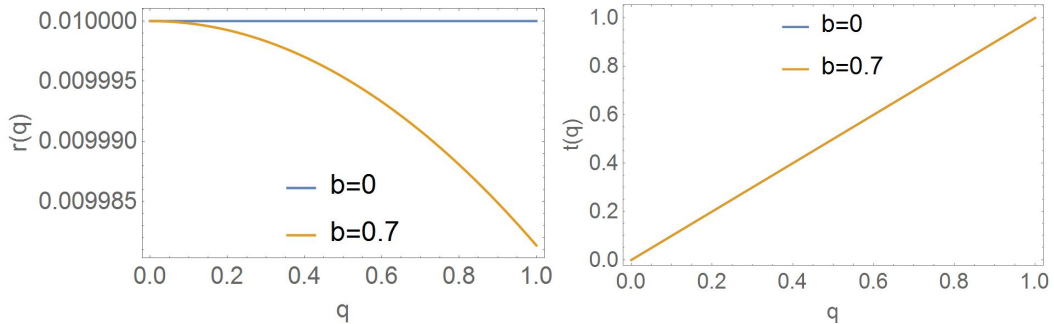


Figura C.3: Gráficos das geodésicas radiais do elemento de linha dado em (3.37) onde a figura da esquerda mostra o comportamento de  $r(q)$  em espaço-tempo curvo ( $b = 0.7$ ) com espaço-tempo plano ( $b = 0$ ). Na figura da direita plotamos  $t(q)$  e ambas as curvas, calculadas com os parâmetros  $b = 0$  e  $b = 1$ , estão sobrepostas.

# Apêndice D

## Constantes de normalização e tabelas de espectros de energia do capítulo 4

Neste apêndice calcularemos explicitamente as constantes de normalização para os espinores de Dirac que estudamos no capítulo (4) e apresentamos tabelas com alguns valores dos espectros de energia com e sem simetria exata de spin e pseudo-spin.

### D.1 Cálculos das constantes de normalização

Uma vez que as integrais em  $\theta$  e  $\phi$  já estão normalizadas impomos,

$$N_{nl}^2 \int_0^\infty (|R_1|^2 + |R_2|^2)(1 + \alpha^2 U(r)) dr = 1, \quad (\text{D.1})$$

onde  $N_{nl}$  deve ser calculado. Para o oscilador de Dirac com simetria exata de spin na seção (4.1), a constante de normalização é  $N_{nl} = A^{-1/2}$ , onde  $A$  é

dado por,

$$\begin{aligned}
A = & I_n \left( \delta, l+1, l+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2} \right) + \frac{\mu\alpha^2}{\delta} I_n \left( \delta, l+2, l+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2} \right) + \frac{\alpha^2}{(1+\epsilon)^2} \times \\
& \frac{(\beta_1 - \delta)^2}{\delta} \left\{ I_n \left( \delta, l+2, l+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2} \right) + \frac{\mu\alpha^2}{\delta} I_n \left( \delta, l+3, l+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2} \right) \right\} \\
& + \frac{2\alpha^2(\beta_1 - \delta)(2n+2l+1)}{(1+\epsilon)^2} \left\{ I_n \left( \delta, l+1, l+\frac{1}{2}, l-\frac{1}{2} \right) + \frac{\mu\alpha^2}{\delta} \times \right. \\
& I_n \left( \delta, l+2, l+\frac{1}{2}, l-\frac{1}{2} \right) \left. \right\} + \frac{\alpha^2(2n+2l+1)^2\delta}{(1+\epsilon)^2} \left\{ I_n \left( \delta, l, l-\frac{1}{2}, l-\frac{1}{2} \right) \right. \\
& + \frac{\mu\alpha^2}{\delta} I_n \left( \delta, l+1, l-\frac{1}{2}, l-\frac{1}{2} \right) \left. \right\} + \frac{\alpha^2}{(1+\epsilon)^2} (\lambda-l)^2\delta \left\{ \frac{\mu\alpha^2}{\delta} \times \right. \\
& I_n \left( \delta, l+1, l+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2} \right) + I_n \left( \delta, l, l+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2} \right) \left. \right\} + \frac{2\alpha^2}{(1+\epsilon)^2} (\lambda-l) \times \\
& (\beta_1 - \delta) \left\{ I_n \left( \delta, l+1, l+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2} \right) + \frac{\mu\alpha^2}{\delta} I_n \left( \delta, l+2, l+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2} \right) \right\} \\
& + \frac{2\alpha^2}{(1+\epsilon)^2} (\lambda-l)(2n+2l+1)\delta \left\{ I_n \left( \delta, l, l+\frac{1}{2}, l-\frac{1}{2} \right) + \right. \\
& \left. \frac{\mu\alpha^2}{\delta} I_n \left( \delta, l+1, l+\frac{1}{2}, l-\frac{1}{2} \right) \right\}. \tag{D.2}
\end{aligned}$$

Para o oscilador de Dirac com simetria exata de pseudo-spin a constante de normalização é  $N_{\tilde{n}\tilde{l}} = B^{-1/2}$ , onde  $B$  é dado por,

$$\begin{aligned}
B = & I_{\tilde{n}} \left( \gamma, \tilde{l} + 1, \tilde{l} + \frac{1}{2}, \tilde{l} + \frac{1}{2} \right) - \frac{\mu\alpha^2}{\gamma} I_{\tilde{n}} \left( \gamma, \tilde{l} + 2, \tilde{l} + \frac{1}{2}, \tilde{l} + \frac{1}{2} \right) + \frac{(\beta_2 - \gamma)^2}{(1 - \epsilon)^2} \\
& \times \frac{\alpha^2}{\gamma} \left\{ I_{\tilde{n}} \left( \gamma, \tilde{l} + 2, \tilde{l} + \frac{1}{2}, \tilde{l} + \frac{1}{2} \right) - \frac{\mu\alpha^2}{\gamma} I_{\tilde{n}} \left( \gamma, \tilde{l} + 3, \tilde{l} + \frac{1}{2}, \tilde{l} + \frac{1}{2} \right) \right\} + \\
& \frac{4\alpha^2\gamma}{(1 - \epsilon)^2} \left\{ I_{\tilde{n}} \left( \gamma, \tilde{l} + 2, \tilde{l} + \frac{3}{2}, \tilde{l} + \frac{3}{2} \right) - \frac{\mu\alpha^2}{\gamma} I_{\tilde{n}} \left( \gamma, \tilde{l} + 3, \tilde{l} + \frac{3}{2}, \tilde{l} + \frac{3}{2} \right) \right\} \\
& - \frac{4\alpha^2(\gamma - \beta_2)}{(1 - \epsilon)^2} \left\{ I_{\tilde{n}} \left( \gamma, \tilde{l} + 2, \tilde{l} + \frac{1}{2}, \tilde{l} + \frac{3}{2} \right) - \frac{\mu\alpha^2}{\gamma} \times \right. \\
& I_{\tilde{n}} \left( \gamma, \tilde{l} + 3, \tilde{l} + \frac{1}{2}, \tilde{l} + \frac{3}{2} \right) \left. \right\} + \frac{\alpha^2(\tilde{l} - \lambda + 1)^2}{(1 - \epsilon)^2} \gamma \left\{ I_{\tilde{n}} \left( \gamma, \tilde{l}, \tilde{l} + \frac{1}{2}, \tilde{l} + \frac{1}{2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{\mu\alpha^2}{\gamma} I_{\tilde{n}} \left( \gamma, \tilde{l} + 1, \tilde{l} + \frac{1}{2}, \tilde{l} + \frac{1}{2} \right) \right\} - \frac{4\alpha^2\gamma(\tilde{l} - \lambda + 1)}{(1 - \epsilon)^2} \times \\
& \left\{ I_{\tilde{n}} \left( \gamma, \tilde{l} + 1, \tilde{l} + \frac{1}{2}, \tilde{l} + \frac{3}{2} \right) - \frac{\mu\alpha^2}{\gamma} I_{\tilde{n}} \left( \gamma, \tilde{l} + 2, \tilde{l} + \frac{1}{2}, \tilde{l} + \frac{3}{2} \right) \right\} \\
& + \frac{2\alpha^2(\gamma - \beta_2)(\tilde{l} - \lambda + 1)}{(1 - \epsilon)^2} \left\{ I_{\tilde{n}} \left( \gamma, \tilde{l} + 1, \tilde{l} + \frac{1}{2}, \tilde{l} + \frac{1}{2} \right) - \right. \\
& \left. \frac{\mu\alpha^2}{\gamma} I_{\tilde{n}} \left( \gamma, \tilde{l} + 2, \tilde{l} + \frac{1}{2}, \tilde{l} + \frac{1}{2} \right) \right\}. \tag{D.3}
\end{aligned}$$

Em ambos os casos  $I_n$  é definido como,

$$I_n(s, a, b, c) = \int_0^\infty (sr^2)^a \exp(sr^2) L_n^b(sr^2) L_n^c(sr^2) dr, \tag{D.4}$$

tomando  $x = sr^2$  e usando a identidade dos polinômios de Laguerre associados [156],

$$L_n^k(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n+k}{n-i} \frac{x^i}{i!}, \tag{D.5}$$

temos,

$$I_n(s, a, b, c) = \frac{s^{-1/2}}{2} \sum_{i,j=0}^n \frac{(-1)^{i+j}}{i!j!} \binom{n+b}{n-i} \binom{n+c}{n-j} \times \int_0^\infty x^{a+i+j-1/2} e^{-x} dx, \quad (\text{D.6})$$

usando o resultado (4) na seção 3.381 da referência [156] temos,

$$I_n(s, a, b, c) = \frac{s^{-1/2}}{2} \sum_{i,j=0}^n \frac{(-1)^{i+j}}{i!j!} \binom{n+b}{n-i} \binom{n+c}{n-j} \left(a+i+j-\frac{1}{2}\right)! \quad (\text{D.7})$$

## D.2 Tabelas de espectros de energia

Nesta seção apresentamos tabelas com valores dos espectros de energia para alguns estados dupletos com e sem simetria exata de spin e pseudo-spin. Na tabela abaixo temos do sistema com e sem simetria exata de spin.

<b>Com simetria exata de spin</b> ( $\beta_1 = 0$ ), ( $\mu = 10$ )				
$(n, l)$	$j = l - \frac{1}{2}$	$\epsilon_{\lambda < 0}$ ( $\lambda = -l - 1$ )	$j = l + \frac{1}{2}$	$\epsilon_{\lambda > 0}$ ( $\lambda = l$ )
(0, 1)	$0p_{1/2}$	1.000842243	$0p_{3/2}$	1.000842243
(0, 2)	$0d_{3/2}$	1.001179041	$0d_{5/2}$	1.001179041
(0, 3)	$0f_{5/2}$	1.001515782	$0f_{7/2}$	1.001515782
(1, 1)	$1p_{1/2}$	1.001515782	$1p_{3/2}$	1.001515782
(1, 2)	$1d_{3/2}$	1.001852467	$1d_{5/2}$	1.001852467
(1, 3)	$1f_{5/2}$	1.002189095	$1f_{7/2}$	1.002189095
<b>Sem simetria exata de spin</b> ( $\beta_1 = 10$ ), ( $\mu = 10$ )				
(0, 1)	$0p_{1/2}$	1.000244038	$0p_{3/2}$	1.001840934
(0, 2)	$0d_{3/2}$	1.000341652	$0d_{5/2}$	1.003001592
(0, 3)	$0f_{5/2}$	1.000439266	$0f_{7/2}$	1.004161013
(1, 1)	$1p_{1/2}$	1.001504034	$1p_{3/2}$	1.003099066
(1, 2)	$1d_{3/2}$	1.001601590	$1d_{5/2}$	1.004258431
(1, 3)	$1f_{5/2}$	1.001699146	$1f_{7/2}$	1.005416562

Tabela D.1: Alguns valores de energia para o sistema com e sem simetria exata de spin. Usamos unidades atômicas.

Notamos, na tabela (D.1), a influência no potencial tensor efetivo  $A_{ef}(r) = \beta_1 r$  para a quebra de simetria exata de spin. Na tabela (D.2), temos alguns valores de energia para o sistema com e sem simetria exata de pseudo-spin.

<b>Com simetria exata de pseudo-spin (<math>\beta_2 = 0</math>) e (<math>\mu = 10</math>)</b>				
$(\tilde{n}, \tilde{l})$	$\tilde{j} = \tilde{l} - \frac{1}{2}$	$\epsilon_{\lambda < 0}$ ( $\lambda = -\tilde{l}$ )	$\tilde{j} = \tilde{l} + \frac{1}{2}$	$\epsilon_{\lambda > 0}$ ( $\lambda = \tilde{l} + 1$ )
(0, 1)	$0\tilde{p}_{1/2}$	1.000000355	$0\tilde{p}_{3/2}$	1.000000355
(0, 2)	$0\tilde{d}_{3/2}$	1.000000696	$0\tilde{d}_{5/2}$	1.000000696
(0, 3)	$0\tilde{f}_{5/2}$	1.000001150	$0\tilde{f}_{7/2}$	1.000001150
(1, 1)	$1\tilde{p}_{1/2}$	1.000001150	$1\tilde{p}_{3/2}$	1.000001150
(1, 2)	$1\tilde{d}_{3/2}$	1.000001717	$1\tilde{d}_{5/2}$	1.000001717
(1, 3)	$1\tilde{f}_{5/2}$	1.000002399	$1\tilde{f}_{7/2}$	1.000002399
<b>Sem simetria exata de pseudo-spin (<math>\beta_2 = 10</math>) e (<math>\mu = 10</math>)</b>				
(0, 1)	$0\tilde{p}_{1/2}$	1.001065161	$0\tilde{p}_{3/2}$	1.002660782
(0, 2)	$0\tilde{d}_{3/2}$	1.001065218	$0\tilde{d}_{5/2}$	1.003723317
(0, 3)	$0\tilde{f}_{5/2}$	1.001065275	$0\tilde{f}_{7/2}$	1.004784840
(1, 1)	$1\tilde{p}_{1/2}$	1.002129417	$1\tilde{p}_{3/2}$	1.003723514
(1, 2)	$1\tilde{d}_{3/2}$	1.002129530	$1\tilde{d}_{5/2}$	1.004785094
(1, 3)	$1\tilde{f}_{5/2}$	1.002129644	$1\tilde{f}_{7/2}$	1.005845666

Tabela D.2: Alguns valores de energia para o sistema com e sem simetria exata de pseudo-spin. Usamos unidades atômicas.

Novamente notamos a quebra de simetria exata de pseudo-spin devido ao potencial tensor efetivo  $A_{ef}(r) = \beta_2 r$ .

# Apêndice E

## Constantes de normalização e tabelas de espectros de energia do capítulo 5

Neste apêndice calcularemos as constantes de normalização do capítulo (5) e apresentaremos tabelas com valores dos espectros de energia para alguns estados dupletos com e sem simetrias exatas de spin e pseudo-spin.

### E.1 Cálculos das constantes de normalização

Novamente, uma vez que as integrais sobre  $\theta$  e  $\phi$  são unitárias teremos,

$$N_{nl}^2 \int_0^\infty (|R_1|^2 + |R_2|^2)(1 + \alpha^2 U(r)) dr = 1, \quad (\text{E.1})$$

onde  $N_{nl}$  deve ser calculado. Para o oscilador de Dirac modificado com simetria exata de spin na seção (5.1) a constante de normalização será  $N_{nl} = C^{-1/2}$ , onde  $C$  é dado por,



$$\begin{aligned}
C = & I_n(\delta, 2\gamma + 1/2, 2\gamma, 2\gamma) + \frac{\mu\alpha^2}{\delta} I_n(\delta, 2\gamma + 3/2, 2\gamma, 2\gamma) + \frac{\alpha^2}{(1+\epsilon)^2} \times \\
& \frac{(\beta_1 + \delta)^2}{\delta} \left\{ I_n(\delta, 2\gamma + 3/2, 2\gamma, 2\gamma) + \frac{\mu\alpha^2}{\delta} I_n(\delta, 2\gamma + 5/2, 2\gamma, 2\gamma) \right\} \\
& + \frac{2\alpha^2(\beta_1 + \delta)(2\gamma + \lambda + A + 1/2)}{(1+\epsilon)^2} \left\{ I_n(\delta, 2\gamma + 1/2, 2\gamma, 2\gamma) + \frac{\mu\alpha^2}{\delta} \times \right. \\
& I_n(\delta, 2\gamma + 3/2, 2\gamma, 2\gamma) \left. \right\} + \frac{\alpha^2(2\gamma + \lambda + A + 1/2)^2\delta}{(1+\epsilon)^2} \times \\
& \left\{ I_n(\delta, 2\gamma - 1/2, 2\gamma, 2\gamma) + \frac{\mu\alpha^2}{\delta} I_n(\delta, 2\gamma + 1/2, 2\gamma, 2\gamma) \right\} \\
& - \frac{4\delta\alpha^2(2\gamma + \lambda + A + 1/2)}{(1+\epsilon)^2} \left\{ I_n(\delta, 2\gamma + 1/2, 2\gamma, 2\gamma + 1) \right. \\
& \left. + \frac{\mu\alpha^2}{\delta} I_n(\delta, 2\gamma + 3/2, 2\gamma, 2\gamma + 1) \right\} - \frac{4\alpha^2(\beta_1 + \delta)}{(1+\epsilon)^2} \times \\
& \left\{ I_n(\delta, 2\gamma + 3/2, 2\gamma, 2\gamma + 1) + \frac{\mu\alpha^2}{\delta} I_n(\delta, 2\gamma + 5/2, 2\gamma, 2\gamma + 1) \right\} + \\
& \frac{4\delta\alpha^2}{(1+\epsilon)^2} \left\{ I_n(\delta, 2\gamma + 3/2, 2\gamma + 1, 2\gamma + 1) + \frac{\mu\alpha^2}{\delta} \times \right. \\
& \left. I_n(\delta, 2\gamma + 5/2, 2\gamma + 1, 2\gamma + 1) \right\}. \tag{E.2}
\end{aligned}$$

Para o oscilador de Dirac modificado com simetria exata de pseudo-spin na seção (5.2), a constante de normalização será  $N_{\tilde{n}\tilde{l}} = B^{-1/2}$ , onde  $B$  é dado

por,

$$\begin{aligned}
B = & I_{\tilde{n}}(\delta, 2\gamma + 1/2, 2\gamma, 2\gamma) - \frac{\mu\alpha^2}{\delta} I_{\tilde{n}}(\delta, 2\gamma + 3/2, 2\gamma, 2\gamma) + \frac{\alpha^2}{(1-\epsilon)^2} \times \\
& \frac{(\beta_2 - \delta)^2}{\delta} \left\{ I_{\tilde{n}}(\delta, 2\gamma + 3/2, 2\gamma, 2\gamma) - \frac{\mu\alpha^2}{\delta} I_{\tilde{n}}(\delta, 2\gamma + 5/2, 2\gamma, 2\gamma) \right\} \\
& - \frac{2\alpha^2(\beta_2 + \delta)(2\gamma - \lambda - A + 1/2)}{(1-\epsilon)^2} \left\{ I_{\tilde{n}}(\delta, 2\gamma + 1/2, 2\gamma, 2\gamma) - \frac{\mu\alpha^2}{\delta} \times \right. \\
& I_{\tilde{n}}(\delta, 2\gamma + 3/2, 2\gamma, 2\gamma) \left. \right\} + \frac{\alpha^2(2\gamma - \lambda - A + 1/2)^2\delta}{(1-\epsilon)^2} \times \\
& \left\{ I_{\tilde{n}}(\delta, 2\gamma - 1/2, 2\gamma, 2\gamma) - \frac{\mu\alpha^2}{\delta} I_{\tilde{n}}(\delta, 2\gamma + 1/2, 2\gamma, 2\gamma) \right\} \\
& - \frac{4\delta\alpha^2(2\gamma - \lambda - A + 1/2)}{(1-\epsilon)^2} \left\{ I_{\tilde{n}}(\delta, 2\gamma + 1/2, 2\gamma, 2\gamma + 1) \right. \\
& \left. - \frac{\mu\alpha^2}{\delta} I_{\tilde{n}}(\delta, 2\gamma + 3/2, 2\gamma, 2\gamma + 1) \right\} + \frac{4\alpha^2(\beta_2 - \delta)}{(1-\epsilon)^2} \times \\
& \left\{ I_{\tilde{n}}(\delta, 2\gamma + 3/2, 2\gamma, 2\gamma + 1) - \frac{\mu\alpha^2}{\delta} I_{\tilde{n}}(\delta, 2\gamma + 5/2, 2\gamma, 2\gamma + 1) \right\} + \\
& \frac{4\delta\alpha^2}{(1-\epsilon)^2} \left\{ I_{\tilde{n}}(\delta, 2\gamma + 3/2, 2\gamma + 1, 2\gamma + 1) - \frac{\mu\alpha^2}{\delta} \times \right. \\
& \left. I_{\tilde{n}}(\delta, 2\gamma + 5/2, 2\gamma + 1, 2\gamma + 1) \right\}. \tag{E.3}
\end{aligned}$$

Onde  $I_{\tilde{n}}$  é o mesmo calculado no apêndice anterior.

## E.2 Tabelas de espectros de energia

Nesta seção apresentamos tabelas com valores dos espectros de energia para alguns estados dupletos com e sem simetria exata de spin e pseudo-spin. Na tabela (E.1), temos do sistema com e sem simetria exata de spin.

<b>Com simetria exata de spin</b> ( $\beta_1 = 0, A = 0$ ), ( $\mu = 10$ )				
$(n, l)$	$j = l - \frac{1}{2}$	$\epsilon_{\lambda < 0}$ ( $\lambda = -l - 1$ )	$j = l + \frac{1}{2}$	$\epsilon_{\lambda > 0}$ ( $\lambda = l$ )
(0, 1)	$0p_{1/2}$	1.000842243	$0p_{3/2}$	1.000842243
(0, 2)	$0d_{3/2}$	1.001179041	$0d_{5/2}$	1.001179041
(0, 3)	$0f_{5/2}$	1.001515782	$0f_{7/2}$	1.001515782
(1, 1)	$1p_{1/2}$	1.001515782	$1p_{3/2}$	1.001515782
(1, 2)	$1d_{3/2}$	1.001852467	$1d_{5/2}$	1.001852467
(1, 3)	$1f_{5/2}$	1.002189095	$1f_{7/2}$	1.002189095
<b>Sem simetria exata de spin</b> ( $\beta_1 = 10, A = 1$ ), ( $\mu = 10$ )				
(0, 1)	$0p_{1/2}$	1.000146424	$0p_{3/2}$	1.003001592
(0, 2)	$0d_{3/2}$	1.000244038	$0d_{5/2}$	1.004161013
(0, 3)	$0f_{5/2}$	1.000341652	$0f_{7/2}$	1.005319201
(1, 1)	$1p_{1/2}$	1.001406476	$1p_{3/2}$	1.004258431
(1, 2)	$1d_{3/2}$	1.001504034	$1d_{5/2}$	1.005416562
(1, 3)	$1f_{5/2}$	1.001601590	$1f_{7/2}$	1.006573464

Tabela E.1: Alguns valores de energia para o sistema com e sem simetria exata de spin. Usamos unidades atômicas.

Notamos, na tabela (E.1), a influência no potencial tensor efetivo  $A_{ef}(r) = A/r + \beta_1 r$  para a quebra de simetria exata de spin. Na tabela (E.2), temos alguns valores de energia para o sistema com e sem simetria exata de pseudo-spin.

<b>Com simetria exata de pseudo-spin</b> ( $\beta_2 = 0, A = 0$ ) e ( $\mu = 10$ )				
$(\tilde{n}, \tilde{l})$	$\tilde{j} = \tilde{l} - \frac{1}{2}$	$\epsilon_{\lambda < 0}$ ( $\lambda = -\tilde{l}$ )	$\tilde{j} = \tilde{l} + \frac{1}{2}$	$\epsilon_{\lambda > 0}$ ( $\lambda = \tilde{l} + 1$ )
(0, 1)	$0\tilde{p}_{1/2}$	1.000000355	$0\tilde{p}_{3/2}$	1.000000355
(0, 2)	$0\tilde{d}_{3/2}$	1.000000696	$0\tilde{d}_{5/2}$	1.000000696
(0, 3)	$0\tilde{f}_{5/2}$	1.000001150	$0\tilde{f}_{7/2}$	1.000001150
(1, 1)	$1\tilde{p}_{1/2}$	1.000001150	$1\tilde{p}_{3/2}$	1.000001150
(1, 2)	$1\tilde{d}_{3/2}$	1.000001717	$1\tilde{d}_{5/2}$	1.000001717
(1, 3)	$1\tilde{f}_{5/2}$	1.000002399	$1\tilde{f}_{7/2}$	1.000002399
<b>Sem simetria exata de pseudo-spin</b> ( $\beta_2 = 10, A = 1$ ) e ( $\mu = 10$ )				
(0, 1)	$0\tilde{p}_{1/2}$	1.001065105	$0\tilde{p}_{3/2}$	1.003723317
(0, 2)	$0\tilde{d}_{3/2}$	1.001065161	$0\tilde{d}_{5/2}$	1.004784840
(0, 3)	$0\tilde{f}_{5/2}$	1.001065218	$0\tilde{f}_{7/2}$	1.005845356
(1, 1)	$1\tilde{p}_{1/2}$	1.002129304	$1\tilde{p}_{3/2}$	1.004785094
(1, 2)	$1\tilde{d}_{3/2}$	1.002129417	$1\tilde{d}_{5/2}$	1.005845666
(1, 3)	$1\tilde{f}_{5/2}$	1.002129530	$1\tilde{f}_{7/2}$	1.006905232

Tabela E.2: Alguns valores de energia para o sistema com e sem simetria exata de pseudo-spin.

Novamente notamos a quebra de simetria exata de pseudo-spin devido ao potencial tensor efetivo  $A_{ef}(r) = A/r + \beta_2 r$ .

## Apêndice F

# Constantes de normalização e tabelas de espectros de energia do capítulo 6

Neste apêndice calcularemos neste apêndice as constantes de normalização e apresentaremos tabelas com valores de energia de alguns estados dupletos para as simetrias exatas de spin e pseudo-spin analisada no capítulo (6).

### F.1 Cálculos das constantes de normalização

Mais uma vez, começamos usando o fato de que as integrais sobre  $\theta$  e  $\phi$  são unitárias, assim obtemos,

$$N_{nl}^2 \int_0^\infty (|R_1|^2 + |R_2|^2)(1 + \alpha^2 U(r)) dr = 1, \quad (\text{F.1})$$

onde  $N_{nl}$  deve ser calculado. Para o sistema com simetria exata de spin na seção (6.1) a constante de normalização será  $N_{nl} = A^{-1/2}$ , onde  $A$  é dado

por,

$$\begin{aligned}
A = & I_n \left( \delta, 2\gamma + \frac{1}{2}, 2\gamma, 2\gamma \right) + \frac{\mu\alpha^2}{\delta} I_n \left( \delta, 2\gamma + \frac{3}{2}, 2\gamma, 2\gamma \right) + \frac{\alpha^2(2\gamma + \lambda + \frac{1}{2})^2}{(1 + \epsilon)^2} \times \\
& \left\{ I_n \left( \delta, 2\gamma - \frac{1}{2}, 2\gamma, 2\gamma \right) + \frac{\mu\alpha^2}{\delta} I_n \left( \delta, 2\gamma + \frac{1}{2}, 2\gamma, 2\gamma \right) \right\} + \frac{2\alpha^2(\delta + \beta_1)}{(1 + \epsilon)^2} \\
& \times \left( 2\gamma + \lambda + \frac{1}{2} \right) \left\{ I_n \left( \delta, 2\gamma + \frac{1}{2}, 2\gamma, 2\gamma \right) + \frac{\mu\alpha^2}{\delta} I_n \left( \delta, 2\gamma + \frac{3}{2}, 2\gamma, 2\gamma \right) \right\} \\
& + \frac{\alpha^2(\delta + \beta_1)^2}{\delta(1 + \epsilon)^2} \left\{ I_n \left( \delta, 2\gamma + \frac{3}{2}, 2\gamma, 2\gamma \right) + \frac{\mu\alpha^2}{\delta} I_n \left( \delta, 2\gamma + \frac{5}{2}, 2\gamma, 2\gamma \right) \right\} \\
& - \frac{4\alpha^2(2\gamma + \lambda + \frac{1}{2})\delta}{(1 + \epsilon)^2} \left\{ I_n \left( \delta, 2\gamma + \frac{1}{2}, 2\gamma, 2\gamma + 1 \right) + \frac{\mu\alpha^2}{\delta} \times \right. \\
& \left. I_n \left( \delta, 2\gamma + \frac{3}{2}, 2\gamma, 2\gamma + 1 \right) \right\} - \frac{4\alpha^2(\delta + \beta_1)}{(1 + \epsilon)^2} \left\{ I_n \left( \delta, 2\gamma + \frac{3}{2}, 2\gamma, 2\gamma + 1 \right) \right. \\
& \left. + \frac{\mu\alpha^2}{\delta} I_n \left( \delta, 2\gamma + \frac{5}{2}, 2\gamma, 2\gamma + 1 \right) \right\} + \frac{4\alpha^2\delta}{(1 + \epsilon)^2} \left\{ \frac{\mu\alpha^2}{\delta} \times \right. \\
& \left. I_n \left( \delta, 2\gamma + \frac{5}{2}, 2\gamma + 1, 2\gamma + 1 \right) + I_n \left( \delta, 2\gamma + \frac{3}{2}, 2\gamma + 1, 2\gamma + 1 \right) \right\} + \alpha^2\mu \\
& \times \delta I_n \left( \delta, 2\gamma - \frac{1}{2}, 2\gamma, 2\gamma \right) + \frac{\alpha^4\mu\delta(2\gamma + \lambda + \frac{1}{2})^2}{(1 + \epsilon)^2} I_n \left( \delta, 2\gamma - \frac{3}{2}, 2\gamma, 2\gamma \right) \\
& + \frac{2\alpha^4\mu\delta(2\gamma + \lambda + \frac{1}{2})(\delta + \beta_1)}{(1 + \epsilon)^2} I_n \left( \delta, 2\gamma - \frac{1}{2}, 2\gamma, 2\gamma \right) + \frac{\alpha^4\mu\delta}{(1 + \epsilon)^2} \times \\
& (\delta + \beta_1)^2 I_n \left( \delta, 2\gamma + \frac{1}{2}, 2\gamma, 2\gamma \right) + \frac{4\alpha^4\mu\delta^2}{(1 + \epsilon)^2} I_n \left( \delta, 2\gamma + \frac{1}{2}, 2\gamma + 1, 2\gamma + 1 \right) \\
& - \frac{4\alpha^4\mu\delta^2(2\gamma + \lambda + \frac{1}{2})}{(1 + \epsilon)^2} I_n \left( \delta, 2\gamma - \frac{1}{2}, 2\gamma, 2\gamma + 1 \right) - \frac{4\alpha^4\mu\delta(\delta + \beta_1)}{(1 + \epsilon)^2} \times \\
& I_n \left( \delta, 2\gamma + \frac{1}{2}, 2\gamma, 2\gamma + 1 \right), \tag{F.2}
\end{aligned}$$

onde  $\delta = \sqrt{2\mu(1 + \epsilon) + \beta_1^2}$ ,  $\beta_1 = \omega + \alpha^2\lambda\mu$  e  $\gamma = \sqrt{(l + 1/2)^2 + 2\mu(1 + \epsilon)}/2$ .

Para o sistema com simetria exata de pseudo-spin na seção (6.2) a constante de normalização será  $N_{\tilde{n}\tilde{l}} = B^{-1/2}$ , onde  $B$  é dado por,

$$\begin{aligned}
B = & I_{\bar{n}} \left( \delta, 2\gamma + \frac{1}{2}, 2\gamma, 2\gamma \right) + \frac{\mu\alpha^2}{\delta} I_{\bar{n}} \left( \delta, 2\gamma + \frac{3}{2}, 2\gamma, 2\gamma \right) + \frac{\alpha^2(2\gamma - \lambda + \frac{1}{2})^2}{(1 - \epsilon)^2} \times \\
& \left\{ I_{\bar{n}} \left( \delta, 2\gamma - \frac{1}{2}, 2\gamma, 2\gamma \right) + \frac{\mu\alpha^2}{\delta} I_{\bar{n}} \left( \delta, 2\gamma + \frac{1}{2}, 2\gamma, 2\gamma \right) \right\} + \left( 2\gamma - \lambda + \frac{1}{2} \right) \\
& \times \frac{2\alpha^2(\delta - \beta_2)}{(1 - \epsilon)^2} \left\{ I_{\bar{n}} \left( \delta, 2\gamma + \frac{1}{2}, 2\gamma, 2\gamma \right) + \frac{\mu\alpha^2}{\delta} I_{\bar{n}} \left( \delta, 2\gamma + \frac{3}{2}, 2\gamma, 2\gamma \right) \right\} \\
& + \frac{\alpha^2(\delta - \beta_2)^2}{\delta(1 - \epsilon)^2} \left\{ I_{\bar{n}} \left( \delta, 2\gamma + \frac{3}{2}, 2\gamma, 2\gamma \right) + \frac{\mu\alpha^2}{\delta} I_{\bar{n}} \left( \delta, 2\gamma + \frac{5}{2}, 2\gamma, 2\gamma \right) \right\} \\
& - \frac{4\alpha^2(2\gamma - \lambda + \frac{1}{2})\delta}{(1 - \epsilon)^2} \left\{ I_{\bar{n}} \left( \delta, 2\gamma + \frac{1}{2}, 2\gamma, 2\gamma + 1 \right) + \frac{\mu\alpha^2}{\delta} \times \right. \\
& I_{\bar{n}} \left( \delta, 2\gamma + \frac{3}{2}, 2\gamma, 2\gamma + 1 \right) \left. \right\} - \frac{4\alpha^2(\delta - \beta_2)}{(1 - \epsilon)^2} \left\{ I_{\bar{n}} \left( \delta, 2\gamma + \frac{3}{2}, 2\gamma, 2\gamma + 1 \right) \right. \\
& + \frac{\mu\alpha^2}{\delta} I_{\bar{n}} \left( \delta, 2\gamma + \frac{5}{2}, 2\gamma, 2\gamma + 1 \right) \left. \right\} + \frac{4\alpha^2\delta}{(1 - \epsilon)^2} \left\{ \frac{\mu\alpha^2}{\delta} \times \right. \\
& I_{\bar{n}} \left( \delta, 2\gamma + \frac{5}{2}, 2\gamma + 1, 2\gamma + 1 \right) + I_{\bar{n}} \left( \delta, 2\gamma + \frac{3}{2}, 2\gamma + 1, 2\gamma + 1 \right) \left. \right\} + \\
& \alpha^2\mu\delta I_{\bar{n}} \left( \delta, 2\gamma - \frac{1}{2}, 2\gamma, 2\gamma \right) + \frac{\alpha^4\mu\delta(2\gamma - \lambda + \frac{1}{2})^2}{(1 - \epsilon)^2} I_{\bar{n}} \left( \delta, 2\gamma - \frac{3}{2}, 2\gamma, 2\gamma \right) \\
& + \frac{2\alpha^4\mu\delta(2\gamma - \lambda + \frac{1}{2})(\delta - \beta_2)}{(1 - \epsilon)^2} I_{\bar{n}} \left( \delta, 2\gamma - \frac{1}{2}, 2\gamma, 2\gamma \right) + (\delta - \beta_2)^2 \times \\
& \frac{\alpha^4\mu\delta}{(1 - \epsilon)^2} I_{\bar{n}} \left( \delta, 2\gamma + \frac{1}{2}, 2\gamma, 2\gamma \right) + \frac{4\alpha^4\mu\delta^2}{(1 - \epsilon)^2} I_{\bar{n}} \left( \delta, 2\gamma + \frac{1}{2}, 2\gamma + 1, 2\gamma + 1 \right) \\
& - \frac{4\alpha^4\mu\delta^2(2\gamma - \lambda + \frac{1}{2})}{(1 - \epsilon)^2} I_{\bar{n}} \left( \delta, 2\gamma - \frac{1}{2}, 2\gamma, 2\gamma + 1 \right) - \frac{4\alpha^4\mu\delta(\delta - \beta_2)}{(1 - \epsilon)^2} \times \\
& I_{\bar{n}} \left( \delta, 2\gamma + \frac{1}{2}, 2\gamma, 2\gamma + 1 \right), \tag{F.3}
\end{aligned}$$

onde  $\delta = \sqrt{2\mu(1 - \epsilon) + \beta_2^2}$ ,  $\beta_2 = \omega + \alpha^2\lambda\mu$  e  $\gamma = \sqrt{(\tilde{l} + 1/2)^2 + 2\mu(1 - \epsilon)}/2$ .

Em ambos os casos  $I_n$  é o mesmo calculado no apêndice (D).

## F.2 Tabelas de espectros de energia

Nesta seção apresentamos tabelas com valores dos espectros de energia para alguns estados dupletos com e sem simetria exata de spin e pseudo-spin. Na tabela (F.1), temos alguns valores de energia do sistema com e sem simetria exata de spin.

<b>Com simetria exata de spin</b> ( $\beta_1 = 0$ ), ( $\mu = 1$ )				
$(n, l)$	$j = l - \frac{1}{2}$	$\epsilon_{\lambda < 0}$ ( $\lambda = -l - 1$ )	$j = l + \frac{1}{2}$	$\epsilon_{\lambda > 0}$ ( $\lambda = l$ )
(1, 1)	$1p_{1/2}$	1.000586012	$1p_{3/2}$	1.000586012
(1, 2)	$1d_{3/2}$	1.000660743	$1d_{5/2}$	1.000660743
(1, 3)	$1f_{5/2}$	1.000749107	$1f_{7/2}$	1.000749107
(2, 1)	$2p_{1/2}$	1.000799065	$2p_{3/2}$	1.000799065
(2, 2)	$2d_{3/2}$	1.000873786	$2d_{5/2}$	1.000873786
(2, 3)	$2f_{5/2}$	1.000962139	$2f_{7/2}$	1.000962139

<b>Sem simetria exata de spin</b> ( $\beta_1 = 1$ ), ( $\mu = 1$ )				
(1, 1)	$1p_{1/2}$	1.000522008	$1p_{3/2}$	1.000681778
(1, 2)	$1d_{3/2}$	1.000552303	$1d_{5/2}$	1.000818566
(1, 3)	$1f_{5/2}$	1.000597844	$1f_{7/2}$	1.000970581
(2, 1)	$2p_{1/2}$	1.000760207	$2p_{3/2}$	1.000919947
(2, 2)	$2d_{3/2}$	1.000790497	$2d_{5/2}$	1.001056710
(2, 3)	$2f_{5/2}$	1.000836033	$2f_{7/2}$	1.001208698

Tabela F.1: Alguns valores de energia para o sistema com e sem simetria exata de spin. Usamos unidades atômicas.

Notamos, na tabela (F.1), a influência no potencial tensor efetivo  $A_{ef}(r) = \beta_1 r$  para a quebra de simetria exata de spin. Na tabela (F.2), temos alguns valores de energia para o sistema com e sem simetria exata de pseudo-spin.



<b>Com simetria exata de pseudo-spin</b> ( $\beta_2 = 0$ ), ( $\mu = 1$ )				
$(\tilde{n}, \tilde{l})$	$\tilde{j} = \tilde{l} - \frac{1}{2}$	$\epsilon_{\lambda < 0}$ ( $\lambda = -\tilde{l}$ )	$\tilde{j} = \tilde{l} + \frac{1}{2}$	$\epsilon_{\lambda > 0}$ ( $\lambda = \tilde{l} + 1$ )
(1, 1)	$1p_{1/2}$	-1.000586012	$1p_{3/2}$	-1.000586012
(1, 2)	$1d_{3/2}$	-1.000660743	$1d_{5/2}$	-1.000660743
(1, 3)	$1f_{5/2}$	-1.000749107	$1f_{7/2}$	-1.000749107
(2, 1)	$2p_{1/2}$	-1.000799065	$2p_{3/2}$	-1.000799065
(2, 2)	$2d_{3/2}$	-1.000873786	$2d_{5/2}$	-1.000873786
(2, 3)	$2f_{5/2}$	-1.000962139	$2f_{7/2}$	-1.000962139
<b>Sem simetria exata de pseudo-spin</b> ( $\beta_2 = 1$ ), ( $\mu = 1$ )				
(1, 1)	$1\tilde{p}_{1/2}$	-1.000628524	$1\tilde{p}_{3/2}$	-1.000788278
(1, 2)	$1\tilde{d}_{3/2}$	-1.000658817	$1\tilde{d}_{5/2}$	-1.000925052
(1, 3)	$1\tilde{f}_{5/2}$	-1.000704355	$1\tilde{f}_{7/2}$	-1.001077052
(2, 1)	$2\tilde{p}_{1/2}$	-1.000866703	$2\tilde{p}_{3/2}$	-1.001026426
(2, 2)	$2\tilde{d}_{3/2}$	-1.000896991	$2\tilde{d}_{5/2}$	-1.001163175
(2, 3)	$2\tilde{f}_{5/2}$	-1.000942523	$2\tilde{f}_{7/2}$	-1.001315149

Tabela F.2: Alguns valores de energia para o sistema com e sem simetria exata de pseudo-spin.

Novamente notamos a simetria exata de pseudo-spin quando  $\beta_2 = 0$  e sua quebra devido ao potencial tensor efetivo  $A_{ef}(r) = \beta_2 r$ , quando  $\beta_2 \neq 0$ .

# Apêndice G

## Constantes de normalização e tabelas de espectros de energia do capítulo 7

Neste apêndice calcularemos as constantes de normalização e apresentamos tabelas com valores de energia de alguns estados dupletos dos sistemas com simetrias exatas de spin e pseudo-spin analisado no capítulo (7).

### G.1 Cálculos das constantes de normalização

Como as integrais sobre  $\theta$  e  $\phi$  são unitárias obtemos,

$$N_{nl}^2 \int_0^\infty (|R_1|^2 + |R_2|^2)(1 + \alpha^2 U(r)) dr = 1, \quad (\text{G.1})$$

onde  $N_{nl}$  deve ser calculado. Para os potencial escalar e vetor tipo-Coulomb com simetria exata de spin na seção (7.1) a constante de normalização será  $N_{nl} = A^{-1/2}$ , onde  $A$  é dado por,

$$\begin{aligned}
A = & I_{nn}(2\rho, 2\beta + 2, 2\beta, 2\beta) + \alpha^2 \mu I_{nn}(2\rho, 2\beta + 1, 2\beta, 2\beta) + \frac{\alpha^2}{(1 + \epsilon)^2} \times \\
& (n - \beta + \lambda + D - 1/2)^2 \{ I_{nn}(2\rho, 2\beta, 2\beta, 2\beta) + \alpha^2 \mu \times \\
& I_{nn}(2\rho, 2\beta - 1, 2\beta, 2\beta) \} + \frac{2\alpha^2 \rho (n - \beta + \lambda + D - 1/2)}{(1 + \epsilon)^2} \times \\
& \{ I_{nn}(2\rho, 2\beta + 1, 2\beta, 2\beta) + \alpha^2 \mu I_{nn}(2\rho, 2\beta, 2\beta, 2\beta) \} + \frac{\alpha^2 \rho^2}{(1 + \epsilon)^2} \times \\
& \{ I_{nn}(2\rho, 2\beta + 2, 2\beta, 2\beta) + \alpha^2 \mu I_{nn}(2\rho, 2\beta + 1, 2\beta, 2\beta) \} + \frac{2\alpha^2}{(1 + \epsilon)^2} \times \\
& (n + 1)(n - \beta + \lambda + D - 1/2) \{ I_{nn+1}(2\rho, 2\beta, 2\beta, 2\beta) + \alpha^2 \mu \times \\
& I_{nn+1}(2\rho, 2\beta - 1, 2\beta, 2\beta) \} + \frac{2\alpha^2 \rho (n + 1)}{(1 + \epsilon)^2} \{ I_{nn+1}(2\rho, 2\beta + 1, 2\beta, 2\beta) \\
& + \alpha^2 \mu I_{nn+1}(2\rho, 2\beta, 2\beta, 2\beta) \} + \frac{\alpha^2 (n + 1)^2}{(1 + \epsilon)^2} \{ I_{n+1n+1}(2\rho, 2\beta, 2\beta, 2\beta) + \\
& \alpha^2 \mu I_{n+1n+1}(2\rho, 2\beta - 1, 2\beta, 2\beta) \}.
\end{aligned}$$

Por fim, para o sistema com simetria exata de pseudo-spin na seção (7.2) a constante de normalização será  $N_{\tilde{n}\tilde{l}} = B^{-1/2}$ , onde  $B$  é dado por,

$$\begin{aligned}
B = & I_{\tilde{n}\tilde{n}}(2\rho, 2\beta + 2, 2\beta, 2\beta) + \alpha^2 \mu I_{\tilde{n}\tilde{n}}(2\rho, 2\beta + 1, 2\beta, 2\beta) + \frac{\alpha^2}{(1 - \epsilon)^2} \times \\
& (\tilde{n} + \beta + \lambda + D + 1/2)^2 \{ I_{\tilde{n}\tilde{n}}(2\rho, 2\beta, 2\beta, 2\beta) + \alpha^2 \mu \times \\
& I_{\tilde{n}\tilde{n}}(2\rho, 2\beta - 1, 2\beta, 2\beta) \} - \frac{2\alpha^2 \rho (\tilde{n} + \beta + \lambda + D + 1/2)}{(1 - \epsilon)^2} \times \\
& \{ I_{\tilde{n}\tilde{n}}(2\rho, 2\beta + 1, 2\beta, 2\beta) + \alpha^2 \mu I_{\tilde{n}\tilde{n}}(2\rho, 2\beta, 2\beta, 2\beta) \} + \frac{\alpha^2 \rho^2}{(1 - \epsilon)^2} \times \\
& \{ I_{\tilde{n}\tilde{n}}(2\rho, 2\beta + 2, 2\beta, 2\beta) + \alpha^2 \mu I_{\tilde{n}\tilde{n}}(2\rho, 2\beta + 1, 2\beta, 2\beta) \} - \frac{2\alpha^2 (\tilde{n} + 1)}{(1 - \epsilon)^2} \\
& \times (\tilde{n} + \beta + \lambda + D + 1/2) \{ I_{\tilde{n}, \tilde{n}+1}(2\rho, 2\beta, 2\beta, 2\beta) + \alpha^2 \mu \times \\
& I_{\tilde{n}, \tilde{n}+1}(2\rho, 2\beta - 1, 2\beta, 2\beta) \} + \frac{2\alpha^2 \rho (\tilde{n} + 1)}{(1 - \epsilon)^2} \{ I_{\tilde{n}, \tilde{n}+1}(2\rho, 2\beta + 1, 2\beta, 2\beta) \\
& + \alpha^2 \mu I_{\tilde{n}, \tilde{n}+1}(2\rho, 2\beta, 2\beta, 2\beta) \} + \frac{\alpha^2 (\tilde{n} + 1)^2}{(1 - \epsilon)^2} \{ I_{\tilde{n}+1, \tilde{n}+1}(2\rho, 2\beta, 2\beta, 2\beta) + \\
& \alpha^2 \mu I_{\tilde{n}+1, \tilde{n}+1}(2\rho, 2\beta - 1, 2\beta, 2\beta) \}, \tag{G.2}
\end{aligned}$$

onde  $I_{nm}$  é dado por,

$$I_{nm}(\delta, a, b, c) = \int_0^\infty r^a \exp(-\delta r) L_n^b(\delta r) L_n^c(\delta r) dr, \tag{G.3}$$

usando a identidade dos polinômios de Laguerre associados [156],

$$L_n^k(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n+k}{n-i} \frac{x^i}{i!}, \tag{G.4}$$

temos,

$$I_{nm}(\delta, a, b, c) = \sum_i^n \sum_j^m \frac{(-1)^{i+j}}{i!j!} \binom{n+b}{n-i} \binom{m+c}{m-j} (\delta)^{i+j} \times \int_0^\infty r^{a+i+j} e^{-\delta r} dr, \quad (\text{G.5})$$

usando o resultado (4) da seção 3.381 da referência [156] obtemos,

$$I_{nm}(\delta, a, b, c) = (\delta)^{-a-1} \sum_i^n \sum_j^m \frac{(-1)^{i+j}}{i!j!} \binom{n+b}{n-i} \binom{m+c}{m-j} \Gamma(a+i+j+1), \quad (\text{G.6})$$

onde  $\Gamma(z)$  é a função gamma.

## G.2 Tabelas de espectros de energia

Nesta seção apresentamos tabelas com valores dos espectros de energia para alguns estados dupletos com e sem simetria exata de spin e pseudo-spin. Na tabela (G.1), temos do sistema com e sem simetria exata de spin.

<b>Com simetria exata de spin (<math>D = 0</math>), (<math>\mu = 1</math>)</b>				
$(n, l)$	$j = l - \frac{1}{2}$	$\epsilon_{\lambda < 0}$ ( $\lambda = -l - 1$ )	$j = l + \frac{1}{2}$	$\epsilon_{\lambda > 0}$ ( $\lambda = l$ )
(1, 1)	$1p_{1/2}$	0.99998816	$1p_{3/2}$	0.99998816
(1, 2)	$1d_{3/2}$	0.99999334	$1d_{5/2}$	0.99999334
(1, 3)	$1f_{5/2}$	0.99999574	$1f_{7/2}$	0.99999574
(2, 1)	$2p_{1/2}$	0.99999334	$2p_{3/2}$	0.99999334
(2, 2)	$2d_{3/2}$	0.99999574	$2d_{5/2}$	0.99999574
(2, 3)	$2f_{5/2}$	0.99999704	$2f_{7/2}$	0.99999704

<b>Sem simetria exata de spin (<math>D = 0.5</math>), (<math>\mu = 1</math>)</b>				
(1, 1)	$1p_{1/2}$	0.99998295	$1p_{3/2}$	0.99999130
(1, 2)	$1d_{3/2}$	0.99999130	$1d_{5/2}$	0.99999474
(1, 3)	$1f_{5/2}$	0.99999474	$1f_{7/2}$	0.99999648
(2, 1)	$2p_{1/2}$	0.99999130	$2p_{3/2}$	0.99999474
(2, 2)	$2d_{3/2}$	0.99999474	$2d_{5/2}$	0.99999648
(2, 3)	$2f_{5/2}$	0.99999648	$2f_{7/2}$	0.99999748

Tabela G.1: Alguns valores de energia para o sistema com e sem simetria exata de spin. Usamos unidades atômicas.

Notamos, na tabela (G.1), a influência no potencial tensor efetivo  $A_{ef}(r) = D/r$  para a quebra de simetria exata de spin. Na tabela (G.2), temos alguns valores de energia para o sistema com e sem simetria exata de pseudo-spin.

<b>Com simetria exata de pseudo-spin (<math>D = 0</math>), (<math>\mu = 1</math>)</b>				
$(\tilde{n}, \tilde{l})$	$\tilde{j} = \tilde{l} - \frac{1}{2}$	$\epsilon_{\lambda < 0}$ ( $\lambda = -\tilde{l}$ )	$\tilde{j} = \tilde{l} + \frac{1}{2}$	$\epsilon_{\lambda > 0}$ ( $\lambda = \tilde{l} + 1$ )
(1, 1)	$1p_{1/2}$	-0.99998816	$1p_{3/2}$	-0.99998816
(1, 2)	$1d_{3/2}$	-0.99999334	$1d_{5/2}$	-0.99999334
(1, 3)	$1f_{5/2}$	-0.99999574	$1f_{7/2}$	-0.99999574
(2, 1)	$2p_{1/2}$	-0.99999334	$2p_{3/2}$	-0.99999334
(2, 2)	$2d_{3/2}$	-0.99999574	$2d_{5/2}$	-0.99999574
(2, 3)	$2f_{5/2}$	-0.99999704	$2f_{7/2}$	-0.99999704
<b>Sem simetria exata de pseudo-spin (<math>D = 0.2</math>), (<math>\mu = 1</math>)</b>				
(1, 1)	$1\tilde{p}_{1/2}$	-0.99998641	$1\tilde{p}_{3/2}$	-0.99998959
(1, 2)	$1\tilde{d}_{3/2}$	-0.99999262	$1\tilde{d}_{5/2}$	-0.99999396
(1, 3)	$1\tilde{f}_{5/2}$	-0.99999538	$1\tilde{f}_{7/2}$	-0.99999606
(2, 1)	$2\tilde{p}_{1/2}$	-0.99999262	$2\tilde{p}_{3/2}$	-0.99999396
(2, 2)	$2\tilde{d}_{3/2}$	-0.99999538	$2\tilde{d}_{5/2}$	-0.99999606
(2, 3)	$2\tilde{f}_{5/2}$	-0.99999683	$2\tilde{f}_{7/2}$	-0.99999723

Tabela G.2: Alguns valores de energia para o sistema com e sem simetria exata de pseudo-spin.

Novamente notamos a simetria exata de pseudo-spin quando  $D = 0$  e sua quebra devido ao potencial tensor efetivo  $A_{ef}(r) = D/r$ , quando  $D \neq 0$ .

## Apêndice H

# Tabelas de espectros de energia do capítulo 8

Nesta último apêndice apresentamos tabelas com valores dos espectros de energia para alguns estados dupletos com e sem simetria exata de spin e pseudo-spin. Na tabela (H.1), temos alguns valores de energia do sistema com e sem simetria exata de spin.



<b>Com simetria exata de spin (<math>A = 0</math>), (<math>\mu = 0.01</math>)</b>				
$(n, l)$	$j = l - \frac{1}{2}$	$\epsilon_{\lambda < 0}$ ( $\lambda = -l - 1$ )	$j = l + \frac{1}{2}$	$\epsilon_{\lambda > 0}$ ( $\lambda = l$ )
(1, 1)	$1p_{1/2}$	0.999880489	$1p_{3/2}$	0.999880489
(1, 2)	$1d_{3/2}$	0.999840721	$1d_{5/2}$	0.999840721
(1, 3)	$1f_{5/2}$	0.999793675	$1f_{7/2}$	0.999793675
(2, 1)	$2p_{1/2}$	0.999741688	$2p_{3/2}$	0.999741688
(2, 2)	$2d_{3/2}$	0.999682875	$2d_{5/2}$	0.999682875
(2, 3)	$2f_{5/2}$	0.999615829	$2f_{7/2}$	0.999615829

<b>Sem simetria exata de spin (<math>A = 0.3</math>), (<math>\mu = 0.01</math>)</b>				
(1, 1)	$1p_{1/2}$	0.999890182	$1p_{3/2}$	0.999869512
(1, 2)	$1d_{3/2}$	0.999853529	$1d_{5/2}$	0.999827286
(1, 3)	$1f_{5/2}$	0.999808457	$1f_{7/2}$	0.999778343
(2, 1)	$2p_{1/2}$	0.999756434	$2p_{3/2}$	0.999725209
(2, 2)	$2d_{3/2}$	0.999701564	$2d_{5/2}$	0.999663490
(2, 3)	$2f_{5/2}$	0.999636654	$2f_{7/2}$	0.999594431

Tabela H.1: Alguns valores de energia para o sistema com e sem simetria exata de spin, onde  $r_e = 2.40873$  e  $\delta = 0.988879$ . Usamos unidades atômicas.

Notamos, na tabela (H.1), a influência no potencial tensor efetivo  $A_{ef}(r) = A/r$  para a quebra de simetria exata de spin. Na tabela abaixo temos alguns valores de energia para o sistema com e sem simetria exata de pseudo-spin.

<b>Com simetria exata de pseudo-spin (<math>A = 0</math>), (<math>\mu = 0.01</math>)</b>				
$(\tilde{n}, \tilde{l})$	$\tilde{j} = \tilde{l} - \frac{1}{2}$	$\epsilon_{\lambda < 0} (\lambda = -\tilde{l})$	$\tilde{j} = \tilde{l} + \frac{1}{2}$	$\epsilon_{\lambda > 0} (\lambda = \tilde{l} + 1)$
(1, 1)	$1p_{1/2}$	0.999891973	$1p_{3/2}$	0.999891973
(1, 2)	$1d_{3/2}$	0.999848567	$1d_{5/2}$	0.999848567
(1, 3)	$1f_{5/2}$	0.999800095	$1f_{7/2}$	0.999800095
(2, 1)	$2p_{1/2}$	0.999758611	$2p_{3/2}$	0.999758611
(2, 2)	$2d_{3/2}$	0.999693863	$2d_{5/2}$	0.999693863
(2, 3)	$2f_{5/2}$	0.999624471	$2f_{7/2}$	0.999624471
<b>Sem simetria exata de pseudo-spin (<math>A = 0.3</math>), (<math>\mu = 0.01</math>)</b>				
(1, 1)	$1\tilde{p}_{1/2}$	0.999904276	$1\tilde{p}_{3/2}$	0.999879415
(1, 2)	$1\tilde{d}_{3/2}$	0.999862079	$1\tilde{d}_{5/2}$	0.999834590
(1, 3)	$1\tilde{f}_{5/2}$	0.999815205	$1\tilde{f}_{7/2}$	0.999784488
(2, 1)	$2\tilde{p}_{1/2}$	0.999777580	$2\tilde{p}_{3/2}$	0.999739561
(2, 2)	$2\tilde{d}_{3/2}$	0.999713705	$2\tilde{d}_{5/2}$	0.999673587
(2, 3)	$2\tilde{f}_{5/2}$	0.999645838	$2\tilde{f}_{7/2}$	0.999602619

Tabela H.2: Alguns valores de energia para o sistema com e sem simetria exata de pseudo-spin, onde  $r_e = 2.40873$  e  $\delta = 0.988879$ .

Novamente notamos a simetria exata de pseudo-spin quando  $A = 0$  e sua quebra devido ao potencial tensor efetivo  $A_{ef}(r) = A/r$ , quando  $A \neq 0$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] L. Lederman and D. Teresi. *The God particle. If the universe is the question, what is the answer?*. New York: Dell Publishing, (1993).
- [2] G. B. Smith and L. J. Tassie, *Ann. Phys.*, **65**, 352 (1971).
- [3] J. S. Bell and H. Ruegg, *Nucl. Phys. B*, **98**, 151 (1975).
- [4] J. N. Ginnocchio, *Phys. Rep.*, **414**, 165 (2005).
- [5] P. R. Page, T. Goldman and J. N. Ginnocchio, *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 204 (2001).
- [6] K.T. Hecht and A. Adler, *Nucl. Phys. A*, **137**, 129 (1969).
- [7] A. Arima, M. Harvey and K. Shimizu, *Phys. Lett. B*, **30**, 517 (1969).
- [8] A. Bohr, I. Hamamoto and B.R. Mottelson, *Phys. Scr.*, **26**, 267 (1982).
- [9] S.G. Nilsson, *Dan. Mat. Fys. Medd.*, **29**, 16 (1955).
- [10] S.G. Nilsson, C.F. Tsang, A. Sobiczewski, Z. Szymanski, S. Wycech, C. Gustafson, I.-L. Lamm, P. Möller and B. Nilsson, *Nucl. Phys. A*, **131**, 1 (1969).
- [11] C. Bahri, J.P. Draayer and S.A. Moszkowski, *Phys. Rev. Lett.*, **68**, 2133 (1992).

- [12] O. Castaños, M. Moshinsky and C. Quesne, *Phys. Lett. B*, **277**, 238 (1992).
- [13] A.L. Blokhin, C. Bahri and J.P. Draayer, *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 4149 (1995).
- [14] A.L. Blokhin, C. Bahri and J.P. Draayer, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **29**, 2039 (1996).
- [15] T. Byrski, F.A. Beck, D. Curien, C. Schuck, P. Fallon, A. Alderson, I. Ali, M.A. Bentley, A.M. Bruce, P.D. Forsyth, D. Howe, J.W. Roberts, J.F. Sharpey-Schafer, G. Smith and P.J. Twin, *Phys. Rev. Lett.*, **64**, 1650 (1990).
- [16] J. Dudek, W. Nazarewicz, Z. Szymanski and G.A. Leander, *Phys. Rev. Lett.*, **59**, 1405 (1987).
- [17] W. Nazarewicz, P.J. Twin, P. Fallon and J.D. Garrett, *Phys. Rev. Lett.*, **64**, 1654 (1990).
- [18] W. Nazarewicz, M.A. Riley and J.D. Garrett, *Nucl. Phys. A*, **512**, 61 (1990).
- [19] J.Y. Zeng, J. Meng, C.S. Wu, E.G. Zhao, Z. Xing and X.Q. Chen, *Phys. Rev. C*, **44**, R1745 (1991).
- [20] O. Castaños, J. G. Hirsch, O. Civitarese and P. O. Hess, *Nucl. Phys. A*, **571**, 276 (1994).
- [21] O. Castaños, *AIP Conference Proceedings*, **342**, 536 (1995).
- [22] F.S. Stephens, M.A. Deleplanque, J.E. Draper, R.M. Diamond, A.O. Macchiavelli, C.W. Beausang, W. Korten, W.H. Kelly, F. Azaiez, J.A.

- Becker, E.A. Henry, S.W. Yates, M.J. Brinkman, A. Kuhnert and J.A. Cizewski,, *Phys. Rev. Lett.*, **65**, 301 (1990).
- [23] Q. Xu, S.J. Zhu, J.H. Hamilton, A.V. Ramayya, J.K. Hwang, B. Qi, J. Meng, J. Peng, Y.X. Luo, J.O. Rasmussen, I.Y. Lee, S.H. Liu, K. Li, J.G. Wang, H.B. Ding, L. Gu, E.Y. Yeoh and W.C. Ma,, *Phys. Rev. C*, **78**, 064301 (2008).
- [24] W. Hua, X.H. Zhou, Y.H. Zhang, Y. Zheng, M.L. Liu, F. Ma, S. Guo, L. Ma, S.T. Wang, N.T. Zhang, Y.D. Fang, X.G. Lei, Y.X. Guo, M. Oshima, Y. Toh, M. Koizumi, Y. Hatsukawa, B. Qi, S.Q. Zhang, J. Meng and M. Sugawara, *Phys. Rev. C*, **80**, 034303 (2009).
- [25] D. Troltenier, W. Nazarewicz, Z. Szymanski and J.P. Draayer, *Nucl. Phys. A*, **567**, 591 (1994).
- [26] W.H. Long, P. Ring, J. Meng, N. Van Giai and C.A. Bertulani, *Phys. Rev. C*, **81**, 031302(R) (2010).
- [27] R. Jolos and V. Voronov, *Phys. At. Nucl.*, **70**, 812 (2007).
- [28] J.J. Li, W.H. Long, J. Margueron and N. Van giai, *Phys. Lett. B*, **732**, 169 (2014).
- [29] P. Ring, *Prog. Part. Nucl. Phys.*, **37**, 193 (1996).
- [30] D. Vretenar, A.V. Afanasjev, G.A. Lalazissis and P. Ring, *Phys. Rep.*, **409**, 101 (2005).
- [31] J. Meng, H. Toki, S.G. Zhou, S.Q. Zhang, W.H. Long and L.S. Geng, *Prog. Part. Nucl. Phys.*, **57**, 470 (2006).
- [32] J.N. Ginocchio, *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 436 (1997).

- [33] J. Meng, K. Sugawara-Tanabe, S. Yamaji, P. Ring and A. Arima, *Phys. Rev. C*, **58**, R628 (1998).
- [34] G.A. Lalazissis, Y.K. Gambhir, J.P. Maharana, C.S. Warke and P. Ring, *Phys. Rev. C*, **58**, R45 (1998).
- [35] K. Sugawara-Tanabe and A. Arima, *Phys. Rev. C*, **58**, R3065 (1998).
- [36] J. Meng, K. Sugawara-Tanabe, S. Yamaji and A. Arima, *Phys. Rev. C*, **59**, 154 (1999).
- [37] P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.*, **117**, 610 (1928).
- [38] M. A. H. Vozmediano, F. de Juan and A. Cortijo, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **129**, 012001 (2008).
- [39] B. Müller, J. Rafelski and W. Greiner, *Phys. Lett. B*, **47**, 5 (1973).
- [40] A.D. Alhaidari, *Phys. Lett. A*, **377**, 2003 (2013).
- [41] F.T. Brandt and J.A. Sánchez-Monroy, *Phys. Lett. A*, **380**, 3036 (2016).
- [42] G. Ferrari and G. Cuoghi, *Phys. Rev. Lett.*, **100**, 230403 (2008).
- [43] T. Kosugi, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **80**, 073602 (2011).
- [44] A. D. Alhaidari, *Int. J. Mod. Phys. A*, **18**, 4955 (2003).
- [45] A. D. Alhaidari, *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 210405 (2001).
- [46] C. Sabín, *Sci. Rep.*, **7**, 40346 (2017).
- [47] A. G. M. Schmidt and A. L. Jesus, *J. Math. Phys.*, **59**, 102101 (2018).
- [48] C.-S. Jia and A. S. Dutra, *Ann. Phys.*, **323**, 566 (2008).

- [49] R. Gerritsma, G. Kirchmair, F. Zähringer, E. Solano, R. Blatt and C. F. Roos, *Nature*, **463**, 68 (2010).
- [50] J. Casanova, C. Sabín, J. León, I. L. Egusquiza, R. Gerritsma, C. F. Roos, J. J. García-Ripoll and E. Solano, *Phys. Rev. X*, **1**, 021018 (2011).
- [51] L. E. Parker and D.J. Toms. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Fields and Gravity*. Cambridge University Press, (2009).
- [52] L. C. N. Santos and C. C. Barros. *Eur. Phys. Jour. C*, **76**, 560, (2016).
- [53] H. Panahi and L. Jahangiri. *Ann. Phys.*, **354**, 306 (2015).
- [54] J. Rodríguez-Laguna, L. Tarruell, M. Lewenstein and A. Celi. *Phys. Rev. A*, **95**, 013627 (2017).
- [55] L. C. B. Crispino, A. Higuchi and G. E. A. Matsas, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 787 (2008).
- [56] O. Boada, A. Celi, J.I. Latorre and M. Lewenstein, *New Jour. Phys.*, **13**, 035002 (2011).
- [57] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Wiley, (1972) pages 133-135; 148-149; 179-182.
- [58] G. F. R. Ellis and S. W. Hawking. *The large scale structure of spacetime*. Cambridge University Press, (1973) pages 131-133.
- [59] C. Koke, C. Noh and D. G. Angelakis, *Ann. Phys.*, **374**, 162 (2016).
- [60] T.-S. Chen, H.-F. Lü, J. Meng, S.-Q. Zhang and S.-G. Zhou, *Chin. Phys. Lett.*, **20**, 358 (2003).

- [61] R. Lisboa, M. Malheiro, A.S. de Castro, P. Alberto and M. Fiolhais, *Phys. Rev. C*, **69**, 024319 (2004).
- [62] J.N. Ginocchio, *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 252501 (2005).
- [63] Q. Xu and S.-J. Zhu, *High Energy Phys. Nucl. Phys.*, **31**, 251 (2007).
- [64] H. Akcay, *Phys. Lett. A*, **373**, 616 (2009).
- [65] J.N. Ginocchio, *Phys. Rev. C*, **69**, 034318 (2004).
- [66] J.-Y. Guo, J.-C. Han and R.-D. Wang, *Phys. Lett. A*, **353**, 378 (2006).
- [67] Y. Zhou and J.-Y. Guo, *Chin. Phys. B*, **17**, 380 (2008).
- [68] M.R. Setare and Z. Nazari, *Mod. Phys. Lett. A*, **25**, 549 (2010).
- [69] M.-C. Zhang, *Acta Phys. Sinica*, **58**, 61 (2009).
- [70] M.-C. Zhang and G.-Q. Huang-Fu, *Ann. Phys.*, **327**, 841 (2012).
- [71] M. Hamzavi, S.M. Ikhdair and B.J. Falaye, *Ann. Phys.*, **341**, 153 (2014).
- [72] A.S. de Castro and P. Alberto, *Phys. Rev. A*, **86**, 032122 (2012).
- [73] R. Lisboa, M. Malheiro and P. Alberto, *Phys. Rev. C*, **67**, 054305 (2003).
- [74] M. Hamzavi, A.A. Rajabi and H. Hassanabadi, *Phys. Lett. A*, **374**, 4303 (2010).
- [75] T. Barakat and H.A. Alhendi, *Found. Phys.*, **43**, 1171 (2013).
- [76] C.-S. Jia, P. Guo and X.-L. Peng, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**, 7737 (2006).
- [77] A. Soylu, O. Bayrak and I. Boztosun, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.*, **41**, 065308 (2008).



- [78] M. Hamzavi and A.A. Rajabi, *Can. J. Phys.*, **91**, 411 (2013).
- [79] J.-Y. Guo, J. Meng and F.-X. Xu, *Chin. Phys. Lett.*, **20**, 602 (2003).
- [80] S.M. Ikhdaïr, C. Berkdemir and R. Sever, *Appl. Math. Comput.*, **217**, 9019 (2011).
- [81] O. Aydođdu, E. Maghsoodi and H. Hassanabadi, *Chin. Phys. B*, **22**, 010302 (2013).
- [82] G.-F. Wei and S.-H. Dong, *Phys. Lett. A*, **373**, 49 (2008).
- [83] T. Chen, J.-Y. Liu and C.-S. Jia, *Phys. Scr.*, **79**, 055002 (2009).
- [84] G.-F. Wei and S.-H. Dong, *Phys. Lett. B*, **686**, 288 (2010).
- [85] O. Aydođdu and R. Sever, *Ann. Phys.*, **325**, 373 (2010).
- [86] M. Hamzavi, A. Rajabi and H. Hassanabadi, *Few-Body Syst.*, **48**, 171 (2010).
- [87] A.N. Ikot, S. Zarrinkamar, E.J. Ibanga, E. Maghsoodi and H. Hassanabadi, *Chin. Phys. C*, **38**, 013101 (2014).
- [88] C. Berkdemir, *Nucl. Phys. A*, **770**, 32 (2006).
- [89] O. Bayrak and I. Boztosun, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40**, 11119 (2007).
- [90] W.-C. Qiang, R.-S. Zhou and Y. Gao, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.*, **40**, 1677 (2007).
- [91] O. Aydođdu and R. Sever, *Phys. Lett. B*, **703**, 379 (2011).
- [92] C. Jia, P. Guo, Y. Diao, L. Yi and X. Xie, *Eur. Phys. J. A*, **34**, 41 (2007).

- [93] C.-S. Jia, T. Chen and L.-G. Cui, *Phys. Lett. A*, **373**, 1621 (2009).
- [94] G.-F. Wei and S.-H. Dong, *Eur. Phys. J. A*, **43**, 185 (2010).
- [95] S.M. Ikhdaïr and M. Hamzavi, *Phys. Scr.*, **86**, 045002 (2012).
- [96] M. Hamzavi and A.A. Rajabi, *Adv. High. Energy Phys.*, **2013**, 196986 (2013).
- [97] K.J. Oyewumi and C.O. Akoshile, *Eur. Phys. J. A*, **45**, 311 (2010).
- [98] G.-F. Wei and S.-H. Dong,, *Eur. Phys. J. A*, **46**, 207 (2010).
- [99] E.V. Aguda, *Can. J. Phys.*, **91**, 689 (2013).
- [100] S. Ikhdaïr and M. Hamzavi, *Few-Body Syst.*, **53**, 473 (2012).
- [101] O. Panella, S. Biondini and A. Arda, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **43**, 325302 (2010).
- [102] J.-Y. Guo and Z.-Q. Sheng, *Phys. Lett. A*, **338**, 90 (2005).
- [103] Q. Xu and S.-J. Zhu, *Nuclear Phys. A*, **768**, 161 (2006).
- [104] O. Aydođdu and R. Sever, *Eur. Phys. J. A*, **43**, 73 (2010).
- [105] O. Aydođdu and R. Sever, *Phys. Scr.*, **84**, 025005 (2011).
- [106] E. Maghsoodi, H. Hassanabadi and O. Aydođdu, *Phys. Scr.*, **86**, 015005 (2012).
- [107] S.M. Ikhdaïr and B.J. Falaye, *Phys. Scr.*, **87**, 035002 (2013).
- [108] A.D. Alhaidari, H. Bahlouli and A. Al-Hasan, *Phys. Lett. A*, **349**, 87 (2006).

- [109] J.-Y. Guo, F. Zhou, F.-L. Guo and J.-H. Zhou, *Int. J. Mod. Phys. A*, **22**, 4825 (2007).
- [110] C. Berkdemir and R. Sever, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41**, 045302 (2008).
- [111] F. Zhou, Y. Wu and J.-Y. Guo, *Comm. Theor. Phys.*, **52**, 813 (2009).
- [112] S. Asgarifar and H. Goudarzi, *Phys. Scr.*, **87**, 025703 (2013).
- [113] S. Marcos, M. López-Quelle, R. Niembro, L.N. Savushkin and P. Bernardos, *Phys. Lett. B*, **513**, 30 (2001).
- [114] J.N. Ginocchio and D.G. Madland, *Phys. Rev. C*, **57**, 1167 (1998).
- [115] Y.K. Gambhir, J.P. Maharana and C.S. Warke, *Eur. Phys. J. A*, **3**, 255 (1998).
- [116] S. Marcos, L.N. Savushkin, M. López-Quelle and P. Ring, *Phys. Rev. C*, **62**, 054309 (2000).
- [117] K. Sugawara-Tanabe, S. Yamaji and A. Arima, *Phys. Rev. C*, **65**, 054313 (2002).
- [118] J.N. Ginocchio, A. Leviatan, J. Meng and S.-G. Zhou, *Phys. Rev. C*, **69**, 034303 (2004).
- [119] A.S. de Castro, P. Alberto, R. Lisboa and M. Malheiro, *Phys. Rev. C*, **73**, 054309 (2006).
- [120] P. Alberto, R. Lisboa, M. Malheiro and A.S. de Castro, *Phys. Rev. C*, **71**, 034313 (2005).
- [121] V. M. Villalba and U. Percoco, *J. Math. Phys.*, **31** 715 (1990).

- [122] A. O. Barut and Lambodar P. Singh, *Int. J. Mod. Phys. D*, **4** 4 (1995).
- [123] A. D. Alhaidari, *Ann. Phys.*, **320** 453 (2005).
- [124] E. D. Rainville, *Special Functions*. MacMillan Company, (1960), capítulos (4 e 16) e pág (187).
- [125] J. J. Sakurai and Jim Napolitano, *Mecânica Quântica Moderna*. Bookman, (2013).
- [126] C.C. Barros, *Eur. Phys. J. C*, **42**, 119, (2005).
- [127] E. Alba, X. Fernandez-Gonzalvo, J. Mur-Petit, J.J. Garcia-Ripoll and J.K. Pachos, *Ann. Phys.*, **328**, 64 (2013).
- [128] J. C. Garreau and V. Zehnlé, *Phys. Rev. A*, **96**, 043627 (2017).
- [129] V. A. S. V. Bittencourt, A. E. Bernardini and M. Blasone, *Phys. Rev. A*, **93**, 053823 (2016).
- [130] A. D. Alhaidari, *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 210405 (2001).
- [131] J. N. Ginocchio, *Phys. Rep.*, **414**, 165 (2005).
- [132] A.D. Alhaidari, *Phys. Lett. A*, **322**, 72 (2004).
- [133] G. B. Arfken, H. J. Weber and F. E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*. Elsevier, Seventh Edition, pág (892) (2013).
- [134] A. Kosior, M. Lewenstein and A. Celi, *arXiv:1804.11323*, (2018).
- [135] A. G. M. Schmidt, *Phys. Lett. A*, **353**, 459 (2006).
- [136] R. De, R. Dutt and U. Sukhatme, *J. Phys. A*, **25**, L843 (1992).

- [137] B. Thaller, *Advanced Visual Quantum Mechanics*. Springer, (2004).
- [138] M. D. de Oliveira and A. G. M. Schmidt, *Ann. Phys.*, **401**, 21 (2019).
- [139] D. Itô, K. Mori and E. Carriere, *Nuovo Cim.*, **51**,1119 (1967).
- [140] M. Moshinsky and A. Szczepaniak, *J. Phys. A*, **22**:L817, (1989).
- [141] J. Bentez, R. P. Martnez y Romero, H. N. Núez-Yépez, and A. L. Salas-Brito, *Phys. Rev. Lett.*, **64**:1643, (1990).
- [142] V. M. Villalba, *Phys. Rev. A*, **49**:586, (1994).
- [143] K. Nouicer, *J. Phys. A*, **39**:18, (2006).
- [144] R. L. Rodrigues, *Phys. Lett. A*, **372**:15, (2008).
- [145] E. Maghsoodi, H. Hassanabadi and S. Zarrinkamar, *Chin. Phys. B*, **22**, 3 (2013).
- [146] A.F. Nikiforov and V.B. Uvarov. *Special Functions of Mathematical Physics*. Birkhauser, Basel, (1988).
- [147] V.S. Varadarajan. *Algebra in Ancient and Modern Times*. American Mathematical Society, pages 87-91, (1998).
- [148] M. D. de Oliveira and A. G. M. Schmidt, *Phys. Scr.*, **95**, 5 (2020).
- [149] H. Akcay and C. Tezcan, *Int. J. Mod. Phys. C*, **20**, 931 (2009).
- [150] Gustav Mie, *Ann. Physik*, **316**, 8 (1903).
- [151] A. Kratzer, *Z. Phys.*, **3**, 289 (1920).
- [152] E. Fues, *Ann. Physik* , **80**, 367 (1926).

- [153] C. Berkdemir, A. Berkdemir and J. Han, *Chem. Phys. Lett.*, **417**, 326 (2006).
- [154] C. L. Pekeris, *Phys. Rev.*, **45**, 98 (1934).
- [155] A. P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov and O.I. Marichev, *Integrals and Series: Special functions*. Integrals and Series. Gordon and Breach Science Publishers, (1986).
- [156] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Elsevier Science, (2007).