



INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade Federal Fluminense

Luis Guilherme Tenório Moura

**Vórtices Ópticos Fracionários na Geração de
Segundo Harmônico**

Niterói - RJ

2020

Luis Guilherme Tenório Moura

VÓRTICES ÓPTICOS FRACIONÁRIOS NA GERAÇÃO DE
SEGUNDO HARMÔNICO

Dissertação de Mestrado apresentado ao
Programa de Pós-Graduação em Física
da Universidade Federal Fluminense como
pré-requisito para obtenção do título de
Mestre em Física.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Daniel Schneider Tasca

Niterói - RJ

2020

Ficha catalográfica automática - SDC/BIF
Gerada com informações fornecidas pelo autor

M929v Moura, Luis Guilherme Tenório
Vórtices Ópticos Fracionários na Geração de Segundo
Harmônico / Luis Guilherme Tenório Moura ; Daniel Schneider
Tasca, orientador. Niterói, 2020.
85 p. : il.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,
Niterói, 2020.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22409/PPGF.2020.m.10336142463>

1. Ótica Não-Linear. 2. Luz Estruturada. 3. Momento Angular
Orbital da Luz. 4. Produção intelectual. I. Tasca, Daniel
Schneider, orientador. II. Universidade Federal Fluminense.
Instituto de Física. III. Título.

CDD -

*Dedico este trabalho a minha mãe Kátiuska
e a minha avó Maria do Carmo*

Vórtices ópticos fracionários se distinguem dos tradicionais vórtices de fase por possuírem uma descontinuidade em sua fase, que leva a uma interferência destrutiva local. Neste trabalho nós revisamos uma forma de descrever esses feixes, onde um autoestado de momento angular orbital (MAO) é expandido na base do ângulo azimutal. Dessa maneira, é possível obter a decomposição de um vórtice com carga topológica fracionária em termos de vórtices de cargas inteiras, sendo estes últimos já conhecidos pela literatura por serem descritos pela família de modos Laguerre-Gaussianos. Além disso, nessa descrição, a posição angular da descontinuidade de fase é independente dos demais parâmetros, e esta pode afetar as relações de ortogonalidade entre os vórtices.

Com o auxílio de um modulador espacial de luz, produzimos esses feixes e o imageamos num cristal não-linear com casamento de fase tipo-II. Foi observado a geração de segundo harmônico, bem como o dobramento do momento angular orbital médio, como indicado pela técnica da lente inclinada. Apesar dos feixes gerados possuírem MAO inteiro, sua distribuição de intensidade transversa se distingue do perfil de um modo Laguerre-Gaussiano, o que indica a geração de uma superposição de vórtices.

Palavras-chave: Momento Angular Orbital, Vórtices Ópticos, Ótica Não-linear.

ABSTRACT

Fractional optical vortexes are distinguished from traditional phase vortexes because they have a discontinuity in their phase, which leads to local destructive interference. In this work we review a way to describe these beams, where an orbital angular momentum (OAM) is expanded on the basis of the azimuth angle. In this way, it is possible to obtain the decomposition of a vortex with fractional topological charge in terms of integer charge vortexes, the latter being already known in the literature for being described by Laguerre-Gaussian modes. In addition, in this description, the angular position of the phase discontinuity is independent of the other parameters, and this can affect the orthogonality relationships between the vortexes.

With the aid of a spatial light modulator, we produced these beams and imaged them on a non-linear crystal with type-II phase matching. The second harmonic generation was observed, as well as the doubling of the mean orbital angular momentum, as indicated by the tilted lens technique. Although the beams generated have an entire OAM, their transverse intensity distribution differs from the profile of a Laguerre-Gaussian mode, which indicates the generation of a superposition of vortexes.

Keywords: Orbital Angular Momentum, Optical Vortexes, Non-linear Optics.

1	Introdução	1
2	Fundamentos	3
2.1	A Equação de Onda	4
2.2	A aproximação paraxial	5
2.2.1	Modos Transversais	6
2.3	O Momento Angular da Luz	10
2.4	Ótica Não-Linear	13
2.4.1	Simetrias na Susceptibilidade de 2 ^a ordem	15
2.4.2	Equação de onda na matéria	17
2.4.3	Mistura de 3 ondas	18
2.4.4	Acoplamento de vórtices na geração de 2 ^o harmônico	22
3	Vórtices Fracionários	29
4	Modulação da Frente de Onda	38
4.1	Modulador Espacial de Luz	40
4.2	Geração de vórtices ópticos	43
5	Arranjo Experimental	47
5.1	Resultados	49

Conclusão	56
A Ótica Numérica (MATLAB)	58
A.1 Discretização de Funções Contínuas	58
A.2 Cálculo de Modos Transversais	59
A.3 Integração Numérica	63
Bibliografia	68

LISTA DE FIGURAS

2.1	a) Parâmetros do modo gaussiano. b) Distribuição de intensidade transversal de um Feixe Gaussiano.	7
2.2	Família de modos Hermite-Gaussianos.	8
2.3	Família de modos Laguerre-Gaussianos.	9
2.4	A distribuição de amplitude e fase é capaz de atribuir momento angular à luz. a) Luz com polarização circular possui um momento angular de spin de $\hbar\sigma$ associado a orientação da polarização. b) Frentes de onda com uma distribuição de fase azimutal possuem um perfil helicoidal, e além disso, momento angular orbital de $\hbar l$ por fóton. Uma analogia é pensar numa onda plana com frente de onda torcida.	12
2.5	Enquanto que a ótica linear descreve fenômenos como refração e reflexão, a não-linear exhibe efeitos tais como geração de 2º harmônico e subtração de frequências. a) No caso linear, não há geração de novas frequências. b) No meio não-linear podemos ter o acoplamento entre diversas frequências, provocando a geração de novos harmônicos.	13
2.6	A seta aponta para o suposto perfil de intensidade do segundo harmônico.	14

2.7	Evolução da intensidade dos campos envolvidos na mistura de 3 ondas, considerando $\Delta k = 0$. a) Simulação numérica. As curvas para A_1 e A_2 estão superpostas pois possuem as mesmas condições iniciais. b) Foto lateral de um cristal sob dinâmica não-linear. Na condição de casamento de fase perfeito, todo o campo fundamental é capaz de ser convertido no campo de harmônico superior.	20
2.8	a) Simulação numérica. b) Foto lateral de um cristal. O descasamento de fase prejudica a eficiência das trocas de energia entre os campos. . .	21
2.9	A interpretação quântica da mistura de 3 ondas exhibe as relações fundamentais de a) conservação de energia e b) conservação de momento. .	21
2.10	a) Integrais de recobrimento cuja carga topológica no campo de 2º harmônico corresponde à soma das cargas dos campos fundamentais. Quanto maior a diferença $ m - n $, menor será a eficiência do acoplamento devido a diferença entre os diâmetros dos feixes. b) Representação gráfica da conservação do momento angular orbital na mistura de 3 ondas. Os termos não-nulos correspondem aos modos que satisfazem $l = m$. c) Integral de recobrimento que ilustra a influência de cargas radiais no acoplamento.	26
2.11	Integrais de recobrimento envolvendo soma de cargas topológicas de sinais opostos. Apesar da ausência de cargas radiais nos campos fundamentais, podemos gerar campos com diversas estruturas radiais se o momento angular orbital dos modos fundamentais possuírem orientações opostas.	27
3.1	a) Perfil de intensidade transversal e distribuição de fase para um vórtice fracionário de carga $l = 1/2$ com uma descontinuidade de fase de $\alpha = \pi$ radianos, responsável pela região de intensidade nula na borda do perfil. Em b), a descontinuidade está posicionada em $\alpha = 3\pi/2$ radianos. A linha tracejada indica nossa referência em $\phi = 0$	30
3.2	Gráfico de $g \times \phi$. Em $\phi = \alpha = \pi$, temos um descontinuidade de π radianos. O mínimo da função g foi deslocado para $g = 0$	32

3.3	Estrutura de fase para a) $M = 1/2$ e b) $M = 3/2$. A posição da descontinuidade de ambas é $\alpha = 0$, e se encontra sobre o ângulo de referência. Em c) e d), a descontinuidade está em $\alpha = 4\pi/3$	33
3.4	Distribuição de pesos em função das cargas M e M' . a) Para $\beta = 0$, os pesos independem de M e M' quando $M - M' \in \mathbb{Z}$. Nos demais casos, b) $\beta = \pi/4$, c) $\beta = \pi/2$, e d) $\beta = \pi$, temos que os pesos dependerão de M e M' em qualquer caso. Em particular, para $\beta = \pi$, teremos estados ortogonais quando $M = M'$, com $\mu = \mu' = 1/2$	36
3.5	Decomposição modal para vórtices de cargas a) $M = 1/2$ e b) $M = 1.3$ na base de modos de cargas inteiras.	37
4.1	Exemplos de luz espacialmente estruturada, com as respectivas amplitudes (frente) e fase (atrás).	40
4.2	Representação esquemática de um eletrodo no SLM contendo um ensemble de cristais líquidos nemáticos.	41
4.3	a) Deslocamento transversal causado por uma rampa linear, que age como um prisma sobre o feixe. b) Deslocamento axial devido a uma lente. c) Concatenação dos efeitos de prisma + lente.	43
4.4	Uma lâmina de fase espiral transformando a frente de onda plana numa frente helicoidal com $l = 2$	44
4.5	Conversão de modos HG em LG usando um par de lentes cilíndricas.	45
4.6	Distribuições de fase para produzir um feixe com carga topológica $l = 2$. A estrutura de fase à esquerda é somada uma rampa de fase linear (centro) que funciona com uma grade de difração. A grade resultante (direita) possui um "garfo" que contém a singularidade em seu centro.	46
5.1	Setup experimental.	48
5.2	Dobramento de MAO na geração de 2º harmônico para modos Laguerre-Gauss, que possuem carga topológica inteira. Os perfis foram convertidos em modos Hermite-Gauss através de uma lente inclinada. O número de linhas nodais equivale a carga topológica do modo.	49

5.3	Dobramento de MAO na geração de 2º harmônico para modos Laguerre-Gauss com carga topológica negativa. Distinguimos o sinal da carga pela direção dos modos Hermite-Gauss convertidos.	50
5.4	Perfis de intensidade para vórtices fracionários de carga a) 1/2 e b) 3/2.	50
5.5	Vórtices fracionários convertidos em modos Hermite-Gauss.	51
5.6	Vórtices fracionários de cargas negativas convertidos em modos Hermite-Gauss.	51
5.7	Perfis de intensidade criados a partir da mistura de 3 ondas entre vórtices fracionários de mesma carga topológica média. Esses campos possuem o dobro do MAO médio ((a) 1, b) 3) daqueles que incidem no cristal não-linear.	52
5.8	Perfil de intensidade numérico para vórtice fracionário de carga $M = 1/2$.	53
5.9	Decomposição em modos Laguerre-Gauss da superposição criada pela geração de 2º harmônico de um vórtice com $M = 1/2$. Os feixes de frequência fundamental são idênticos, ou seja, possuem mesma carga e suas descontinuidades estão igualmente posicionadas.	54
5.10	A posição relativa da descontinuidade é π radianos, o que modifica as integrais de recobrimento à 3 modos.	54
A.1	Discretização do intervalo $[x_l, x_r]$ dos reais \mathbb{R} em N subintervalos. . . .	59
A.2	Divisão de uma função $f(x)$ em N partes. Assumimos que num subintervalo seu valor é constante. Quanto mais subintervalos considerarmos, mais fiel essa representação será da função original.	64

Em 1992 foi demonstrado por Allen e colaboradores que feixes de luz com uma estrutura de fase azimutal $e^{il\phi}$ possuem um momento angular orbital (MAO) na direção z de $\hbar l$, por conta da componente azimutal do vetor de Poynting. Esses feixes possuem uma singularidade de fase em seu centro, e por conta disso também são conhecidos como *vórtices ópticos*. Tais padrões de fase são de interesse em informação e comunicação quântica [1, 2], manipulação de partículas [3], entre outros.

Em experimentos de ótica, essas estruturas geralmente são descritas pela família de modos paraxiais Laguerre-Gaussianos, que são rotineiramente produzidos através de moduladores espaciais de luz. Nesses dispositivos, é programada uma fase que varia de maneira azimutal, imprimindo um salto de $2\pi l$ na fase do campo eletromagnético.

Porém, podemos generalizar a confecção dessas máscaras de fase para o caso em que l é um número não-inteiro. Dessa maneira, o feixe na qual essa máscara será impressa atribuirá um momento angular orbital médio de valor não-inteiro, onde esse campo pode ser entendido como uma superposição de modos Laguerre-Gaussianos. Tais feixes se destacam por apresentar uma descontinuidade de fase, o que leva à uma interferência destrutiva em seu perfil de intensidade.

Estudar a geração e caracterização de feixes com MAO não-inteiro é desejável para usá-los em aplicações modernas. Não apenas isso, mas sua dinâmica no processo de mistura de 3 ondas, que envolve superposições de modos Laguerre-Gauss

e a manipulação de mais um grau de liberdade (a descontinuidade de fase), pode revelar fenômenos curiosos. As aplicações dos *vórtices fracionários* são similares a de vórtices de cargas inteiras, mas a sua estrutura mais complexa possibilita uma extensão das aplicações envolvendo os tradicionais vórtices, dentre elas as já citadas pinças óticas [4, 5], comunicação quântica [6], além de filtragem espacial [7], etc.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no Capítulo 2 apresentamos as teorias que embasam esse estudo. Derivamos a equação que dita a evolução espacial no vácuo de feixes paraxiais a partir das Equações de Maxwell. As famílias de soluções mais comuns da equação paraxial são apresentadas. Discutiu-se o momento angular da luz, tanto de spin quanto orbital, e o quantificamos usando o eletromagnetismo clássico. Por fim, mostramos a dinâmica de um campo elétrico propagando-se num meio não-linear de segunda ordem, estudando o caso particular da propagação de vórtices óticos.

No Capítulo 3 revisamos uma descrição para vórtices fracionários que inclui um grau de liberdade adicional: a posição da descontinuidade de fase. Veremos que essa quantidade pode afetar as relações de ortogonalidade entre modos com MAO fracionário.

O Capítulo 4 dá início com um breve histórico das técnicas de modulação da luz. A estrutura de um modulador espacial de luz foi apresentada, e além disso, como podemos utilizá-lo para controle da distribuição de intensidade transversa de um feixe laser. Em particular, descrevemos algumas técnicas modernas para geração de vórtices óticos.

O esquema do experimento é descrito no Capítulo 5. Os campos produzidos experimentalmente serão estudados através de simulações numéricas. A partir disso, apresentaremos nossos resultados e os discutiremos.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS

Fenômenos elétricos e magnéticos podem ser tratados de maneira independente em problemas estacionários. Apesar disso, a comunidade acreditava que havia uma relação entre os campos elétricos e magnéticos. As primeiras evidências surgiram em 1820, quando o físico dinamarquês Hans Christian Ørsted deixou uma bússula próximo a um fio condutor. Ele observou que a passagem de uma corrente elétrica através do fio vinha acompanhada de uma resposta por parte da bússula. Eis o que houve: a corrente induziu um campo magnético, que interferiu com o campo magnético da bússula, acusando sua resposta. Essa foi a primeira constatação da relação entre os campos elétricos e magnéticos.

Em 1865, o físico escocês James Clerk Maxwell sintetizou as expressões que descreviam a relação entre esses campos num conjunto de 4 equações, hoje conhecidas como *Equações de Maxwell*:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J}, \quad (2.1d)$$

onde \mathbf{E} é o vetor campo elétrico, \mathbf{B} o vetor campo magnético, e ρ (\mathbf{J}) representa a

distribuição de carga (corrente). ϵ_0 e μ_0 são as constantes de permissividade elétrica e permeabilidade magnética no vácuo, respectivamente.

2.1 A Equação de Onda

De maneira geral, cargas elétricas em movimento geram um campo elétrico, que gera um campo magnético, e assim sucessivamente, tal que essa evolução conjunta propaga-se pelo espaço com uma certa velocidade [8]. Vamos encontrar a Equação que rege a dinâmica desses campos partindo da substituição da Equação (2.1d) no rotacional da Equação (2.1c):

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}. \quad (2.2)$$

O lado direito desta Equação pode ser reescrita usando a identidade $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$, e assim, usando (2.1a):

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \frac{\rho}{\epsilon_0} - \nabla^2 \mathbf{E}. \quad (2.3)$$

Se nós considerarmos o vácuo ou um meio sem acúmulo de cargas ou correntes, $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = 0$, obtemos a Equação de onda:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.4)$$

Podemos também fazer uma dedução similar e encontrar a mesma Equação para o campo magnético:

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.5)$$

Esse tipo de Equação está presente em diferentes tipos de fenômenos físicos, tais como ondas de pressão, oscilações mecânicas numa corda, etc. [9] Portanto, no vácuo, as equações de Maxwell mostram que os campos elétricos e magnéticos se propagam como ondas, com velocidade de fase $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-\frac{1}{2}}$. Isso foi um grande resultado para a época, pois mostrou que a luz era uma forma de manifestação do campo eletromagnético, e com isso unificando a *Óptica* com o *Eletromagnetismo Clássico*.

Além disso, essas ondas são perpendiculares entre si e oscilam em fase. Devido a amplitude do campo elétrico ser da ordem de 10^8 vezes maior que a do campo

magnético, nós podemos dedicar nossa atenção a estudar apenas a amplitude do campo elétrico, pois este será responsável pela grande maioria dos fenômenos ópticos.

Vamos considerar o caso de uma onda monocromática com dependência temporal harmônica $e^{i\omega t}$, visto que essa aproximação descreve bem um feixe de luz laser. Dessa maneira, nós podemos fatorar as partes espacial e temporal da amplitude complexa, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$. Usando Equação (2.4), nós obtemos a *Equação de Helmholtz*, que descreve a evolução da distribuição espacial do campo:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.6)$$

onde $k = \omega/c$.

2.2 A aproximação paraxial

A Equação de Helmholtz admite infinitas soluções. Uma classe particular de soluções é obtida a partir da aproximação paraxial. Nessa aproximação, as ondas (paraxiais) possuem um vetor de onda cujas componentes transversais são muito menores que a componente longitudinal, ou seja, o campo não diverge muito ao longo de sua propagação. Formalmente, considera-se uma onda plana modulada por um envelope complexo, que se propaga ao longo do eixo z :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})e^{ikz}\hat{\mathbf{e}}. \quad (2.7)$$

O vetor $\hat{\mathbf{e}}$ indica a direção da polarização, sendo esta ortogonal ao vetor de onda \mathbf{k} em virtude das Equações de Maxwell, enquanto que a fase e^{ikz} representa uma dependência rápida na coordenada z , e possui um período espacial de $\lambda = 2\pi/k$ na direção de propagação. O fator $U(\mathbf{r})$ representa a estrutura transversal da amplitude, onde assumiremos que este diverge lentamente ao longo de distâncias da ordem de λ . Tal consideração é razoável quando queremos descrever feixes óticos colimados, que preservam sua forma por longas distâncias. Matematicamente:

$$\left| \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right| \ll \left| k \frac{\partial U}{\partial z} \right|. \quad (2.8)$$

De maneira que a onda (2.7) satisfaça a Equação de Helmholtz, o envelope complexo U deve satisfazer outra equação diferencial parcial [10] Tal Equação é obtida

ao usarmos a aproximação (2.8) na Equação de Helmholtz (2.6), o que nos leva à Equação de Helmholtz Paraxial:

$$\nabla_{\perp}^2 U + 2ik \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad (2.9)$$

onde $\nabla_{\perp} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ é o laplaciano transversal.

2.2.1 Modos Transversais

A solução mais conhecida da Equação Paraxial é o Feixe Gaussiano:

$$U(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w(z)} \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} + ik \frac{x^2 + y^2}{R(z)} - i \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right) \right], \quad (2.10)$$

onde:

$$w = w_0 \sqrt{1 + (z/z_R)^2}, \quad (2.11)$$

é a largura do feixe na posição z , pois a região delimitada por ela contém $\approx 87\%$ da intensidade total, e w_0 é a cintura do feixe, e corresponde a largura na posição $z = 0$, tomado como sendo o plano focal.

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right], \quad (2.12)$$

é o raio de curvatura da frente de onda na posição z .

$$z_R = \pi w_0^2 / \lambda, \quad (2.13)$$

é o comprimento de Rayleigh, que é uma medida de divergência do feixe. O argumento $\phi(z) = \arctan(z/z_R)$ é a fase de Gouy, e representa uma retardação adquirida por uma frente de onda gaussiana com respeito a uma onda plana [11, 12].

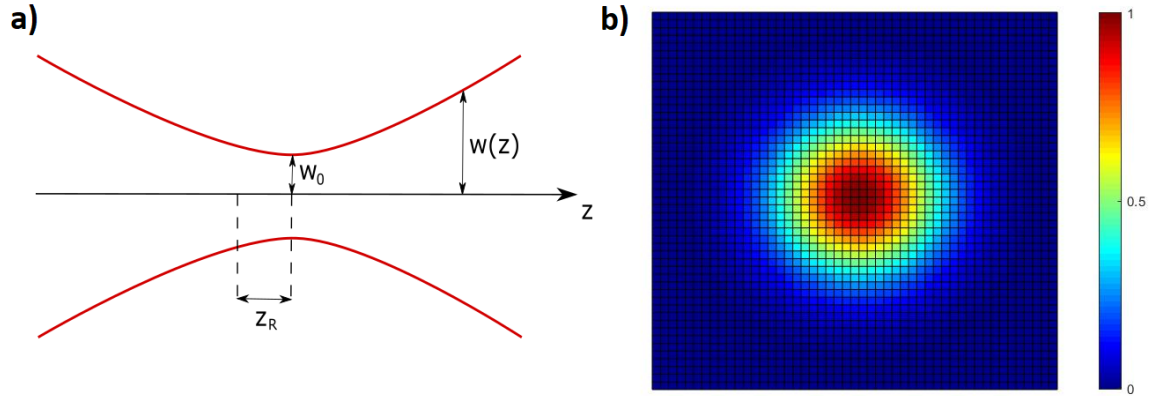


Figura 2.1: a) Parâmetros do modo gaussiano. b) Distribuição de intensidade transversal de um Feixe Gaussiano.

Formalmente, o vetor de polarização \hat{e} dependeria da coordenada \vec{r} , pois esta não é necessariamente transversal ao vetor de onda. Se Φ é o argumento de (2.10):

$$\vec{k} = \vec{\nabla}\Phi, \quad (2.14)$$

e portanto \vec{k} possuiria componentes radiais, que seriam paralelas à polarização. Porém, em regime paraxial, podemos assumir que os efeitos difrativos são manifestados apenas na amplitude $U(\vec{r})$, e que portanto vale a teoria da difração escalar. Vemos isso tomando como exemplo um feixe com comprimento de onda $\lambda = 1\mu m$ e cintura $w_0 = 1mm$, cujo comprimento de Rayleigh será $z_R \approx 1m$. Para esse feixe, o raio de curvatura mínimo, que se encontra em $z = z_R$, será também da ordem de "metros", logo, $R(z_R) \gg w_0$. Ou seja, a frente de onda será aproximadamente plana, retomando a sentença de que as componentes transversais de \vec{k} são muito pequenas frente à k_z .

Ainda em coordenadas cartesianas, podemos obter um conjunto mais geral de soluções conhecidos como modos Hermite-Gaussiano:

$$HG_{mn}(x, y, z) = A_{mn} \frac{1}{w(z)} H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) \exp \left(- \frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right) \times \exp \left[ik \frac{x^2 + y^2}{R(z)} - i(N_{mn} + 1) \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right) \right], \quad (2.15)$$

onde H_m é o polinômio de Hermite de ordem m , $N_{mn} = m + n$ é a ordem do modo, e A_{mn} é um coeficiente de normalização. Os índices m e n são inteiros não-negativos.

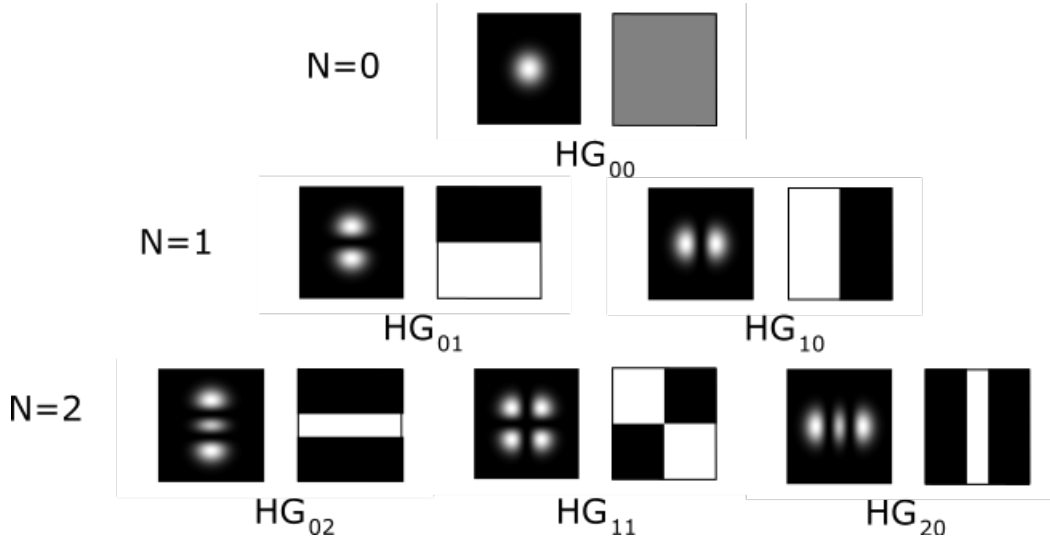


Figura 2.2: Família de modos Hermite-Gaussianos.

Resolvendo a Equação Paraxial em coordenadas cilíndricas obtêm-se os modos Laguerre-Gaussiano:

$$\begin{aligned}
 LG_p^l(\rho, \phi, z) = & \sqrt{\frac{2p!}{\pi(p+|l|)!}} \frac{1}{w(z)} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)}\right)^{|l|} L_p^{|l|}\left(\frac{2\rho^2}{w^2(z)}\right) \exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right) \times \\
 & \exp\left[i\frac{k\rho^2}{2R(z)} + il\phi - i(N_{pl} + 1) \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right)\right], \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

sendo $L_p^{|l|}$ o polinômio associado de Laguerre, $N_{pl} = 2p + |l|$ a ordem do modo. Os modos são rotulados pelos índices inteiros p e l , com $p \geq 0$, e l podendo assumir qualquer valor inteiro. Na Figura 2.3 estão plotados a intensidade e fase das primeiras ordens dos feixes Laguerre-Gauss, em $z = 0$.

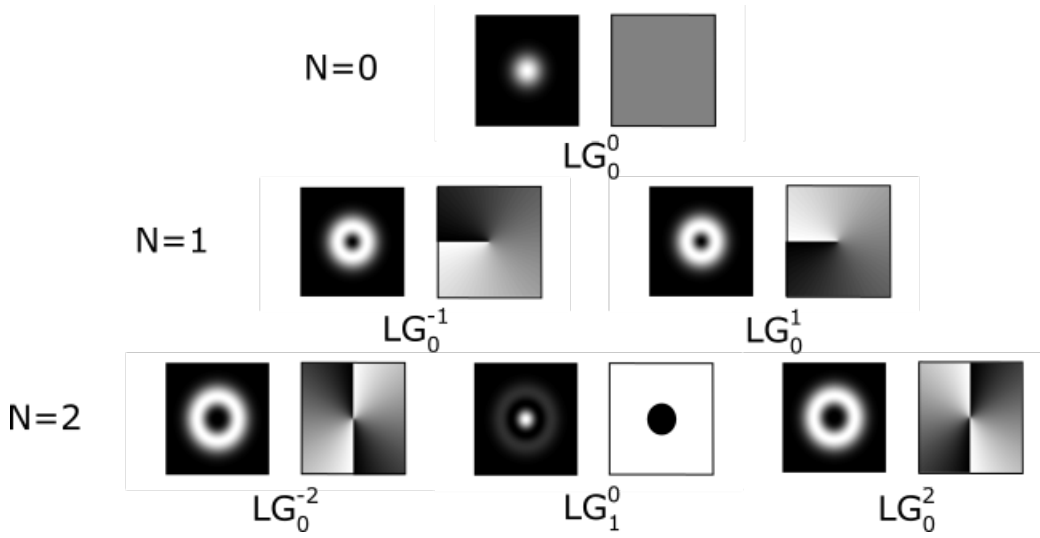


Figura 2.3: Família de modos Laguerre-Gaussianos.

Os dois conjuntos de índices $\{m, n\}$ e $\{l, p\}$ caracterizam o modo em questão, e ambos reduzem ao feixe Gaussiano quando $m = n = 0$ e $l = p = 0$. Por essa razão o modo Gaussiano por vezes é chamado de modo fundamental.

Uma propriedade bastante útil de ambas as famílias de soluções é que os modos com índices diferentes são ortogonais:

$$\begin{aligned} \langle LG_p^{l|} | LG_q^{m|} \rangle &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty (LG_p^{l|})^* LG_q^{m|} r dr d\phi \\ &= \delta_{pq} \delta_{lm}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde $*$ denota uma conjugação complexa. Esta relação também se verifica para os modos Hermite. Portanto constituem uma base para as funções quadrado-integráveis, logo, qualquer modo pode ser decomposto na base $\{LG_p^{l|}\}$ ou $\{HG_{mn}\}$:

$$U(\vec{r}) = \sum_{\substack{p=0 \\ l=-\infty}}^{\infty} C_{pl} LG_p^{l|}(\rho, \phi, z). \quad (2.18)$$

Um exemplo conhecido envolvendo a completeza desses modos é a relação que há entre os modos $LG_p^{l|}$ e HG_{mn} de primeira ordem:

$$LG_0^{|\pm 1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} (HG_{10} \pm iHG_{01}), \quad (2.19)$$

cujo o espaço onde são definidos é homeomorfo à esfera de Bloch, o que possibilita o uso desses estados como bits quânticos (qubits) óticos. Tal propriedade revela-se ainda mais rica quando incluímos um outro grau de liberdade: a polarização, que também pode ser representada por uma esfera análoga à esfera de Bloch. Com isso torna-se possível criar estados que apresentam não-separabilidade clássica [13], e empregá-los em protocolos de informação quântica [14, 15].

2.3 O Momento Angular da Luz

Poucas grandezas têm uma relevância histórica na física tão grande quanto o momento angular. De fato, as origens da mecânica quântica remontam ao estudo da estrutura de átomos e moléculas, onde o momento angular eletrônico tem papel fundamental na estabilidade dos orbitais. Além disso, muitos problemas apresentam invariância rotacional, onde, pelo teorema de Noether, o momento angular se conserva.

Em 1909, Poynting previu que a luz com polarização circular exerceria um torque numa placa birefringente, e que a razão entre seu momento angular e linear seria $\pm 1/k$ [16]. Beth [17], em 1936, conseguiu observar as previsões de Poynting, medindo a transferência de momento angular que ocorria numa lâmina de meia onda, suspensa por um fino fio de quartzo, quando um feixe com polarização circular a atravessava. Tal efeito ocorre pois os fótons que constituem a luz em questão possuem um momento angular intrínseco, o spin.

Allen [18], em 1992, demonstrou que feixes com uma estrutura de fase azimutal $e^{il\phi}$ possuem um momento angular orbital (MAO) de $l\hbar$ por fóton, na direção de propagação, onde l é um número inteiro denominado *carga topológica*, e além disso, tal estrutura atribui uma frente de onda helicoidal ao feixe. Porém, ao contrário de seu spin, que pode assumir apenas os valores $\pm\hbar$, o MAO pode assumir qualquer valor que seja múltiplo inteiro de \hbar , e por conta disso há muito interesse em aplicar esse grau de liberdade para codificar informação num espaço de dimensão maior ($2l + 1$) que os tradicionais qubits [19]. Esses feixes se destacam por possuírem uma singularidade de fase no centro do feixe, e por conta disso apresentam intensidade nula nessa região. Por essa razão também são chamados de *vórtices óticos*.

Iremos calcular o momento angular associado ao campo eletromagnético partindo da densidade de momento linear no vácuo [20]:

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)]. \quad (2.20)$$

A densidade de momento angular associada é dada por:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r} \times \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r} \times \epsilon_0[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)]. \quad (2.21)$$

O momento angular total é obtido integrando a densidade de momento angular sobre um volume V do espaço:

$$\mathbf{J} = \epsilon_0 \int_V \mathbf{r} \times [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] dv. \quad (2.22)$$

Podemos reescrever a expressão acima através do potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \epsilon_0 \int_V \mathbf{r} \times \{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times [\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]\} dv \\ &= \epsilon_0 \int_V \mathbf{r} \times \left\{ \sum_{j=1}^3 E_j \nabla A_j - (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{A} \right\} dv, \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde usamos a identidade $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$, de maneira que:

$$\mathbf{J} = \epsilon_0 \int_V \left\{ \sum_{j=1}^3 E_j (\mathbf{r} \times \nabla) A_j - \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{A} \right\} dv, \quad (2.24)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{A} &= \sum_{j=1}^3 [\nabla_j (E_j \mathbf{r} \times \mathbf{A})] - \mathbf{r} \times \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{A} \times (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{r} \\ &= \sum_{j=1}^3 [\nabla_j (E_j \mathbf{r} \times \mathbf{A})] - \mathbf{r} \times \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{A} \times \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

e $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ devido à Equação de Maxwell (2.1a) na ausência de matéria. Logo:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \epsilon_0 \left\{ \sum_{j=1}^3 \int_V [E_j (\mathbf{r} \times \nabla) A_j] dv - \sum_{j=1}^3 \int_V \nabla_j (E_j \mathbf{r} \times \mathbf{A}) dv + \right. \\ &\quad \left. \int_V (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) dv \right\}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

No segundo termo da Equação (2.26) podemos aplicar o teorema da divergência. Além disso, se supusermos que o campo elétrico é nulo quando $r \rightarrow \infty$:

$$\int_V \nabla_j (E_j \mathbf{r} \times \mathbf{A}) dv = \oint_S E_j (\mathbf{r} \times \mathbf{A}) ds_j = 0, \quad (2.27)$$

e portanto, ficamos com:

$$\mathbf{J} = \epsilon_0 \int_V (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) dv + \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \int_V [E_j (\mathbf{r} \times \nabla) A_j] dv \quad (2.28)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{S} + \mathbf{L}. \quad (2.29)$$

Podemos pensar no termo $\mathbf{S} = \epsilon_0 \int_V (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) dv$ como um momento angular intrínseco do campo, pois independe do sistema de coordenadas adotado, e depende do estado de polarização do campo elétrico. No caso da polarização linear, teremos que $\mathbf{S} = 0$. Já o termo $\mathbf{L} = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \int_V [E_j (\mathbf{r} \times \nabla) A_j] dv$ depende da distribuição espacial do campo, e portanto, está associado ao momento angular orbital do campo eletromagnético, visto que seu caráter é relativo à origem escolhida. Além disso, temos também a presença do operador de momento angular orbital da mecânica quântica, $\mathbf{r} \times \nabla$. Figura 2.4 (Fonte [21]) apresenta distribuições de polarização e fase junto com o momento angular associado.

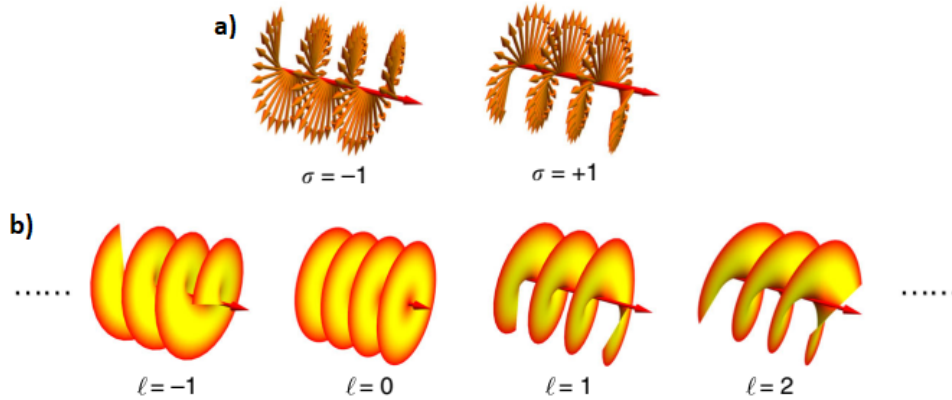


Figura 2.4: A distribuição de amplitude e fase é capaz de atribuir momento angular à luz. a) Luz com polarização circular possui um momento angular de spin de $\hbar\sigma$ associado a orientação da polarização. b) Frentes de onda com uma distribuição de fase azimutal possuem um perfil helicoidal, e além disso, momento angular orbital de $\hbar l$ por fóton. Uma analogia é pensar numa onda plana com frente de onda torcida.

2.4 Ótica Não-Linear

”Physics would be dull and life most unfulfilling if all physical phenomena around us were linear. Fortunately, we are living in a nonlinear world. While linearization beautifies physics, nonlinearity provides excitement.”

Shen, 1984

Quase todos os sistemas reais são não-lineares. Nesses sistemas, o princípio da superposição não é mais válido, ou seja, sua resposta não é mais proporcional ao estímulo que recebe. Apesar de possuir uma descrição matemática mais complicada, a gama de fenômenos que emergem geram entusiasmo em todas as áreas da física. A Figura 2.5 cita alguns exemplos no campo da ótica.

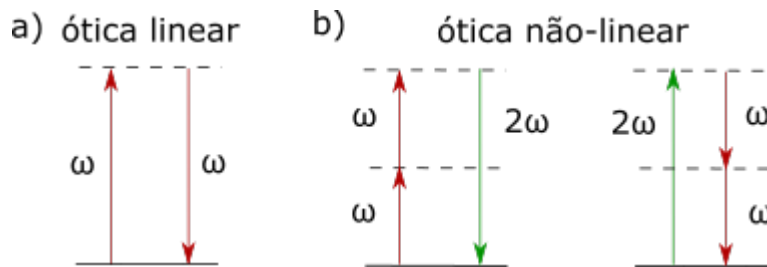


Figura 2.5: Enquanto que a ótica linear descreve fenômenos como refração e reflexão, a não-linear exibe efeitos tais como geração de 2º harmônico e subtração de frequências. a) No caso linear, não há geração de novas frequências. b) No meio não-linear podemos ter o acoplamento entre diversas frequências, provocando a geração de novos harmônicos.

O primeiro efeito ótico não-linear previsto foi a absorção de 2 fótons, em 1931, mas que só foi explorado após 1961, por Peter Franken nos laboratórios Bell [22] pouco tempo após a invenção do laser por Ted Maiman [23]. O efeito em questão é conhecido como *geração de segundo harmônico*, pois, seguindo a absorção de 2 fótons de frequência ω , há a emissão de 1 fóton de frequência 2ω . Alguns fatores contribuem para que a intensidade dos campos de harmônicos superiores sejam muito pouco intensas, e por essa razão esses efeitos só podem observados de maneira apreciável através de uma fonte de luz muito intensa como a do laser. É curioso notar que no artigo de Franken, o perfil de intensidade era tão pequeno, comparado ao campo fundamental,

que o editor pensou que fosse uma mancha e resolveu remover da versão final.

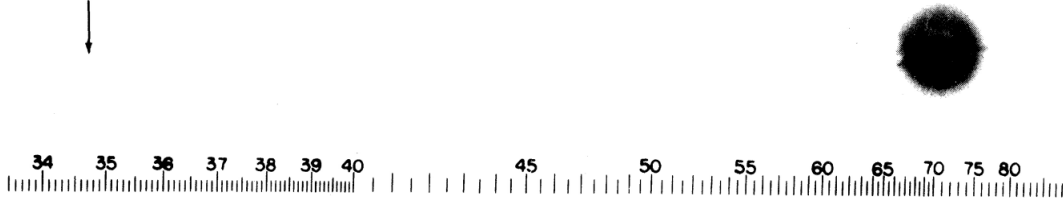


Figura 2.6: A seta aponta para o suposto perfil de intensidade do segundo harmônico.

Quando um campo elétrico é aplicado sobre um meio dielétrico, nele será induzido um momento de dipolo que será responsável por criar um campo de polarização definido por:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}, \quad (2.30)$$

onde esta relação é, de maneira geral, não-linear com a amplitude do campo \mathbf{E} . O conteúdo não-linear repousa sobre a grandeza χ , chamado de susceptibilidade elétrica, que quantifica a resposta do meio a aplicação de um campo \mathbf{E} , e que pode ser expandida numa série de potências:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\chi^{(1)} \mathbf{E} + \chi^{(2)} \mathbf{E}\mathbf{E} + \chi^{(3)} \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots) \quad (2.31)$$

$$= \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(2)} + \mathbf{P}^{(3)} + \dots \quad (2.32)$$

$$= \mathbf{P}^L + \mathbf{P}^{NL}. \quad (2.33)$$

Sendo:

$$\mathbf{P}^L = \epsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E}, \quad (2.34)$$

$$\mathbf{P}^{NL} = \epsilon_0 (\chi^{(2)} \mathbf{E}\mathbf{E} + \chi^{(3)} \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots). \quad (2.35)$$

Devido ao caráter vetorial da luz, $\chi^{(a)}$ é um tensor de ordem $a + 1$. Se o meio em questão não apresenta perdas ou dispersão, as susceptibilidades $\chi^{(a)}$ são todas constantes. Essa suposição considera que a resposta do material é instantânea e que portanto não depende da frequência do campo. [24] Para um meio com dispersão, as quantidades $\chi^{(a)}$ são responsáveis pelo acoplamento das diferentes componentes de frequência do campo com a polarização. Além disso, ao contrário do caso linear, a polarização não será mais necessariamente paralela ao campo incidente.

Cada termo da expansão (2.32) é responsável por vários fenômenos ópticos. Por exemplo, o termo linear $\mathbf{P}^{(1)}$ descreve efeitos como reflexão e refração. Nessa dissertação, estamos interessados nos efeitos proporcionados pela susceptibilidade não-linear de 2ª ordem $\chi^{(2)}$, que possuem uma dependência quadrática com a amplitude do campo fundamental, de maneira que a componente i da polarização será dada por:

$$P_i^{(2)}(\omega_3) = \epsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) E_j(\omega_1) E_k(\omega_2). \quad (2.36)$$

Em laboratório, costuma-se bombear um meio não-linear com apenas dois feixes, gerando um terceiro. Nesse caso, escrevendo o bombeio da forma:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1^{in} + \mathbf{E}_2^{in} \quad (2.37)$$

$$= \frac{1}{2} [\mathbf{E}_1 e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)} + c.c.] + \frac{1}{2} [\mathbf{E}_2 e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)} + c.c.]. \quad (2.38)$$

Vamos ter que esse campo induzirá a seguinte resposta sobre o meio:

$$P_i^{(2)} = \epsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{\epsilon_0}{4} \chi_{ijk}^{(2)}(2\omega_1; \omega_1, \omega_1) E_{1j} E_{1k} e^{i(2\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - 2\omega_1 t)} + c.c. \right] + \\ &\left[\frac{\epsilon_0}{4} \chi_{ijk}^{(2)}(2\omega_2; \omega_2, \omega_2) E_{2j} E_{2k} e^{i(2\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - 2\omega_2 t)} + c.c. \right] + \\ &\left[\frac{\epsilon_0}{4} \chi_{ijk}^{(2)}(0; \omega_1, \omega_1) E_{1j} E_{1k}^* + c.c. + \frac{\epsilon_0}{4} \chi_{ijk}^{(2)}(0; \omega_2, \omega_2) E_{2j} E_{2k}^* + c.c. \right] + \\ &\left[\frac{\epsilon_0}{4} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2) E_{1j} E_{2k} e^{i[(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - (\omega_1 + \omega_2)t]} + c.c. \right] + \\ &\left[\frac{\epsilon_0}{4} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1 - \omega_2; \omega_1, \omega_2) E_{1j} E_{2k}^* e^{i[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - (\omega_1 - \omega_2)t]} + c.c. \right]. \quad (2.40) \end{aligned}$$

Cada termo entre colchetes da polarização não-linear de segunda ordem (2.40) oscila com uma frequência distinta das demais, atribuindo a resposta do meio (mediada através da susceptibilidade $\chi^{(2)}$) uma variedade de campos que oscilam com uma frequência que será diferente da frequência do campo de bombeio.

2.4.1 Simetrias na Susceptibilidade de 2ª ordem

Quando estudamos as interações não-lineares que ocorrem dentro do material por ocasião de um bombeio intenso, a estrutura desse material reflete-se na forma com que

o tensor de susceptibilidade se apresenta. Assim, uma descrição completa da interação envolve manipular suas componentes. Podemos simplificar o problema fazendo uso de algumas simetrias presentes no tensor de susceptibilidade, em particular, de 2ª ordem, que restringem a quantidade de componentes. A primeira delas envolve a realidade dos campos:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_1 - \omega_2; -\omega_1, -\omega_2) = \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2)^*. \quad (2.41)$$

Na Equação(2.40) temos um produto na forma $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2)E_{1j}(\omega_1)E_{2k}(\omega_2)$. Porém, os índices $j, k, 1, 2$ são índices mudos, de maneira que podemos permutar j com k e 1 com 2:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2) = \chi_{ikj}^{(2)}(\omega_1 + \omega_2; \omega_2, \omega_1). \quad (2.42)$$

Essa propriedade é conhecida como simetria de permutação intrínseca, e ela é uma declaração de que não importa qual campo será rotulado com 1 ou 2. Temos também uma simetria quando consideramos que não há perdas do campo no meio. Dessa forma, as componentes de $\chi^{(2)}$ serão reais, e, quando combinada com a realidade dos campos:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_1 - \omega_2; -\omega_1, -\omega_2) = \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2). \quad (2.43)$$

A simetria de permutação completa diz que as frequências presentes no argumento da susceptibilidade podem ser permutadas livremente desde que permutemos também os índices associados a elas:

$$\begin{aligned} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2) &= \chi_{jki}^{(2)}(-\omega_1 = \omega_2 - \omega_3; \omega_2, -\omega_3) \\ &= \chi_{kij}^{(2)}(-\omega_2 = \omega_1 - \omega_3; \omega_1, -\omega_3) \\ &= \chi_{jki}^{(2)}(\omega_1 = -\omega_2 + \omega_3; -\omega_2, \omega_3). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Por fim, temos que os campos óticos tipicamente envolvidos na interação oscilam com uma frequência muito menor que a menor frequência de ressonância do material. Nessa condição, a susceptibilidade é essencialmente independente da frequência, e portanto, a resposta ocorrerá de maneira praticamente instantânea, ignorando a dispersão. Assim, as componentes tornam-se constantes, e, além disso, quando combinadas com as simetrias vistas até aqui, para um meio sem perdas, seremos capazes

de permutar os índices sem permutar os argumentos:

$$\begin{aligned}
 \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2) &= \chi_{jki}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2) = \chi_{kij}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2) \\
 &= \chi_{ikj}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2) = \chi_{jik}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2) \\
 &= \chi_{kji}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2; \omega_1, \omega_2) = \chi^{(2)}.
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Portanto, concluímos que apenas uma constante é responsável pelo acoplamento entre os campos no processo de interação não-linear, simplificando as equações de evolução no interior do meio.

2.4.2 Equação de onda na matéria

Quando submetido a um campo elétrico, as cargas fortemente ligadas aos constituintes do material ressoam de maneira harmônica, gerando um campo de polarização:

$$\rho_{pol} = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \tag{2.46}$$

Assim, na ausência de cargas e correntes livres, as equações de Maxwell podem ser reescritas na forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \tag{2.47a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{2.47b}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{2.47c}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{2.47d}$$

onde usamos a relação constitutiva que define o vetor deslocamento elétrico:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E}. \tag{2.48}$$

Tomando o rotacional de(2.47c) e usando(2.47d):

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \tag{2.49}$$

Novamente, podemos usar a identidade $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$, porém, na matéria, geralmente temos que $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0$. Por outro lado, por estarmos em regime

paraxial, a amplitude do campo elétrico é aproximadamente transversal, e portanto, podemos desprezar esse termo. Dessa forma:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \quad (2.50)$$

É interessante separar a polarização nas partes linear e não-linear e observarmos os efeitos que ambas atribuirão no processo de mistura:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1 + \chi^{(1)}}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{NL}}{\partial t^2}. \quad (2.51)$$

A Equação(2.51) destaca-se por apresentar uma dependência com a polarização não-linear \mathbf{P}^{NL} , que age como um termo de fonte para o campo elétrico incidente. Além disso, o índice de refração $n = \sqrt{1 + \chi^{(1)}}$ corrige a velocidade de fase da onda no meio. Na ausência do termo de fonte, recuperamos a Equação de onda homogênea, que admite como solução ondas livres que se propagam com velocidade de fase c/n , bem como da superposição de soluções. Essa Equação também será satisfeita de maneira individual para todas as frequências envolvidas:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_n - \frac{1 + \chi^{(1)}}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_n}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_n^{NL}}{\partial t^2}. \quad (2.52)$$

Escrevendo os campos na forma

$$\mathbf{E}_n = \frac{1}{2} \left[A_n e^{i(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} - \omega_n t)} \hat{\mathbf{e}}_n + c.c. \right], \quad (2.53)$$

separamos a parte vetorial do campo (polarização) de seu envelope complexo A_n . Nisso, podemos assumir que efeitos de anisotropia do material serão manifestados apenas sobre a componente vetorial. Portanto, podemos tratar o problema da interação entre os 3 modos de maneira escalar.

2.4.3 Mistura de 3 ondas

Para descrever as interações não-lineares que ocorrem no interior de um meio não-linear, vamos supor um campo de bombeio na forma (2.38) e considerar apenas o processo de soma de frequências. Dessa maneira, apenas a componente de frequência $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ ($\omega_1 \leq \omega_2$) da polarização de segunda ordem será levada em conta:

$$P^{NL} = P^{(2)} e^{-i\omega_3 t} + c.c., \quad (2.54)$$

onde:

$$P^{(2)} = \epsilon_0 \chi A_1 A_2 e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}} + c.c.. \quad (2.55)$$

Tal componente será responsável por gerar um campo com frequência ω_3 e vetor de onda \mathbf{k}_3 , dado por:

$$E^{NL} = \frac{1}{2} \left[A_3 e^{i(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r} - \omega_3 t)} + c.c. \right]. \quad (2.56)$$

Vamos assumir uma geometria colinear, onde os 3 vetores de onda propagam-se ao longo do eixo z . Levando isso em consideração para um campo de frequência $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, e tendo em vista (2.54) e (2.55), teremos, na Equação de onda (2.52):

$$\frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2} + 2ik_3 \frac{\partial A_3}{\partial z} = -\frac{\omega_3^2 \chi}{c^2} A_1 A_2 e^{i(k_1 + k_2 - k_3)z}, \quad (2.57)$$

onde assumimos que o campo varia apenas ao longo de z . Podemos ainda fazer uso da aproximação da onda lentamente variável (2.8). Além disso, fazendo um tratamento análogo para os campos A_1 e A_2 , obtemos o seguinte conjunto de equações acopladas:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = i \frac{\chi \omega_1}{2n_1 c} A_3 A_2^* e^{-i\Delta k z}, \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} = i \frac{\chi \omega_2}{2n_2 c} A_3 A_1^* e^{-i\Delta k z}, \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} = i \frac{\chi \omega_3}{2n_3 c} A_1 A_2 e^{i\Delta k z}, \quad (2.60)$$

onde definimos o *descasamento de fase*:

$$\Delta k = k_1 + k_2 - k_3. \quad (2.61)$$

Devemos lembrar que temos, na verdade, um conjunto de 6 equações, contemplando a evolução dos campos conjugados. O processo descrito até aqui é frequentemente chamado de *mistura de 3 ondas*. Nele, não apenas os campos A_1 e A_2 contribuem para a geração do campo A_3 , como o próprio campo gerado participará da evolução dos campos fundamentais ao longo do material. Ou seja, a medida em que se propagam pelo meio não-linear, os campos trocam energia entre si. A Figura 2.7 exhibe a evolução da intensidade destes campos como função de z , com $\Delta k = 0$, evidenciando as trocas de energias.

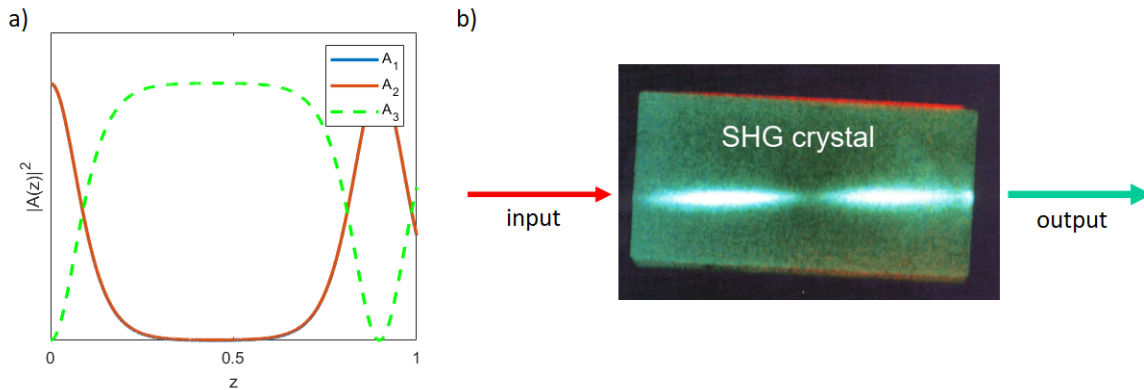


Figura 2.7: Evolução da intensidade dos campos envolvidos na mistura de 3 ondas, considerando $\Delta k = 0$. a) Simulação numérica. As curvas para A_1 e A_2 estão superpostas pois possuem as mesmas condições iniciais. b) Foto lateral de um cristal sob dinâmica não-linear. Na condição de casamento de fase perfeito, todo o campo fundamental é capaz de ser convertido no campo de harmônico superior.

Um dos parâmetros que contribuem para a eficiência do processo é o descasamento de fase. Experimentalmente, sempre buscamos alcançar a condição de *casamento de fase*:

$$k_1 + k_2 = k_3. \quad (2.62)$$

Nessa situação, as frentes de onda geradas ao longo do material se encontram em fase com a polarização que lhe serve de fonte, interferindo de maneira construtiva com o campo gerado em sequência. Caso contrário ($\Delta k \neq 0$), teremos interferência destrutiva, como mostra a Figura 2.8.

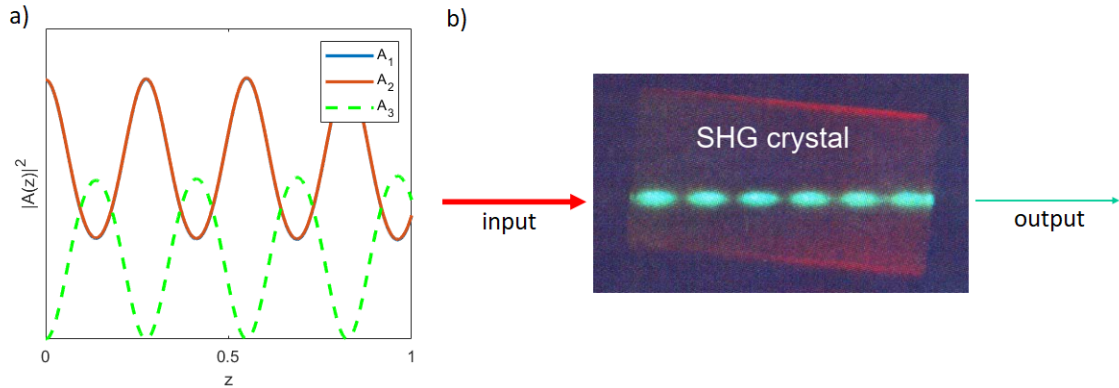


Figura 2.8: a) Simulação numérica. b) Foto lateral de um cristal. O descasamento de fase prejudica a eficiência das trocas de energia entre os campos.

Apesar do tratamento clássico até aqui, podemos interpretar o processo de mistura sob a ótica da mecânica quântica. A soma de frequências reflete a *conservação de energia* das excitações dos campos envolvidos:

$$\hbar\omega_3 = \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2. \quad (2.63)$$

Nisso, um fóton de energia $\hbar\omega_1$ e outro de energia $\hbar\omega_2$ são aniquilados para criar um fóton de energia $\hbar\omega_3$, e vice-versa. Além disso, a condição de casamento de fase (2.62) pode ser vista como a *conservação de momento* entre os fótons envolvidos na criação-aniquilação:

$$\hbar k_3 = \hbar k_1 + \hbar k_2. \quad (2.64)$$

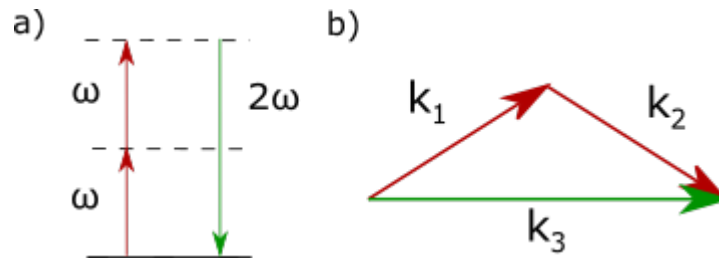


Figura 2.9: A interpretação quântica da mistura de 3 ondas exhibe as relações fundamentais de a) conservação de energia e b) conservação de momento.

A condição de casamento de fase (2.62) costuma ser difícil de alcançar, visto que em meios com ausência de perdas entre as frequências ω_1 e ω_3 apresentam um índice

de refração que aumenta com a frequência, um efeito chamado de *dispersão normal*. Sendo o número de onda k_i na matéria dado por $n_i\omega_i/c$, considere um casamento de fase perfeito em geometria colinear:

$$n_3\omega_3 = n_1\omega_1 + n_2\omega_2. \quad (2.65)$$

Essa relação tem que ser satisfeita ao mesmo tempo em que devemos ter $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, o que é impossível com a presença da dispersão normal. Poderíamos contornar o problema trabalhando com frequências na região de dispersão anômala, mas nela o material possui um coeficiente de absorção relevante. A maneira mais usual de se obter casamento de fase é através do uso de cristais *birrefringentes*. Birrefringência é uma propriedade apresentada por materiais anisotrópicos onde o índice de refração depende da polarização. Em particular, temos os chamados cristais *uniaxiais*, pois apresentam apenas 1 eixo extraordinário, e 2 eixos ordinários. Um feixe com uma polarização paralela ao eixo extraordinário "enxerga" um índice de refração extraordinário n_e , e sua lei de refração é diferente daquela dada pela lei de Snell. Cristais uniaxiais positivos (negativos) apresentam $n_e > n_o$ ($n_e < n_o$).

Assim, escolhemos a polarização do feixe de maior frequência ω_3 como sendo aquela correspondente ao menor índice de refração. Dessa maneira, temos duas escolhas quando à polarização dos campos de menor frequência, que irão determinar o tipo de casamento de fase: se ambas possuírem mesma polarização teremos casamento de fase *TIPO I*, caso contrário, casamento de fase *TIPO II*:

	Positivo ($n_e > n_o$)	Negativo ($n_e < n_o$)
TIPO I	$n_3^o\omega_3 = n_1^e\omega_1 + n_2^e\omega_2$	$n_3^e\omega_3 = n_1^o\omega_1 + n_2^o\omega_2$
TIPO II	$n_3^o\omega_3 = n_1^o\omega_1 + n_2^e\omega_2$	$n_3^e\omega_3 = n_1^e\omega_1 + n_2^o\omega_2$

2.4.4 Acoplamento de vórtices na geração de 2º harmônico

Como foi exibido anteriormente, os modos Laguerre-Gauss formam uma base completa, pois apresentam ortonormalidade:

$$\langle LG_p^{|l|} | LG_q^{|m|} \rangle = \delta_{pq} \delta_{lm}, \quad (2.17)$$

e portanto qualquer função quadrado-integrável pode ser decomposto na base de modos Laguerre-Gauss:

$$E_i(\mathbf{r}, t) = \sum_{\substack{p=0 \\ l=-\infty}}^{\infty} A_{pl} LG_p^{|l|}(\rho, \phi, z) e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)}, \quad (2.66)$$

sendo A_{pl} os coeficientes da decomposição. Essa descrição é importante quando queremos estudar a interação entre vórtices no processo de mistura de ondas, visto que os modos Laguerre-Gauss carregam o fator de fase $e^{il\phi}$. Estamos interessados em descrever esse acoplamento no processo de geração de 2º Harmônico, onde este é um caso particular da geração de soma de frequência, pois $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ e $\omega_3 = 2\omega$. Além disso, vamos assumir um casamento de fase TIPO II em geometria colinear. Escrevendo a expressão para o vetor campo elétrico correspondente ao campo de frequência ω [25]:

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, z, t) = [\mathcal{E}_h(\mathbf{r}, z) \hat{\mathbf{e}}_h e^{ik_h z} + \mathcal{E}_v(\mathbf{r}, z) \hat{\mathbf{e}}_v e^{ik_v z}] e^{-i\omega t}, \quad (2.67)$$

onde $\hat{\mathbf{e}}_h$ ($\hat{\mathbf{e}}_v$), k_h (k_v), \mathcal{E}_h (\mathcal{E}_v) são, respectivamente, o vetor de polarização unitário na direção horizontal (vertical), o número de onda e a distribuição de amplitude transversal correspondente. Para o campo correspondente à frequência 2ω :

$$\mathbf{E}_{2\omega}(\mathbf{r}, z, t) = \mathcal{E}_{2\omega}(\mathbf{r}, z) \hat{\mathbf{e}}_h e^{i(k_{2\omega} z - 2\omega t)}. \quad (2.68)$$

Esses campos interagem entre si por intermédio de um meio não-linear com uma constante de acoplamento $\chi^{(2)} = \chi$. Dessa maneira, supondo que a condição de casamento de fase seja satisfeita ($k_{2\omega} = k_h + k_v$) e que os envelopes complexos respeitem a aproximação da onda lentamente variável (2.8):

$$\left| \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} \right| \ll \left| k \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \right|, \quad (2.69)$$

podemos substituir esses campos na Equação(2.52) que cada componente de frequência respeitará e obtermos:

$$\nabla_{\perp} \mathcal{E}_h + 2ik_h \frac{\partial \mathcal{E}_h}{\partial z} = -\frac{\chi \omega^2}{c^2} \mathcal{E}_{2\omega} \mathcal{E}_v^*, \quad (2.70)$$

$$\nabla_{\perp} \mathcal{E}_v + 2ik_v \frac{\partial \mathcal{E}_v}{\partial z} = -\frac{\chi \omega^2}{c^2} \mathcal{E}_{2\omega} \mathcal{E}_h^*, \quad (2.71)$$

$$\nabla_{\perp} \mathcal{E}_{2\omega} + 2ik_{2\omega} \frac{\partial \mathcal{E}_{2\omega}}{\partial z} = -4 \frac{\chi \omega^2}{c^2} \mathcal{E}_h \mathcal{E}_v. \quad (2.72)$$

Expandindo os campos interagentes na base de modos Laguerre-Gauss:

$$\mathcal{E}_h(\mathbf{r}, z) = \sqrt{\frac{\omega}{n_h}} \sum_{p,l} A_{pl}^h u_{pl}^h(\mathbf{r}, z), \quad (2.73)$$

$$\mathcal{E}_v(\mathbf{r}, z) = \sqrt{\frac{\omega}{n_v}} \sum_{p,l} A_{pl}^v u_{pl}^v(\mathbf{r}, z), \quad (2.74)$$

$$\mathcal{E}_{2\omega}(\mathbf{r}, z) = \sqrt{\frac{2\omega}{n_{2\omega}}} \sum_{p,l} B_{pl} u_{pl}^{2\omega}(\mathbf{r}, z), \quad (2.75)$$

sendo n_j o índice de refração para o campo correspondente \mathcal{E}_j e $u_{pl}^j(\mathbf{r}, z)$ os modos de Laguerre-Gauss:

$$u_{pl}^j(\mathbf{r}, z) = \sqrt{\frac{2p!}{\pi(p+|l|)!}} \frac{1}{w_j(z)} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w_j(z)} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left(\frac{2\rho^2}{w_j^2(z)} \right) \exp \left(-\frac{\rho^2}{w_j^2(z)} \right) \times \exp \left[i \frac{k_j \rho^2}{2R_j(z)} + il\phi - i(2p+|l|+1) \arctan \left(\frac{z}{z_{Rj}} \right) \right], \quad (2.76)$$

onde w_j , R_j e z_{Rj} são dados pelas equações (2.11), (2.12) e (2.13), respectivamente. Dessa maneira, a estrutura transversal dos campos fica definido em termos dos modos Laguerre-Gauss. Substituindo o campo \mathcal{E}_j ($j = h, v, 2\omega$) no lado esquerdo da sua Equação de evolução, encontramos:

$$\sum_{pl} \nabla_{\perp} (A_{pl}^j u_{pl}^j) + 2ik_j \sum_{pl} \frac{\partial (A_{pl}^j u_{pl}^j)}{\partial z} = \sum_{pl} A_{pl}^j \left(\nabla_{\perp} u_{pl}^j + 2ik_j \frac{\partial u_{pl}^j}{\partial z} \right) + 2ik_j \sum_{pl} u_{pl}^j \frac{\partial A_{pl}^j}{\partial z}. \quad (2.77)$$

Como os modos Laguerre-Gaussianos u_{pl}^j satisfazem à Equação Paraxial (2.9):

$$\nabla_{\perp} u_{pl}^j + 2ik_j \frac{\partial u_{pl}^j}{\partial z} = 0 \quad (2.78)$$

e são ortonormais (vide Equação (2.17)), podemos levar isso em conta na Equação (2.77) para o campo de amplitude A_{pl}^h e obtermos:

$$\frac{\partial A_{pl}^h}{\partial z} = i \frac{\chi \omega}{2n_h c} \sum_{q,m} \sum_{r,n} \sqrt{\frac{2\omega n_h}{n_{2\omega} n_v}} \left(\int d^2 \mathbf{r} u_{qm}^{2\omega} (u_{rn}^v)^* (u_{pl}^h)^* \right) B_{qm} (A_{rn}^v)^*. \quad (2.79)$$

Iremos introduzir os seguintes parâmetros:

$$R_{pqr}^{lmn} = \int d^2\mathbf{r} u_{pl}^{2\omega} (u_{qm}^v)^* (u_{rn}^h)^*, \quad (2.80)$$

$$\Lambda_{pqr}^{lmn} = \frac{R_{pqr}^{lmn}}{R_{000}^{000}}, \quad (2.81)$$

$$g = \frac{\chi}{2c} \sqrt{\frac{2\omega^3}{n_{2\omega} n_v n_h}} R_{000}^{000}. \quad (2.82)$$

Dessa maneira:

$$\frac{\partial A_{pl}^h}{\partial z} = ig \sum_{q,m} \sum_{r,n} \Lambda_{pqr}^{lmn} B_{qm} (A_{rn}^v)^*, \quad (2.83)$$

$$\frac{\partial A_{pl}^v}{\partial z} = ig \sum_{q,m} \sum_{r,n} \Lambda_{pqr}^{lmn} B_{qm} (A_{rn}^h)^*, \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial B_{pl}}{\partial z} = ig \sum_{q,m} \sum_{r,n} (\Lambda_{pqr}^{lmn})^* A_{qm}^h A_{rn}^v, \quad (2.85)$$

onde Λ_{pqr}^{lmn} é conhecida como *integral de recobrimento normalizada*, e nos fornece uma magnitude do acoplamento entre os 3 modos envolvidos na mistura. A Figura 2.10 mostra o comportamento da integral de recobrimento normalizada para alguns conjuntos de índices.

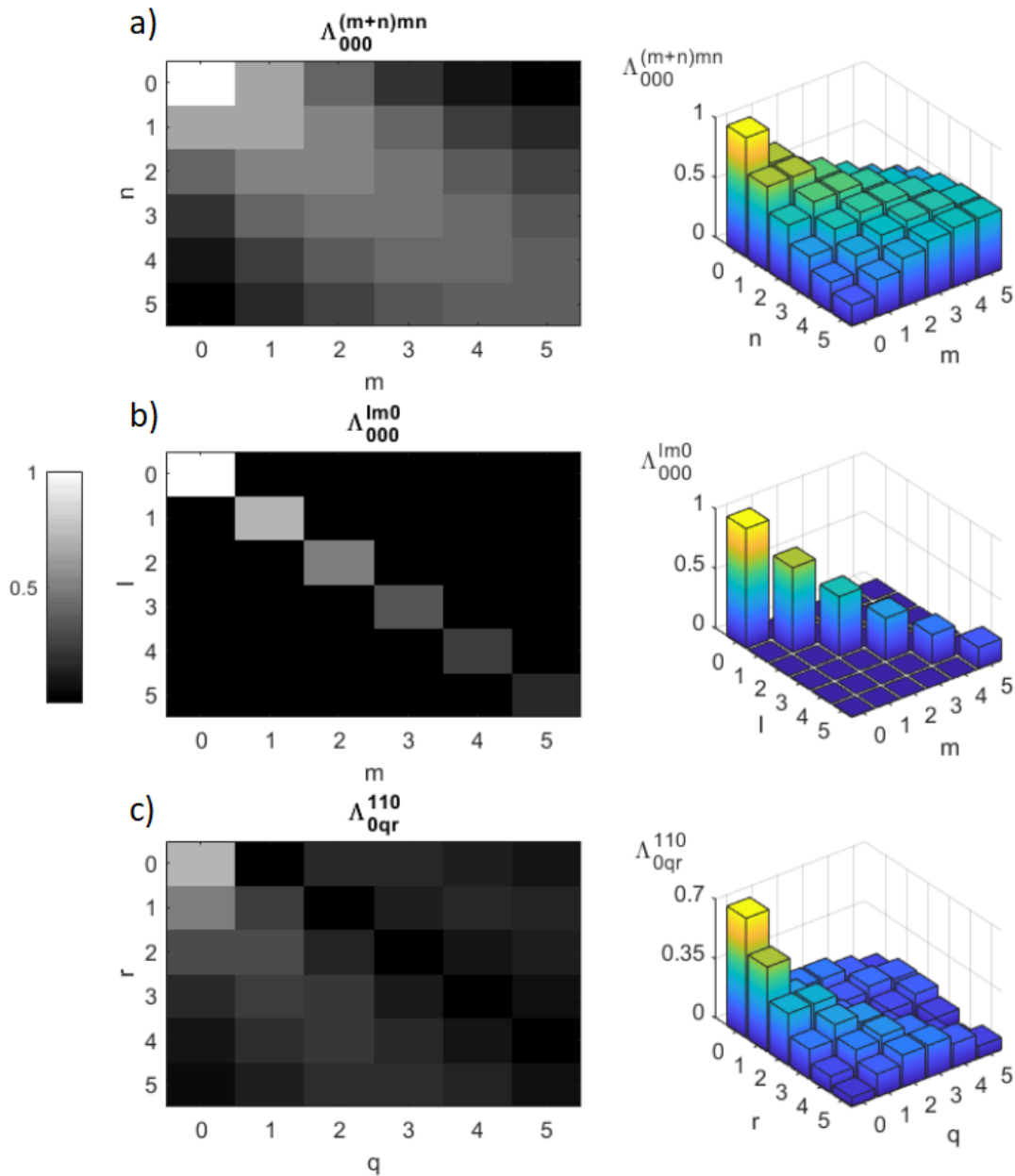


Figura 2.10: a) Integrais de recobrimento cuja carga topológica no campo de 2^o harmônico corresponde à soma das cargas dos campos fundamentais. Quanto maior a diferença $|m - n|$, menor será a eficiência do acoplamento devido a diferença entre os diâmetros dos feixes. b) Representação gráfica da conservação do momento angular orbital na mistura de 3 ondas. Os termos não-nulos correspondem aos modos que satisfazem $l = m$. c) Integral de recobrimento que ilustra a influência de cargas radiais no acoplamento.

A integral Λ_{000}^{lm0} chama nossa atenção por conta do seu aspecto singular para $l = m$. Isso fica claro quando separamos a parte azimutal dessa integral de sua parte radial, obtendo:

$$\int_0^{2\pi} d\phi e^{i(l-m-n)\phi} = 2\pi\delta_{l,m+n}. \quad (2.86)$$

Equação (2.86) é uma expressão da *conservação de momento angular orbital* no processo de acoplamento entre os vórtices. Foi observada primeiramente na referência [26]. Portanto, se os modos fundamentais carregarem um momento angular médio de $m\hbar$ e $n\hbar$ por fóton, necessariamente devemos ter, no modo gerado, um momento angular médio de $l\hbar$, onde $l = m + n$. Agora vamos considerar mais um conjunto de índices $\Lambda_{p00}^{(m+4)m4}$:

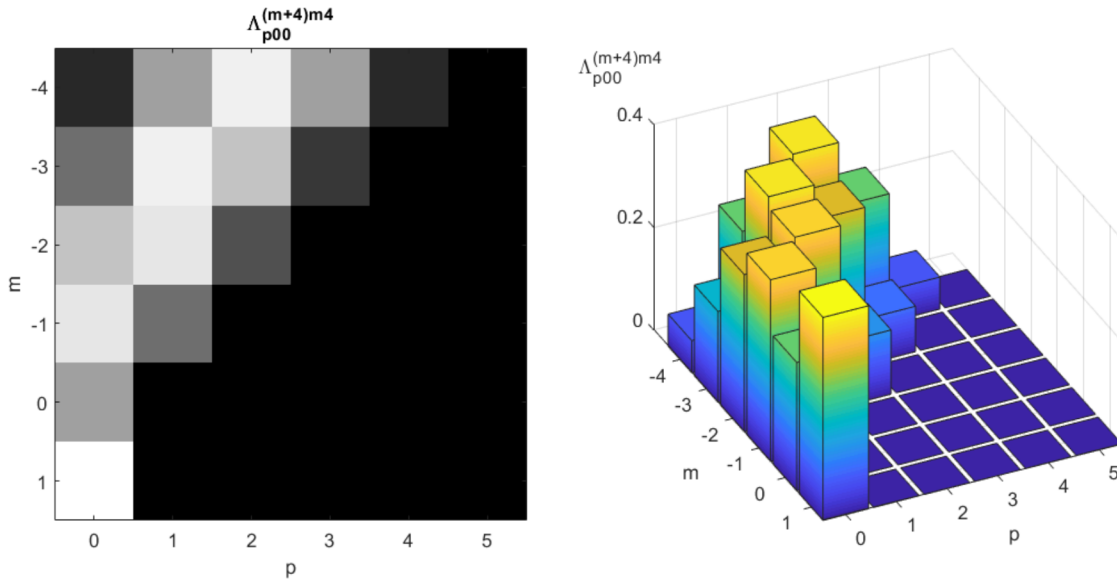


Figura 2.11: Integrais de recobrimento envolvendo soma de cargas topológicas de sinais opostos. Apesar da ausência de cargas radiais nos campos fundamentais, podemos gerar campos com diversas estruturas radiais se o momento angular orbital dos modos fundamentais possuírem orientações opostas.

Se os modos de entrada no cristal possuírem ordem radial nula, teremos que no acoplamento entre modos com cargas topológicas de mesmo sinal ($m \cdot n \geq 0$), o resultado no campo de 2º harmônico é apenas um modo com carga topológica $l = m + n$ e ordem radial nula. Caso contrário, se as cargas dos modos na entrada do

meio não-linear possuem sinais opostos ($m \cdot n < 0$), o modo resultante consistirá numa superposição, que além de respeitar a conservação de momento angular, terá a presença de ordens radiais até a ordem P , sendo $P = \min(|m|, |n|)$. De fato, esse foi um resultado apresentado na referência [25], e foi expresso de maneira analítica da seguinte forma:

$$m \cdot n \geq 0 : \quad \Lambda_{p00}^{lmn} = \delta_{l,m+n} \begin{cases} \sqrt{\frac{\xi_h^{|m|} \xi_v^{|n|} (|m|+|n|)!}{|m|!|n|!}} & (p = 0), \\ 0 & (p \geq 0) \end{cases} \quad (2.87)$$

$$m \cdot n < 0 : \quad \Lambda_{p00}^{lmn} = \delta_{l,m+n} \begin{cases} \frac{(-1)^P}{(P-p)!} \sqrt{\frac{\xi_h^{|m|} \xi_v^{|n|} |m|!|n|!}{p!(p+|m+n|)!}} & (p \leq P), \\ 0 & (p > P) \end{cases} \quad (2.88)$$

sendo $\xi_j = (w_{2\omega}/w_j)^2$.

CAPÍTULO 3

VÓRTICES FRACIONÁRIOS

No capítulo anterior, vimos que estruturas de fase da forma $e^{il\phi}$ (sendo l a carga topológica e ϕ o ângulo azimutal) atribuem um momento angular orbital (MAO) de $l\hbar$ por fóton ao longo do eixo de propagação paraxial z . Geralmente, utilizam-se modos Laguerre-Gauss para descrever feixes que carregam MAO, onde o índice azimutal assume apenas valores inteiros. Em casos como esses, o momento angular orbital médio também corresponderá à $l\hbar$, e além disso, a frente de onda apresentará um número $|l|$ de hélices de mesma fase entrelaçadas. Outra característica desses modos é a presença de uma singularidade de fase no centro do feixe, atribuindo-os uma distribuição de intensidade anelada. Na região de intensidade nula, a fase é mal definida, pois é nela em que todas as linhas radiais de fase constante convergem, e por conta disso esses modos também são chamados de *vórtices ópticos*. As maneiras para geração desses feixes serão discutidas no capítulo seguinte.

Todavia, a criação de vórtices ópticos não se restringe apenas àqueles com carga topológica inteira [27], podendo-se generalizá-los para o caso não-inteiro (que chamaremos de "fracionário"). Ao contrário dos vórtices com carga inteira, para valores fracionários de l , a distribuição de intensidade já não possuirá mais a típica simetria azimutal. Por conta da descontinuidade na fase que ocorre em um dado ângulo azimutal α , haverá uma interferência destrutiva ao longo das linhas radiais que se encontram nas vizinhanças de onde ocorre a descontinuidade. A Figura 3.1 ilustra a

distribuição de intensidade e fase para um feixe com $l = 1/2$.

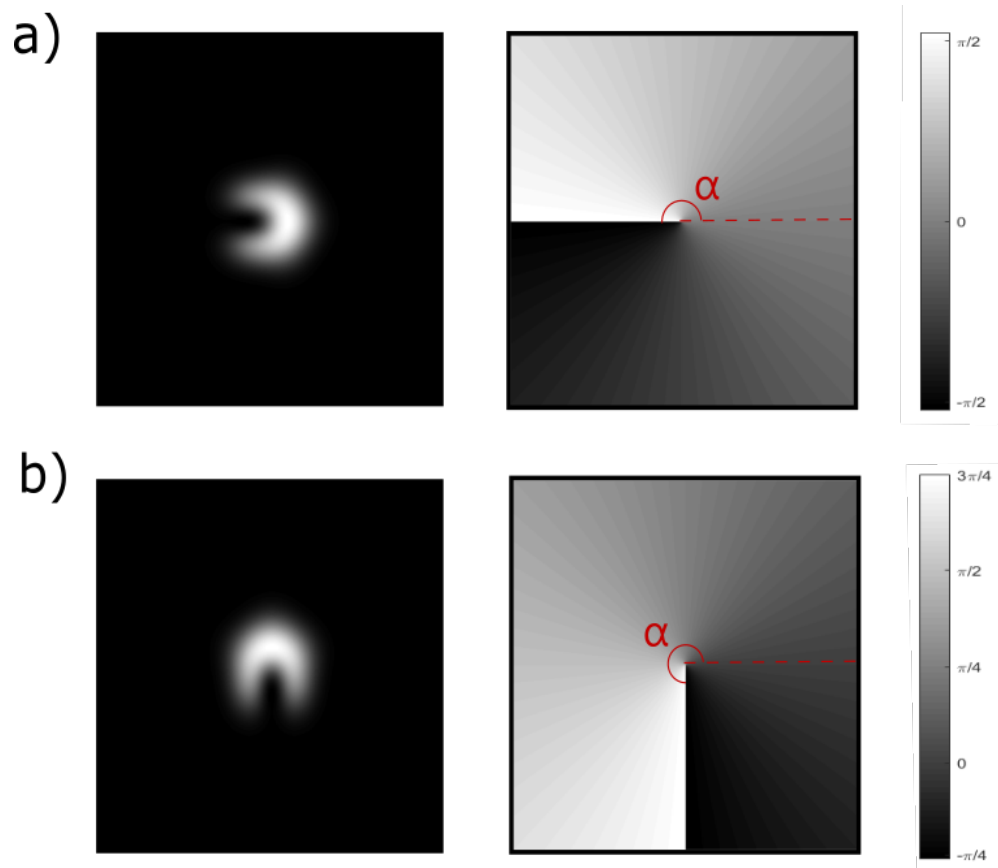


Figura 3.1: a) Perfil de intensidade transversal e distribuição de fase para um vórtice fracionário de carga $l = 1/2$ com uma descontinuidade de fase de $\alpha = \pi$ radianos, responsável pela região de intensidade nula na borda do perfil. Em b), a descontinuidade está posicionada em $\alpha = 3\pi/2$ radianos. A linha tracejada indica nossa referência em $\phi = 0$.

Feixes que carregam MAO fracionário possuem uma propagação instável, ou seja, seu perfil transversal modifica-se com a coordenada longitudinal. Isso fica claro quando expandimos essas amplitudes na base dos modos Laguerre-Gauss: os termos da expansão evoluem com uma fase de Gouy proporcional à ordem do modo em questão, dessa forma, provocando uma diferença de fase dinâmica no vórtice fracionário. Nessa dissertação, iremos estudar esses padrões através de uma formulação que se apoia na descrição quântica para os ângulos de rotação [28]. Tal descrição torna-se interes-

sante quando pretendemos aplicá-la no contexto de emaranhamento entre sistemas de muitas dimensões [29, 30]. Outras aplicações desses feixes se encontram em comunicações [6], transporte de partículas [31], etc. Dito isto, nosso objetivo será encontrar o produto interno entre estados de MAO arbitrários cuja posição angular das descontinuidades são independentes. Tal resultado nos ajudará a compreender como a posição da descontinuidade afeta as sobreposições, além de fornecer sua decomposição na base de MAO inteiro.

A componente L_z do MAO e o ângulo azimutal ϕ formam um par de variáveis conjugadas. Os estados de ambos os observáveis estão definidos num espaço discreto de dimensão $2L + 1$. Enquanto o conjunto de autoestados de MAO $\{|l\rangle\}$ possui autovalores $l = -L, -L + 1, \dots, 0, \dots, L$, o espaço para os estados angulares está confinado no intervalo $[\phi_0, \phi_0 + 2\pi)$ e é gerado pelo conjunto de kets $\{|\phi_n\rangle\}$, com $\phi_n = \phi_0 + 2\pi n / (2L + 1)$ ($n = 0, 1, \dots, 2L$), onde ϕ_0 é um ângulo de referência. Esse confinamento é consequência do fato de que não é possível distinguir fisicamente ângulos cuja a diferença seja múltiplo de 2π radianos.

Representaremos os estados de MAO separando explicitamente sua parte inteira da fracionária:

$$|M\rangle, \quad M = l + \mu, \quad l \in \mathbb{Z} \text{ e } \mu \in [0, 1). \quad (3.1)$$

Expandindo-o na base angular:

$$\begin{aligned} |M\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2L + 1}} \sum_{n=0}^{2L} e^{iM\phi_n} |\phi_n\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2L + 1}} \sum_{n=0}^{2L} e^{il\phi_n} e^{i\mu\phi_n} |\phi_n\rangle, \end{aligned} \quad (3.2)$$

Quando $\mu \neq 0$, o fator $e^{i\mu\phi_n}$ é uma função descontínua, possuindo um "salto" num certo ângulo. Podemos avaliar os ângulos nessa função de maneira unívoca incluindo mais um parâmetro, o ângulo α onde ocorre a descontinuidade, que é definido em relação à ϕ_0 e independe do mesmo. Para isso, introduzimos uma função binária $f_\alpha(\phi_n)$ que dependerá se ϕ_n é maior ou menor que $\phi_0 + \alpha$:

$$f_\alpha(\phi_n) : \{\phi_n\}_{n=0, \dots, 2L} \rightarrow \{0, 1\}, \quad \phi_n \rightarrow \begin{cases} 1, & \phi_0 < \phi_n < \phi_0 + \alpha \\ 0, & \phi_0 + \alpha < \phi_n < \phi_0 + 2\pi \end{cases} \quad (3.3)$$

Essa função não cria uma nova descontinuidade, apenas a inclui explicitamente. Para entendê-la, devemos estudar como a função $g = \mu(\phi + 2\pi f_\alpha - \alpha)$ se comporta em função de ϕ (Figura 3.2). Vamos tomar o caso de $\mu = 1/2$, $\phi_0 = 0$ e $\alpha = \pi$, e dessa maneira, para $0 < \phi < \pi$: $\pi/2 < g < \pi$. Tomando o intervalo $\pi < \phi < 2\pi$: $0 < g < \pi/2$. Nota-se que em $\phi = \alpha$ há um salto de π radianos na função g . Para um μ qualquer, o salto será de $2\pi\mu$.

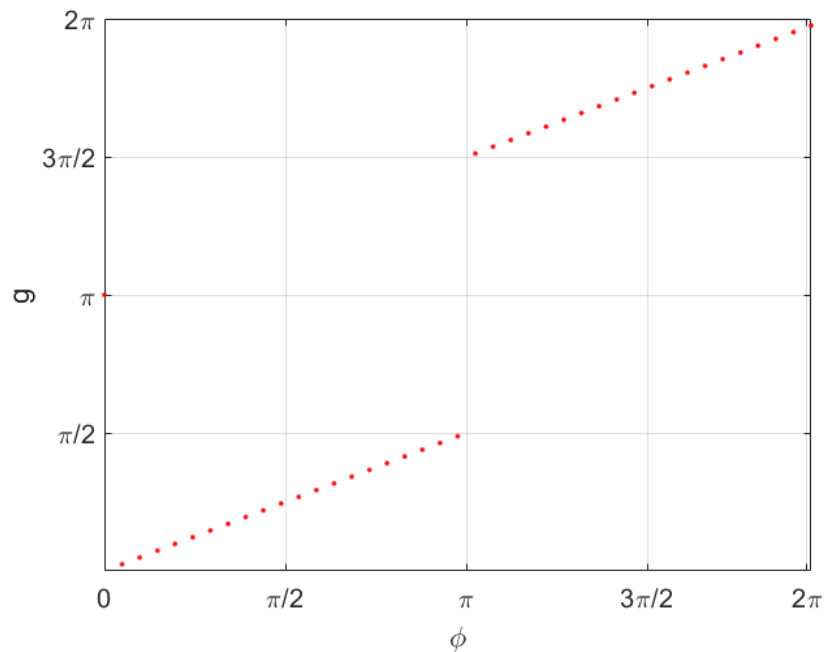


Figura 3.2: Gráfico de $g \times \phi$. Em $\phi = \alpha = \pi$, temos um descontinuidade de π radianos. O mínimo da função g foi deslocado para $g = 0$.

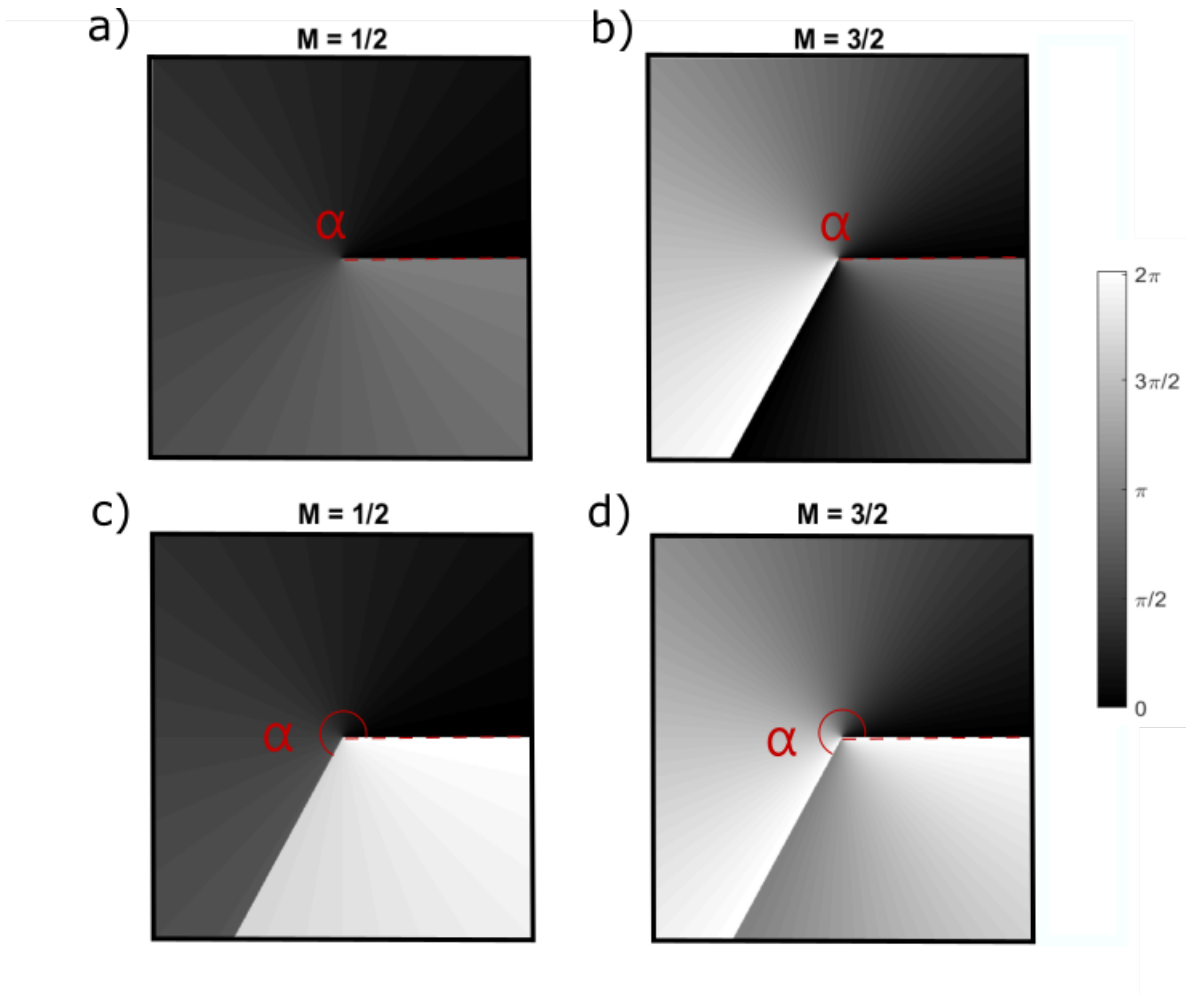


Figura 3.3: Estrutura de fase para a) $M = 1/2$ e b) $M = 3/2$. A posição da descontinuidade de ambas é $\alpha = 0$, e se encontra sobre o ângulo de referência. Em c) e d), a descontinuidade está em $\alpha = 4\pi/3$.

Logo:

$$|M(\alpha)\rangle = \frac{e^{-i\mu\alpha}}{\sqrt{2L+1}} \sum_{n=0}^{2L} e^{iM\phi_n} e^{i2\pi\mu f_\alpha(\phi_n)} |\phi_n\rangle. \quad (3.4)$$

A Figura 3.3 compara as distribuições de fase para $M = 1/2$ e $3/2$. Vamos definir um operador cuja ação num estado $|M(\alpha)\rangle$ é deslocar a posição da descontinuidade por um ângulo β :

$$\hat{U}_l(\beta) |M'(\alpha)\rangle = e^{i(l-l')\beta} |M'(\alpha \otimes \beta)\rangle, \quad (3.5)$$

onde usamos a notação $\alpha \otimes \beta = (\alpha + \beta) \bmod 2\pi$ ($\beta \in [0, 2\pi)$). O rótulo l corresponde à parte inteira de um estado $|M(\alpha)\rangle$. Quando $l \neq l'$, o deslocamento vem acompanhado

de uma fase $e^{i(l-l')\beta}$. Caso contrário, ele será apenas uma rotação pura da orientação de α por um ângulo β . As propriedades do operador $\hat{U}_l(\beta)$ são abordadas com mais detalhes na referência [28]. Escrevendo o operador na forma $\hat{U}_l(-\alpha')$, é possível avaliar os produtos internos como sendo entre modos com descontinuidade em 0 e $\beta = \alpha \otimes (-\alpha')$:

$$\begin{aligned} \langle M'(\alpha') | M(\alpha) \rangle &= \langle M'(\alpha') | \hat{U}_l^\dagger(-\alpha') \hat{U}_l(-\alpha') | M(\alpha) \rangle \\ &= e^{i(l-l')\alpha'} \langle M'(0) | M(\beta) \rangle \\ &= e^{i(l-l')\alpha'} \frac{e^{-i\mu\beta}}{2L+1} \sum_{n=0}^{2L} e^{i(M-M')\phi_n} e^{i2\pi\mu f_\beta}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

ou seja $|\langle M'(\alpha') | M(\alpha) \rangle| = |\langle M'(0) | M(\beta) \rangle|$. Além disso, podemos separar o somatório em duas partes, de acordo com os casos da função f_β , introduzindo o índice N para $\phi_N < \phi_0 + \beta \leq \phi_{N+1}$:

$$f_\beta(\phi_n) : \{\phi_n\}_{n=0,\dots,2L} \rightarrow \{0, 1\}, \quad \phi_n \rightarrow \begin{cases} 1, & \phi_0 < \phi_n \leq \phi_N < \phi_0 + \beta \\ 0, & \phi_0 + \beta \leq \phi_{N+1} \leq \phi_n < \phi_0 + 2\pi \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\langle M'(0) | M(\beta) \rangle = \frac{e^{-i\mu\beta}}{2L+1} \left[e^{i\mu 2\pi} \sum_{n=0}^N e^{i(M-M')\phi_n} + \sum_{n=N+1}^{2L} e^{i(M-M')\phi_n} \right]. \quad (3.8)$$

Podemos reescrever os somatórios acima usando $\phi_n = \phi_0 + 2\pi n / (2L+1)$, de maneira que as somas serão avaliadas como progressões geométricas:

$$S_N = \sum_{n=0}^N z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}, \quad |z| < 1. \quad (3.9)$$

Sendo assim:

$$\begin{aligned} \langle M'(0) | M(\beta) \rangle &= \frac{e^{-i\mu\beta} e^{i(M-M')\phi_0}}{2L+1} \left\{ e^{i\mu 2\pi} \sum_{n=0}^N \exp \left[\frac{i2\pi(M-M')}{2L+1} \right]^n + \right. \\ &\quad \left. \sum_{n=N+1}^{2L} \exp \left[\frac{i2\pi(M-M')}{2L+1} \right]^n \right\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Além disso, no segundo somatório:

$$\begin{aligned} \sum_{n=N+1}^{2L} \exp \left[\frac{i2\pi(M-M')}{2L+1} \right]^n &= \sum_{n=0}^{2L} \exp \left[\frac{i2\pi(M-M')}{2L+1} \right]^n - \\ &\quad \sum_{n=0}^N \exp \left[\frac{i2\pi(M-M')}{2L+1} \right]^n. \end{aligned} \quad (3.11)$$

O que nos deixa com:

$$\langle M'(0)|M(\beta)\rangle = \frac{e^{-i\mu\beta}e^{i(M-M')\phi_0}}{2L+1} \left\{ e^{i\mu 2\pi} \left[\frac{1 - \exp\left(\frac{i2\pi(M-M')}{2L+1}\right)^{N+1}}{1 - \exp\left(\frac{i2\pi(M-M')}{2L+1}\right)} \right] + \frac{1 - e^{i2\pi(M-M')}}{1 - \exp\left(\frac{i2\pi(M-M')}{2L+1}\right)} - \frac{1 - \exp\left(\frac{i2\pi(M-M')}{2L+1}\right)^{N+1}}{1 - \exp\left(\frac{i2\pi(M-M')}{2L+1}\right)} \right\}. \quad (3.12)$$

Quando $L \rightarrow \infty$: $\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{2\pi(N+1)}{2L+1} = \lim_{L \rightarrow \infty} \phi_{N+1} = \beta$:

$$\langle M'(0)|M(\beta)\rangle = \frac{e^{-i\mu\beta}e^{i(M-M')\phi_0}}{2L+1} \left\{ e^{i\mu 2\pi} \left[\frac{1 - \exp\left(\frac{i2\pi(M-M')}{2L+1}\right)^{N+1}}{1 - \exp\left(\frac{i2\pi(M-M')}{2L+1}\right)} \right] + \frac{1 - e^{i2\pi(M-M')}}{1 - \exp\left(\frac{i2\pi(M-M')}{2L+1}\right)} - \frac{1 - e^{i(M-M')\beta}}{1 - \exp\left(\frac{i2\pi(M-M')}{2L+1}\right)} \right\}. \quad (3.13)$$

Expandindo os denominadores até 1ª ordem:

$$\exp\left[\frac{i2\pi(M-M')}{2L+1}\right] \approx 1 + \frac{i2\pi(M-M')}{2L+1}. \quad (3.14)$$

Dessa forma, obtemos os overlaps entre estados de momento angular arbitrário, cuja posição angular relativa da descontinuidade é β :

$$\langle M'(0)|M(\beta)\rangle = i \frac{e^{-i\mu\beta}e^{i(M-M')\phi_0}}{2\pi(M-M')} \left[e^{i2\pi\mu} (1 - e^{i(M-M')\beta}) + e^{i(M-M')\beta} - e^{i2\pi(M-M')} \right]. \quad (3.15)$$

A Figura 3.4 ilustra o quadrado do valor absoluto da Equação (3.15), e nela vemos como essas quantidades variam em função de M e M' , para um dado valor de β . É interessante notar que, no caso de $\beta = \pi$, teremos estados ortogonais entre modos com o mesmo MAO se a parte fracionária de ambas corresponder a $1/2$.

$$|\langle M'(0)|M(\beta)\rangle|^2 = \frac{1}{(M-M')^2\pi^2} [\sin^2(M\pi) + \sin^2(M'\pi) - 2 \cos[(M-M')(\pi-\beta)] \sin(M\pi) \sin(M'\pi)]. \quad (3.16)$$

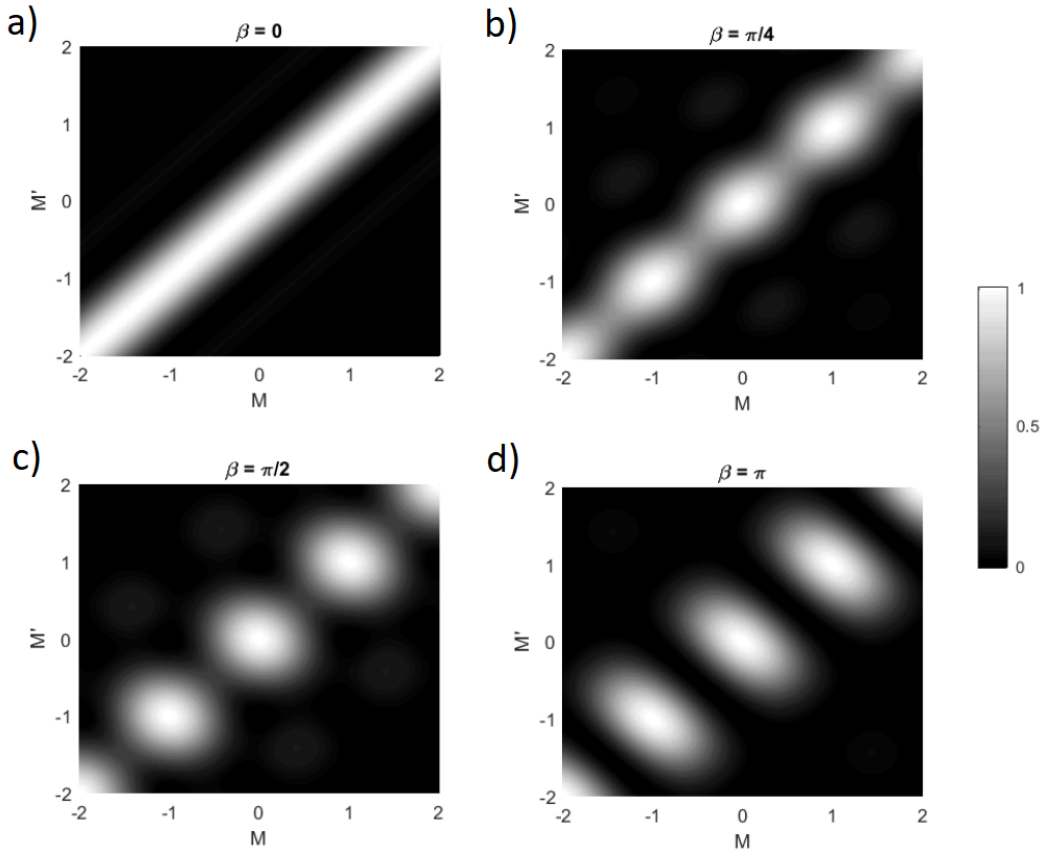


Figura 3.4: Distribuição de pesos em função das cargas M e M' . a) Para $\beta = 0$, os pesos independem de M e M' quando $M - M' \in \mathbb{Z}$. Nos demais casos, b) $\beta = \pi/4$, c) $\beta = \pi/2$, e d) $\beta = \pi$, temos que os pesos dependerão de M e M' em qualquer caso. Em particular, para $\beta = \pi$, teremos estados ortogonais quando $M = M'$, com $\mu = \mu' = 1/2$.

A eq.(3.15) nos permite encontrar a decomposição de um vórtice fracionário (que independe de β) em termos de estados de MAO inteiro, como mostra a Figura 3.5 para $M = 1/2$ e 1.3 . Vemos que o modo que mais contribue na decomposição é aquele cuja carga se encontra mais próxima da carga do vórtice fracionário. No caso de cargas semi-inteiras, os inteiros adjacentes contribuem de maneira equivalente. Além disso, vemos que quanto maior for $|M - l|$, menor será a contribuição da carga l na superposição.

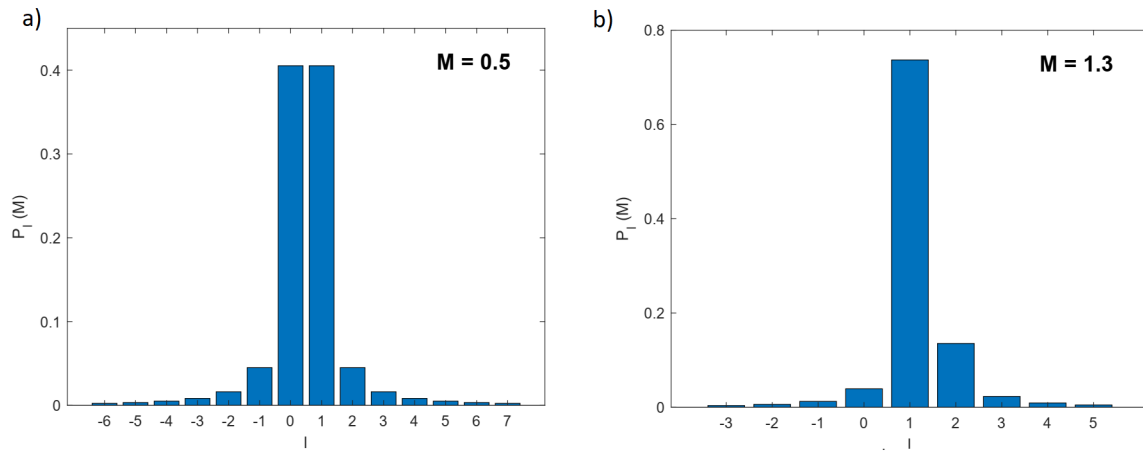


Figura 3.5: Decomposição modal para vórtices de cargas a) $M = 1/2$ e b) $M = 1.3$ na base de modos de cargas inteiras.

O perfil dessas distribuições são determinadas pela parte fracionária de M , enquanto que se comparássemos as decomposições entre vórtices com a mesma parte fracionária, a diferença entre eles seria apenas um deslocamento das contribuições dos modos de carga inteira.

CAPÍTULO 4

MODULAÇÃO DA FRENTE DE ONDA

O sistemas óticos mais comuns empregam o uso de componentes que atuam de maneira linear na amplitude do campo elétrico, a fim de modificar suas propriedades. Dentre os mais populares, temos os espelhos, lentes, lâminas de onda, grades de difração, etc. Dependendo do que se quer observar, podemos ter uma quantidade alta de componentes lineares presentes no sistema. Porém, podemos sintetizar tal sistema se pudermos modular a frente de onda de maneira independente dos demais objetos. Foi a partir dessa necessidade que o termo *luz estruturada* surgiu, referindo-se à geração e aplicação de campos óticos com intensidade, fase e/ou polarização customizáveis.

Algumas técnicas podem ser utilizadas para esse fim. Podemos usar desde materiais opacos que transmitem apenas uma porção da amplitude (refletindo o restante), a materiais transparentes, onde o índice de refração é capaz de redistribuir os vetores de onda. Atualmente, a comunidade costuma empregar técnicas derivadas da *Holografia*.

Inventada em 1947 por Dennis Gabor, a Holografia é um método que envolve interferência e difração para armazenar e reconstruir as frentes de onda [32]. Resumidamente, imprimindo o padrão de interferência entre um feixe objeto e referência numa placa fotográfica, podemos, posteriormente, obter o feixe objeto iluminando a placa apenas com o feixe referência. Essa técnica se destaca da Fotografia por armazenar, além da intensidade, a fase associada à frente de onda incidente na placa.

Portanto, para atuar uma determinada máscara sobre a amplitude do campo, todo o processo interferométrico, bem como da revelação da placa, são etapas necessárias para a eventual modulação. Todavia, ficamos restritos a apenas reproduzir o feixe objeto armazenado na placa, sendo necessário repetir tudo novamente caso se deseje modular amplitude de formas diferentes.

Paralelo aos avanços relacionados à implementação de estruturas na frente de onda, os computadores foram se tornando máquinas potentes, capazes de realizar cálculos mais complexos num curto espaço de tempo. Dessa maneira, os hologramas podiam ser criados de maneira inteiramente numérica (Holografia Digital), sem depender da disponibilidade de materiais para armazenar o holograma. Além disso, tecnologias a base de cristais líquidos foram se consolidando no mercado. As TVs de tubo deram espaço às telas LCDs (*liquid crystal display*), por serem mais compactas, oferecerem maior resolução e menor consumo de energia, dentre outros atributos.

Esses avanços tiveram consequências para o campo da ótica, pois permitiu que telas LCDs fossem capazes de reproduzir hologramas numéricos de maneira rápida e eficiente. Essa é a função básica de um Modulador Espacial de Luz (ou SLM, inglês para *Spatial Light Modulator*). Tal instrumento tornou-se cada vez mais popular na comunidade com o passar dos anos, e isso se deve pela liberdade que oferece na manipulação das propriedades da luz. Um vislumbre da variedade de campos que podem ser gerados é exibido na figura 4.1 (Fonte [33]). A facilidade que o SLM proporciona estimulou seu uso de maneira criativa, por exemplo, com pinças óticas [34], informação quântica [35], aprisionamento de átomos [36] e luz espacialmente incoerente [37].

Neste capítulo, discutiremos sobre a estrutura física do SLM, suas utilidades e limitações, e como podemos utilizá-lo para produzir luz estruturada. Por fim, mostraremos como podemos gerar vórtices óticos com tais instrumentos, além de exibir alguns meios alternativos.

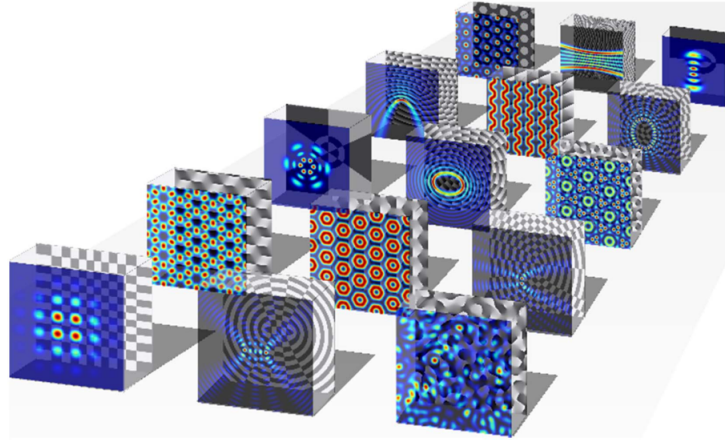


Figura 4.1: Exemplos de luz espacialmente estruturada, com as respectivas amplitudes (frente) e fase (atrás).

4.1 Modulador Espacial de Luz

Instrumentos cada vez mais presentes nos laboratórios de ótica, os SLMs são capazes de fornecer controle arbitrário sobre a frente de onda, sendo limitados apenas pelas suas dimensões e resolução. Existem modelos que manipulam apenas a amplitude ou a fase. Nesse trabalho, usamos um SLM modulador de fase, porém, podemos empregar algumas técnicas para sermos aptos a modular amplitude também [38].

Os SLMs possuem uma tela dividida em pixels (*picture element*, onde cada um destes contém um ensemble de cristais líquidos. Esses materiais apresentam tanto propriedades de sólidos (pois apresentam ordenamento à longo alcance) quanto de líquidos (devido a sua viscosidade), além de possuírem propriedades elétricas. Em particular, os do tipo *nemático*, que têm formato de bastões, apresentam momento de dipolo elétrico permanente, e portanto, quando submetidos a um campo elétrico uniforme, sofrem um torque de maneira a se orientarem na direção do campo.

Mais ainda, por apresentarem anisotropia molecular, possuem birrefringência. A diferença entre os índices de refração extraordinário e ordinário $\Delta n = n_e - n_o$ é uma medida da birrefringência, e geralmente costuma ser positivo para esses materiais. O índice de refração extraordinário depende do ângulo θ entre a polarização do feixe e do eixo extraordinário do cristal.

Acomoda-se então um conjunto de moléculas de cristais líquidos dispostas na mesma direção no interior de um eletrodo, as quais permanecerão alinhadas desde que nenhum potencial elétrico seja aplicado. Caso contrário, a partir de uma certa tensão de limiar V_{th} , o campo elétrico induzido no interior do eletrodo é intenso o suficiente para vencer a viscosidade dos cristais e provocar sua reorientação, causando uma mudança na birefringência $\Delta n(\theta)$ do pixel, como mostra a figura 4.2 (Fonte [39]).

O circuito responsável pelo endereçamento elétrico é formado por um semiconductor numa camada de silício seguido da camada de eletrodos. O endereçamento em cada pixel ocorre de maneira independente, e dessa forma a modulação ocorrerá pixel-a-pixel através da reorientação dos cristais líquidos, onde cada porção da frente de onda “enxergará” um índice de refração local diferente, e, com isso, o caminho ótico num determinado pixel será independente dos demais. Portanto, o SLM modula a fase do campo localmente redistribuindo os vetores de onda do feixe incidente.

Na figura 4.2, um feixe polarizado ao longo do eixo y adquire uma fase proporcional à reorientação das moléculas de cristal líquido. A situação descrita nessa figura ilustra o que acontece em cada pixel. O SLM não modulará componentes do feixe com polarização ao longo de x , caso tenha. Portanto, para maior eficiência na operação, devemos usar um feixe plano-polarizado ao longo da direção de orientação molecular na ausência de um potencial.

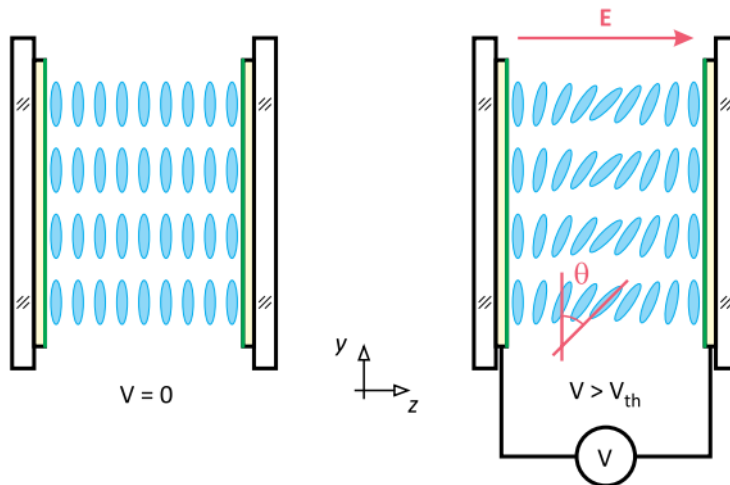


Figura 4.2: Representação esquemática de um eletrodo no SLM contendo um ensemble de cristais líquidos nemáticos.

Esse controle se dá em tempo real através de softwares de computador que produzem máscaras de fase em níveis de cinza. A eletrônica do SLM é responsável pela tradução em níveis de tensão. Deve-se construir máscaras de fase que respeitem tanto a dimensão (número de píxeis na direções x e y), quanto a resolução (quantidade de níveis de tensão aplicáveis) do SLM.

Um feixe com polarização paralela ao plano onde ocorreu o torque das moléculas irá adquirir uma fase particular num determinado pixel. Nisso, imprime-se uma estrutura na fase da frente de onda do feixe:

$$A(x, y) \xrightarrow{SLM} A(x, y) \exp[i\phi(x, y)].$$

É importante que o feixe esteja colimado para que a modulação ocorra de maneira espacialmente uniforme. Podemos modelar a ação do SLM sobre a amplitude de entrada através da seguinte função de transmissão:

$$T(x, y) = \exp[i\phi(x, y)], \quad (4.1)$$

sendo $\phi(x, y)$ o holograma codificado no display do SLM. Além disso, devido à pixelização de sua tela, teremos o surgimento de ordens de difração. O que costuma-se fazer para contornar isso é construir uma máscara que maximize a eficiência do campo que estamos interessados na primeira ordem de difração. Para tanto, podemos usar um algoritmo que combina a fase associada a um prisma (para deslocamentos transversais) com a fase de uma lente (deslocamentos axiais) [40]. Esse algoritmo foi pensado para manipulação de pinças óticas holográficas, porém, ele pode ser estendido para qualquer máscara, e, além disso, ele ilustra a capacidade do SLM de reproduzir componentes lineares concatenados.

Vamos considerar que $\phi(x, y) = \phi$ seja constante, ou seja, o SLM apenas adicionará uma fase global ao feixe, agindo como um espelho. Podemos deslocar o campo modulado para a primeira ordem inserindo uma rampa de fase linear:

$$\phi_x(x, y) = (2\pi x/\Lambda_x) \pmod{2\pi}. \quad (4.2)$$

Essa fase desloca a primeira ordem de difração ao longo do eixo x , e ela também pode ser interpretada como uma grade de difração de período Λ_x . Analogamente, na

direção y :

$$\phi_y(x, y) = (2\pi y/\Lambda_y) \pmod{2\pi}. \quad (4.3)$$

Dessa maneira, é possível controlar o ângulo com a qual a primeira ordem é difratada. Para aplicações que envolvam focalizar um feixe numa determinada posição, podemos também provocar deslocamentos axiais:

$$\phi_z(x, y) = [2\pi(x^2 + y^2)/2\Lambda_z\lambda] \pmod{2\pi}, \quad (4.4)$$

onde essa fase é equivalente a transmitir o feixe através de uma lente esférica com distância focal Λ_z . É possível realizar todas essas operações simultaneamente através de uma soma de módulo 2π entre todos os hologramas:

$$\Phi(x, y) = [\phi_x(x, y) + \phi_y(x, y) + \phi_z(x, y)] \pmod{2\pi}. \quad (4.5)$$

A figura 4.3 (Fonte [41]) ilustra os casos apresentados. Nessa discussão, apenas comentamos em como posicionar a primeira ordem da difração a fim de separá-la da ordem 0, sem de fato imprimir uma estrutura na fase do campo. Nesse caso, basta adicionar nossa máscara $\phi(x, y)$ à eq.(4.5).

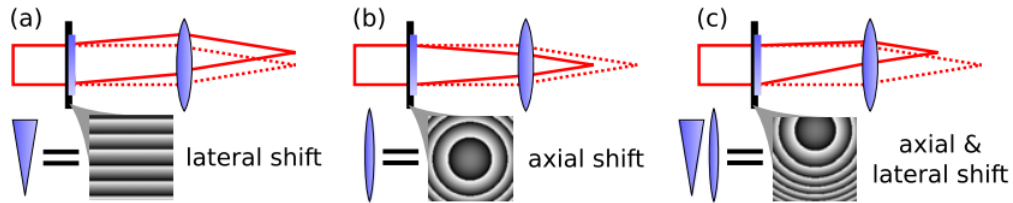


Figura 4.3: a) Deslocamento transversal causado por uma rampa linear, que age como um prisma sobre o feixe. b) Deslocamento axial devido a uma lente. c) Concatenação dos efeitos de prisma + lente.

4.2 Geração de vórtices ópticos

No capítulo 2, vimos que frentes de onda com uma fase azimutal da forma $e^{il\phi}$ carregam um momento angular médio de $l\hbar$ por fóton. Uma fase desse tipo atribue uma forma helicoidal à frente de onda. Dessa maneira, a forma mais óbvia de gerar esse tipo de feixe é pela passagem de uma onda plana através de uma superfície

transparente com uma espessura que depende da coordenada azimutal (figura 4.4, Fonte [42]). Conhecidas como *lâminas de fase espiral*, a espessura desse componente aumenta com o ângulo azimutal de acordo com $s = l\lambda\phi/2\pi(n - 1)$, sendo n o índice de refração do material. Esse método, apesar de eficiente, exige uma boa precisão na hora de fabricar essas lâminas.

Lâminas como essas refratam a luz de maneira que o momento linear do feixe adquire uma componente azimutal. Essa componente está relacionada com o momento angular orbital ao longo do eixo longitudinal. É interessante introduzir métodos de geração de vórtices através dessas lâminas pois elas ilustram como frentes de onda helicoidais introduzem momento angular no feixe.

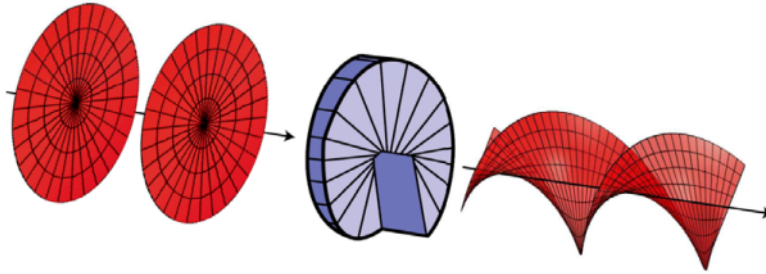


Figura 4.4: Uma lâmina de fase espiral transformando a frente de onda plana numa frente helicoidal com $l = 2$.

Podemos também explorar a completeza dos modos HG e LG para converter elementos de uma base na outra. O *conversor de modos astigmáticos* [43] se baseia na introdução de astigmatismo através de um par de lentes cilíndricas. Por exemplo, vimos que os modos HG e LG de primeira ordem se relacionam através de (2.19). Assim, a partir de um modo Hermite-Gaussiano orientado à 45° :

$$HG_{01}^{45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{10} + HG_{01}), \quad (4.6)$$

podemos, em princípio, introduzir uma defasagem de $\pi/2$ entre essas componentes de maneira a produzir um modo $LG_0^{|\pm 1|}$. Portanto, transmitindo um modo (4.6) através de uma lente cilíndrica orientada na direção horizontal ou vertical, fará com que suas componentes divirjam de maneiras distintas, pois suas cinturas (e o comprimento de Rayleigh) não serão mais as mesmas. Uma segunda lente cilíndrica corrige o astigmatismo, mantendo a integridade de um modo Laguerre-Gaussiano. A defasagem é

controlada através da distância entre as lentes, e para esse caso particular corresponde à $f/\sqrt{2}$, sendo f a distância focal da lente.

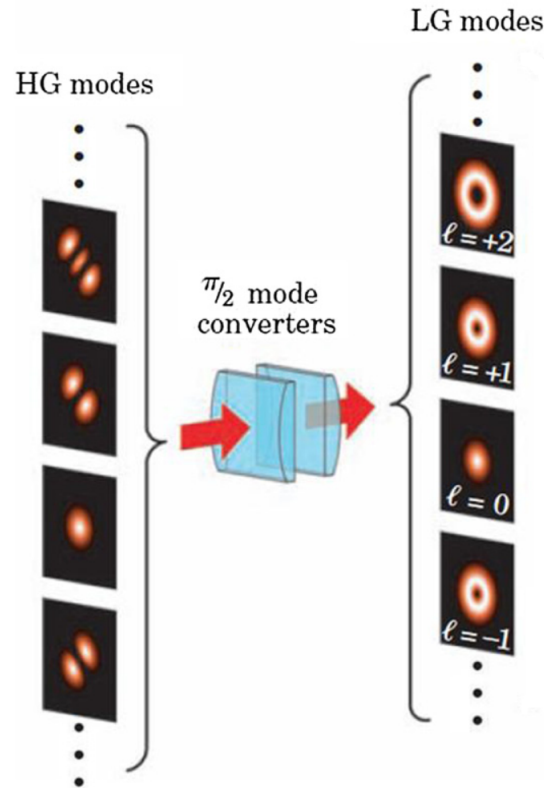


Figura 4.5: Conversão de modos HG em LG usando um par de lentes cilíndricas.

Ambos os métodos apresentados restringem nossas possibilidades quanto às estruturas que podemos imprimir na frente de onda. Uma outra alternativa, e que usamos em nosso estudo, é utilizar o SLM, que é capaz de reproduzir em seu display qualquer elemento refrativo de nossa escolha, incluindo uma lâmina de fase espiral ou uma lente cilíndrica. A vantagem nisso é a possibilidade de modificarmos facilmente os parâmetros da máscara de fase. Porém, devido o caráter difrativo do instrumento, devemos superpor a máscara desejada com uma rampa de fase linear expressa numa soma de módulo 2π , que acaba atuando como uma grade de difração. Assim, o padrão que desejamos manifesta-se na primeira ordem de difração.

A Figura 4.6 ilustra o procedimento descrito acima para uma máscara que reproduza, de maneira eficiente, um feixe com momento angular orbital médio de $2\hbar$.

Essa mesma ideia deve ser estendida para qualquer máscara, ou seja, devemos sempre somá-la com uma rampa de fase linear.

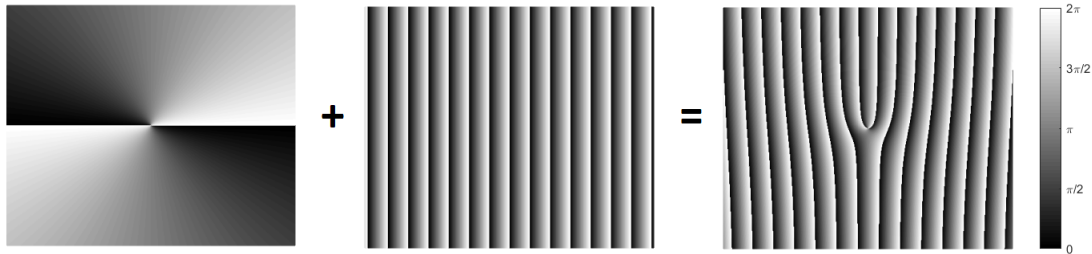


Figura 4.6: Distribuições de fase para produzir um feixe com carga topológica $l = 2$. A estrutura de fase à esquerda é somada uma rampa de fase linear (centro) que funciona com uma grade de difração. A grade resultante (direita) possui um "garfo" que contém a singularidade em seu centro.

CAPÍTULO 5

ARRANJO EXPERIMENTAL

Nosso experimento tem por objetivo observar a soma de momento angular orbital fracionário no processo de mistura de 3 ondas. Os resultados experimentais virão acompanhados de cálculos numéricos do processo, baseados no modelo teórico apresentado no Capítulo 2.

A soma de MAO inteiro envolve modos normais do campo eletromagnético. Com isso, teremos casos em que a integral de recobrimento só será não-nula para um conjunto específico de três modos (Figura 2.10), e conseqüentemente, um único modo será gerado no segundo harmônico, pois será ele que acopla com os modos fundamentais de maneira eficiente. Quando trazemos esse problema para o caso fracionário, isso já não será mais verdade, uma vez que são descritos como superposições de modos com MAO inteiro. Isso acarreta num conjunto de valores não-nulos para as integrais de recobrimento, ou seja, mais de um modo será estimulado, levando à geração de superposições. Além disso, para descrever os vórtices fracionários, usaremos a descrição apresentada no Capítulo 3, considerando que a posição angular da descontinuidade seja $\alpha = 0$.

O experimento está esquematizado na Figura 5.1. Primeiramente fizemos um arranjo para observar o dobramento de MAO. Nesse caso, podemos modular um único feixe com o SLM. Nosso laser emite um modo gaussiano no comprimento de onda $\lambda = 1064nm$ com uma polarização elíptica. Podemos controlar a intensidade do

feixe que entra no experimento através de uma conjunto HWP (lâmina de meia-onda) + PBS (divisor de feixe polarizador), pois, enquanto a lâmina é capaz de girar a orientação do plano de polarização, o PBS transmite apenas a componente horizontal (isto é, paralelo ao plano da mesa). Usamos um par de lentes L1 e L2 para tornar o feixe colimado e ajustar sua largura.

O modulador espacial de luz (modelo Hamamatsu) imprimirá as máscaras de fase desejadas, superposta a uma rampa de fase linear, em nosso modo gaussiano, de maneira a maximizar a intensidade do feixe modulado na primeira ordem de difração. Um par de lentes L3 e L4 constitui um sistema de imageamento responsável por projetar o perfil modulado pelo SLM no centro de um cristal não-linear KTP (fosfato de titânio-potássio), que possui um casamento de fase tipo II. Antes do cristal temos uma segunda lâmina de meia-onda que transforma a polarização horizontal em diagonal à 45° .

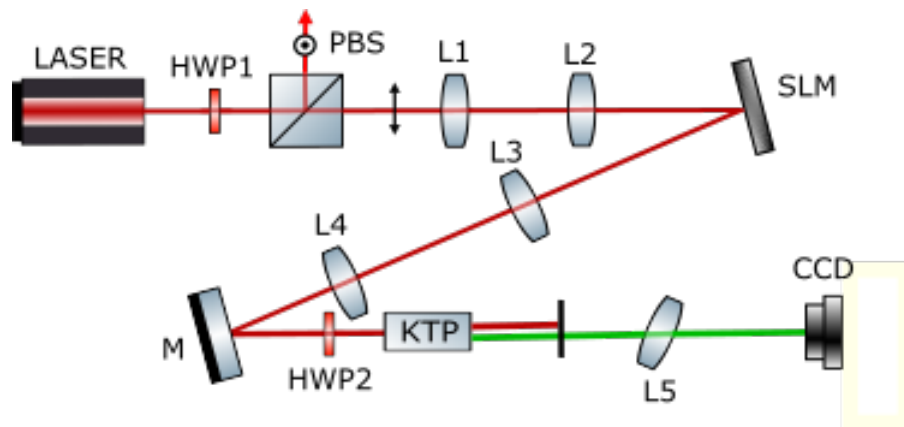


Figura 5.1: Setup experimental.

O cristal é responsável por dobrar a frequência do feixe para um comprimento de onda correspondente a $\lambda = 532nm$, bem como seu momento angular. Para detecção do dobramento de momento angular, usamos o método da lente inclinada [44], que transforma um modo Laguerre-Gauss em Hermite-Gauss, cujo número de linhas nodais corresponde ao valor da carga topológica. Tanto o modo fundamental quanto o estimulado são observados por uma câmera CCD posicionada próxima do foco da lente inclinada. Observa-se o feixe estimulado bloqueando a luz infravermelha com um filtro espectral. Caso queiramos observar o modo fundamental, podemos desfazer

o casamento de fase tipo II girando a lâmina HWP2.

5.1 Resultados

Nesse experimento preliminar, nosso objetivo é observar o dobramento de MAO. Nele, modulamos a fase de apenas um feixe e ajustamos sua polarização para obtenção do casamento de fase tipo-II. Com isso, queremos realizar o dobramento de MAO inteiro e nos certificar de que obtemos resultados condizentes com a literatura. Também observamos dobramento de MAO não-inteiro. Para modos com carga topológica inteira, o feixe gerado possuirá uma carga topológica par (Figura 5.2). Se o sinal da carga for negativo, a direção do modo convertido após a lente inclinada será ortogonal àquela da conversão de um modo com carga positiva (Figura 5.3).

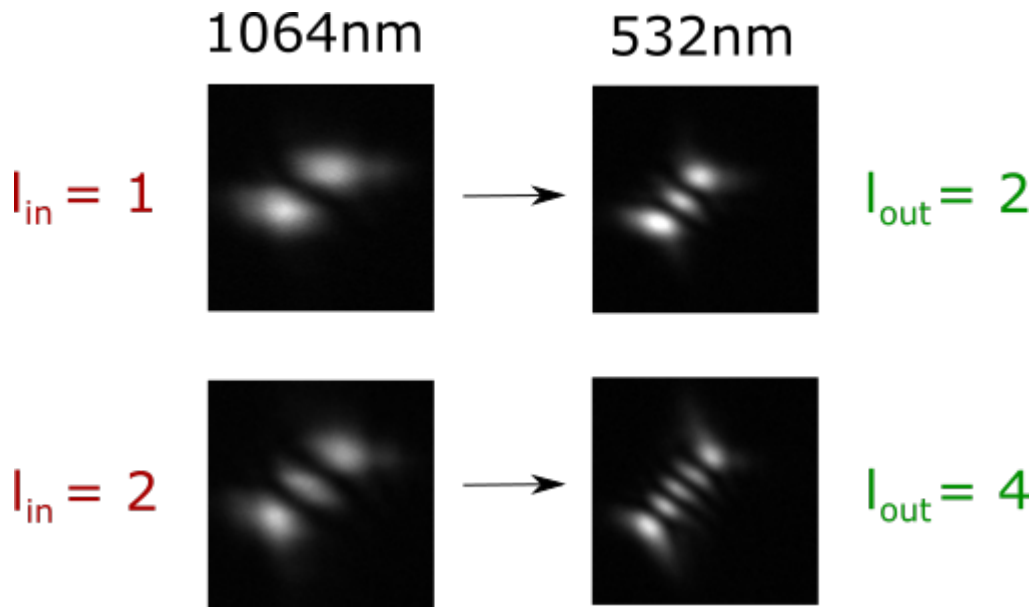


Figura 5.2: Dobramento de MAO na geração de 2º harmônico para modos Laguerre-Gauss, que possuem carga topológica inteira. Os perfis foram convertidos em modos Hermite-Gauss através de uma lente inclinada. O número de linhas nodais equivale a carga topológica do modo.

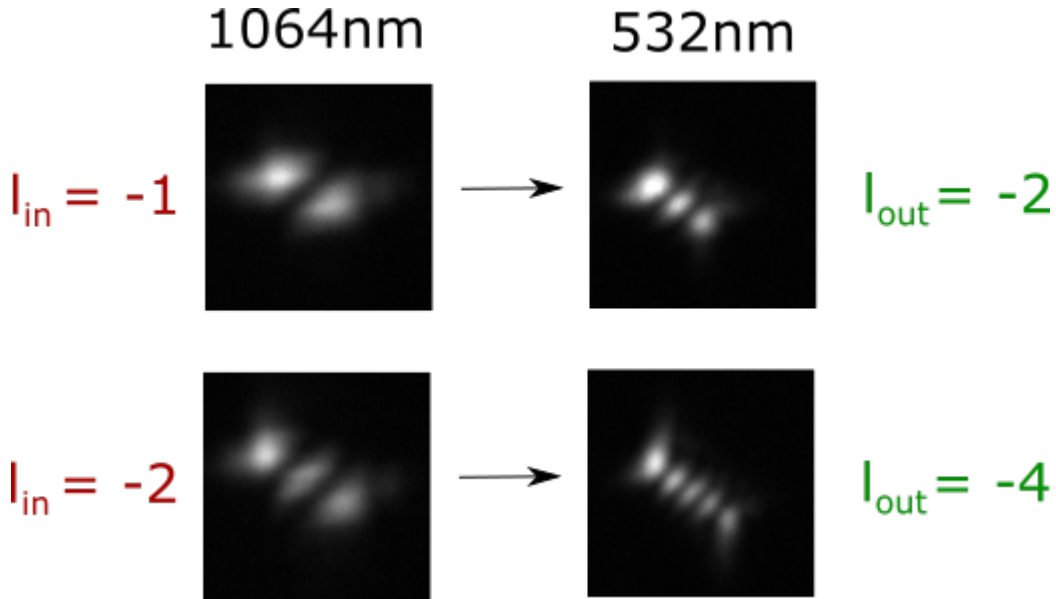


Figura 5.3: Dobramento de MAO na geração de 2º harmônico para modos Laguerre-Gauss com carga topológica negativa. Distinguimos o sinal da carga pela direção dos modos Hermite-Gauss convertidos.

Podemos gerar um vórtice de carga fracionária com o auxílio do SLM imprimindo uma fase do tipo $e^{-iM\phi}$, com M não-inteiro. Desse modo, se E_{in} for o campo que incide sobre a tela do SLM, o campo elétrico logo após o mesmo será:

$$E_{SLM} = E_{in}e^{-iM\phi}. \quad (5.1)$$

Quando o modo fundamental apresenta uma carga semi-inteira (Figura 5.4), a superposição criada pela mistura de ondas é tal que o MAO médio será ímpar, como mostram os modos convertidos na Figura 5.5. O sinal oposto também se manifesta observando a direção dos modos convertidos na Figura 5.6.

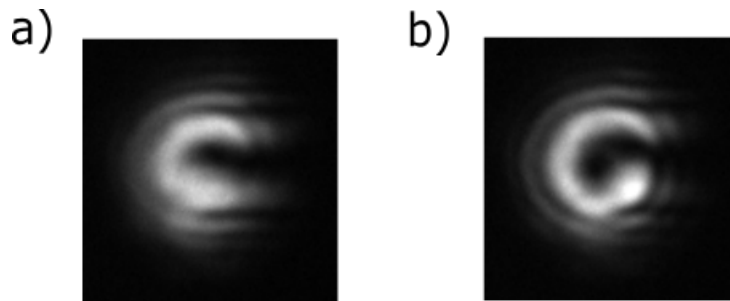


Figura 5.4: Perfis de intensidade para vórtices fracionários de carga a) 1/2 e b) 3/2.

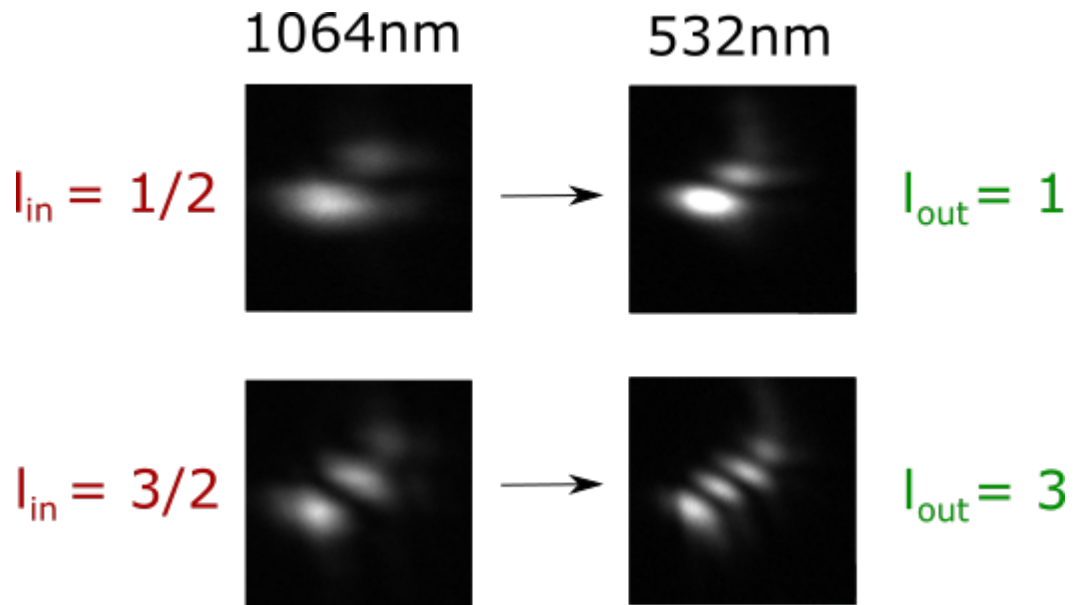


Figura 5.5: Vórtices fracionários convertidos em modos Hermite-Gauss.

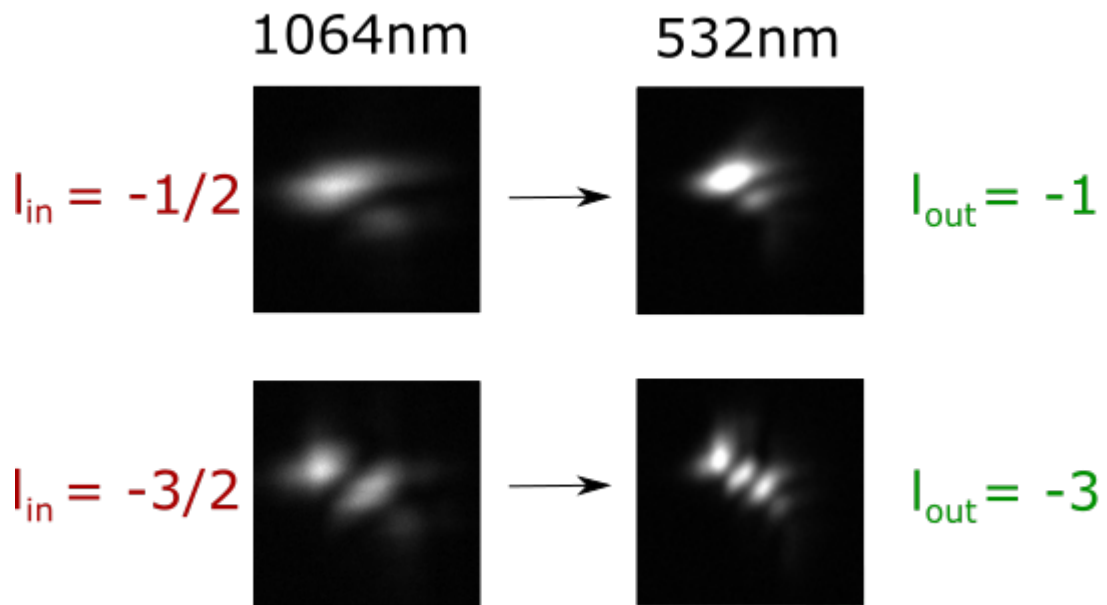


Figura 5.6: Vórtices fracionários de cargas negativas convertidos em modos Hermite-Gauss.

Primeiramente, nota-se a presença de ordens radiais nos perfis da Figura 5.4. Isso

se deve à falta de modulação de amplitude no SLM (ver Eq. (5.1)). Quando imprimimos uma fase do tipo $e^{il\phi}$ num feixe gaussiano, acabamos por criar uma superposição de modos de mesma carga topológica l mas com diferentes índices radiais. Na conversão provocada pela lente inclinada, isso se manifesta na forma de “borrões” entre os lóbulos dos modos. Com modulação de amplitude, podemos suprimir as ordens radiais indesejadas controlando a largura do feixe. É importante ressaltar que, apesar dessa supressão de ordens radiais, isso não implica que o vórtice fracionário gerado será composto apenas de modos com $p = 0$.

Na Figura 5.5, os modos fundamentais convertidos ($\lambda = 1064nm$), apresentam uma ($l = 1/2$), e duas ($l = 3/2$) linhas nodais. Porém, isso não significa que estes são modos com carga inteira, pois apresentam um lóbulo deformado. Quanto ao feixe gerado na mistura de ondas, em $\lambda = 532nm$, temos lóbulos mais bem definidos, o que indica que possuem um MAO médio inteiro. Os borrões e o desbalanço de intensidade entre os lóbulos podem ser causados pela superposição de modos que há nesses campos, ou pelo fato dos feixes não serem transmitidos através do centro da lente. Como estamos realizando uma geração de 2º harmônico com um feixe que é uma superposição de modos Laguerre-Gauss, acabaremos por gerar, também, uma superposição, mas com MAO médio dobrado. Assim, os perfis de dobramento na Figura 5.5 não foram convertidos a partir de um simples modo Laguerre-Gauss, daí seu aspecto distinto a dos modos Hermite. A Figura 5.7 mostra a distribuição de intensidade original desses feixes, no campo distante.

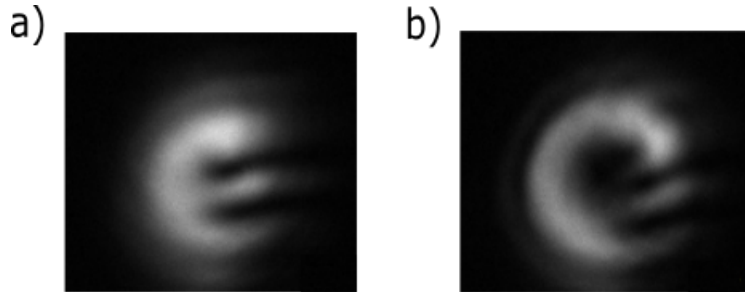


Figura 5.7: Perfis de intensidade criados a partir da mistura de 3 ondas entre vórtices fracionários de mesma carga topológica média. Esses campos possuem o dobro do MAO médio ((a) 1, b) 3) daqueles que incidem no cristal não-linear.

Numa parte final desse trabalho, realizamos cálculos numéricos para justificar nossas conclusões. Primeiramente, construímos uma superposição de vórtices de cargas inteiras, moduladas por um perfil gaussiano, para produzir vórtices fracionários:

$$E_M = \sum_{m'} c_{m',M}(\alpha) e^{-\rho^2/w^2}, \quad (5.2)$$

onde $c_{m',M}$ é obtido a partir da Eq. (3.15) ao fazer $M' = m'$ (m' inteiro):

$$c_{m'}(\alpha) = \frac{ie^{-i\mu\alpha} e^{i(M-m')\phi_0}}{2\pi(M-m')} e^{i(l-m')\alpha} (1 - e^{i2\pi\mu}). \quad (5.3)$$

Essa maneira de definir os coeficientes tem a vantagem de possibilitar o controle independente da posição α da descontinuidade. A Figura 5.8 apresenta essa superposição, com $\alpha = \phi_0 = 0$ e $M = \mu = 1/2$, propagada por $\approx 2z_R$, para o vórtice $M = 1/2$, que apresenta boa similaridade com o perfil experimental da Figura 5.4 a).

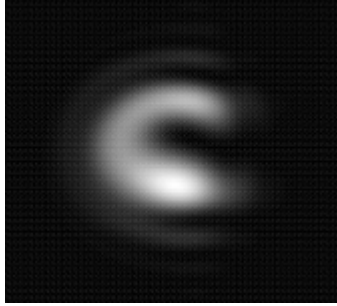


Figura 5.8: Perfil de intensidade numérico para vórtice fracionário de carga $M = 1/2$.

Realizando simulações numéricas de mistura de 3 ondas com campos fundamentais da forma (5.2), somos capazes de gerar um campo correspondente na frequência 2ω e o decompô-lo na base dos modos Laguerre-Gaussianos para encontrar o MAO médio do feixe gerado. No primeiro caso, buscamos encontrar a decomposição correspondente ao produto da interação não-linear entre dois vórtices de cargas $1/2$, cuja posição da descontinuidade de ambos os feixes esteja em $\alpha = 0$. Ou seja, a posição relativa da descontinuidade é $\beta = 0$. Esse caso corresponde à Figura 5.7 a).

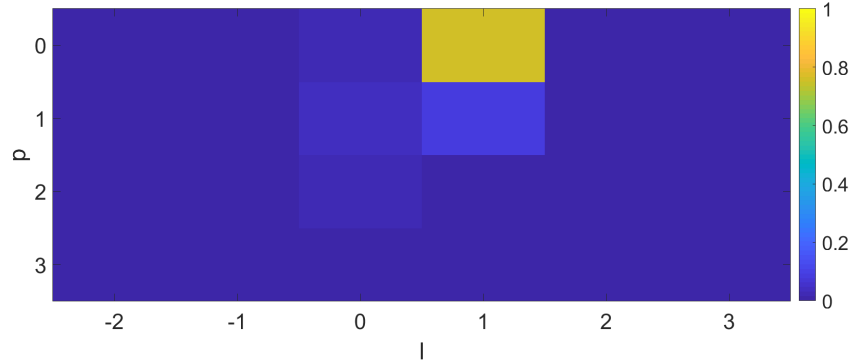


Figura 5.9: Decomposição em modos Laguerre-Gauss da superposição criada pela geração de 2º harmônico de um vórtice com $M = 1/2$. Os feixes de frequência fundamental são idênticos, ou seja, possuem mesma carga e suas descontinuidades estão igualmente posicionadas.

Na Figura 5.9, $l_{\text{médio}} = 1$, e corresponde ao dobramento da carga $M = 1/2$, assim nos certificando do resultado observado através da técnica da lente inclinada.

Estudamos também o papel da descontinuidade no processo não-linear. Considerando novamente dois vórtices de carga $1/2$, dessa vez posicionamos a descontinuidade de um desses feixes em $\alpha \neq 0$ enquanto o outro permaneceu em $\alpha = 0$. Dessa maneira, submetemos dois vórtices fracionários de mesma carga, mas com uma posição relativa da descontinuidade $\neq 0$ na geração de 2º harmônico e decomparamos o resultado.

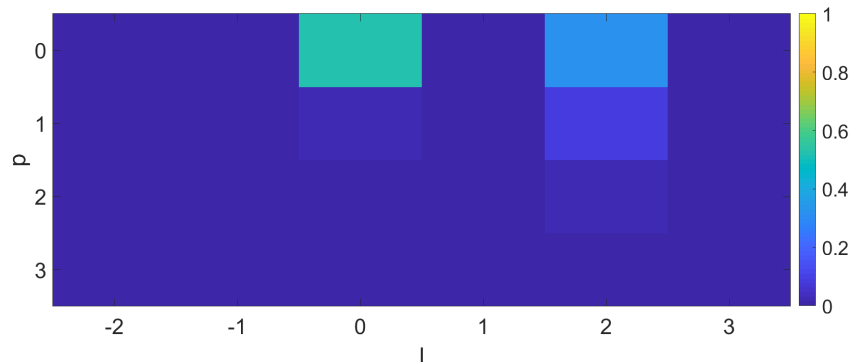


Figura 5.10: A posição relativa da descontinuidade é π radianos, o que modifica as integrais de recobrimento à 3 modos.

Vemos que, apesar do momento angular médio permanecer o mesmo ($= 1$), a

superposição gerada é diferente do caso onde a posição relativa da descontinuidade é nula. Isso acontece pois, devido à inclusão da fase associada com a descontinuidade (Figura (5.3)), haverá uma fase relativa entre os dois vórtices de carga $M = 1/2$, que terá papel relevante no processo de mistura, sendo responsável por modificar o acoplamento entre vórtices no interior do cristal não-linear. No caso da Figura 5.10, a posição relativa é de π radianos, e nela temos uma superposição de modos Laguerre-Gauss com $l = 0, 2$, com diferentes ordens radiais.

CONCLUSÃO

Observamos o dobramento do MAO médio de vórtices fracionários na geração de 2º harmônico. Apesar de possuírem perfis de intensidade diferentes dos modos Laguerre-Gauss, ainda assim apresentam MAO médio inteiro, como foi revelado pela técnica da lente inclinada, pois a superposição gerada no processo possui uma carga topológica média inteira.

Também investigamos o papel da descontinuidade na geração de 2º harmônico. A inclusão desse grau de liberdade atribui uma fase relativa entre os modos de entrada no cristal, de maneira que os típicos acoplamentos à 3 modos que ocorre entre os vórtices óticos no cristal serão modificados. Isso acarreta na geração de modos com mesmo MAO médio, mas descritos por superposições distintas.

Posteriormente, modulamos a amplitude e eliminamos as ordens radiais, o que tornou nossos perfis mais limpos. Além disso, a fim de observarmos soma de momento angular orbital arbitrário, dividimos em dois o feixe antes do SLM, para modularmos os dois campos de maneira independente. Ambos os feixes, após o SLM, seguem caminhos de mesmo comprimento e se juntam antes do cristal com o auxílio de um PBS. Um sistema de imageamento projeta a modulação dos campos na entrada do cristal de KTP. Esse trabalho ainda está em andamento.

Durante a execução desse trabalho, surgiu a ideia de realizarmos uma técnica de holografia no campo de segundo harmônico. Essa técnica, chamada de *Holografia por Deslocamento de Fase* [45], tem por finalidade encontrarmos a fase do feixe objeto no segundo harmônico, a partir de quatro hologramas, cuja diferença entre eles será

apenas a fase do feixe referência. Basicamente, modulamos dois feixes no SLM a fim de produzirmos os campos:

$$H_{\pm} = E \pm e^{ia},$$

sendo E um campo qualquer e a uma fase constante. No processo não-linear, criaremos um campo da forma:

$$H^2 \propto E^2 - e^{2ia}, \quad (5.4)$$

cuja superposição tem a forma de um holograma. Assim, tomando algumas imagens para diferentes valores de a , encontraremos a fase associada ao campo E^2 , que corresponde ao campo criado na geração de segundo harmônico usando apenas E .

A.1 Discretização de Funções Contínuas

Quando realizamos cálculos matemáticos, abstraímos o valor de uma função f sobre todo o espaço no qual ela está definida. Tal feito é impossível no caso de cálculos numéricos realizados por computadores, seja porque este não possui memória suficiente para representar infinitos pontos, ou pelo tempo de execução que pode aumentar de maneira exponencial, dependendo da complexidade do cálculo. Assim, costuma-se empregar métodos numéricos computacionais que buscam discretizar o problema, enquanto fornece uma solução aproximada. O emprego desses métodos costuma ser eficiente, dependendo do **hardware** utilizado.

O primeiro passo é discretizar o espaço em questão. Constrói-se um *array* (um plano xy), com uma quantidade finita de elementos, que representará esse espaço. Sobre ele, é calculada alguma função, cujo os parâmetros contêm as coordenadas desse espaço. Assim, a função é avaliada ponto-a-ponto nesse plano. Quanto mais pontos houver nesse espaço, mais fiel será a representação dessa função nesse espaço discreto com respeito a sua contraparte matemática. Podemos também usar de **loops** para calcular o valor da função a cada iteração e ir armazenando o resultado sobre o plano, porém, esses métodos costumam serem mais lentos.

Vamos considerar o caso unidimensional e tomar o intervalo $[x_l, x_r]$ da reta \mathbb{R} .

Cria-se um *array* com N elementos, contendo tais extremos, onde um índice i ficará associado a cada elemento desse espaço discreto, que terá a forma $[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]$, sendo $x_0 = x_l$ e $x_{N-1} = x_r$.

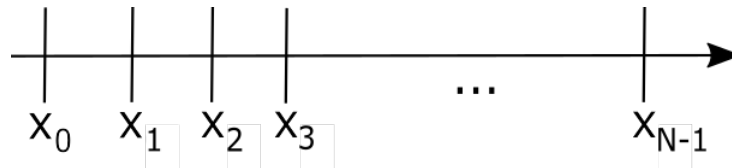


Figura A.1: Discretização do intervalo $[x_l, x_r]$ dos reais \mathbb{R} em N subintervalos.

```
function [x,y,dx] = Rectangular_plane(N)

xl = -5e-3; %left limit
xr = 5e-3; %right limit
dx = (xr - xl) / (N-1); %defining integration interval

[x,y] = meshgrid(linspace(xl,xr,N));

end
```

A.2 Cálculo de Modos Transversais

Começamos definindo uma função que retornará os parâmetros que definem um modo Laguerre-Gaussiano:

```
function [lambda, w_0, w, z, z_r, l, p] = LGBeam.Parameters()

lambda = 1.064e-6; %wavelength
%lambda = .532e-6; %2nd harmonic wavelength
```



```

w_0 = 1e-3; %beam waist
%w_0 = 1e-3./(sqrt(2)); %2nd harmonic beam waist

z_r = pi*(w_0^2)/lambda; %Rayleigh length
z = 0; %longitudinal axis
w = w_0.*sqrt(1 + (z/z_r).^2); %beam width
l = 0; %topological charge
p = 0; %radial charge

end

```

Os parâmetros $(\lambda, z, z_r, w, w_0, l, p)$ correspondem à:

λ = comprimento de onda
 z = coordenada longitudinal
 z_r = comprimento de Rayleigh
 w = diâmetro do feixe
 w_0 = cintura do feixe
 l, p = carga topológica e radial

Seguiremos com a amplitude de um modo Laguerre-Gauss $L_p^{|l|}(\rho, z)$, que tem como entrada os parâmetros fornecidos pela função acima:

```

function [result1,result2,result3] = LGBeam_amplitude(x,y,z,z_r,w,l,p)
%Calculates the amplitude, providing the desired outputs: intensity,
phase and amplitude

r2 = x.^2 + y.^2;
phi = atan2(y,x);
C = sqrt((2*factorial(p))./(pi*factorial(abs(l) + p)));

```

```

a = (1./w).*((sqrt(2.*r2))./w).^abs(l));
lgr = laguerreL(p,abs(l),2*r2./(w.^2));
gauss = exp((-r2)./(w.^2));
oam_phase = exp(-1i*l*phi);
gouy_phase = exp(1i*(2*p + abs(l) + 1).*(atan2(z,z_r)));
radius_phase = exp(-1i*(r2./(w.^2)).*(z/z_r));

amp = C.*a.*lgr.*gauss.*oam_phase.*gouy_phase.*radius_phase;

result1 = abs(amp).^2; %intensity
result2 = angle(amp); %phase
result3 = amp; %amplitude

end

```

Esse código avalia a amplitude de um modo Laguerre-Gauss sobre um plano xy e retorna a intensidade ($|L_p^{l,l}|^2$), fase ($\arg(L_p^{l,l})$), além da própria amplitude. Esta última será uma entrada de um outro código que é responsável por avaliá-la num plano (grid) xy para uma dada coordenada longitudinal z . Além do cálculo, esta também armazena as partes real e imaginária da amplitude em arquivos `.txt` para uso em outros programas.

```

function laguerre_beam()
%Gives the amplitude of a Laguerre-Gaussian mode starting from the
laguerre_amp function

%Input data
lamb = 1.064e-6; %wavelength
w_0 = 1e-3; %beam waist
z_r = pi*(w_0^2) /lamb; %Rayleigh length
z = [0.0]; %longitudinal axis
w = w_0*sqrt(1 + (z/z_r).^2); %beam width

```

```

l = [1.0 2.0 3.0]; %topological charge
p = 0.0; %radial charge
N = 500; %number of points
xl = -5e-3; %left limit
xr = 5e-3; %right limit
dx = (xr - xl)/(N-1); %defining integration interval
[x,y] = meshgrid(linspace(xl,xr,N));

for j = 1:length(z)
    for k = 1:length(l)
        if mod(l(k),1) == 0
            [int,ph,amp] = laguerre_amp_normalized(x,y,z(j),z_r,w(j),l(k),p);
        else
            [int,ph,amp] = laguerre_amp(x,y,z(j),z_r,w(j),l(k),p);
        end

        %mesh(x,y,int), title('l = 1, p = 0'), colormap(gray), view([0 90])

        amplitude_real = real(amp);
        fid = fopen(sprintf('Simulações\\Propagation\\z =
%.2f\\real_amp_l%.1f.txt', z(j), l(k)), 'wt'); %Creates a .txt file
from real(amp) output
        for i = 1:size(amp,1)
            fprintf(fid, '%20.5e\t', amplitude_real(i,:));
            fprintf(fid, '\n');
        end
        fclose(fid);

        amplitude_imag = imag(amp);
        fid = fopen(sprintf('Simulações\\Propagation\\z =
%.2f\\im_amp_l%.1f.txt', z(j), l(k)), 'wt'); %Creates a .txt file from
imag(amp) output
        for i = 1:size(amp,1)

```

```

    fprintf(fid, '%20.5e\t', amplitude_imag(i,:));
    fprintf(fid, '\n');
end
fclose(fid);

end
end
end

```

A.3 Integração Numérica

Sendo $f(x)$ a função que queremos integrar no intervalo $[a, b]$, cuja primitiva é denotada por $F(x)$, o teorema fundamental do cálculo, em uma dimensão, nos garante que:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

A integral acima pode ser interpretada geometricamente como uma soma das áreas de infinitos retângulos com altura $f(x)$ e comprimento infinitesimal dx . Uma vez que o intervalo $[x_l, x_r]$ esteja discretizado por N pontos (um vetor), teremos que o comprimento entre dois pontos adjacentes é dado por $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Para o caso de um vetor uniforme, onde seus pontos encontram-se igualmente espaçados, $\Delta x_i = \frac{x_{N-1} - x_0}{N-1}$, para qualquer i . Em cada um desses subintervalos, a função assumirá um valor constante $f_i(x_i)$. Dessa maneira:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{N-2}}^{x_{N-1}} f(x)dx \\ &\approx \Delta x_0 f_0(x_0) + \Delta x_1 f_1(x_1) + \dots + \Delta x_{N-1} f_{N-1}(x_{N-1}) \\ &\approx \Delta x \sum_{i=0}^{N-1} f_i(x_i) \end{aligned}$$

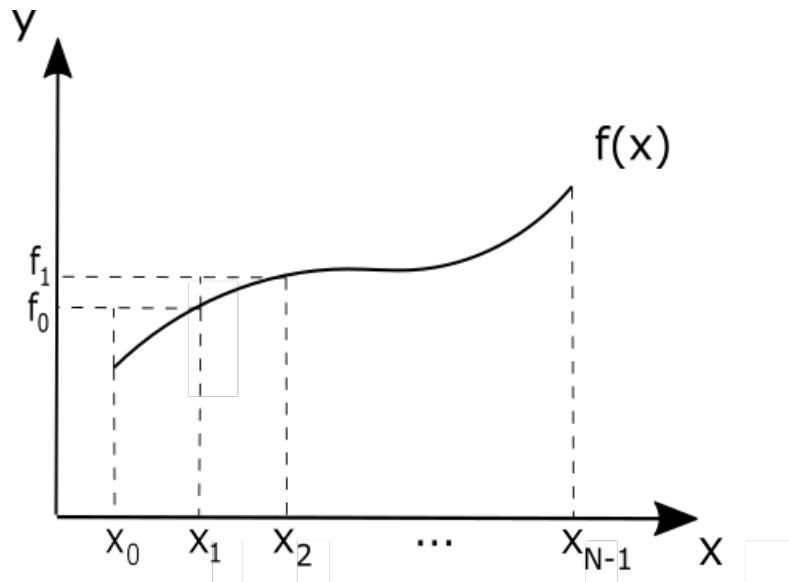


Figura A.2: Divisão de uma função $f(x)$ em N partes. Assumimos que num subintervalo seu valor é constante. Quanto mais subintervalos considerarmos, mais fiél essa representação será da função original.

Portanto, para obtermos a integral da função discreta no intervalo de integração $[x_l, x_r]$, basta que somemos os valores que esta função assume em cada ponto do espaço discreto, e multipliquemos pelo acréscimo Δx . O plano em questão foi gerado a partir de dois vetores com 500 pontos, cada um possuindo os limites $[-5mm, 5mm]$. Os limites devem ser baseados no comprimento transversal do modo, que nesse caso é sua cintura $w_0 = 1mm$ (os cálculos foram realizados em $z = 0mm$, caso em que $w = w_0$). Além disso, como estamos realizando um cálculo num plano, o acréscimo dx deve ser elevado ao quadrado quando quisermos obter alguma integral, pois $dx = dy$, pela forma como o plano foi criado.

Através de um algoritmo que simula a propagação de um feixe ao longo do eixo z , podemos encontrar a decomposição de uma superposição qualquer na base de Laguerre-Gauss, em qualquer posição z :

```
function U2 = Numerical.Propagation(z,N,U,lambda)
%finds the angular spectrum and applies a transfer function, then
%takes the inverse FT

%z = desired position
%N = number of points
%U = field at z = 0
%lambda = wavelength

%N = 500;

%pixel sampling
dx = 1e-4; dy = 1e-4; %pixel size in x direction/sampling interval
n_x = 1/dx; n_y = 1/dy; % pixel per milimeters

dfreqx = n_x/N; dfreqy = n_y/N; %frequency domain interval

freqx = ((-N/2):(N/2-1))*dfreqx; %f_x
freqy = ((-N/2):(N/2-1))*dfreqy; %f_y

A = zeros(N,N);
for nx=1:N
for ny=1:N
A(nx,ny) = exp(1i*2*pi*(z /lambda)*sqrt(1-(lambda*freqx(nx))^2-
(lambda*freqy(ny))^2)); %transfer function
end
end

angular_spectrum = fftshift(fft2(U));
angular_evol = angular_spectrum.*T;
U2 = ifft2(fftshift(angular_evol));

end
```

```
function [c, m, q] = Decomposition_LGBasis(mode,l,p,N,lambda,z)
%Decomposes a field in LG modes

[x,y,dx] = Rectangular_plane(N);
%dx = dx*1e3;

%creating empty arrays
Aint = int16.empty(1,0);
c = double.empty(size(Aint));
m = double.empty(size(Aint));
q = double.empty(size(Aint));

for j = 1:length(p)
for i = 1:length(l)

real_mode2 = importdata(sprintf('Simulações \\N100
\\real_amp_1%.1f_p%d.txt', l(i), p(j)));
im_mode2 = importdata(sprintf('Simulações \\N100 \\im_amp_1%.1f
_p%d.txt', l(i), p(j)));
amp_mode2 = complex(real_mode2,im_mode2);

amp_mode2 = Numerical_Propagation(z,N,amp_mode2,lambda);

product = conj(amp_mode2).*(mode);
result = sum(sum(product))*(dx^2); %i-th coefficient of amp_mode1 in
the LG basis

c = [c,result];
m = [m,l(i)];
q = [q,p(j)];

end
end

c = c /sqrt(sum(abs(c).^2));
```

```
end
```


BIBLIOGRAFIA

- [1] G. MOLINA-TERRIZA, J. TORRES, and L. TORNER, “Twisted photons,” *Nat. Phys.*, vol. 3, no. 5, pp. 305–310, 2007.
- [2] G. MOLINA-TERRIZA, A. VAZIRI, J. ŘEHÁČEK, Z. HRADIL, and A. ZEILINGER, “Triggered qutrits for quantum communication protocols,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 92, no. 16, 2004.
- [3] D. GRIER, “A revolution in optical manipulation,” *Nature*, vol. 424, pp. 810–816, 2003.
- [4] F. optical vortex beam induced rotation of particles, “S. h. tao and x-c. yuan and j. lin and x. peng and and h. b. niu,” *Opt. Express*, vol. 13, pp. 7726–7731, 2005.
- [5] C.-S. GUO, Y.-N. YU, and Z. HONG, “Optical sorting using an array of optical vortices with fractional topological charge,” *Opt. Comm.*, vol. 283, no. 9, pp. 1889 – 1893, 2010.
- [6] S. OEMRAWSINGH, J. D. JONG, X. MA, A. AIELLO, E. ELIEL, G. HOOFT, and J. WOERDMAN, “High-dimensional mode analyzers for spatial quantum entanglement,” *Phys. Rev. A*, vol. 73, p. 032339, 2006.
- [7] G. SITU, G. PEDRINI, and W. OSTEN, “Spiral phase filtering and orientation-selective edge detection/enhancement,” *J. Opt. Soc. Amer. A*, vol. 26, p. 1788, 2009.

-
- [8] J. C. MAXWELL, “A dynamical theory of the electromagnetic field,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London.*, vol. 155, p. 459–512, 1865.
- [9] G. R. FOWLES, *Introduction to modern optics*. New York: Dover Publications, 1989.
- [10] B. E. A. SALEH and M. C. TEICH, *Fundamentals of Photonics*. Hoboken: Wiley, 2006.
- [11] L. G. GOUY, “Sur une propriete nouvelle des ondes lumineuses,” *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 110, p. 1251, 1890.
- [12] S. FENG and H. G. WINFUL, “Physical origin of the gouy phase shift,” *Opt. Lett.*, vol. 26, no. 8, p. 485, 2001.
- [13] M. MCLAREN, T. KONRAD, and A. FORBES, “Measuring the nonseparability of vector vortex beams,” *Phys. Rev. A*, vol. 92, no. 2, p. 023833, 2015.
- [14] V. PARIGI, V. D’AMBROSIO, and C. ARNOLD, “Storage and retrieval of vector beams of light in a multiple-degree-of-freedom quantum memory,” *Nat Commun*, vol. 6, p. 7706, 2015.
- [15] R. J. C. SPREEUW, “Classical wave-optics analogy of quantum-information processing,” *Phys. Rev. A*, vol. 63, no. 6, p. 062302, 2001.
- [16] J. H. POYNTING, “The wave motion of a revolving shaft, and a suggestion as to the angular momentum in a beam of circularly polarised light.” *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, vol. 82, no. 557, pp. 560–567, 1909.
- [17] R. A. BETH, “Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light,” *Phys. Rev.*, vol. 50, pp. 115–1257, 1936.
- [18] L. ALLEN, M. W. BEIJERSBERGEN, R. J. C. SPREEUW, and J. P. WORDERDMAN, “Orbital angular-momentum of light and the transformation of laguerre–gaussian laser modes,” *Phys. Rev. A*, vol. 45, no. 11, p. 8185–8189, 1992.
- [19] M. ERHARD, R. FICKLER, and M. KRENN, “Twisted photons: new quantum perspectives in high dimensions,” *Light Sci Appl*, vol. 7, 2018.

-
- [20] J. D. JACKSON, *Classical Electrodynamics, 3rd ed.* New York: Wiley, 1999.
- [21] Y. SHEN, X. WANG, Z. XIE, C. MIN, X. FU, Q. LIU, M. GONG, and X. YUAN, “Optical vortices 30 years on: Oam manipulation from topological charge to multiple singularities,” *Light Sci Appl*, vol. 8, p. 90, 2019.
- [22] P. A. FRANKEN, A. E. HILL, C. W. PETERS, and G. WEINREICH, “Generation of optical harmonics,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 7, no. 4, pp. 118–119, 1961.
- [23] T. H. MAIMAN, “Stimulated optical radiation in ruby,” *Nature*, vol. 187, pp. 493–494, 1960.
- [24] R. W. BOYD, *Nonlinear optics.* San Diego, CA: Academic Press, 2003.
- [25] L. J. PEREIRA, W. T. BUONO, D. S. TASCA, K. DECHOUM, and A. Z. KHOURY, “Orbital-angular-momentum mixing in type-ii second-harmonic generation,” *Phys. Rev. A*, vol. 96, p. 053856, 2017.
- [26] K. DHOLAKIA, N. B. SIMPSON, and M. J. PADGETT, “Second-harmonic generation and the orbital angular momentum of light,” *Phys. Rev. A*, vol. 54, pp. 3742 – 3745, 1996.
- [27] S. S. R. OEMRAWSINGH, E. R. ELIEL, J. P. WOERDMAN, E. J. K. VERSTEGEN, J. G. KLOOSTERBOER, and G. W. T. HOOFT, “Half-integral spiral phase plates for optical wavelengths,” *Journal of Optics A*, vol. 6, p. 288, 2004.
- [28] J. GOTTE, S. FRANKE-ARNOLD, R. ZAMBRINI, and S. M. BARNETT, “Quantum formulation of fractional orbital angular momentum,” *J. Mod. Opt.*, vol. 54, p. 1723–1738, 2007.
- [29] S. S. R. OEMRAWSINGH, J. A. D. JONG, A. A. X. MA, E. R. ELIEL, G. W. T. HOOFT, and J. P. WOERDMAN, “High-dimensional mode analyzers for spatial quantum entanglement,” *Phys. Rev. A*, vol. 73, p. 032339, 2006.
- [30] S. S. R. OEMRAWSINGH, X. MA, D. VOIGT, A. AIELLO, E. R. ELIEL, G. W. OOF, and J. P. WOERDMAN, “Experimental demonstration of fracti-

- onal orbital angular momentum entanglement of two photons,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 95, no. 24, p. 240501, 2005.
- [31] S. H. TAO, X.-C. YUAN, J. LIN, X. PENG, and H. B. NIU, “Fractional optical vortex beam induced rotation of particles,” *Opt. Express*, vol. 13, p. 7726, 2005.
- [32] D. GABOR, “A new microscopic principle,” *Nature*, vol. 161, p. 777–778, 1948.
- [33] H. RUBINSZTEIN-DUNLOP, A. FORBES, M. BERRY, M. DENNIS, D. ANDREWS, M. MANSURIPUR, C. DENZ, C. ALPMANN, P. BANZER, T. BAUER, E. KARIMI, L. MARRUCCI, M. PADGETT, M. RITSCH-MARTE, N. LITCHINITSER, N. BIGELOW, C. ROSALES-GUZM’AN, A. BELMONTE, J. TORRES, T. W. NEELY, M. BAKER, R. GORDON, A. STILGOE, J. ROMERO, A. WHITE, R. FICKLER, A. E. WILLNER, G. XIE, B. MCMORRAN, and A. WEINER, “Roadmap on structured light,” *J. Opt.*, vol. 19, no. 1, 2017.
- [34] M. PADGETT and R. BOWMAN, “Tweezers with a twist,” *Nat. Photonics*, vol. 5, p. 343–348, 2011.
- [35] B. JACK, J. LEACH, H. RITSCH, S. M. BARNETT, M. J. PADGETT, and S. FRANKE-ARNOLD, “Precise quantum tomography of photon pairs with entangled orbital angular momentum,” *New J. Phys.*, vol. 11, p. 103024, 2009.
- [36] M. MESTRE, F. DIRY, B. V. D. LESEGNO, and L. PRUVOST, “Cold atom guidance by a holographically-generated laguerre-gaussian laser mode,” *Eur. Phys. J. D*, vol. 57, pp. 87–94, 2010.
- [37] L. CABEZAS, D. AMAYA, N. BOLOGNINI, and A. LENCINA, “Speckle fields generated with binary diffusers and synthetic pupils implemented on a spatial light modulator,” *App. Opt.*, vol. 54, no. 18, 2015.
- [38] L. ZHU and J. WANG, “Arbitrary manipulation of spatial amplitude and phase using phase-only spatial light modulators,” *Sci. Rep.*, vol. 4, p. 7441, 2014.
- [39] S. REICHELDT, “Spatially resolved phase-response calibration of liquid-crystal-based spatial light modulators,” *Appl. Opt.*, vol. 52, pp. 2610–2618, 2013.

-
- [40] J. LEACH, K. WULFF, G. SINCLAIR, P. JORDAN, J. COURTIAL, L. THOMSON, G. GIBSON, K. KARUNWI, J. COOPER, Z. J. LACZIK, and M. PADGETT, “Interactive approach to optical tweezers control,” *Appl. Opt.*, vol. 45, p. 897, 2006.
- [41] R. BOWMAN, V. D’AMBROSIO, and E. RUBINO, “Optimisation of a low cost slm for diffraction efficiency and ghost order suppression,” *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, vol. 199, p. 149–158, 2011.
- [42] A. M. YAO and M. J. PADGETT, “Orbital angular momentum: origins, behavior and applications,” *Adv. Opt. Photonics*, vol. 3, p. 161–204, 2011.
- [43] M. W. BEIJERSBERGEN, “Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum,” *Opt. Commun.*, vol. 93, pp. 123 – 132, 1993.
- [44] P. VAITY, J. BANERJI, and R. P. SINGH, “Measuring the topological charge of an optical vortex by using a tilted convex lens,” *Phys. Let. A*, vol. 377, pp. 1154–56, 2013.
- [45] I. YAMAGUCHI and T. ZHANG, “Phase-shifting digital holography,” *Opt. Lett.*, vol. 22, pp. 1268–1270, 1997.