

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE FÍSICA

*Gravidade Quântica Assintoticamente Segura:
Aspectos Fundamentais e a Teoria Unimodular*

ARTHUR FERREIRA VIEIRA
NITERÓI, 2020

ARTHUR FERREIRA VIEIRA

GRAVIDADE QUÂNTICA ASSINTOTICAMENTE SEGURA:
ASPECTOS FUNDAMENTAIS E A TEORIA UNIMODULAR

Dissertação apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal Fluminense como cumprimento parcial dos requisitos para o grau de mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Duarte Pereira Junior
Coorientador: Prof. Dr. Luis Esteban Oxman

Niterói-RJ
2020

Ficha catalográfica automática - SDC/BIF
Gerada com informações fornecidas pelo autor

F383g Ferreira vieira, Arthur
Gravidade Quântica Assintoticamente Segura : Aspectos
Fundamentais e a Teoria Unimodular / Arthur Ferreira vieira ;
Antônio Duarte Pereira Junior, orientador ; Luis Esteban
Oxman, coorientador. Niterói, 2020.
99 p. : il.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,
Niterói, 2020.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22409/PPGF.2020.m.14322445748>

1. Gravidade quântica. 2. Grupo de renormalização. 3.
Teoria quântica de campos. 4. Produção intelectual. I.
Pereira Junior, Antônio Duarte, orientador. II. Esteban
Oxman, Luis, coorientador. III. Universidade Federal
Fluminense. Instituto de Física. IV. Título.

CDD -

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais por terem me apoiado em todos os momentos da minha trajetória pela física até hoje. Não tenho palavras para expressar o quanto fizeram por mim. Procuraram me dar tudo para eu conseguir seguir meus sonhos sempre. Amo vocês demais.

Ao Bernardo França que contribuiu com muitas conversas sobre Relatividade Geral e que me aturou no simpósio de Belém. Provavelmente é a pessoa mais engraçada do instituto e a mais ausente das salas de aula.

Ao Maron Anka que, entre diversas conversas descontraídas, tentou por inúmeras vezes me explicar como se calcula a temperatura de um *spin* em termodinâmica quântica.

Ao David Rosa pelas discussões sobre aspectos de QCD não-perturbativa.

Aos meus professores: Luis Oxman pelas explicações e discussões sobre teoria quântica de campos e pelo apoio em vários momentos do mestrado, Marco Moriconi por diversas discussões interessantes e pelo contínuo apoio, Jorge Sá Martins pelo apoio e por ter ajudado indiretamente na minha decisão de cursar física quando, ainda no ensino médio, eu acompanhava suas vídeo-aulas, Kaled Dechoum pelas conversas e discussões sempre enriquecedoras e pelo curso de processos estocásticos em sistemas bosônicos.

Agradeço ao meu orientador Antônio Duarte por confiar em mim, por dividir seu conhecimento sobre gravidade clássica e algumas de suas abordagens quânticas e pela paciência em sanar todas as dúvidas que me ocorriam. Em cada reunião me ensinava além do que eu tinha perguntado. Grande parte da minha contínua formação como pesquisador se deve aos seus conselhos e ensinamentos. Certamente é uma fonte de inspiração profissional.

Ao Gustavo Pazzini que, sem dúvida, foi de uma generosidade ímpar em vários momentos ao me ajudar com o *Mathematica*. Desde o início, quando eu estava aprendendo a usar o *xAct*, até o fim da dissertação com os *notebooks* mais elaborados que utilizamos no capítulo sobre gravidade unimodular. Nossas discussões contribuíram muito para a elaboração dessa dissertação.

Agradecimento especial à morena cujo sorriso me desmonta todo. Nádia Maria, obrigado por me aturar sempre, por ter me dado apoio e um amor que não tenho palavras para mensurar. Obrigado por ter deixado eu entender o real significado de amar e por ser minha melhor amiga. Te amo, minha morena linda.

Finalmente, agradeço ao Programa de Pós-Graduação do IF-UFF, à Capes e ao CNPq pelo suporte financeiro ao longo desses dois anos de mestrado.

RESUMO

A aplicação do grupo de renormalização funcional para a gravidade quântica no cenário da segurança assintótica é estudado. Por um lado, em caráter introdutório, estudamos a dependência de parametrização de campo para a equação exata do grupo de renormalização funcional no truncamento de Einstein-Hilbert para a ação efetiva média. A análise foi realizada no calibre de Feynman-de Donder dentro da aproximação de *background* para uma família de parametrização de campo a um parâmetro. Em particular, analisamos como diferentes escolhas de parametrização de campo afetam a estrutura de ponto fixo.

Por outro lado, investigamos o cenário de segurança assintótica em uma teoria gravitacional classicamente equivalente, do ponto de vista dinâmico, à Relatividade Geral: a gravidade unimodular. Do ponto de vista quântico, diferenças podem surgir. A constante cosmológica não é um acoplamento na ação unimodular, o que pode sugerir uma nova perspectiva sobre o problema do ajuste fino da constante cosmológica. Nesta dissertação, estendemos alguns resultados da literatura sobre segurança assintótica unimodular. Nesse sentido, realizamos uma análise sistemática sobre a dependência de esquemas de regularização para os pontos fixos e expoentes críticos em uma família de ações gravitacionais que dependem de funções do escalar de Ricci e do tensor de Ricci na forma $f(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})$. Este estudo foi realizado dentro da aproximação de *background* para a ação efetiva média e no calibre de Landau.

ABSTRACT

We study the application of the functional renormalization group for quantum gravity in the asymptotic safety scenario. At an introductory level, we study the dependence on field parametrization for the functional renormalization group equation in the Einstein-Hilbert truncation for the effective average action. This analysis was carried out in the Feynman-de Donder gauge within the background approximation for a one-parameter family of field parametrization. In particular, we investigate how different choices of field parametrization affect the fixed point structure.

On the other hand, we investigate the asymptotic safety scenario in a theory which is classically dynamically equivalent to General Relativity: unimodular gravity. At the quantum level, differences might occur. The cosmological constant is not a coupling in the unimodular action. This might suggest a new perspective on the cosmological constant fine-tuning problem. In this dissertation, we extend some results in the unimodular asymptotic safety literature. In this sense, we perform a systematic analysis on the regularization scheme dependence for the fixed points and critical exponents in a family of gravitational actions that depend on functions of the Ricci scalar and the Ricci tensor in the form $f(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})$. This study was carried out within the background approximation for the effective average action and in the Landau gauge.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Na integração do funcional gerador das funções de Green um <i>cutoff</i> ultravioleta Λ é introduzido e a região de integração é restrita ao intervalo $0 < k' < \Lambda$	8
2.2	Casca ou camada de momento associada aos modos de momentos rápidos. . . .	9
2.3	Comportamento gráfico das funções reguladoras correspondentes às equações (2.3.3) (linha contínua), (2.3.4) (linha tracejada) e (2.3.5) (linha tracejada-pontilhada). 11	11
2.4	Comportamento da função $\partial_t R_k(z)$ em relação ao seu argumento z . Novamente as convenções adotadas nesses gráficos seguem as especificações da Fig. (2.3). . .	17
2.5	A superfície representa a superfície crítica \mathcal{C} associada ao ponto fixo. Trajetórias que atingem o ponto fixo (setas contínuas brancas) geram a superfície definida pelas direções atratoras/relevantes no UV. A trajetória pontilhado-tracejada em verde é um exemplo de um desvio para uma direção repulsiva no UV. As direções em vermelho contínuo se afastando do ponto fixo são direções irrelevantes. . . .	21
4.1	Coeficiente B_1 em função de Ω em $d = 4$ para $\lambda_k = 0$ a 1-loop. B_1 é função crescente de Ω , apresentando valores negativos até o valor crítico $\Omega_c = 0,917$, acima do qual não existe ponto fixo interagente para g positivo.	38
4.2	Função beta do acoplamento de Newton adimensional g_k com $\lambda_k = 0$ em $d = 4$ para as parametrizações linear ($\Omega = 0$, linha contínua), exponencial ($\Omega = 1/2$, linha tracejada) e linear da inversa ($\Omega = 1$, linha tracejada-pontilhada). Não há ponto fixo interagente para $\Omega = 1$ para g positivo.	39
4.3	Gráficos da posição do ponto fixo g_* em função da dimensão d . O gráfico da esquerda se refere à parametrização linear e apresenta singularidade em $d \approx 11,6$. Já o gráfico da direita se refere à decomposição exponencial e apresenta singularidade em $d \approx 4,8$	40

LISTA DE TABELAS

4.1	Pontos fixos não-triviais e expoentes críticos para o truncamento de Einstein-Hilbert em $d = 4$ com constante cosmológica. Para o truncamento considerado, apenas na parametrização linear surge uma direção relevante no UV para ambos os acoplamentos gravitacionais.	40
5.1	Coleção de pontos fixos para os acoplamentos adimensionais G^* e a_n^* em ordem crescente de truncamento com o regulador de Lichnerowicz.	58
5.2	Coleção de expoentes críticos calculados nos pontos fixos da Tabela 5.1.	58
5.3	Coleção de pontos fixos para os acoplamentos adimensionais G^* e a_n^* em ordem crescente de truncamento com o regulador de Bochner.	59
5.4	Coleção de expoentes críticos calculados nos pontos fixos da Tabela 5.3.	60
C.1	Coefficientes de <i>heat kernel</i> para o laplaciano de Lichnerowicz sobre S^4	74
C.2	Coefficientes de <i>heat kernel</i> para o laplaciano de Bochner sobre S^4	74

Sumário

I	Gravidade Quântica: Motivações e Perspectivas	1
1	Renormalizabilidade e o programa da segurança assintótica	2
II	O Grupo de Renormalização Funcional	5
2	A Equação de Wetterich	6
2.1	Introdução	6
2.2	Abordagem de Wilson à teoria de renormalização	7
2.3	Função reguladora e funcionais dependentes de escala	10
2.4	Ação efetiva média	11
2.5	Comportamento assintótico da ação efetiva média	12
2.6	Equação de Wetterich ou equação do grupo de renormalização funcional	14
2.7	Preditividade no espaço de acoplamentos (in)finito-dimensional	17
2.7.1	Fluxo na vizinhança de g^*	20
III	O Cenário da Segurança Assintótica para a Gravitação Quântica	23
3	O ponto fixo de Reuter	24
3.1	O grupo de renormalização funcional para a gravitação quântica	24
3.2	Resultados para o ponto fixo de Reuter	27
4	Dependência de parametrização de campo na gravitação quântica de Einstein	29
4.1	Introdução	29
4.2	Parametrização das flutuações da métrica	29
4.3	Truncamento da ação efetiva média	30
4.3.1	Setor gravitacional	30
4.3.2	Setores de <i>gauge-fixing</i> e de <i>ghost</i>	31
4.4	Construindo a equação de fluxo para o truncamento de Einstein-Hilbert	33
4.4.1	Escolha da função <i>cutoff</i>	33
4.4.2	Equação de fluxo	34

4.5	Funções beta	37
4.6	Resultados	37
4.6.1	Análise a 1- <i>loop</i>	37
4.6.2	Análise de resultados modificados pelo grupo de renormalização funcional	39
IV	Segurança Assintótica Unimodular	42
5	Gravitação unimodular assintoticamente segura	43
5.1	Introdução	43
5.2	Gravitação unimodular clássica	44
5.2.1	Equivalência entre a gravitação de Einstein e a gravitação unimodular . .	45
5.3	Grupo de renormalização funcional para a gravitação unimodular	48
5.3.1	Truncamento $f(R, R_{\mu\nu}^2)$	48
5.3.2	Construindo a equação de fluxo para $f(R, R_{\mu\nu}^2)$ unimodular	52
5.4	Pontos fixos interagentes	54
5.4.1	Resultados numéricos para os pontos fixos e expoentes críticos	56
6	Discussão e Conclusões	61
V	Apêndices	64
A	Propriedades das transformações de calibre	65
B	Quantização de Faddeev-Popov para a gravitação	67
C	Técnicas de <i>heat kernel</i> e tecnologia para o cálculo de traços funcionais	69
C.1	O <i>heat kernel</i>	69
C.2	Expansão assintótica	70
C.3	Fórmula para traços funcionais	71
C.4	Coefficientes de <i>heat kernel</i> para campos sujeitos a vínculos diferenciais	73
C.5	Eliminação de modos espúrios	75
D	Varição dos símbolos de Christoffel e de invariantes de curvatura	76
	Referências	87

Parte I

Gravidade Quântica: Motivações e Perspectivas

Capítulo 1

Renormalizabilidade e o programa da segurança assintótica

A unificação da Mecânica Quântica com a Relatividade Geral é um dos maiores desafios em aberto da física teórica contemporânea. Espera-se que a teoria resultante incorpore efeitos quânticos em gravitação (a grosso modo como flutuações da própria geometria do espaço-tempo) e auxilie na compreensão de problemas fundamentais como a origem do Universo e os estágios finais da evaporação de buracos negros.

A recente detecção de ondas gravitacionais emitidas por sistemas de buracos negros binários [1] e as primeiras imagens do buraco negro supermassivo da galáxia M87 feitas pelo *Event Horizon Telescope* (EHT) [2] formam um laboratório promissor para sondar efeitos não-lineares do campo gravitacional em regimes de campo forte. Entretanto, ainda que forneça uma descrição satisfatória dessas observações, a Relatividade Geral é incompleta quando se trata da existência de singularidades do espaço-tempo. Nesse sentido, é esperado que efeitos de gravitação quântica modifiquem a geometria do espaço-tempo no interior de buracos negros, onde soluções clássicas admitem singularidades.

A construção do Modelo Padrão de física de partículas com técnicas de quantização perturbativa se mostrou uma teoria extremamente bem-sucedida, o que faz com que a atitude mais natural para se construir uma teoria quântica da interação gravitacional seja aplicar o mesmo arcabouço teórico de teoria quântica de campos (TQC) no contínuo para a Relatividade Geral. Entretanto, os problemas da gravitação quântica perturbativa em relação ao seu comportamento no setor ultravioleta (UV) impedem a construção de uma TQC fundamental para a Relatividade Geral. De fato, por argumentos de contagem de potência, a gravidade quântica baseada na ação de Einstein-Hilbert não é perturbativamente renormalizável [3–5], o que significa que infinitos contratermos são necessários para cancelar as divergências ultravioleta da teoria. Estes contratermos vêm acompanhados de coeficientes arbitrários que devem ser fixados por dados experimentais. Infinitos coeficientes livres inviabilizam a preditividade da teoria quântica correspondente. Entretanto, as divergências UV podem ser regularizadas pela introdução de um *cutoff* (escala de corte) ultravioleta e a teoria *efetiva* resultante pode fornecer previsões, como a correção quântica ao potencial gravitacional entre duas fontes pontuais [6], a energias E abaixo da massa de Planck M_{Pl} , onde as contribuições de interações de ordens mais altas são suprimidas por potências positivas de (E/M_{Pl}) . No entanto, quando $E \approx M_{\text{Pl}}$, essa supressão é perdida junto com a preditividade. Portanto, um modelo preditivo de gravidade quântica existe abaixo da escala de Planck, mas para a descrição a distâncias muito curtas, é necessária uma teoria fundamental que seja completa no ultravioleta (ver [7] e [8] para revisões

de distintas abordagens de um cenário quântico para a gravitação.).

No contexto da teoria quântica de campos, uma tentativa de driblar a não-renormalizabilidade perturbativa da Relatividade Geral é adição de termos de derivadas superiores [9–14]. Ou seja, além dos termos de Einstein-Hilbert, contribuições de R^2 e $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ são adicionadas à lagrangiana clássica. Apesar desta teoria ser renormalizável perturbativamente, a existência de derivadas superiores temporais implica um espectro de partículas maior que inclui um estado massivo não-físico de *ghosts* (fantasmas) de *spin*-2. No nível clássico, a presença de fantasmas vindos de derivadas superiores gera soluções do tipo *runaway* conhecidas como instabilidades de Ostrogradsky [15]. Por outro lado, no nível quântico, o estado de fantasma pode violar unitariedade [9]. Na verdade, este problema ainda é tema de pesquisa atual e tem sido investigado com diferentes estratégias [16–26]. Em particular, dentro de um esquema de quantização para o fantasma, descobriu-se que a gravidade quadrática é unitária em todas as ordens em teoria de perturbação [27], apesar de levar à violação de microcausalidade [28].

A construção de uma teoria quântica para a gravidade com derivadas superiores pode ser implementada dentro da caixa de ferramentas da teoria quântica de campos de maneira não-perturbativa pelo programa da segurança assintótica [29–36]. Nesta abordagem introduzida por Weinberg [37], uma teoria quântica fundamental da gravidade poderia ser implementada graças à existência de um ponto fixo UV não-trivial no fluxo do grupo de renormalização. Neste ponto fixo, a teoria se torna invariante de escala [38] e pode-se acessar distâncias arbitrariamente curtas sem surgirem divergências. Para que esta abordagem seja preditiva, a superfície crítica gerada pelos operadores relevantes do fluxo do grupo de renormalização, *i.e.*, a hiper-superfície construída pelo conjunto de pontos que são atraídos para o ponto fixo não-trivial, deve ter dimensão finita. Dessa maneira, os acoplamentos dos operadores associados a direções relevantes se tornam parâmetros livres a serem fixados por dados experimentais. A procura por um ponto fixo não-trivial pode não ser factível dentro da teoria de perturbação, e técnicas não-perturbativas podem ser necessárias. Desse modo, uma teoria de gravidade assintoticamente segura depende da existência de um ponto fixo UV não-trivial que apresenta um número finito de direções relevantes.

Na prática, o grupo de renormalização funcional (GRF) é um método poderoso para estudar sistemas sem que seja necessário depender de algum parâmetro de expansão perturbativo como constantes de acoplamento e a dimensão do espaço-tempo, ver os trabalhos de revisão [39–43]. No programa da segurança assintótica, muitos indícios para a existência de um ponto fixo não-trivial foram obtidas com o auxílio do grupo de renormalização funcional após o trabalho pioneiro de Reuter em [44]. De fato, sistemas de gravidade pura parecem exibir um ponto fixo não-trivial no qual a dimensão da superfície crítica se torna finita [19, 45–62]. Notavelmente, a introdução de graus de liberdade de matéria compatíveis com o Modelo Padrão não estraga a existência do ponto fixo ultravioleta, o que sinaliza a existência de uma teoria de gravidade quântica fundamental compatível com as partículas do Modelo Padrão [35, 63–68]. De fato, a estrutura de ponto fixo e a premissa de que o Modelo Padrão exista até a escala de Planck levam à previsão da massa do Higgs, da massa do *quark top* e da diferença de massa de *quarks* carregados em regimes de baixas energias [69–73]. Além disso, a existência de um ponto fixo assintoticamente seguro para sistemas de gravidade-matéria fornece indícios para a solução do problema do polo de Landau [74] e do problema da constante cosmológica [75]. Consequências cosmológicas da segurança assintótica para modelos inflacionários foram estudados em [76–79].

Esta dissertação foca em dois aspectos do cenário da segurança assintótica para a gravitação. O primeiro aspecto diz respeito à dependência de parametrização de campo sobre a estrutura de ponto fixo. A existência de ponto fixo interagente no grupo de renormalização requer o

cálculo de funções beta. No entanto, a quantização padrão da gravitação é construída sob diversas ambiguidades, *e.g.*, escolha de fixação de calibre, parametrização de campo etc. Essas ambiguidades podem afetar o comportamento de quantidades *off-shell*, como, por exemplo, funções beta. Um questionamento pode surgir: como a estrutura do ponto fixo pode ser afetada pela escolha de parametrização de campo? Ou, em particular: como podemos manipular essas ambiguidades de tal forma a fazer com o que o ponto fixo desapareça? Para calcular as funções beta, geralmente usamos o método de campo de fundo em que a métrica $g_{\mu\nu}$ é decomposta em uma parte de fundo $\bar{g}_{\mu\nu}$ e uma flutuação $\delta g_{\mu\nu}$. Investigaremos como diferentes escolhas de parametrização de campo afetam a análise de ponto fixo para o truncamento de Einstein-Hilbert para a ação efetiva média, uma ação dependente de escala que leva em conta a integração de flutuações quânticas até uma escala k .

O segundo aspecto diz respeito a uma formulação classicamente equivalente à Relatividade Geral: a gravitação unimodular. Nesta abordagem, o determinante da métrica é fixado *a priori* e não é sujeito à variação. A teoria é então invariante pelo subgrupo de difeomorfismos transversos, $TDiff$. Do ponto de vista quântico, a constante cosmológica não é um acoplamento da ação unimodular, surgindo como uma constante de integração das equações de movimento, deduzidas pela ação efetiva quântica usual após as flutuações quânticas terem sido integradas no infravermelho. Ganha-se assim uma nova perspectiva sobre o problema do ajuste fino da constante cosmológica. Além disso, trabalhos indicam que modelos de buracos negros precisam ser tratados em uma configuração unimodular para que sejam livres de singularidades no cenário da segurança assintótica [80, 81].

Uma teoria quântica baseada no cenário da segurança assintótica unimodular foi estudada para o truncamento de Einstein-Hilbert em [82] e para a gravitação $f(R)$ em [83]. Evidências para um ponto fixo interagente em ambos os casos foram encontradas. Estenderemos esses estudos e consideraremos a segurança assintótica unimodular para ações construídas com termos além do escalar de Ricci. A fim de acessar os efeitos devidos a derivadas superiores sobre o acoplamento de Newton, investigaremos o fluxo do grupo de renormalização funcional baseado em ações que dependem do escalar de Ricci e do quadrado do tensor de Ricci na forma [60, 84] $f(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})$. Discutiremos a dependência do número de direções relevantes para dois esquemas de regularização. Uma das principais conclusões é que encontramos, frente a modificações do parâmetro de endomorfismo que interpola entre o regulador de Lichnerowicz e o de Bochner, que o número de direções relevantes muda. Em particular, encontramos pontos fixos com duas e três direções relevantes dentro do calibre de Landau e da aproximação de *background*, em acordo com a literatura existente [83, 85].

Parte II

O Grupo de Renormalização Funcional

Capítulo 2

A Equação de Wetterich

2.1 Introdução

Teorias clássicas, por construção, são encaradas como formulações efetivas no sentido de que seu poder preditivo deixa de valer a partir de uma dada escala de corte (um *cutoff* na escala de energia, de momento ou de distância). A partir deste ponto, nosso conhecimento cessa e nova física precisa ser procurada ou, equivalentemente, novos métodos precisam ser aplicados ou desenvolvidos. No caso da gravitação quântica perturbativa, a escala de Planck marca esse limiar.

O grupo de renormalização permite acessar a descrição da natureza em altas escalas de energia ou a distâncias muito curtas. Em particular, o grupo de renormalização funcional (GRF) é uma implementação do conceito de grupo de renormalização que combina métodos funcionais de TQC com a ideia do grupo de renormalização de Kenneth Wilson [86, 87]. A ideia principal por trás do GRF é a de que para descrever a dinâmica em uma escala de momento k não se faz necessário conhecer as interações microscópicas em escalas maiores que a escala k . Graus de liberdade a altas escalas de momento são então integrados, restando uma ação efetiva (com todos os invariantes compatíveis com as simetrias da teoria) que só envolve integração *a posteriori* sobre os modos lentos da teoria. Isto implica em um desacoplamento entre o setor infravermelho e o setor ultravioleta. Os efeitos dos graus de liberdade ultravioleta surgem na determinação das constantes de acoplamento da teoria efetiva. Podemos dizer, de maneira pictórica, que o GRF é análogo a um microscópio com resolução variável, parafraseando Andreas Wipf [88].

A implementação da abordagem de Wilson se baseia na função de partição funcional (ou funcional gerador das funções de Green)

$$Z[J] = \int [\mathcal{D}\Phi]_{\Lambda_{UV}} e^{-S[\Phi] + \Phi \cdot J}, \quad (2.1.1)$$

onde Φ é uma espécie de supercampo (não necessariamente um campo escalar), J representa a(s) fonte(s) associada(s) a Φ e $\Phi \cdot J$ representa uma contração de todos os índices (de espaço-tempo e internos) do supercampo com a(s) fonte(s). O parâmetro Λ_{UV} representa um *cutoff* UV^1 introduzido para tornar a medida funcional bem-definida. A visão de renormalização de

¹Neste estágio, este parâmetro em geral não tem necessariamente dimensão de energia. Por exemplo, em modelos tensoriais, este parâmetro ultravioleta é adimensional e está associado com a dimensão do tensor [7, 89]. Ver também [90] para aplicações de modelos matriciais e tensoriais a partir da perspectiva do grupo de renormalização funcional aplicados à gravitação quântica.

Wilson descreve como a ação $S_{\Lambda_{UV}}$ varia quando a escala Λ_{UV} é variada infinitesimalmente, o que, em outras palavras, equivale a realizar a integral funcional sobre uma camada de momento por vez, ao invés de tudo de uma vez só. Como dito no parágrafo anterior, para cada etapa de integração, a ação efetiva resultante leva em conta o efeito dos modos integrados. Integrar de Λ_{UV} até zero de forma iterativa é completamente equivalente a se calcular a integral de trajetória completa de uma só vez. Em seguida duas transformações do grupo de renormalização são feitas: um reescalonamento nos momentos e nas distâncias (isto traz de volta o *cutoff* para o seu valor original), e um reescalonamento nos campos por um fator adequado de modo que o termo cinético se mantenha renormalizado canonicamente. Isto muda a dimensão do campo por uma quantidade conhecida como “dimensão anômala”.

Por outro lado, o GRF implementa a ideia de Wilson de maneira suave a partir da introdução de um regulador infravermelho, e permite que o procedimento de integração sobre camadas de momento infinitesimais possa ser resumido em uma equação diferencial exata para uma ação efetiva dependente de escala Γ_k , chamada ação efetiva média (EAA)². A equação de fluxo para Γ_k descreve a estrutura do grupo de renormalização funcional. Uma vantagem dessa abordagem é que nos permite obter funções beta de acoplamentos de forma direta e sistemática a partir de uma de projeção adequada. Essa é a essência por trás do grupo de renormalização funcional. Cabe salientar que, ainda que a equação de fluxo seja uma equação exata, algum tipo de aproximação para a EAA é necessária para que se possa realizar cálculos práticos.

Nesta seção, a visão de Wilson sobre a integração funcional sobre camadas de momento é brevemente revisada. Em seguida apresentaremos a extensão dessa ideia com a derivação da equação de Wetterich ou equação exata do GRF. Por fim, apresentaremos os conceitos-chave sobre a preditividade no espaço de acoplamentos (in)finito-dimensional.

2.2 Abordagem de Wilson à teoria de renormalização

Considere um sistema com graus de liberdade compatíveis com um campo escalar $\phi = \phi(x)$ e com dinâmica clássica descrita por uma ação $S = S[\phi]$ no espaço plano Euclidiano.³ A quantização desse sistema pode ser feita por meio do chamado funcional gerador das funções de Green, a saber

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] + \int d^d x J\phi} = \int \prod_k d\phi(k) e^{-S[\phi] + \int d^d x J\phi}, \quad (2.2.1)$$

onde $J = J(x)$ representa uma fonte externa clássica e a variável de integração foi escrita em termos das componentes de Fourier do campo $\phi(k)$.

Vamos impor um *cutoff* ultravioleta Λ . Para tanto, restringiremos a região de integração em (2.2.1). Ou seja, integramos somente sobre $\phi(k)$ com $|k| < \Lambda$ e $\phi(k) = 0$ para $k > \Lambda$. A medida de integração fica então

$$\mathcal{D}\phi_\Lambda = \prod_{|k| < \Lambda} d\phi(k). \quad (2.2.2)$$

A Fig. (2.1) ilustra a região de integração em modos $\phi(k)$ de momento k . Aplicamos então a

²Do inglês, *Effective Average Action*.

³A extensão para inclusão de campos vetoriais, espinoriais e tensoriais é imediata. Abordaremos alguns destes detalhes nos próximos capítulos. Além disso, daqui em diante, trabalharemos na assinatura riemanniana (+, +, +, +). Uma das razões é que o quadrado do quadrimomento é positivo semi-definido, o que será útil na

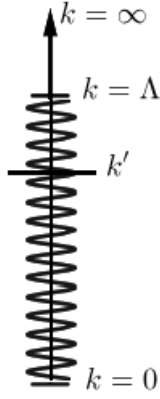


Figura 2.1: Na integração do funcional gerador das funções de Green um *cutoff* ultravioleta Λ é introduzido e a região de integração é restrita ao intervalo $0 < k' < \Lambda$.

prescrição do *cutoff* descrita e “desligamos” a fonte ($J = 0$) por simplicidade. Assim,

$$\int \mathcal{D}\phi_\Lambda e^{-S[\phi]} = \int_{0 < |k| < k'} \mathcal{D}\phi \int_{k' < |k| < \Lambda} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \quad (2.2.3)$$

e notamos que

$$\int_{k' < |k| < \Lambda} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} = e^{-S_{(1)}[\phi]}, \quad (2.2.4)$$

onde $e^{-S_{(1)}[\phi]}$ representa a integração sobre a camada de momentos rápidos. Em outras palavras, é útil dividir as variáveis de integração $\phi(k)$ em dois grupos. Seja uma constante adimensional $b < 1$. As variáveis $\phi(k)$ com $b\Lambda \leq |k| < \Lambda$ representa os graus de liberdade nos momentos rápidos (*fast*) que iremos integrar. Defina então

$$\phi_{fast}(k) = \phi_f(k) = \begin{cases} \phi(k) & \text{para } b\Lambda \leq |k| < \Lambda; \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad (2.2.5)$$

De maneira análoga, defina os modos de momentos lentos (*slow*)

$$\phi_{slow}(k) = \phi_s(k) = \begin{cases} \phi(k) & \text{para } |k| \leq b\Lambda; \\ 0 & \text{para } |k| > b\Lambda. \end{cases} \quad (2.2.6)$$

Portanto, podemos substituir $\phi(k) = \phi_f(k) + \phi_s(k)$ na ação e a integração sobre os modos rápidos é efetuada então em uma casca ou camada de momento, como na Fig. (2.2).

A ação clássica fica então

$$S[\phi_f + \phi_s] = S[\phi_s] + S[\phi_f, \phi_s], \quad (2.2.7)$$

onde $S[\phi_f, \phi_s]$ é a parte da ação que acopla os modos rápidos e lentos. À guisa de exemplo, para o caso da teoria $\lambda\phi^4$, *i.e.*,

$$S[\phi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right], \quad (2.2.8)$$

quantização via integração sobre modos rápidos e lentos como discutiremos abaixo. No contexto de uma teoria de gravidade quântica, a relação entre uma formulação lorentziana e outra riemanniana não é clara, ver [91, 92].

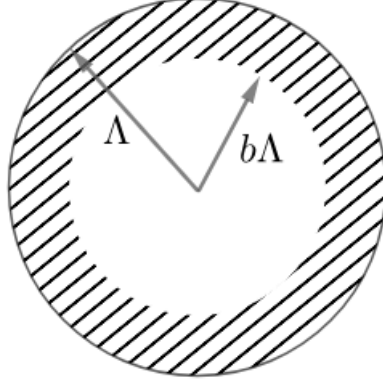


Figura 2.2: Casca ou camada de momento associada aos modos de momentos rápidos.

a ação completa toma a forma

$$S[\phi_f + \phi_s] = S[\phi_s] + \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_f)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi_f^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi_f^4 + \lambda \left(\frac{1}{6} \phi_s^3 \phi_f + \frac{1}{6} \phi_s \phi_f^3 + \frac{1}{4} \phi_s^2 \phi_f^2 \right) \right], \quad (2.2.9)$$

onde m e λ são os acoplamentos *bare* (não renormalizados) e a ação $S[\phi_s]$ é igual à ação (2.2.8) trocando ϕ por ϕ_s . Os detalhes de como realizar a integração em ϕ_f podem ser encontrados em [93]. O funcional gerador das funções de Green toma então a seguinte forma

$$Z = \int \mathcal{D}\phi_s e^{-S[\phi_s]} \int \mathcal{D}\phi_f e^{-S[\phi_f, \phi_s]} = \int \mathcal{D}\phi_s e^{-S[\phi_s]} e^{-\Delta S[\phi_s]}, \quad (2.2.10)$$

onde

$$e^{-\Delta S[\phi_s]} = \int \mathcal{D}\phi_f e^{-S[\phi_f, \phi_s]}, \quad (2.2.11)$$

ou ainda, finalmente,

$$Z = \int \mathcal{D}\phi_s e^{-S_{ef}[\phi_s]}, \quad (2.2.12)$$

culminando na ação efetiva de Wilson

$$S_{ef}[\phi_s] = S[\phi_s] + \Delta S[\phi_s], \quad (2.2.13)$$

que será de suma importância na construção da ação efetiva média, cujas propriedades apresentaremos nas próximas seções.

A ação $S_{ef}[\phi_s]$ define um funcional dos modos lentos agora, obtida após integração dos modos rápidos e representa uma ação efetiva onde todos os momentos estão abaixo de $b\Lambda$. Logo, $S[\phi]$ e $S_{ef}[\phi_s]$ estão definidas em regiões distintas e uma comparação direta dos acoplamentos não pode ser feita. Por essa razão, é conveniente rescalonar todos os momentos e todas as distâncias da forma

$$k \rightarrow k' = k/b, \quad x \rightarrow x' = bx \quad (2.2.14)$$

para trazer a ação de volta à região cinemática original. Um reescalonamento nos campos por um fator adequado também é necessário, o que altera a dimensão do campo por um fator conhecido como “dimensão anômala”, cuja discussão também veremos nos próximos capítulos.

2.3 Função reguladora e funcionais dependentes de escala

O grupo de renormalização funcional implementa a ideia de Wilson de maneira suave ao modificar o funcional gerador pela introdução de um termo regulador dependente de escala da forma

$$\Delta S_k[\phi] = \frac{1}{2} \int d^d x \phi(x) R_k(\Delta) \phi(x), \quad (2.3.1)$$

tal que

$$Z_k[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] - \Delta S_k[\phi] + \int d^d x J\phi} \quad (2.3.2)$$

é o funcional gerador (dependente de escala) calculado com a ação $S[\phi] + \Delta S_k[\phi]$ e $\Delta = -\partial^2$. Esta ação reguladora funciona como um termo de massa introduzido sobre os campos com o núcleo regulador $R_k(\Delta)$, escolhida de modo a suprimir as configurações de campo associadas a um valor abaixo da escala k [39, 43, 94, 95]. Isto nada mais é do que a ideia de Wilson de integração somente em uma casca ou camada partindo de Λ até k , de modo que k funciona como um *cutoff* infravermelho. Para $k \rightarrow \Lambda$, todas as configurações de campo são suprimidas, ao passo que para $k \rightarrow 0$, todas as configurações de campo são integradas, o que equivale à completa realização do funcional gerador. Geralmente se escreve z para o argumento do núcleo regulador quando encarado como uma função em vez de um núcleo. Dessa forma, passaremos a chamá-lo de função reguladora⁴ a partir de então, denotada por $R_k(z)$.

O procedimento de supressão pode ser realizado por qualquer função reguladora $R_k(z)$, desde que satisfaça as seguintes propriedades:

- i) Para um valor de k fixo, $R_k(z)$ deve ser monotonicamente decrescente com z ;
- ii) Para um valor de z fixo, $R_k(z)$ deve ser monotonicamente crescente com k ;
- iii) $\lim_{k \rightarrow 0} R_k(z) = 0$ para qualquer valor de z ;
- iv) Para $z > k^2$, $R_k(z)$ deve ir a zero de forma suficientemente rápida;
- v) $R_k(0) = k^2$.

As duas primeiras condições são propriedades de uma função reguladora. Já a terceira condição garante que $Z_k \rightarrow Z$ no limite $k \rightarrow 0$. A quarta condição garante que os modos de momentos rápidos sejam integrados sem serem suprimidos. Por fim, a última condição fornece apenas uma normalização para a função $R_k(z)$. Algumas escolhas para a função $R_k(z)$, tipicamente empregados na literatura, são

$$R_k(z) = \frac{z/k^2}{e^{z/k^2} - 1}, \quad (2.3.3)$$

$$R_k(z) = \frac{z^2/k^4}{e^{z^2/k^4} - 1}, \quad (2.3.4)$$

$$R_k(z) = (k^2 - z)\theta(k^2 - z). \quad (2.3.5)$$

Na Fig. (2.3) exibimos o comportamento gráfico das três funções apresentadas acima em relação ao seu argumento z . A última escolha para a função reguladora, chamada de regulador de Litim [96], é a mais amplamente utilizada.

⁴Na literatura também é comum encontrar a denominação “função *cutoff*”.

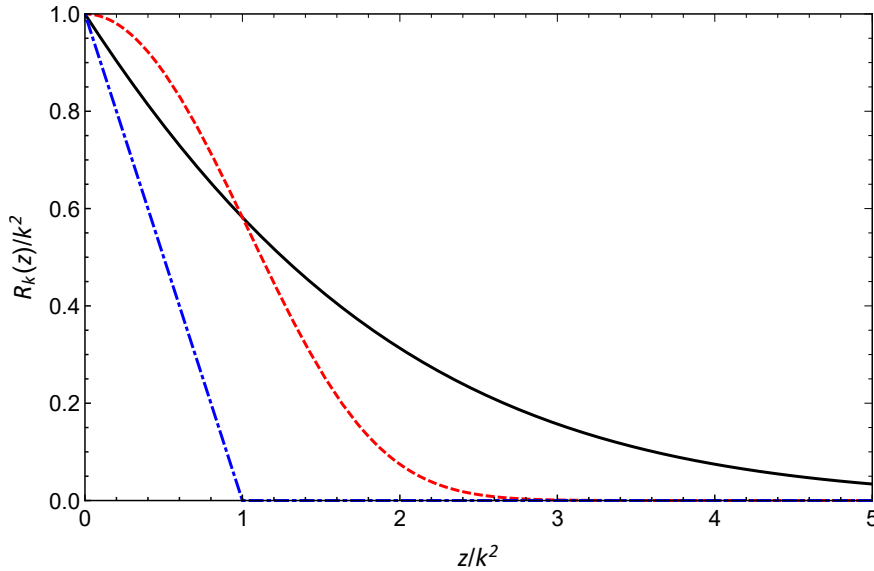


Figura 2.3: Comportamento gráfico das funções reguladoras correspondentes às equações (2.3.3) (linha contínua), (2.3.4) (linha tracejada) e (2.3.5) (linha tracejada-pontilhada).

Como a introdução dessa dependência de escala de momento altera somente o setor quadrático da teoria descrita por $S[\phi]$, a adição de uma função reguladora resulta em uma espécie de modificação do comportamento do seu propagador. De fato, o propagador livre de uma teoria bosônica possui um comportamento típico da forma $G(p) \sim p^{-2}$. Por sua vez, o propagador (regularizado), obtido após a introdução da função reguladora, comporta-se como

$$G_k(p) \sim \frac{1}{P_k(p^2)}, \quad (2.3.6)$$

onde definimos $P_k(p^2) = p^2 + R_k(p^2)$. Para modos com momento $p^2 \gg k^2$, a propagação não sofre alteração, enquanto que abaixo da escala de corte, a propagação dos modos é suprimida continuamente como se fossem partículas massivas de massa $\sim k$.

Podemos definir o funcional gerador das funções de Green conexas (dependente de escala) como sendo

$$W_k[J] = \ln Z_k[J]. \quad (2.3.7)$$

Nesse caso, podemos reescrever a Eq. (2.3.2) como segue

$$e^{W_k[J]} = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_k[\phi] + \int d^d x J\phi}, \quad (2.3.8)$$

onde $S_k[\phi] = S[\phi] + \Delta S_k[\phi]$. Esta definição nos permitirá definir a ação efetiva média (EAA), que discutiremos nesta próxima subseção.

2.4 Ação efetiva média

Introduzindo um campo clássico, denotado por $\varphi(x)$, podemos realizar uma mudança de variável $\phi(x) = \varphi(x) + \xi(x)$, onde $\xi(x)$ é um campo de flutuação, de modo a reescrever a Eq. (2.3.8) da seguinte forma

$$e^{W_k[J]} = \int \mathcal{D}\xi e^{-S_k[\varphi+\xi] + \int d^d x J(\varphi+\xi)}. \quad (2.4.1)$$

Estamos utilizando a relação $\mathcal{D}\phi = \mathcal{D}\xi$ como uma consequência da natureza clássica do campo $\varphi(x)$, *i.e.*, esse objeto não descreve flutuações quânticas e, portanto, não precisamos integrar sobre ele.

A fim de manipular a integral funcional acima, observemos que

$$S_k[\varphi + \xi] = S[\varphi + \xi] + \Delta S_k[\varphi + \xi] \quad (2.4.2)$$

$$= S[\varphi + \xi] + \Delta S_k[\varphi] + \Delta S_k[\xi] + \int d^d x \xi(x) \frac{\delta \Delta S_k[\varphi]}{\delta \varphi(x)}. \quad (2.4.3)$$

Utilizando o resultado acima junto com a Eq. (2.4.1), obtemos

$$e^{W_k[J] - \int d^d x J\varphi + \Delta S_k[\varphi]} = \int \mathcal{D}\xi e^{-S[\varphi + \xi] - \Delta S_k[\xi] + \int d^d x \left(J - \frac{\delta \Delta S_k[\varphi]}{\delta \varphi} \right) \xi}. \quad (2.4.4)$$

Relacionemos o expoente do lado esquerdo da equação acima com a chamada ação efetiva média, denotada por $\Gamma_k[\varphi]$, cuja definição é realizada em termos da seguinte transformada modificada de Legendre⁵

$$\Gamma_k[\varphi] = \sup_J \left(\int d^d x J(x)\varphi(x) - W_k[J] \right) - \Delta S_k[\varphi]. \quad (2.4.5)$$

Para qualquer valor de φ , existe um $J = J_{\text{sup}} = J[\varphi]$ tal que $\int d^d x J\varphi - W_k[\varphi]$ se aproxima de seu supremo, de modo que, em $J = J_{\text{sup}}$, obtemos

$$\varphi(x) = \langle \phi \rangle_J = \frac{\delta W_k[J]}{\delta J(x)}. \quad (2.4.6)$$

Isto implica que φ corresponde ao valor esperado de ϕ na presença da fonte J . A transformada de Legendre modificada pode ser invertida para expressar

$$J(x) = \frac{\delta \Gamma_k[\varphi]}{\delta \varphi(x)} + \frac{\delta \Delta S_k[\varphi]}{\delta \varphi(x)}. \quad (2.4.7)$$

Desse modo, reescrevendo a Eq. (2.4.4) em termos da EAA, obtemos

$$e^{-\Gamma_k[\varphi]} = \int \mathcal{D}\xi e^{-S[\varphi + \xi] - \Delta S_k[\xi] + \int d^d x \frac{\delta \Gamma_k[\varphi]}{\delta \varphi} \xi}. \quad (2.4.8)$$

Algumas propriedades interessantes emergem a partir da definição da EAA: a primeira delas diz respeito às características assintóticas desse funcional ($k \rightarrow 0$ e $k \rightarrow \infty$). Além disso, como veremos, a EAA satisfaz uma equação exata de fluxo do grupo de renormalização.

2.5 Comportamento assintótico da ação efetiva média

Começemos pelo comportamento da EAA no limite $k \rightarrow 0$. Utilizando a terceira propriedade satisfeita pela função reguladora junto com a definição da EAA, obtemos o seguinte resultado

$$\lim_{k \rightarrow 0} \Gamma_k[\varphi] = \int d^d x J(x)\varphi(x) - \lim_{k \rightarrow 0} W_k[J]. \quad (2.5.1)$$

⁵A ação Γ_k não necessariamente é convexa, ao passo que uma transformação de Legendre pura gera uma função convexa por definição. Apenas no limite de $k \rightarrow 0$, $\Gamma_k = \Gamma_{\text{1PI}}$ (funcional gerador dos diagramas irredutíveis a uma partícula) e o caráter de convexidade é garantido. Este limite será provado na seção (2.5).

No entanto, observe que

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow 0} W_k[J] &= \lim_{k \rightarrow 0} \ln Z_k[J] \\
&= \lim_{k \rightarrow 0} \left(\ln \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] - \Delta S_k[\phi] + \int d^d x J\phi} \right) \\
&= \ln \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] + \int d^d x J\phi}.
\end{aligned} \tag{2.5.2}$$

Portanto,

$$\lim_{k \rightarrow 0} W_k[J] = W[J]. \tag{2.5.3}$$

Como consequência do resultado obtido acima, temos

$$\lim_{k \rightarrow 0} \Gamma_k[\varphi] = \int d^d x J(x)\varphi(x) - W[J]. \tag{2.5.4}$$

O lado direito da equação acima corresponde justamente à definição do funcional gerador de diagramas 1PI (ação efetiva quântica usual) e, portanto, podemos escrever

$$\lim_{k \rightarrow 0} \Gamma_k[\varphi] = \Gamma[\varphi] \tag{2.5.5}$$

Consideremos, agora, o comportamento da EAA no limite em que $k \rightarrow \infty$. Com efeito, realizando um reescalonamento da forma $\xi \rightarrow \frac{k_0}{k}\xi$, onde k_0 representa uma escala de momento fixa, podemos reescrever a Eq. (2.4.8) da seguinte forma⁶

$$e^{-\Gamma_k[\varphi]} = \int \mathcal{D}\xi e^{-S[\varphi + (k_0/k)\xi] - \Delta S_k[(k_0/k)\xi] + \int d^d x \frac{\delta \Gamma_k[\varphi]}{\delta \varphi}(k_0/k)\xi}. \tag{2.5.6}$$

Utilizando a definição do funcional ΔS_k (2.3.1), podemos escrever

$$\Delta S_k[(k_0/k)\xi] = \frac{k_0^2}{k^2} \Delta S_k[\xi] \tag{2.5.7}$$

Além disso, levando em conta a segunda propriedade satisfeita pela função reguladora, obtemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta S_k[\xi] = Ck^2 \int d^d x \xi(x)^2, \tag{2.5.8}$$

onde C representa uma constante dependente da forma explícita da função reguladora. Desse modo, tomando $k \rightarrow \infty$ sobre a Eq. (2.5.6) e assumindo que $\frac{\delta \Gamma_k[\varphi]}{\delta \varphi}$ permanece finito nesse limite, obtemos o seguinte resultado

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e^{-\Gamma_k[\varphi]} = e^{-S[\varphi]} \int \mathcal{D}\xi e^{-C \int d^d x \xi(x)^2}. \tag{2.5.9}$$

Essencialmente a integral funcional presente na expressão acima nos fornece um resultado constante e, portanto, podemos escrever a seguinte relação

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Gamma_k[\varphi] = S[\varphi] + \text{constante}. \tag{2.5.10}$$

Em suma, a ação efetiva média (EAA) interpola suavemente entre a ação clássica/microscópica $S[\varphi]$ e a ação efetiva, que leva em conta todas as flutuações quânticas.

⁶O efeito desse reescalonamento sobre a medida de integração $\mathcal{D}\xi$ está sendo absorvido em um fator de normalização implícito.

2.6 Equação de Wetterich ou equação do grupo de renormalização funcional

Conforme mencionado anteriormente, a definição da EAA nos conduz a uma equação funcional exata para o fluxo do grupo de renormalização [39, 94]. Focaremos, agora, na dedução dessa equação. Nesse sentido, começamos pela introdução de uma variável t (“tempo” do grupo de renormalização) definida pela expressão

$$t = \ln \left(\frac{k}{k_0} \right). \quad (2.6.1)$$

Como consequência imediata, a introdução dessa nova variável nos permite definir, pela regra da cadeia, a seguinte notação para o operador diferencial:

$$\partial_t = k \frac{d}{dk}. \quad (2.6.2)$$

Atuando com o operador definido acima sobre a Eq. (2.4.8) obtemos

$$e^{-\Gamma_k[\varphi]} \partial_t \Gamma_k[\varphi] = \int \mathcal{D}\xi \left(\partial_t \Delta S_k[\xi] - \int d^d x \frac{\delta(\partial_t \Gamma_k[\varphi])}{\delta \varphi} \xi \right) e^{-S[\varphi+\xi] - \Delta S_k[\xi] + \int d^d x \frac{\delta \Gamma_k[\varphi]}{\delta \varphi} \xi}. \quad (2.6.3)$$

Utilizando as expressões (2.4.5) e (2.4.7), podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$e^{W_k[\varphi]} \partial_t \Gamma_k[\varphi] = \int \mathcal{D}\xi \left(\partial_t \Delta S_k[\xi] - \int d^d x \frac{\delta(\partial_t \Gamma_k[\varphi])}{\delta \varphi} \xi \right) e^{-S_k[\varphi+\xi] + \int d^d x J(\varphi+\xi)}. \quad (2.6.4)$$

Além disso, lembrando que $e^{W_k[J]}$ pode ser escrito em termos da integral funcional

$$e^{W_k[J]} = \int \mathcal{D}\xi e^{-S_k[\varphi+\xi] + \int d^d x J(\varphi+\xi)}, \quad (2.6.5)$$

podemos escrever a seguinte equação:

$$\partial_t \Gamma_k[\varphi] = \frac{\int \mathcal{D}\xi \partial_t \Delta S_k[\xi] e^{-S_k[\varphi+\xi] + \int d^d x J(\varphi+\xi)}}{\int \mathcal{D}\xi e^{-S_k[\varphi+\xi] + \int d^d x J(\varphi+\xi)}} - \int d^d x \frac{\delta \partial_t \Gamma_k[\varphi]}{\delta \varphi} \frac{\int \mathcal{D}\xi \xi(x) e^{-S_k[\varphi+\xi] + \int d^d x J(\varphi+\xi)}}{\int \mathcal{D}\xi e^{-S_k[\varphi+\xi] + \int d^d x J(\varphi+\xi)}}, \quad (2.6.6)$$

ou ainda

$$\partial_t \Gamma_k[\varphi] = \langle \partial_t \Delta S_k[\xi] \rangle_J - \int d^d x \frac{\delta \partial_t \Gamma_k[\varphi]}{\delta \varphi} \langle \xi(x) \rangle_J, \quad (2.6.7)$$

onde nós utilizamos a seguinte definição para o valor esperado no vácuo (na presença de uma fonte externa J):

$$\langle A(x) \rangle_J = \frac{\int \mathcal{D}\xi A(x) e^{-S_k[\varphi+\xi] + \int d^d x J(\varphi+\xi)}}{\int \mathcal{D}\xi e^{-S_k[\varphi+\xi] + \int d^d x J(\varphi+\xi)}}. \quad (2.6.8)$$

Observando que a Eq. (2.4.6) nos permite escrever

$$\varphi(x) = \frac{\int \mathcal{D}\xi \phi(x) e^{-S_k[\varphi+\xi] + \int d^d x J(\varphi+\xi)}}{\int \mathcal{D}\xi e^{-S_k[\varphi+\xi] + \int d^d x J(\varphi+\xi)}} \equiv \langle \phi(x) \rangle_J, \quad (2.6.9)$$

e levando em conta que $\xi = \phi - \varphi$, obtemos o seguinte resultado:

$$\langle \xi(x) \rangle_J = \langle \phi(x) \rangle_J - \langle \varphi(x) \rangle_J = \varphi(x) - \varphi(x) = 0, \quad (2.6.10)$$

onde utilizamos $\langle \varphi(x) \rangle_J = \varphi(x)$ devido à natureza clássica do campo φ . Adicionalmente, utilizando a definição do funcional ΔS_k (2.3.1), podemos escrever a seguinte expressão:

$$\langle \partial_t \Delta S_k[\xi] \rangle_J = \frac{1}{2} \int d^d x \langle \xi(x) \partial_t R_k(\Delta) \xi(x) \rangle_J. \quad (2.6.11)$$

Observe que a introdução de uma delta de Dirac nos permite reescrever a expressão acima de forma mais elegante

$$\langle \partial_t \Delta S_k[\xi] \rangle_J = \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \delta(x - y) \partial_t R_k(\Delta_x) \langle \xi(y) \xi(x) \rangle_J, \quad (2.6.12)$$

sendo que o subscrito x deixa implicitamente entendido que o operador diferencial Δ_x atua somente sobre o campo $\xi(x)$. Lembrando que $\xi = \phi - \varphi$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle \xi(y) \xi(x) \rangle_J &= \langle (\phi(y) - \varphi(y))(\phi(x) - \varphi(x)) \rangle_J \\ &= \langle \phi(y) \phi(x) \rangle_J - \langle \phi(y) \rangle_J \langle \phi(x) \rangle_J - \langle \phi(y) \rangle_J \langle \phi(x) \rangle_J + \langle \phi(y) \rangle_J \langle \phi(x) \rangle_J \\ &= \langle \phi(y) \phi(x) \rangle_J - \langle \phi(y) \rangle_J \langle \phi(x) \rangle_J. \end{aligned} \quad (2.6.13)$$

O lado direito da equação acima corresponde a uma função de 2-pontos conexa e, portanto, podemos reescrevê-la em termos do funcional gerador $W_k[J]$, a saber

$$\langle \xi(y) \xi(x) \rangle_J = \frac{\delta^2 W_k[J]}{\delta J(y) \delta J(x)}. \quad (2.6.14)$$

Combinando as Eqs. (2.6.7), (2.6.10), (2.6.12) e (2.6.14), obtemos o seguinte resultado:

$$\partial_t \Gamma_k[\varphi] = \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \delta(x - y) \partial_t R_k(\Delta_x) \frac{\delta^2 W_k[J]}{\delta J(y) \delta J(x)}. \quad (2.6.15)$$

De modo compacto, a equação acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\partial_t \Gamma_k[\varphi] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\partial_t R_k \frac{\delta^2 W_k[J]}{\delta J \delta J} \right], \quad (2.6.16)$$

onde definimos o traço funcional

$$\text{Tr} \mathcal{A} = \int d^d x d^d y \delta(x - y) \mathcal{A}(x, y). \quad (2.6.17)$$

Derivando funcionalmente a Eq. (2.4.7) com relação à fonte $J(y)$, obtemos

$$\frac{\delta}{\delta J(y)} \left(\frac{\delta \Gamma_k[\varphi]}{\delta \varphi(x)} + \frac{\delta \Delta S_k[\varphi]}{\delta \varphi(x)} \right) = \delta(x - y). \quad (2.6.18)$$

Utilizando a regra da cadeia funcional, podemos escrever

$$\int d^d z \frac{\delta \varphi(z)}{\delta J(y)} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k[\varphi]}{\delta \varphi(z) \delta \varphi(x)} + \frac{\delta^2 \Delta S_k[\varphi]}{\delta \varphi(z) \delta \varphi(x)} \right) = \delta(x - y), \quad (2.6.19)$$

ou ainda

$$\int d^d z \frac{\delta^2 W_k[J]}{\delta J(y) \delta J(x)} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k[\varphi]}{\delta \varphi(z) \delta \varphi(x)} + \frac{\delta^2 \Delta S_k[\varphi]}{\delta \varphi(z) \delta \varphi(x)} \right) = \delta(x - y). \quad (2.6.20)$$

A equação acima nos permite escrever a seguinte relação de inversão funcional:

$$\frac{\delta^2 W_k[J]}{\delta J(y) \delta J(x)} = \left[\left(\frac{\delta^2 \Gamma_k[\varphi]}{\delta \varphi(z) \delta \varphi(x)} + \frac{\delta^2 \Delta S_k[\varphi]}{\delta \varphi(z) \delta \varphi(x)} \right)^{-1} \right]_{x,y}. \quad (2.6.21)$$

Além disso, considerando a definição do funcional ΔS_k (2.3.1), obtemos o seguinte resultado:

$$\frac{\delta^2 \Delta S_k[\varphi]}{\delta \varphi(z) \delta \varphi(x)} = R_k(\Delta_x) \delta(x - y). \quad (2.6.22)$$

Utilizando os resultados obtidos acima, podemos reescrever a Eq. (2.6.16) da seguinte forma:

$$\partial_t \Gamma_k[\varphi] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(\frac{\delta^2 \Gamma_k[\varphi]}{\delta \varphi \delta \varphi} + R_k \right)^{-1} \partial_t R_k \right]. \quad (2.6.23)$$

Essa é a chamada equação de Wetterich ou equação exata do grupo de renormalização funcional (ERGE⁷) e descreve a evolução da ação efetiva média (EAA) em relação a um parâmetro de escala k .

A equação acima possui algumas características bastante interessantes e que merecem ser destacadas:

- Primeiramente, devemos ressaltar que pode-se deduzir uma equação com uma estrutura bastante semelhante à equação de Wetterich a partir de cálculos realizados a *1-loop*. Seguindo uma linha de raciocínio usualmente empregada na abordagem perturbativa da TQC, podemos calcular o funcional $\Gamma_k[\varphi]$, na aproximação de *1-loop*, a partir da seguinte expressão:

$$\Gamma_k^{(1)}[\varphi] = S_k[\varphi] + \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\ln \left(\frac{\delta^2 S_k[\varphi]}{\delta \varphi \delta \varphi} \right) \right] - \Delta S_k[\varphi]. \quad (2.6.24)$$

Lembrando que $S_k[\varphi] = S[\varphi] + \Delta S_k[\varphi]$ e atuando com o operador ∂_t sobre a equação acima, verificamos que a Ação Efetiva Média satisfaz a seguinte relação na aproximação de *1-loop*:

$$\partial_t \Gamma_k^{(1)}[\varphi] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(\frac{\delta^2 S}{\delta \varphi \delta \varphi} + R_k \right)^{-1} \partial_t R_k \right]. \quad (2.6.25)$$

Como podemos observar, a equação acima possui uma forma bastante parecida com a equação de Wetterich. Nesse sentido, embora a equação de Wetterich seja exata, costuma-se dizer que ela possui uma estrutura de *1-loop*.

- Observe que a equação de Wetterich (2.6.23) não depende da ação original $S[\varphi]$. Isso significa que o comportamento da EAA em uma escala k não possui nenhuma dependência com relação à física UV ($k \rightarrow \infty$). De fato, como a equação de Wetterich relaciona a EAA com a sua própria derivada em uma mesma escala de momento, podemos dizer que essa é uma equação local para o fluxo do grupo de renormalização.

⁷Do inglês, *Exact Renormalization Group Equation*.

- Embora a função reguladora tenha sido introduzida de modo a suprimir a integração funcional sobre os modos pertencentes ao regime infravermelho, a sua presença no lado direito da equação de Wetterich faz com que o cálculo do traço produza um resultado finito no regime UV. De fato, combinando o primeiro e o quarto requerimento sobre a função reguladora, podemos garantir que $\partial_t R_k(z)$ vá para zero de forma suficientemente rápida para $z > k^2$ (vide Fig. (2.4)) e, portanto, $R_k(z)$ age como um *cutoff* UV no lado direito da equação de Wetterich.

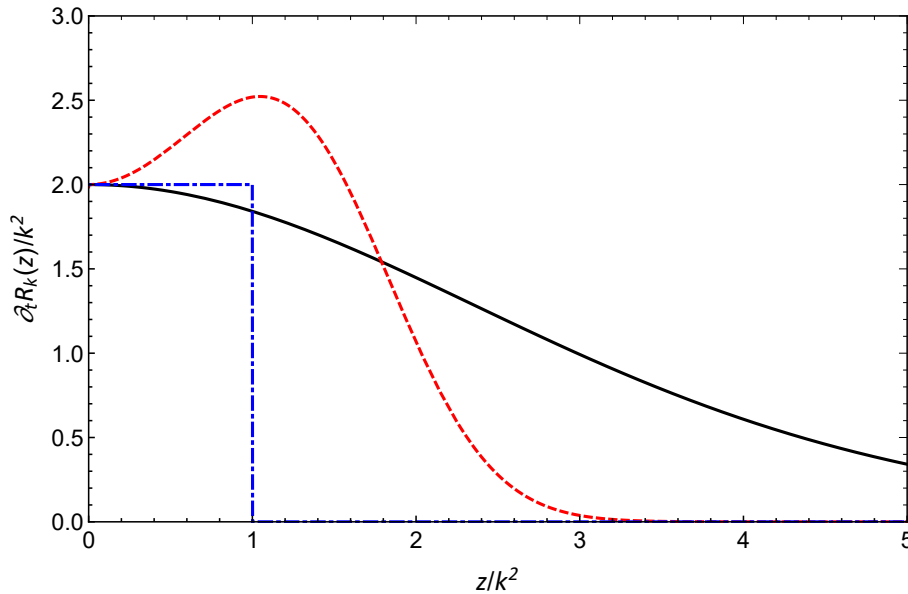


Figura 2.4: Comportamento da função $\partial_t R_k(z)$ em relação ao seu argumento z . Novamente as convenções adotadas nesses gráficos seguem as especificações da Fig. (2.3).

2.7 Preditividade no espaço de acoplamentos (in)finito-dimensional

A equação de Wetterich é uma equação diferencial de primeira ordem a que a derivada de Γ_k em relação ao *cutoff* k deve satisfazer, cujo lado direito é um traço funcional bem-definido no sentido de ser livre de divergências tanto no ultravioleta quanto no infravermelho. É uma alternativa à realização da integral de trajetória porque basta resolvê-la com a condição inicial sendo a ação clássica na escala $k = \Lambda_{UV}$. No entanto, como se pode imaginar, este procedimento de resolução da EAA pode ser tão difícil quanto resolver por completo a integral de trajetória do funcional gerador e algumas aproximações são inevitáveis. Uma estratégia bastante interessante consiste na utilização de truncamentos para a EAA, *i.e.*, assumimos que seja possível calcular a EAA e admitimos como *ansatz* a sua expansão em termos de uma base de operadores semi-locais $\{\mathcal{O}_n\}$ ⁸ dos campos φ , compatíveis com as simetrias do sistema em questão, como

$$\Gamma_k[\varphi] = \sum_n \bar{g}_n(k) \mathcal{O}_n[\varphi], \quad (2.7.1)$$

⁸Os operadores $\{\mathcal{O}_n\}$ são ditos semi-locais ou quase-locais no sentido de serem constituídos de integrais de monômios dos campos φ e de suas derivadas.

sendo $\bar{g}_n(k)$ o acoplamento dimensional associado ao operador $\mathcal{O}_n[\varphi]$. A base é tipicamente infinito-dimensional, mas, para podermos realizar cálculos práticos, é inevitável truncar em uma certa ordem N de operadores ($\{\mathcal{O}_1[\varphi], \mathcal{O}_2[\varphi], \dots, \mathcal{O}_N[\varphi]\}$). Ou seja, dentre as distintas técnicas de aproximação, adotaremos a abordagem de truncar o espaço das teorias em um subespaço finito ao longo de todo este trabalho. Obviamente, em geral, algum critério é usado para truncar a base da EAA. A qualidade do truncamento pode ser testada ao se aumentar o subespaço e avaliar a estabilidade dos resultados quanto à convergência. Quanto mais convergentes os resultados forem, melhor será o truncamento. Além disso, note que, embora alguma aproximação tenha sido feita, isto não corresponde a uma expansão perturbativa em potências de algum parâmetro “pequeno” e, assim, efeitos não-perturbativos podem ser acessados.

Substituindo a Eq. (2.7.1) na Eq. (2.6.23), obtemos

$$\partial_t \Gamma_k[\varphi] = \sum_n (\partial_t \bar{g}_n(k)) \mathcal{O}_n[\varphi]. \quad (2.7.2)$$

Expandindo o lado direito da Eq. (2.6.23) na mesma base $\mathcal{O}_n[\varphi]$, pode-se extrair imediatamente os coeficientes $\partial_t \bar{g}_n(k) = \bar{\beta}_{\bar{g}_n}$, conhecidos como as funções beta dos acoplamentos *dimensionais*. Caso o acoplamento \bar{g}_n possua dimensão canônica de massa d_n , define-se o acoplamento *adimensional* $g_n(k)$ correspondente ao reescalonar o acoplamento com uma potência apropriada de k , ou seja,

$$\bar{g}_n(k) = k^{d_n} g_n(k), \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.7.3)$$

Duas vantagens surgem: ao se tentar resolver o sistema de equações de funções beta em algum pacote computacional por exemplo, é mais conveniente usar variáveis adimensionais de modo a tornar autônomo o sistema de equações acopladas geradas pelas (infinitas) funções beta. Além disso, estas variáveis evitam a necessidade de se fazer um reescalonamento explícito no comprimento e no momento, já que estas quantidades não seriam afetadas por uma mudança de escala.

Os acoplamentos adimensionais podem ser encarados como coordenadas que parametrizam um espaço abstrato, conhecido como *espaço das teorias*, e as funções beta dos acoplamentos adimensionais são escritas como

$$\beta_n(g) = -d_n g_n(k) + \mathcal{F}_n(g), \quad n = 1, \dots, N, \quad (2.7.4)$$

onde $\beta_n(g) = \partial_t g_n(k)$. O primeiro termo do lado direito da Eq. (2.7.4) é o termo associado à dimensão canônica de massa do acoplamento $\bar{g}_n(k)$ e o termo $\mathcal{F}_n(g)$ corresponde a correções quânticas que surgem pela dependência não-trivial da escala k , da dimensão canônica d_n e de quaisquer outros parâmetros independentes que possam caracterizar a teoria em questão.

Um comentário sobre renormalizabilidade neste estágio é oportuno. Não é necessariamente verdade que qualquer teoria física precisa tomar a forma de uma teoria quântica de campos renormalizável. O cancelamento de divergências UV não depende da renormalizabilidade. Como aponta S. Weinberg [97], “contanto que se inclua cada uma das infinitas interações permitidas pelas simetrias, as chamadas teorias não-renormalizáveis são, na verdade, tão renormalizáveis quanto as teorias renormalizáveis”. O problema é que são necessárias infinitas condições de renormalização e, por consequência, infinitos experimentos, o que nos leva a uma teoria pobre em preditividade. Sem falar que precisaríamos de infinitas condições iniciais para as infinitas equações de primeira ordem que definem as equações de fluxo

$$\beta_n(g) = k \frac{dg_n(k)}{dk}, \quad n = 1, \dots \quad (2.7.5)$$

Para caracterizar o poder preditivo da teoria, é necessário definirmos o que se entende por direções relevantes, irrelevantes e marginais e descrever o conceito de ponto fixo e de (hi-per)superfície crítica. Particularmente, estaremos interessados em uma teoria completa no setor UV para gravitação quântica, a ser discutido no próximo capítulo. Uma teoria é dita “completa no setor UV” quando todos os acoplamentos adimensionais são finitos à medida que $k \rightarrow \Lambda_{UV} \rightarrow \infty$. Cada trajetória definida pelo conjunto de pontos conectados pela equação de fluxo define uma teoria. No espaço das teorias, a condição de finitude dos acoplamentos adimensionais ocorre quando o sistema de funções beta admite um ponto fixo, ou seja, um ponto $g^*(k) = (g_1^*(k), g_2^*(k), \dots, g_n^*(k), \dots)$ tal que todas as funções beta se anulam, $\beta_n(g^*) = 0, \forall n$.

Para a gravitação, acredita-se que as interações continuem a existir no ponto fixo, caracterizado pela finitude de seus acoplamentos no UV, sendo, portanto, uma teoria *assintoticamente segura* [37, 98]. Alternativamente, teorias de calibre não-abelianas com um número limitado de férmions na representação fundamental exibem um ponto fixo em que todos os acoplamentos se anulam para valores arbitrariamente grandes de energia, caracterizando uma teoria *assintoticamente livre*⁹ [99, 100].

No ponto fixo ou nas vizinhanças do ponto fixo, os acoplamentos deixam de variar com k e a teoria em questão exibe simetria de escala [38]. Note que a equação de Wetterich é uma ferramenta poderosa para lidar com pontos fixos não-gaussianos que se situam muito longe da origem do espaço das teorias, *i.e.*, pontos fixos cujos acoplamentos assumem valores muito grandes, impossibilitando aplicação de teoria de perturbação.

Como observado anteriormente, não é necessário fornecer infinitas condições de renormalização ou condições de contorno, mesmo para um espaço das teorias infinito-dimensional, para que tenhamos o que passaremos a chamar de “teoria renormalizável não-perturbativamente”. Para esclarecer isso, suporemos que um ponto fixo $g^*(k) = (g_1^*(k), g_2^*(k), \dots, g_N^*(k))$ tenha sido encontrado para uma dada TQC e investiguemos sua natureza atratora tanto no regime infravermelho quanto no ultravioleta. Denomina-se então uma **superfície crítica** \mathcal{C} infravermelha (ultravioleta) de um ponto fixo o conjunto de todos os pontos que fluem para este ponto fixo para $t \rightarrow -\infty$ ($t \rightarrow \infty$). Em geral, muito não pode ser dito sobre as superfícies críticas, mas algumas implicações podem ser tiradas a partir da análise da dimensão dessas superfícies e, com isso, dar subsídios para que uma teoria ganhe um caráter preditivo.

O próximo passo é integrar as equações de fluxo sobre o subespaço definido pela superfície crítica associada com g^* . As implicações dessa consideração são as seguintes:

- i) se a dimensão da superfície crítica é infinita ($\dim \mathcal{C} = \infty$), então todo ponto g evolui para o ponto fixo g^* , ou seja, a superfície crítica corresponde ao espaço das teorias. Com isso, precisamos de infinitas condições iniciais, o que nos leva a uma falta de preditividade;
- ii) se a dimensão da superfície crítica é nula ($\dim \mathcal{C} = 0$), então a superfície crítica é equivalente ao próprio ponto fixo g^* . Dessa maneira, todos os acoplamentos permanecem em $g^*(k)$, $\forall k$ e não há necessidade de nenhum experimento, *i.e.*, todos os acoplamentos seriam previstos pelo grupo de renormalização, o que é uma situação ideal demais;
- iii) se a dimensão da superfície crítica é finita, então somente um número finito de acoplamentos é independente, e todos os outros são fixados em termos dos independentes. Com isso, o número de condições iniciais coincide com a dimensão da superfície crítica, e é necessário um número finito de experimentos, o que nos leva a uma teoria de caráter preditivo.

⁹Tipicamente, o ponto fixo de uma teoria assintoticamente livre é chamado de gaussiano ou não-interagente, ao passo que o ponto fixo de uma teoria assintoticamente segura é chamado de não-gaussiano ou interagente.

2.7.1 Fluxo na vizinhança de g^*

Uma noção importante associada à superfície crítica é a de espaço tangente ao ponto fixo quando estudamos a forma linearizada das equações de fluxo. As equações de fluxo linearizadas são

$$\begin{aligned}\beta_i(g) &= \beta_i(g^*) + \left. \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j} \right|_{g^*} (g_j - g_j^*) + \mathcal{O}\left((g_j - g_j^*)^2\right) \\ &= 0 + \left. \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j} \right|_{g^*} (g_j - g_j^*) + \mathcal{O}\left((g_j - g_j^*)^2\right), \quad i = 1, \dots, N,\end{aligned}\quad (2.7.6)$$

onde uma soma implícita em j é subentendida e N é a dimensionalidade do espaço das teorias. Sejam $y_i = g_i - g_i^*$ as novas coordenadas centradas no ponto fixo. Como

$$\frac{dg_i}{dk} = \frac{dy_i}{dk} \quad (2.7.7)$$

e definindo a matriz de estabilidade

$$M_{ij} = \left. \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j} \right|_{g^*}, \quad (2.7.8)$$

a Eq. (2.7.6) fica

$$k \frac{y_i(k)}{dk} = M_{ij} y_j(k). \quad (2.7.9)$$

Seja S uma transformação linear que diagonaliza M :

$$S_{ik}^{-1} M_{kl} S_{ln} = \delta_{in} \rho_n, \quad (2.7.10)$$

onde ρ_n são os autovalores de M . A Eq. (2.7.9) pode ser escrita, em notação matricial, como

$$k \frac{d\mathbf{Y}}{dk} = \mathbf{M}\mathbf{Y} \Rightarrow k \frac{d(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{Y})}{dk} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{S}(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{Y}), \quad (2.7.11)$$

ou em termos das variáveis $z_i = S_{ik}^{-1} y_k$, temos

$$k \frac{z_i(k)}{dk} = \rho_i z_i(k), \quad (2.7.12)$$

cuja solução imediata é dada por

$$z_i(k) = C_i \left(\frac{k}{k_0} \right)^{\rho_i}, \quad (2.7.13)$$

onde C_i são constantes de integração. Em função do parâmetro t e definindo os chamados expoentes críticos $\theta_i = -\rho_i$, a Eq. (2.7.13) é expressa como

$$z_i(t) = C_i e^{-\theta_i t}. \quad (2.7.14)$$

Vale lembrar que esta não é a solução geral das equações do grupo de renormalização, e sim uma solução nas vizinhanças do ponto fixo.

A Eq. (2.7.13) pode ser reescrita de modo a explicitar o comportamento dos acoplamentos com a escala de energia k e os expoentes críticos. Usando a relação $y_m = S_{mn}z_n$, a Eq. (2.7.13) fica

$$g_i(k) = g_i^* + S_{ij}C_j \left(\frac{k}{k_0} \right)^{-\theta_j}. \quad (2.7.15)$$

Da Eq. (2.7.15), se $\mathbf{Re}(\theta_j) > 0$ (autovalor negativo), então o fluxo se aproxima do ponto fixo no ultravioleta quando $k \rightarrow \infty$ independentemente do valor de S_{ij} , que são parâmetros livres neste caso. Para valores decrescentes de k , *i.e.*, em direção ao infravermelho, g_i se distancia cada vez mais de g_i^* . Dessa forma, $\mathbf{Re}(\theta_j) > 0$ define uma direção atratora no UV/repulsiva no IR e os expoentes críticos associados definem as chamadas *direções relevantes*. Alternativamente, se $\mathbf{Re}(\theta_j) < 0$ (autovalor positivo), o fluxo do acoplamento correspondente é repellido do ponto fixo. Neste caso, os coeficientes S_{ij} devem ser anulados para que o fluxo atinja o ponto fixo. Isto define as chamadas *direções irrelevantes* e são repulsivas no UV/atratoras no IR. Finalmente, se $\mathbf{Re}(\theta_j) = 0$, as direções são ditas *marginais* e o comportamento dessas direções é determinado pela próxima ordem do fluxo linearizado. Se o zero persistir em todas as ordens, então a direção é de fato marginal.

Como dito, o número de direções relevantes dita quantos parâmetros livres a teoria exhibe. Ou seja, uma teoria com poucas direções relevantes é mais preditiva. Em outras palavras, se o número de direções relevantes for finito, então um número finito de experimentos deve ser feito para fixar os parâmetros livres. A dimensionalidade da superfície crítica é o número de expoentes críticos positivos (relevantes). Se for finita, podemos definir uma teoria completa no UV associada com um ponto fixo. Dessa forma, o espaço tangente à superfície crítica UV no ponto fixo é o espaço gerado pelas direções relevantes, enquanto que o espaço tangente à superfície crítica IR é o espaço gerado pelas direções irrelevantes. A Fig. (2.5) representa a hipersuperfície no espaço das teorias.

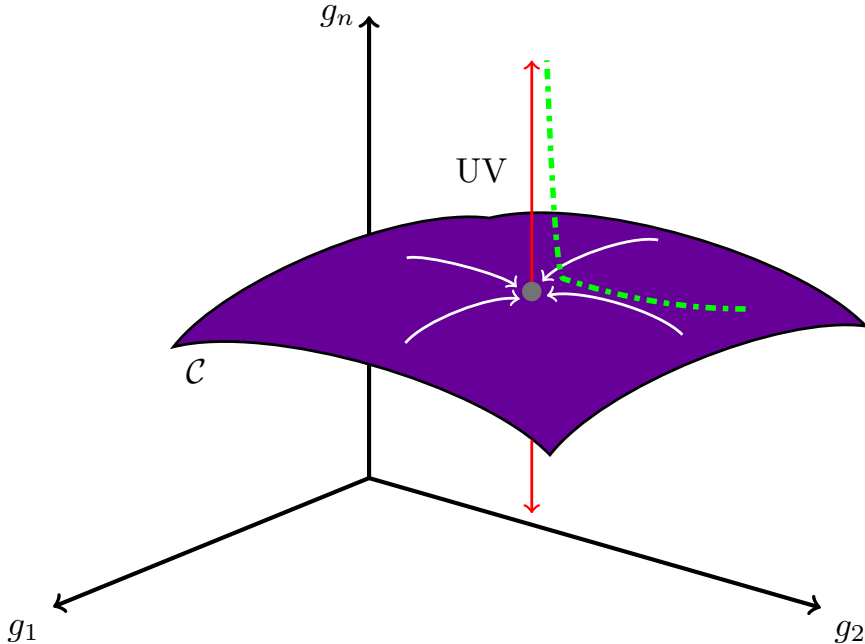


Figura 2.5: A superfície representa a superfície crítica C associada ao ponto fixo. Trajetórias que atingem o ponto fixo (setas contínuas brancas) geram a superfície definida pelas direções atratoras/relevantes no UV. A trajetória pontilhado-tracejada em verde é um exemplo de um desvio para uma direção repulsiva no UV. As direções em vermelho contínuo se afastando do ponto fixo são direções irrelevantes.

Para o ponto fixo gaussiano $g_i^* = 0$, a matriz de estabilidade fica $M_{ij} = \partial\beta_i/\partial g_j|_{g^*} \simeq -d_i\delta_{ij}$ e os expoentes críticos são dados por $\theta_i \simeq d_i$. Os acoplamentos com $d_i > 0$ são relevantes. Em contrapartida, se a teoria exibe um ponto fixo não-gaussiano $g_i^* \neq 0$, os expoentes críticos são $\theta_i \simeq d_i - \partial\mathcal{F}/\partial g_i|_{g^*}$. Tipicamente, a contribuição vinda da correção de *1-loop* $\partial\mathcal{F}/\partial g_i|_{g^*}$ não necessariamente é nula em um ponto fixo não-gaussiano, o que pode transformar acoplamentos irrelevantes/relevantes em acoplamentos relevantes/irrelevantes. Quando acoplamentos relevantes se tornam irrelevantes, a preditividade da teoria aumenta.

Em suma, a finitude de direções relevantes convergentes para um ponto fixo garante preditividade onde teoria de perturbação não pode ser empregada, dando origem a uma teoria renormalizável não-perturbativamente ou simplesmente uma teoria assintoticamente segura.

Parte III

O Cenário da Segurança Assintótica para a Gravitação Quântica

Capítulo 3

O ponto fixo de Reuter

O grupo de renormalização funcional tem sido a ferramenta chave para o programa de segurança assintótica em gravitação quântica, baseado no trabalho pioneiro de Reuter [98] (ver também [46, 101–103] e [7, 34, 36] para trabalhos de revisão). Nesta seção, discutiremos brevemente o fluxo do grupo de renormalização para o truncamento de Einstein-Hilbert, reproduzindo, não em detalhes, os cálculos do ponto fixo de Reuter [44]. Verificaremos que a gravitação quântica exibe um ponto fixo não-Gaussiano no ultravioleta com número finito de direções relevantes, validando a conjectura primeiramente proposta por S. Weinberg [37] de que a gravitação quântica é assintoticamente segura.

Nos próximos capítulos, cálculos explícitos serão realizados no estudo da dependência de parametrização da métrica e no truncamento de derivadas superiores em gravitação unimodular.

3.1 O grupo de renormalização funcional para a gravitação quântica

A quantização perturbativa da Relatividade Geral encarada como uma teoria quântica de campos para a métrica nos conduz a uma teoria notoriamente não-renormalizável. Neste caso, a quantização é realizada integrando-se sobre $[g_{\mu\nu}]$, *i.e.*, classes de equivalência de métricas que se conectam por difeomorfismos. O funcional gerador euclidiano é dado então por

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}[g_{\mu\nu}] e^{-S_{\text{EH}}}, \quad (3.1.1)$$

onde S_{EH} é a ação de Einstein-Hilbert¹ expressa por

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^d x \sqrt{g} (2\Lambda - R(g)), \quad (3.1.2)$$

onde Λ e G_N denotam a constante cosmológica e a constante universal de Newton. A aplicação do grupo de renormalização para a gravidade nos força a usar o método do campo de fundo [34, 105]. Na teoria de Yang-Mills este procedimento é opcional, mas que permite definir uma ação efetiva que seja invariante de calibre. No caso gravitacional este método é obrigatório, já que

¹A ação de Einstein-Hilbert euclidiana é ilimitada inferiormente, *i.e.*, sob uma transformação conforme da métrica $g_{\mu\nu} \mapsto \Omega^2 g_{\mu\nu}$, o escalar de Ricci em $d = 4$ possui uma expressão que possibilita assumir valores arbitrariamente positivos [104]. Discutiremos um pouco mais sobre isso no próximo capítulo no contexto da ação efetiva média.

precisamos de uma métrica para se definir uma escala com respeito a qual flutuações quânticas são suprimidas. Em outras palavras, uma métrica de fundo $\bar{g}_{\mu\nu}$ é introduzida e isto define um laplaciano cujo espectro determina uma escala. A métrica completa é então decomposta em termos de uma métrica de fundo e um campo de flutuações $h_{\mu\nu}$ (de amplitude arbitrária) na forma

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (3.1.3)$$

Esta decomposição é geralmente conhecida como “decomposição linear” da métrica. Esta escolha de decomposição não é única e, em particular, não preserva a assinatura da métrica. Escolhas diferentes de parametrização da métrica ou parametrização de campo, *e.g.*, a decomposição exponencial

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\lambda} [\exp(h \cdot)]^\lambda{}_\nu, \quad (3.1.4)$$

preservam a assinatura da métrica e resultam em funções beta diferentes. Em particular, na próxima seção, usaremos uma parametrização interpolante a um parâmetro para a métrica e discutiremos seu impacto sobre as funções beta dos acoplamentos gravitacionais para Einstein-Hilbert e sobre as dimensões críticas dos pontos fixos. Ver [56, 106–109] para uma discussão sobre escolhas diferentes de parametrização e o impacto sobre a estrutura de ponto fixo em sistemas de gravitação pura.

O próximo passo é aplicar o procedimento de Faddeev-Popov, que consiste em definir a integral de trajetória indiretamente por meio do espaço das métricas. Isto introduz um termo de fixação de calibre junto com um termo de fantasmas de Faddeev-Popov na ação original. Omitiremos a aplicação explícita deste procedimento aqui por motivos de fluidez. No entanto, as propriedades das transformações de calibre e a quantização de Faddeev-Popov para a gravitação estão descritos nos Apêndices A e B e serão abordados nos próximos capítulos.

O método de campo de fundo nos permite definir um termo que suprime modos no infravermelho que é adicionado à ação que aparece no funcional gerador euclidiano, a saber

$$\mathcal{Z}_k[J] = \int \mathcal{D}h \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}C e^{-S[g_{\mu\nu}] - S_{\text{fixação de calibre}} - S_{\text{fantasmas}} - \Delta S_k - \int_x \sqrt{\bar{g}} (h_{\mu\nu} J^{\mu\nu} + \bar{\tau}^\mu \bar{C}_\mu + \tau_\mu C^\mu)}, \quad (3.1.5)$$

onde $(J_{\mu\nu}, \bar{\tau}_\mu, \tau^\mu)$ são fontes externas e (\bar{C}, C) são os campos de fantasmas de Faddeev-Popov. A ação reguladora toma a forma

$$\Delta S_k = \frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} h_{\mu\nu} \mathcal{R}_k^{(hh)} (-\bar{\nabla}^2)^{\mu\nu\alpha\beta} h_{\alpha\beta} - \int_x \sqrt{\bar{g}} \bar{C}_\mu \mathcal{R}_k^{(\bar{C}C)} (-\bar{\nabla}^2)^\mu{}_\nu C^\nu. \quad (3.1.6)$$

As funções reguladoras $\mathcal{R}_k^{(hh)} (-\bar{\nabla}^2)^{\mu\nu\alpha\beta}$ e $\mathcal{R}_k^{(\bar{C}C)} (-\bar{\nabla}^2)^\mu{}_\nu$ garantem a supressão de flutuações quânticas nos campos baseadas no espectro do laplaciano covariante de fundo $-\bar{\nabla}^2$. Ou seja, modos com autovalores λ_l de $-\bar{\nabla}^2$ menores do que k^2 são suprimidos e, nesse sentido, k funciona como uma escala de corte infravermelha, como discutido na seção (2.3). A estrutura quadrática nos campos de flutuação em (3.1.6) permite que a equação de fluxo ou equação de Wetterich seja escrita da forma

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{STr} \left[(\Gamma_k^{(2)} + \mathbf{R}_k)^{-1} \partial_t \mathbf{R}_k \right], \quad (3.1.7)$$

onde $\partial_t = k \partial_k$, o inverso do propagador do campo Φ (hessiano) é dado por

$$\Gamma_k^{(2)}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(x)}} \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \Phi(x) \delta \Phi(y)} \quad (3.1.8)$$

e $\text{STr}[\dots] = (-1)^{[j]}\text{Tr}[\dots]$ denota o supertraço para campos reais e $\text{STr}[\dots] = 2(-1)^{[j]}\text{Tr}[\dots]$ para campos complexos. Em ambos os casos, $[j] = 0$ para campos Φ comutantes e $[j] = 1$ para campos Φ grassmannianos. Em [44], a ação efetiva média usada para o chamado truncamento de Einstein-Hilbert é dada por

$$\Gamma_k^{\text{EH}}[g_{\mu\nu}; \bar{g}_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G_k} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} (2\Lambda_k - R(g)) + \Gamma_k^{\text{gf}}(h; \bar{g}) + \Gamma_k^{\text{gh}}(\bar{C}, C; \bar{g}), \quad (3.1.9)$$

onde Γ_k^{gf} e Γ_k^{gh} são as ações de fixação de calibre (*gauge-fixing*) e de fantasmas (*ghosts*) de Faddeev-Popov dadas, respectivamente, por

$$\Gamma_k^{\text{gf}} = \frac{1}{32\pi G_k \alpha} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} F_\mu[h; \bar{g}] F_\nu[h; \bar{g}] \quad (3.1.10)$$

$$\Gamma_k^{\text{gh}} = -Z_C \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{C}^\mu (\bar{g}^{\rho\nu} \delta_\mu^\sigma \bar{\nabla}_\rho \nabla_\nu + \bar{g}^{\rho\sigma} \bar{\nabla}_\rho \nabla_\mu - \bar{g}^{\rho\sigma} \bar{\nabla}_\mu \nabla_\rho) C_\sigma, \quad (3.1.11)$$

com

$$F_\mu[h; \bar{g}] = \bar{\nabla}^\alpha h_{\mu\alpha} - \frac{\beta + 1}{d} \bar{\nabla}_\mu h. \quad (3.1.12)$$

O ansatz para a ação de Einstein-Hilbert depende de dois parâmetros dependentes de escala: o acoplamento de Newton G_k e a constante cosmológica Λ_k . Já a ação de *gauge-fixing* depende de dois parâmetros: α e β , que, a princípio, devem ser vistos como acoplamentos dependentes de escala também, $\alpha \rightarrow \alpha_k$ e $\beta \rightarrow \beta_k$. Adotaremos o calibre de Feynman-de Donder, que consiste em escolher $\alpha = 1$ e $\beta = d/2 - 1$. Outra escolha de calibre frequentemente usada é o chamado calibre de Landau para o parâmetro α , que consiste em impor $\alpha = 0$ e constitui um ponto fixo (atrativo no infravermelho) do fluxo do grupo de renormalização [110, 111]². Dito de outra maneira, a condição inicial $\alpha_{k_0} = 0$ é levada em $\alpha_k = 0$ para todo $k \leq k_0$.

Não levaremos em conta, neste cálculo, a informação não-perturbativa contida no setor de *ghost*. Isto significa fazer o fator de renormalização de campo $Z_C = 1$. Focaremos em $d = 4$ daqui para frente.

Antes de prosseguirmos, cabe uma observação técnica. A ação efetiva média é escrita como um funcional da métrica de fundo $\bar{g}_{\mu\nu}$ e da flutuação $h_{\mu\nu}$ de maneira independente, de modo que a invariância clássica sob a chamada “simetria de troca” (*shift symmetry* ou *splitting symmetry*)

$$\bar{g}_{\mu\nu} \mapsto \bar{g}_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu}, \quad h_{\mu\nu} \mapsto h_{\mu\nu} - \epsilon_{\mu\nu} \quad (3.1.13)$$

(na decomposição linear) é quebrada³. Isto ocorre porque a ação de fixação de calibre e a ação reguladora tratam a métrica de fundo e a flutuação de modo a não aparecerem como a combinação $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. A quebra de simetria de troca permite que configurações na integral de caminho possam ser distinguidas, fazendo com que a teoria seja dependente de *background*. Em particular, as funções de Green definidas pelas derivadas funcionais com

²A existência do ponto fixo $\alpha^* = 0$ para a teoria de Yang-Mills foi discutida em [110] para uma condição de calibre covariante e em [111, 112] para o calibre axial. Isto sugere que este ponto fixo deva ser uma propriedade de qualquer teoria de calibre, em particular a gravitação. O calibre de Landau $\alpha \rightarrow 0$ implementa a condição de calibre $F_\mu[h; \bar{g}] = 0$ de forma exata, isto é, $e^{-S_{\text{gf}}}$ se torna proporcional a $\delta[F_\mu[h; \bar{g}]]$ na integral que define o funcional gerador Z_k . Desta forma, o domínio de integração de $\int \mathcal{D}h_{\mu\nu}$ consiste de configurações de $h_{\mu\nu}$ que satisfazem à condição de calibre exatamente e, por isso, $\alpha = 0$ é um parâmetro fixo sob variações no parâmetro k do grupo de renormalização.

³Na parametrização exponencial, a simetria de troca obviamente terá uma forma mais complicada.

relação às flutuações não serão iguais às funções de Green do campo de fundo calculadas com a flutuação nula⁴:

$$\frac{\delta}{\delta h(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta h(x_n)} \Gamma_k[h; \bar{g}] \Big|_{h=0} \neq \frac{\delta}{\delta \bar{g}(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta \bar{g}(x_n)} \Gamma_k[0; \bar{g}], \quad (3.1.14)$$

onde índices foram suprimidos por conveniência. Entretanto, os dois conjuntos de funções de Green estão relacionadas por uma identidade modificada de Ward para a simetria de troca (*modified shift Ward identity* - msWI), discutida em detalhes em [113]. O efeito dessa identidade seria de restringir as dependências de $\Gamma_k[h; \bar{g}]$ sobre seus dois argumentos. A resolução da identidade modificada de Ward para a simetria de troca junto com a equação de fluxo permite restaurar resultados independentes de *background* [114]. No entanto, resultados além da aproximação de “métrica única” (*single-metric approximation*), que iguala os dois conjuntos de funções de Green, indicam respaldar qualitativamente os resultados da aproximação de métrica única, ver [115] e referências lá contidas.

A discussão sobre identidades modificadas de Ward fugiria do intuito da dissertação. Indicamos [35] e referências lá contidas. Para uma discussão sobre gravitação quântica e as identidades de Ward modificadas para a simetria BRST no contexto do grupo de renormalização funcional, ver [98].

3.2 Resultados para o ponto fixo de Reuter

Para obter as funções beta dos acoplamentos físicos, calcula-se o hessiano da ação efetiva média com respeito ao campo de flutuação $h_{\mu\nu}$. Ele então é inserido no lado esquerdo da equação de fluxo (3.1.7) e emprega-se a aproximação de *background*, ou seja, faz-se $h_{\mu\nu} = 0$ em seguida⁵. O traço do lado direito da Eq. (3.1.7) pode ser calculado usando técnicas usuais de coeficientes de *heat kernel*, que explicaremos em detalhes no Apêndice C e no próximo capítulo.

A dependência de escala dos acoplamentos gravitacionais é convenientemente expressa pelos seus acoplamentos adimensionais correspondentes

$$\lambda_k = k^{-2} \Lambda_k \quad \text{e} \quad g_k = k^{d-2} G_k, \quad (3.2.1)$$

e capturada pelas funções beta

$$\partial_t g_k = \beta_g(g_k, \lambda_k), \quad \partial_t \lambda_k = \beta_\lambda(g_k, \lambda_k). \quad (3.2.2)$$

Usando a função reguladora de Litim (2.3.5), as funções beta [33] para os acoplamentos adimensionais são

$$\beta_g = 2g_k - \frac{g_k^2}{3\pi} \frac{11 - 18\lambda_k + 28\lambda_k^2}{(1 - 2\lambda_k)^2 - \frac{1+10\lambda_k}{12\pi} g_k}, \quad (3.2.3)$$

$$\beta_\lambda = -2\lambda_k + \frac{g_k}{6\pi} \frac{3 - 4\lambda_k - 12\lambda_k^2 - 56\lambda_k^3 + \frac{107-20\lambda_k}{12\pi} g_k}{(1 - 2\lambda_k)^2 - \frac{1+10\lambda_k}{12\pi} g_k}. \quad (3.2.4)$$

⁴A flutuação que entra no argumento da ação efetiva média corresponde ao valor esperado de $h_{\mu\nu}$ que surge na definição da integral de caminho.

⁵Relembremos que abusivamente denotaremos por $h_{\mu\nu}$, \bar{C}_μ , C^μ os campos clássicos $\langle h_{\mu\nu} \rangle$, $\langle \bar{C}_\mu \rangle$, $\langle C^\mu \rangle$. Adotaremos a notação sem $\langle \cdots \rangle$ ao longo de toda a dissertação.

As funções beta resultantes, além de admitirem um ponto fixo gaussiano, admitem um ponto fixo não-gaussiano, cujos valores são $g^* = 0,707$ e $\lambda^* = 0,193$. Na convenção adotada, os expoentes críticos do ponto fixo gaussiano são dados pelas dimensões canônicas de massa, o que implica que a direção associada ao acoplamento de Newton é irrelevante e, portanto, repulsiva no UV. Já os expoentes críticos associados ao ponto fixo não-trivial formam o par complexo conjugado $\theta_{1,2} = 1,475 \pm 3,043i$, de maneira que a parte imaginária faz com que os fluxos do grupo de renormalização espiralem para o ponto fixo para $k \rightarrow \infty$, representando direções relevantes, ou seja, atratoras no UV. Nas vizinhanças do ponto fixo, os acoplamentos dimensionais escalam na forma

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G_k = g^* k^{-2}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda_k = \lambda^* k^2. \quad (3.2.5)$$

É imediato notar que o acoplamento de Newton se anula para $k \rightarrow \infty$, isto é, a gravidade possui um comportamento de antiblindagem (*antiscreening*).

Em um sistema de gravidade pura, a existência de um ponto fixo foi investigada intensamente em truncamentos mais refinados, como a inclusão de termos de potências superiores no escalar de Ricci como em teorias do tipo $f(R)$. Caso a conjectura de Weinberg seja de fato verdadeira, como parece ser, devemos observar que os valores dos pontos fixos apresentam convergência e que o número de direções relevantes não varia frente a truncamentos mais refinados do espaço das teorias. Em particular, truncamentos polinomiais até R^{70} (ver [62]) verificam a existência do ponto fixo, bem como sua estabilidade e convergência. Ver [33, 52, 85, 106, 116–125] para investigações sobre o cenário de segurança assintótica no truncamento $f(R)$ e [83] para o caso unimodular. Estruturas tensoriais mais complicadas também foram investigadas: adicionar o termo de Goroff-Sagnotti, $C_{\mu\nu\kappa\lambda} C^{\kappa\lambda\rho\sigma} C_{\rho\sigma}^{\mu\nu}$, ao truncamento resulta na introdução de uma direção irrelevante [61]. Em particular, em contraste com o resultado perturbativo a *2-loops*, o acoplamento do termo de Goroff-Sagnotti em um ponto fixo interagente não produz um parâmetro livre adicional. Truncamentos do tipo $R^2 + C^2$, onde C^2 é o quadrado do tensor de Weyl, apontam para a existência de um ponto fixo não-trivial dominando o comportamento ultravioleta com três direções relevantes [48, 49, 60]. De fato, muitos trabalhos fornecem indícios de que o número de direções relevantes associado ao ponto fixo de Reuter sature em torno de três, reforçando a preditividade [54, 56, 58, 59, 126, 127]. Isto significa que a gravitação quântica assintoticamente segura pode descrever a dinâmica de baixas energias com apenas três parâmetros livres. Notavelmente, a introdução de graus de liberdade de matéria compatíveis com o Modelo Padrão não estraga a existência do ponto fixo ultravioleta, o que sinaliza a existência de uma teoria de gravidade quântica fundamental compatível com as partículas do Modelo Padrão [35, 63–68], ver [128] para a extensão para acoplamentos gravitacionais em derivadas superiores. A presença de um ponto fixo não-trivial também foi testada em sistemas de gravitação unimodular [82, 83, 129, 130].

Capítulo 4

Dependência de parametrização de campo na gravitação quântica de Einstein

4.1 Introdução

Como visto anteriormente, o ponto central do cenário da segurança assintótica é a existência de um ponto fixo interagente no fluxo do grupo de renormalização. Isto requer o cálculo de funções beta dentro de esquemas de truncamento no espaço das teorias. No entanto, a quantização padrão da gravitação é construída sobre diversas ambiguidades, *e.g.*, escolha de fixação de calibre, parametrização de campo etc. Essas ambiguidades podem afetar o comportamento de quantidades *off-shell*¹, como, por exemplo, funções beta. Um questionamento pode surgir: como a estrutura do ponto fixo pode ser afetada? Ou, em particular: como podemos manipular algumas dessas ambiguidades de tal forma a fazer com que o ponto fixo desapareça?

Nesta seção tentaremos responder a estas perguntas ao explorar como algumas escolhas diferentes de parametrização das flutuações quânticas afetam as funções beta e a análise de ponto fixo para o truncamento de Einstein-Hilbert com uma constante cosmológica. Por generalidade, os cálculos serão efetuados em um espaço-tempo euclidiano d -dimensional.

4.2 Parametrização das flutuações da métrica

A quantização da gravidade requer a introdução de uma métrica de fundo não-dinâmica $\bar{g}_{\mu\nu}$ que é arbitrária e define a noção de uma escala k , de acordo com o qual flutuações da métrica são caracterizadas. A métrica dinâmica $g_{\mu\nu}$ é então parametrizada por uma combinação da métrica de fundo e de um campo de flutuações $h_{\mu\nu}$. A parametrização mais famosa, já discutida na seção anterior, é a decomposição linear que separa campo de fundo e flutuações de maneira aditiva:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (4.2.1)$$

¹Quando $\bar{g}_{\mu\nu}$ não é necessariamente um ponto estacionário da ação clássica. Considere, por exemplo, o truncamento de Einstein-Hilbert com uma constante cosmológica. As equações de movimento são $\bar{R}_{\mu\nu} = \frac{2}{d-2}\Lambda\bar{g}_{\mu\nu}$, e se as usarmos na ação clássica, ambos os termos se tornam proporcionais ao volume, tornando impossível a extração e, conseqüentemente, a distinção entre a função beta da constante cosmológica e a função beta do acoplamento de Newton.

Por outro lado, pode-se decompor a métrica de forma exponencial,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \bar{g}_{\mu\alpha} [\exp(h \cdot)]^\alpha_\nu \\ &= \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h_{\mu\alpha} h^\alpha_\nu + \dots \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Em ambos os casos, $h_{\mu\nu}$ é um tensor simétrico (com índices levantados e abaixados com a métrica de fundo). A métrica inversa $g^{\mu\nu}$, definida pela condição $g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\nu$, pode ser escrita para as parametrizações linear e exponencial, respectivamente, como

$$g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^{\mu\alpha} h_\alpha^\nu + \dots \quad (4.2.3)$$

$$g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \frac{1}{2} h^{\mu\alpha} h_\alpha^\nu + \dots \quad (4.2.4)$$

A priori, não há motivo para se preferir uma parametrização ou outra. Independência de campo de fundo é obtida mantendo $\bar{g}_{\mu\nu}$ arbitrário e requerendo que observáveis físicos como amplitudes de espalhamento sejam independentes de $\bar{g}_{\mu\nu}$. De fato, há uma ambiguidade: estes requisitos não fixam por completo a métrica dinâmica, que pode ser escrita na forma $g = f[\bar{g}; h]$, onde a função f possui a propriedade $f[\bar{g}; 0] = \bar{g}$. Nestes cálculos o jacobiano que surge na medida da integral de caminho devido à relação entre diferentes parametrizações não é levado em conta.

Para ilustrar como diferentes escolhas de parametrizações podem levar a funções beta diferentes e, portanto, a pontos fixos diferentes, consideremos as Eqs. (4.2.1) e (4.2.2) como duas aproximações da seguinte parametrização interpolante

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + \Omega h_{\mu\alpha} h^\alpha_\nu + \mathcal{O}(h^3), \quad (4.2.5)$$

com métrica inversa

$$g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \chi h^{\mu\alpha} h_\alpha^\nu + \mathcal{O}(h^3). \quad (4.2.6)$$

Para os nossos propósitos, focaremos em contribuições somente até $\mathcal{O}(h^2)$. Por consistência, o parâmetro χ se relaciona com o parâmetro Ω na forma $\chi = 1 - \Omega$. Entretanto, por motivos técnicos, manteremos até o final dos cálculos os dois parâmetros de forma independente, usando a relação entre eles quando for conveniente. Dentro desta parametrização, podemos interpolar entre a decomposição linear ($\Omega = 0, \chi = 1$) e a exponencial ($\Omega = 1/2, \chi = 1/2$) até segunda ordem em h , variando o parâmetro Ω .

4.3 Truncamento da ação efetiva média

4.3.1 Setor gravitacional

Nosso *ansatz* para o setor gravitacional será a versão euclidiana da ação de Einstein-Hilbert:

$$\Gamma_k^{\text{EH}}[g_{\mu\nu}] = Z_N \int d^d x \sqrt{g} (2\Lambda_k - R(g)), \quad (4.3.1)$$

onde $Z_N = (16\pi G_k)^{-1}$ e, como antes, Λ_k e G_k são, respectivamente, a constante cosmológica e o acoplamento de Newton na escala k . A expansão da ação até segunda ordem em $h_{\mu\nu}$ pode ser obtida por meio das expansões dos invariantes geométricos e do fator de volume descritos no Apêndice D. Assim, temos

$$\Gamma_{k,2}^{\text{EH}}[h; \bar{g}] = Z_N \int_x \sqrt{\bar{g}} \left(1 + \frac{1}{2} h + \frac{1}{2} \left(\Omega - \frac{1}{2} \right) h_\lambda^\alpha h_\alpha^\lambda + \frac{1}{8} h^2 \right) [2\Lambda_k - (\bar{R} + R^{(1)} + R^{(2)})]. \quad (4.3.2)$$

onde introduzimos a notação para a integral espacial d -dimensional

$$\int_x \equiv \int d^d x. \quad (4.3.3)$$

Explicitamente, até segunda ordem na flutuação $h_{\mu\nu}$, a Eq. (4.3.2) resulta

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,2}^{\text{EH}}[h; \bar{g}] = & Z_N \int_x \sqrt{\bar{g}} \left[2\Lambda_k \left(\frac{1}{2} \left(\Omega - \frac{1}{2} \right) h_\lambda^\alpha h_\alpha^\lambda + \frac{1}{8} h^2 \right) - \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\mu h + \frac{1}{4} h \bar{\nabla}^2 h + \right. \\ & + \frac{1}{2} h^{\sigma\beta} \bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}^\mu h_{\mu\sigma} - \frac{1}{4} h_{\beta\sigma} \bar{\nabla}^2 h^{\sigma\beta} + \frac{1}{2} \bar{R}^\sigma_{\lambda\beta\mu} h^{\lambda\beta} h_\sigma^\mu - \left(\chi - \frac{1}{2} \right) \bar{R}_{\lambda\mu} h_\sigma^\mu h^{\sigma\lambda} + \\ & \left. + \frac{1}{2} h h^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu} + -\frac{1}{8} h^2 \bar{R} - \frac{1}{2} \left(\Omega - \frac{1}{2} \right) h_\lambda^\alpha h_\alpha^\lambda \bar{R} \right]. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

4.3.2 Setores de *gauge-fixing* e de *ghost*

Para dar sentido formal à função de partição, que é uma integral sobre *geometrias*, é preciso *fixar o calibre*. Uma forma de se conseguir isto é pelo procedimento de quantização de Faddeev-Popov (ver Apêndice B) e envolve a introdução de um termo de *gauge-fixing* junto com um termo de campos de *ghosts* de Faddeev-Popov. Dessa forma, adicionamos à Eq. (4.3.4) o termo de *gauge-fixing*

$$S_{gf}[h; \bar{g}] = \frac{Z_N}{2\alpha} \int_x \sqrt{\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} F_\mu[h; \bar{g}] F_\nu[; \bar{g}], \quad (4.3.5)$$

com

$$F_\mu[h; \bar{g}] = \bar{\nabla}_\rho h_\mu^\rho - \frac{\beta + 1}{d} \bar{\nabla}_\mu h, \quad (4.3.6)$$

onde α e β são parâmetros de calibre. A Eq. (4.3.5) pode ser expressa como

$$S_{gf}[h; \bar{g}] = -\frac{Z_N}{2\alpha} \int_x \sqrt{\bar{g}} \left[h_\mu^\rho \bar{\nabla}_\rho \bar{\nabla}_\sigma h^{\sigma\mu} - 2 \left(\frac{\beta + 1}{d} \right) h_\mu^\rho \bar{\nabla}_\rho \bar{\nabla}^\mu h + \left(\frac{\beta + 1}{d} \right)^2 h \bar{\nabla}^2 h \right]. \quad (4.3.7)$$

Portanto, a ação de Einstein-Hilbert com calibre fixado, até segunda ordem em $h_{\mu\nu}$, é dada pela soma

$$\Gamma_{k,2}[h; \bar{g}] = \Gamma_{k,2}^{\text{EH}}[h; \bar{g}] + S_{gf}[h; \bar{g}]. \quad (4.3.8)$$

Ainda é necessário adicionar o termo de *ghost*, que faremos em breve. Nesta seção nos restringiremos ao calibre de Feynman-de Donder com $\alpha = 1$ e $\beta = \frac{d}{2} - 1$. Esta escolha de calibre elimina a dependência de termos não-mínimos na expansão da ação (4.3.8).

Utilizando a definição (3.1.8), o inverso do propagador do gráviton $h_{\mu\nu}$, incluindo termo de *gauge-fixing*, pode ser escrito na forma

$$\frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} h_{\alpha\beta} \Gamma_{k,2}^{(2)\alpha\beta\mu\nu} h_{\mu\nu}, \quad (4.3.9)$$

cujo operador hessiano mínimo é dado por

$$\Gamma_{k,2}^{(2)\alpha\beta\mu\nu} = Z_N [2\Lambda_k K^{(\Omega)\alpha\beta,\mu\nu} - K^{\alpha\beta,\mu\nu} \bar{\nabla}^2 + L^{\alpha\beta,\mu\nu}], \quad (4.3.10)$$

onde

$$K^{(\Omega)\alpha\beta,\mu\nu} = \left(\Omega - \frac{1}{2}\right)\bar{g}^{\alpha\beta,\mu\nu} + \frac{1}{4}\bar{g}^{\alpha\beta}\bar{g}^{\mu\nu}; \quad (4.3.11)$$

$$K^{\alpha\beta,\mu\nu} = \frac{1}{2}\bar{g}^{\alpha\beta,\mu\nu} - \frac{1}{4}\bar{g}^{\alpha\beta}\bar{g}^{\mu\nu}; \quad (4.3.12)$$

$$\bar{g}^{\alpha\beta,\mu\nu} = \frac{1}{2}(\bar{g}^{\alpha\mu}\bar{g}^{\beta\nu} + \bar{g}^{\alpha\nu}\bar{g}^{\beta\mu}); \quad (4.3.13)$$

$$\begin{aligned} L^{\alpha\beta,\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\bar{g}^{\lambda\beta',\alpha\beta}\bar{g}^{\mu'(\mu}\bar{R}^{\nu)})_{\lambda\beta'\mu'} + \bar{g}^{\lambda\beta',\mu\nu}\bar{g}^{\mu'(\alpha}\bar{R}^{\beta)}_{\lambda\beta'\mu'}) + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\bar{g}^{\mu\nu}\bar{R}^{\alpha\beta} + \bar{g}^{\alpha\beta}\bar{R}^{\mu\nu} - 2\left(\chi - \frac{1}{2}\right)(\bar{R}^{\alpha(\nu}\bar{g}^{\mu)\beta} + \bar{R}^{\beta(\nu}\bar{g}^{\mu)\alpha})\right) - K^{(\Omega)\alpha\beta,\mu\nu}\bar{R}. \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

É conveniente reescrever a Eq. (4.3.10) em notação matricial, suprimindo os índices. Abaixando um par de índices, temos

$$K_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left[\mathbb{I}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} - \frac{d}{2}P_{\mu\nu}^{\alpha\beta}\right], \quad (4.3.15)$$

onde

$$\mathbb{I}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\delta_{\mu}^{\alpha}\delta_{\nu}^{\beta} + \delta_{\nu}^{\alpha}\delta_{\mu}^{\beta}); \quad (4.3.16)$$

$$P_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \frac{1}{d}\bar{g}^{\alpha\beta}\bar{g}_{\mu\nu}. \quad (4.3.17)$$

Denotaremos por símbolos em negrito os operadores lineares que atuam no espaço de tensores simétricos, $\mathbf{K}^{(\Omega)}$, \mathbf{K} , $\mathbf{1}$, \mathbf{P} , \mathbf{L} . Por exemplo, \mathbf{P} e $\mathbf{1} - \mathbf{P}$ são projetores que projetam sobre os setores de traço e de traço nulo, respectivamente, no espaço de tensores simétricos: $h_{\mu\nu} = \hat{h}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{\text{T}}$, onde $\bar{g}^{\mu\nu}\hat{h}_{\mu\nu} = 0$ e $h_{\mu\nu}^{\text{T}} = P_{\mu\nu}^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} = \frac{1}{d}\bar{g}_{\mu\nu}h$ e $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$. Com as identidades $\mathbf{K} = \frac{1}{2}((\mathbf{1} - \mathbf{P}) + \frac{2-d}{2}\mathbf{P})$ e $\mathbf{K}^{-1} = 2\mathbf{1} + \frac{2d}{2-d}\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{1}$ para $d \neq 2$, podemos reescrever a Eq. (4.3.10) na forma

$$\mathbf{\Gamma}_{k,2}^{(2)} = \frac{Z_N}{2}\left[(\mathbf{1} - \mathbf{P})(2\Lambda_k(2\Omega - 1)\mathbf{1} + 2\mathbf{L} - \bar{\nabla}^2) - \frac{d-2}{2}\mathbf{P}\left(2\Lambda_k\frac{(d-2+4\Omega)}{2-d}\mathbf{1} - \bar{\nabla}^2 + \frac{4\mathbf{L}}{2-d}\right)\right]. \quad (4.3.18)$$

Intrinsicamente o sinal global do segundo termo em (4.3.18) é negativo para $d > 2$, o que gera um termo cinético negativo na teoria minkowskiana. Esta é uma maneira de se observar o problema de a ação de Einstein-Hilbert euclidiana ser ilimitada inferiormente [104]. Veremos que devido às propriedades dos operadores \mathbf{K} , \mathbf{P} e $\mathbf{1}$, este problema deixa de existir na equação de fluxo.

É conveniente escolher um *background* que distinga e facilite a extração das funções beta $\partial_t G_k$ e $\partial_t \Lambda_k$ no truncamento de Einstein-Hilbert. Para isto, escolhemos um *background* maximalmente simétrico, caracterizado por

$$\bar{R}_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{d(d-1)}(\bar{g}_{\mu\alpha}\bar{g}_{\nu\beta} - \bar{g}_{\mu\beta}\bar{g}_{\nu\alpha})\bar{R} \quad (4.3.19)$$

$$\bar{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{d}\bar{g}_{\mu\nu} \quad (4.3.20)$$

com

$$\bar{\nabla}_{\mu}\bar{R}^{\mu\nu} = 0 \quad \text{e} \quad \bar{\nabla}_{\mu}\bar{R} = 0. \quad (4.3.21)$$

Considerando assinatura euclidiana, $\bar{R} = 0$ corresponde a um espaço d -dimensional plano. Espaços caracterizados por $\bar{R} < 0$ são hiperboloides e por $\bar{R} > 0$, esferas. Focaremos neste último caso daqui para frente. Se o raio da esfera é r , as seguintes relações para o escalar de curvatura e para o volume valem:

$$\bar{R} = \frac{d(d-1)}{r^2}; \quad (4.3.22)$$

$$V(S^d) = (4\pi)^{d/2} \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(d)} r^d = \frac{2\pi^{\frac{d+1}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} \left(\frac{d(d-1)}{\bar{R}} \right)^{d/2}. \quad (4.3.23)$$

onde $\Gamma(n)$ é a função gama definida por

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty dt t^{n-1} e^{-t}. \quad (4.3.24)$$

Dessa forma, a Eq. (4.3.18) fica

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,2}^{(2)} = & \frac{Z_N}{2} \left\{ (\mathbf{1} - \mathbf{P}) \left(2\Lambda_k(2\Omega - 1)\mathbf{1} - \bar{\nabla}^2 + \frac{d^2(1 - 2\Omega) + d(1 - 4\chi + 2\Omega) + 4\chi\bar{R}\mathbf{1}}{d(d-1)} \right) + \right. \\ & - \frac{d-2}{2} \mathbf{P} \left[\frac{2\Lambda_k}{2-d} (d-2+4\Omega)\mathbf{1} - \bar{\nabla}^2 + \right. \\ & \left. \left. - \frac{\mathbf{P}}{2-d} \bar{R} \left(\frac{d^3 - d^2(2(1-2\Omega) + 5) - d(2(1-4\chi + 2\Omega) - 8) - 8\chi}{d(d-1)} \right) \right] \right\} \quad (4.3.25) \end{aligned}$$

Por fim, o operador de Faddeev-Popov pode ser calculado como

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_\mu[h^\epsilon; \bar{g}]}{\delta \epsilon^\nu} &= \frac{\delta F_\mu[h^\epsilon; \bar{g}]}{\delta h_{\alpha\beta}} \frac{\delta h_{\alpha\beta}}{\delta \epsilon^\nu} \\ &= \bar{\nabla}^\alpha g_{\alpha\nu} \nabla_\mu + \bar{\nabla}^\alpha g_{\mu\nu} \nabla_\alpha - \bar{\nabla}_\mu g_{\alpha\nu} \nabla^\alpha. \quad (4.3.26) \end{aligned}$$

Adiantando que iremos calcular a ação efetiva média para o valor esperado de $h_{\mu\nu}$ sendo nulo, podemos identificar os operadores $\bar{\nabla} = \nabla$. Portanto, a ação de *ghost* resulta

$$\begin{aligned} S_{gh}[0, \bar{C}, C; \bar{g}] &= - \int_x \sqrt{\bar{g}} \bar{C}_\mu \mathcal{M}^\mu{}_\nu C^\nu \\ &= - \int_x \sqrt{\bar{g}} \bar{C}_\mu (-\bar{\nabla}^2 \delta_\nu^\mu - \bar{R}^\mu{}_\nu) C^\nu. \quad (4.3.27) \end{aligned}$$

Na próxima seção discutiremos a escolha de *cutoff* e juntaremos todas as peças para o cálculo da equação de fluxo para a gravidade.

4.4 Construindo a equação de fluxo para o truncamento de Einstein-Hilbert

4.4.1 Escolha da função *cutoff*

Adotaremos as funções *cutoff* (ou reguladoras) do Tipo Ia, como em [33], definidas por

$$\Delta S_k[h, \bar{C}, C; \bar{g}] = \frac{1}{2} \int_x \sqrt{\bar{g}} h_{\mu\nu} \mathcal{R}_k^{(hh)} (-\bar{\nabla}^2)^{\mu\nu\alpha\beta} h_{\alpha\beta} - \int_x \sqrt{\bar{g}} \bar{C}_\mu \mathcal{R}_k^{(\bar{C}C)} (-\bar{\nabla}^2)^\mu{}_\nu C^\nu, \quad (4.4.1)$$

onde

$$\mathcal{R}_k^{(hh)}(-\bar{\nabla}^2)^{\mu\nu\alpha\beta} = Z_N K^{\mu\nu,\alpha\beta} R_k(-\bar{\nabla}^2), \quad (4.4.2)$$

$$\mathcal{R}_k^{(\bar{C}C)}(-\bar{\nabla}^2)^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu R_k(-\bar{\nabla}^2) \quad (4.4.3)$$

são os reguladores que atuam sobre tensores simétricos e vetores, respectivamente. Definindo a dimensão anômala do gráviton como

$$\eta = \frac{1}{Z_N} \frac{dZ_N}{dt}, \quad (4.4.4)$$

obtemos

$$\frac{d\mathbf{R}_k^{(hh)}}{dt} = Z_N \mathbf{K} [\partial_t R_k(-\bar{\nabla}^2) + \eta R_k(-\bar{\nabla}^2)]. \quad (4.4.5)$$

O inverso do propagador regularizado é obtido de (4.3.25) efetuando a substituição

$$-\bar{\nabla}^2 \mapsto P_k(-\bar{\nabla}^2) = -\bar{\nabla}^2 + R_k(-\bar{\nabla}^2) \quad (4.4.6)$$

com $P_k(-\bar{\nabla}^2)$ sendo o operador laplaciano regularizado. Explicitamente isto é obtido definindo o regulador $\mathbf{R}_k(-\bar{\nabla}^2)$ como

$$\mathbf{R}_k^{\phi_i\phi_j}(-\bar{\nabla}^2) = \Gamma_k^{\phi_i\phi_j}(P_k(-\bar{\nabla}^2)) - \Gamma_k^{\phi_i\phi_j}(-\bar{\nabla}^2) \quad (4.4.7)$$

sendo $\Gamma_k^{\phi_i\phi_j} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta\phi_i \delta\phi_j}$. Já para o perfil da função reguladora optamos pelo *cutoff* de Litim:

$$R_k(z) = (k^2 - z)\theta(k^2 - z). \quad (4.4.8)$$

Existem outras escolhas de tipo de *cutoff* e de perfil de função reguladora. Para um estudo sobre a dependência dos resultados em relação à escolha do tipo de *cutoff* e de perfil do núcleo regulador no truncamento de Einstein-Hilbert para a decomposição linear, reportamos o leitor para a Ref. [33] e para a Ref. [85] para sistemas de interação entre gravidade e matéria no truncamento $f(R)$ na decomposição exponencial.

4.4.2 Equação de fluxo

O inverso do propagador regularizado se escreve como

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,2}^{(2)} + \mathbf{R}_k^{(hh)} &= \frac{Z_N}{2} \left\{ (\mathbf{1} - \mathbf{P}) \left(2\Lambda_k(2\Omega - 1)\mathbf{1} + \mathbf{1}P_k(-\bar{\nabla}^2) + \frac{d^2(1 - 2\Omega) + d(1 - 4\chi + 2\Omega) + 4\chi}{d(d-1)} \bar{R}\mathbf{1} \right) \right. \\ &\quad - \frac{d-2}{2} \mathbf{P} \left[\frac{2\Lambda_k}{2-d}(d-2+4\Omega)\mathbf{1} + \mathbf{1}P_k(-\bar{\nabla}^2) + \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\mathbf{P}}{2-d} \bar{R} \left(\frac{d^3 - d^2(2(1-2\Omega) + 5) - d(2(1-4\chi + 2\Omega) - 8) - 8\chi}{d(d-1)} \right) \right] \right\}. \quad (4.4.9) \end{aligned}$$

Usando a identidade

$$\left[\frac{(\mathbf{1} - \mathbf{P})}{a} - \frac{2}{d-2} \frac{\mathbf{P}}{b} \right] \left[(\mathbf{1} - \mathbf{P})_c - \frac{d-2}{2} \mathbf{P}_c \right] = (\mathbf{1} - \mathbf{P}) \frac{c}{a} + \mathbf{P} \frac{c}{b}, \quad (4.4.10)$$

para $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, a inversa da Eq. (4.4.9) é imediata:

$$\begin{aligned}
(\Gamma_{k,2}^{(2)} + \mathbf{R}_k^{(hh)})^{-1} &= \frac{2}{Z_N} \left[(\mathbf{1} - \mathbf{P}) \frac{1}{P_k + 2\Lambda_k(2\Omega - 1) + \frac{d^2(1-2\Omega) + d(1-4\chi+2\Omega) + 4\chi}{d(d-1)} \bar{R}} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{d-2} \mathbf{P} \frac{1}{P_k + \frac{2\Lambda_k}{2-d}(d-2+4\Omega) - \frac{1}{2-d} \left(\frac{d^3 - d^2(2(1-2\Omega)+5) - d(2(1-4\chi+2\Omega)-8) - 8\chi}{d(d-1)} \right) \bar{R}} \right] \quad (4.4.11)
\end{aligned}$$

Usando a decomposição (4.4.5) para $d\mathbf{R}_k^{(hh)}/dt$, multiplicando por (4.4.11) e tomando o traço sobre os índices de espaço-tempo e incluindo o termo de *ghost*, resulta na seguinte equação de fluxo:

$$\begin{aligned}
\partial_t \Gamma_k &= \frac{1}{2} \text{STr} \left[(\Gamma_k^{(2)} + \mathbf{R}_k)^{-1} \partial_t \mathbf{R}_k \right] \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr}_{(2)} \left[(\mathbf{1} - \mathbf{P}) \frac{\partial_t R_k + \eta R_k}{P_k + 2\Lambda_k(2\Omega - 1) + \frac{d^2(1-2\Omega) + d(1-4\chi+2\Omega) + 4\chi}{d(d-1)} \bar{R}} \right] + \\
&\quad + \frac{1}{2} \text{Tr}_{(2)} \left[\mathbf{P} \frac{\partial_t R_k + \eta R_k}{P_k + \frac{2\Lambda_k}{2-d}(d-2+4\Omega) - \frac{1}{2-d} \left(\frac{d^3 - d^2(2(1-2\Omega)+5) - d(2(1-4\chi+2\Omega)-8) - 8\chi}{d(d-1)} \right) \bar{R}} \right] + \\
&\quad - \text{Tr}_{(1)} [\partial_t R_k \delta_\mu^\nu (\delta_\mu^\alpha P_k - \bar{R}_\mu^\alpha)^{-1}], \quad (4.4.12)
\end{aligned}$$

onde $\Gamma_k = \Gamma_{k,2}[h; \bar{g}] + S_{gh}[\bar{C}, C; \bar{g}] + \Delta S_k[h, \bar{C}, C; \bar{g}]$. O traço de funções $W(-\bar{\nabla}^2)$ pode ser calculado usando técnicas de *heat kernel* desenvolvidas no Apêndice C de modo a escrever, para o setor de *spin* s ,

$$\text{Tr}_{(s)} [W(-\bar{\nabla}^2)] = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \sum_{n=0}^{\infty} Q_{d/2-n}[W] B_{2n}^{(s)}(-\bar{\nabla}^2), \quad (4.4.13)$$

onde

$$B_{2n}^{(s)}(-\bar{\nabla}^2) = \int_x \sqrt{\bar{g}} \text{tr}_{(s)} [\mathbf{b}_{2n}(-\bar{\nabla}^2)] \quad (4.4.14)$$

e \mathbf{b}_{2n} são escalares construídos a partir de invariantes de curvatura e suas derivadas. Para campos não sujeitos a vínculos, os dois primeiros termos são [33, 34, 36]

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{1}, \quad (4.4.15)$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{1}{6} R \mathbf{1}. \quad (4.4.16)$$

onde $\mathbf{1}$ é a identidade no espaço dos campos. Para os campos de *spin*-0, *spin*-1 e *spin*-2, temos, respectivamente,

$$\mathbf{1}_0 = \mathbf{1}, \quad [\mathbf{1}_1]_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu, \quad [\mathbf{1}_2]_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta + \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha). \quad (4.4.17)$$

Os traços tr das matrizes identidade contam o número de componentes independentes e valem

$$\text{tr}_{(0)} \mathbf{1} = 1, \quad \text{tr}_{(1)} \mathbf{1} = d, \quad \text{tr}_{(2)} \mathbf{1} = \frac{1}{2} d(d+1). \quad (4.4.18)$$

Adiante precisaremos também dos seguintes traços

$$\text{tr}_{(2)}\mathbf{P} = 1, \quad \text{tr}_{(2)}(\mathbf{1} - \mathbf{P}) = \frac{d^2 + d - 2}{2}, \quad (4.4.19)$$

Podemos expandir a Eq. (4.4.12) até primeira ordem em \bar{R} , usar os traços (4.4.19) e a Eq. (4.4.13) para obter uma forma explícita para (4.4.12). Vamos ilustrar este procedimento com o termo de *ghost*:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{(1)}[\partial_t R_k \delta_\mu^\nu (\delta_\mu^\alpha P_k - \bar{R}_\mu^\alpha)^{-1}] &= \text{Tr}_{(1)}[\partial_t R_k (\delta_\nu^\alpha P_k - \bar{R}_\nu^\alpha)^{-1}] \\ &= \text{Tr}_{(1)}[\partial_t R_k \hat{G}_k (\delta_\nu^\alpha - \hat{G}_k \bar{R}_{\alpha\nu})^{-1}] \\ &= \text{Tr}_{(1)}[\partial_t R_k \hat{G}_k (\delta_\nu^\alpha + \hat{G}_k \bar{R}_\nu^\alpha)] \\ &= \text{Tr}_{(1)}[\partial_t R_k \hat{G}_k \delta_\nu^\alpha] + \frac{1}{d} \text{Tr}_{(1)}[\partial_t R_k \hat{G}_k^2 \delta_\nu^\alpha \bar{R}], \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

onde $\hat{G}_k = P_k^{-1}$. O primeiro termo da expressão anterior pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{(1)}[\partial_t R_k \hat{G}_k \delta_\nu^\alpha] &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left[\int_x \sqrt{\bar{g}} \left(Q_{\frac{d}{2}} \left(\frac{\partial_t R_k}{P_k} \right) \text{tr}_{(1)}[\mathbf{b}_0 \delta_\nu^\alpha] + Q_{\frac{d}{2}-1} \left(\frac{\partial_t R_k}{P_k} \right) \text{tr}_{(1)}[\mathbf{b}_2 \delta_\nu^\alpha] \right) \right] \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left[\int_x \sqrt{\bar{g}} \left(Q_{\frac{d}{2}} \left(\frac{\partial_t R_k}{P_k} \right) d + Q_{\frac{d}{2}-1} \left(\frac{\partial_t R_k}{P_k} \right) d \frac{\bar{R}}{6} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.4.21)$$

Analogamente, o último termo de (4.4.20) se escreve

$$\frac{1}{d} \text{Tr}_{(1)}[\partial_t R_k \hat{G}_k^2 \bar{R} \delta_\nu^\alpha] = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_x \sqrt{\bar{g}} \left[\bar{R} Q_{\frac{d}{2}} \left(\frac{\partial_t R_k}{P_k^2} \right) \right]. \quad (4.4.22)$$

Seguinda a mesma lógica, a equação de fluxo (4.4.12) resulta

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_x \sqrt{\bar{g}} \left[\left(\frac{d^2 + d - 2}{4} \right) Q_{\frac{d}{2}}((\partial_t R_k + \eta R_k) \check{G}_k) + \frac{1}{2} Q_{\frac{d}{2}}((\partial_t R_k + \eta R_k) \tilde{G}_k) + \right. \\ &\quad - Q_{\frac{d}{2}} \left(\frac{\partial_t R_k}{P_k} \right) d + \bar{R} \left[\left(\frac{d^2 + d - 2}{24} \right) Q_{\frac{d}{2}-1}((\partial_t R_k + \eta R_k) \check{G}_k) - \left(\frac{d^2 + d - 2}{4} \right) \times \right. \\ &\quad \times \left(\frac{d^2(1 - 2\Omega) + d(1 - 4\chi + 2\Omega) + 4\chi}{d(d-1)} \right) Q_{\frac{d}{2}}((\partial_t R_k + \eta R_k) \check{G}_k^2) - Q_{\frac{d}{2}-1} \left(\frac{\partial_t R_k}{P_k} \right) \frac{d}{6} \\ &\quad + \frac{1}{12} Q_{\frac{d}{2}-1}((\partial_t R_k + \eta R_k) \tilde{G}_k) + Q_{\frac{d}{2}}((\partial_t R_k + \eta R_k) \tilde{G}_k^2) \times \\ &\quad \left. \left. \times \frac{d^3 - d^2(2(1 - 2\Omega) + 5) - d(2(1 - 4\chi + 2\Omega) - 8) - 8\chi}{2d(2-d)(d-1)} - Q_{\frac{d}{2}} \left(\frac{\partial_t R_k}{P_k^2} \right) \right] \right], \end{aligned} \quad (4.4.23)$$

onde $\check{G}_k = (P_k + 2\Lambda_k(2\Omega - 1))^{-1}$ e $\tilde{G}_k = (P_k + \frac{2\Lambda_k}{2-d}(d-2+4\Omega))^{-1}$. Note que a estrutura da equação de fluxo elimina o problema do sinal global do segundo termo do hessiano (4.3.18) para $d > 2$. Isto decorre da identidade (4.4.10) satisfeita pelos operadores $\mathbf{1}$ e \mathbf{P} [33]. Ademais, a aparente singularidade no termo $\frac{4\mathbf{L}}{2-d}$ é imaterial tanto para a decomposição linear ($\Omega = 0, \chi = 1$) quanto para a exponencial ($\Omega = 1/2, \chi = 1/2$), dado que existe um fator $2 - d$ embutido no operador \mathbf{L} para ambas decomposições. De fato,

$$\mathbf{L}|_{\Omega=0, \chi=1} = \frac{(d-4)(2-d)}{4d} \bar{R} \mathbf{1}, \quad \mathbf{L}|_{\Omega=1/2, \chi=1/2} = -\frac{(d-2)^2}{4d} \bar{R} \mathbf{1}. \quad (4.4.24)$$

Isto garante que a Eq. (4.4.23) seja bem-definida quando $d = 2$.

4.5 Funções beta

É imediato agora extrair as funções beta para G_k e Λ_k , fazendo

$$\partial_t \left(\frac{\Lambda_k}{16\pi G_k} \right) = \frac{1}{2\text{Vol}} \partial_t \Gamma_k[\bar{g}] \Big|_{\bar{R}=0}, \quad (4.5.1)$$

$$\partial_t \left(\frac{1}{16\pi G_k} \right) = -\frac{1}{\text{Vol}} \frac{\partial}{\partial \bar{R}} \partial_t \Gamma_k[\bar{g}] \Big|_{\bar{R}=0} \quad (4.5.2)$$

e usando (4.4.23), a definição dos funcionais- Q dada na subseção C.3 do Apêndice C, aplicando ∂_t em ambos os lados das equações acima e projetando sobre o *background* (*i.e.*, fazendo $h_{\mu\nu} = 0$), obtemos

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{\Lambda_k}{16\pi G_k} \right) &= \frac{k^d}{(4\pi)^{d/2}} (\tilde{A}_1 + \eta \tilde{A}_2), \\ -\partial_t \left(\frac{1}{16\pi G_k} \right) &= \frac{k^{d-2}}{(4\pi)^{d/2}} (\tilde{B}_1 + \eta \tilde{B}_2), \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

onde $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{B}_1,$ e \tilde{B}_2 são funções adimensionais de Λ_k, k, d, Ω e χ . Em termos de variáveis adimensionais, $\lambda_k = k^{-2}\Lambda_k$ e $g_k = k^{d-2}G_k$, obtemos o seguinte sistema de funções beta para $\beta_\lambda = \partial_t \lambda_k$ e $\beta_g = \partial_t g_k$:

$$\begin{aligned} \beta_\lambda &= -2\lambda_k + g_k \frac{A_1 + 2B_2\lambda_k + g_k(A_1B_2 - A_2B_1)}{2(1 + B_2g_k)}, \\ \beta_g &= (d-2)g_k + \frac{B_1}{1 + B_2g_k} g_k^2, \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

onde

$$A_{1,2} = \left(\frac{8\pi}{(4\pi)^{d/2}} \right) \tilde{A}_{1,2}, \quad B_{1,2} = \left(\frac{16\pi}{(4\pi)^{d/2}} \right) \tilde{B}_{1,2}. \quad (4.5.5)$$

O resultado perturbativo a 1-*loop* que descarta informações não-perturbativas é obtido fazendo $\eta = 0$. Isto equivale a fazer $A_2 = B_2 = 0$. Comentaremos este ponto com mais detalhes em breve.

A forma explícita dos coeficientes em (4.5.3) é extremamente complicada e nada instrutiva, portanto não as escreveremos e nos limitaremos à análise de casos particulares.

4.6 Resultados

No que se segue analisaremos alguns resultados para a dependência de parametrização nas funções beta dos acoplamentos gravitacionais tanto em $d = 4$ quanto outras dimensões.

4.6.1 Análise a 1-*loop*

Comecemos por analisar o caso em que $\lambda_k = 0$ a 1-*loop*. A expressão para a função beta do acoplamento de Newton adimensional a 1-*loop* é obtida fazendo $B_2 = 0$, de modo que podemos escrever

$$\beta_g|_{1-loop} = (d-2)g + B_1g^2. \quad (4.6.1)$$

Se $B_1 < 0$, então temos um ponto fixo não-gaussiano para um valor positivo de g . Entretanto, se $B_1 > 0$, então o ponto fixo não-trivial existe para um valor negativo de g . Na Fig. (4.1) exibimos o gráfico de B_1 para o intervalo $\Omega \in [0, 1]$ para $d = 4$. Pode-se observar que B_1 é função crescente de Ω , sendo negativo para $0 \leq \Omega \leq 0,917$, com $\Omega_c = 0,917$ sendo o valor crítico acima do qual B_1 se torna positivo.

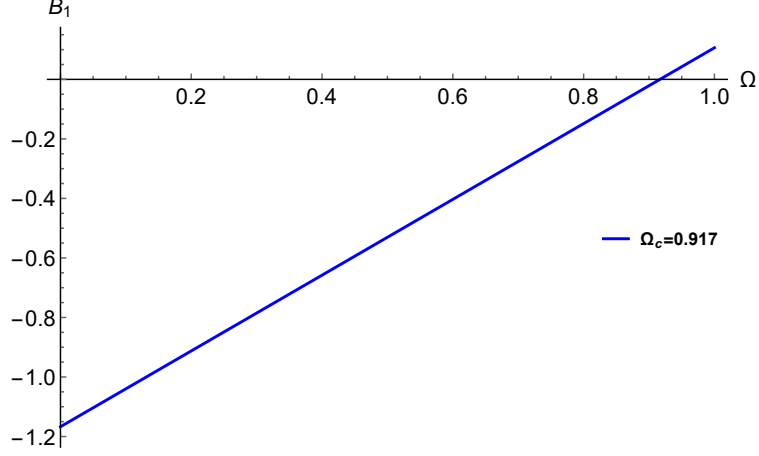


Figura 4.1: Coeficiente B_1 em função de Ω em $d = 4$ para $\lambda_k = 0$ a 1-loop. B_1 é função crescente de Ω , apresentando valores negativos até o valor crítico $\Omega_c = 0,917$, acima do qual não existe ponto fixo interagente para g positivo.

Portanto, fica evidente pelo gráfico anterior que um ajuste fino adequado do parâmetro Ω fornece um coeficiente B_1 positivo. Em particular, a escolha $\Omega = 1$ é de particular interesse, pois corresponde a uma decomposição linear da *métrica inversa*, isto é,

$$g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (4.6.2)$$

Dessa forma, a 1-loop e com $\lambda_k = 0$, não existe ponto fixo para $\Omega = 1$. Isto também pode ser observado olhando para o gráfico (4.2) da função beta do acoplamento de Newton adimensional para as três parametrizações de interesse.

Sempre existe um ponto fixo trivial (gaussiano) na origem para as decomposições linear e exponencial e um ponto fixo não-trivial, independente de Ω , em $g_* = -(d-2)/B_1$. O ponto fixo gaussiano possui expoente crítico $2-d$, portanto repulsivo no UV para $d = 4$, ao passo que o ponto fixo não-gaussiano possui expoente crítico de valor sempre simétrico ao do valor no ponto fixo trivial, sendo, portanto, igual a $d-2$.

A inexistência de ponto fixo interagente para $\Omega \leq 0,917$ e, em particular, para $\Omega = 1$ para g positivo, sugere que controlar a dependência de parametrização das funções beta é importante na tarefa de estabelecer a existência de pontos fixos.

É claro que, como o parâmetro Ω pode assumir a princípio qualquer valor, poderíamos explorar este fato para a caracterização de outras parametrizações e estudar como a estrutura de ponto fixo pode ser afetada. Isto foi extensivamente explorado para o truncamento $f(R)$ em [106] usando uma família parametrização das flutuações a dois parâmetros na forma

$$g_{\mu\nu} = (\bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(1 + mh) + \Omega h_{\mu\alpha} h^{\alpha\nu} + \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} [m(2\Omega - 1)h_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} + m^2 h^2]. \quad (4.6.3)$$

Se $m = 0$, recuperamos a parametrização interpolante a um parâmetro (4.2.5) até segunda ordem em $h_{\mu\nu}$. Com $m \neq 0$, a verdadeira variável dinâmica corresponde a uma densidade tensorial construída a partir da métrica completa. Este tipo de parametrização de campo também

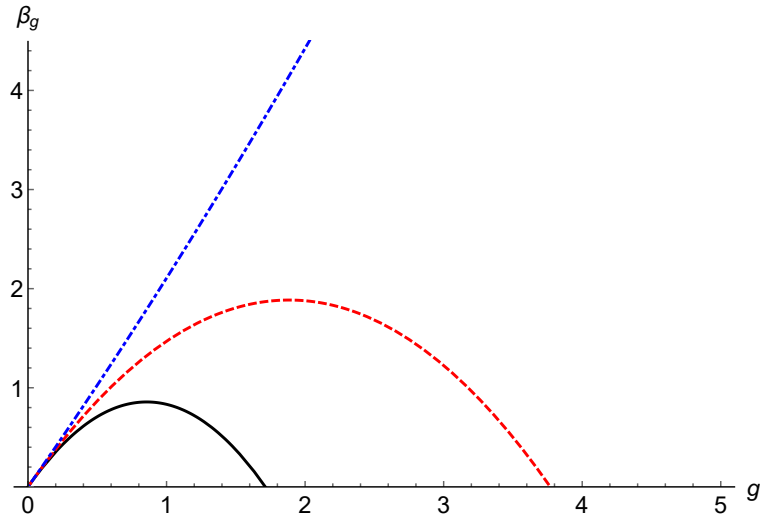


Figura 4.2: Função beta do acoplamento de Newton adimensional g_k com $\lambda_k = 0$ em $d = 4$ para as parametrizações linear ($\Omega = 0$, linha contínua), exponencial ($\Omega = 1/2$, linha tracejada) e linear da inversa ($\Omega = 1$, linha tracejada-pontilhada). Não há ponto fixo interagente para $\Omega = 1$ para g positivo.

foi recentemente empregado na investigação de divergências a 1-loop no contexto de truncamentos de Einstein-Hilbert, de derivadas superiores e $f(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})$ [84, 108, 109]. Como estudo introdutório, neste presente trabalho, daqui em diante, focaremos apenas em investigar como os resultados para as parametrizações exponencial e linear da inversa diferem dos resultados obtidos para a decomposição linear, levando em conta contribuições não-perturbativas.

4.6.2 Análise de resultados modificados pelo grupo de renormalização funcional

Ainda considerando $\lambda_k = 0$, a função beta do acoplamento de Newton adimensional modificada pelo GRF possui a forma (4.5.4), onde os coeficientes B_1 e B_2 são avaliados em $\lambda_k = 0$. O gráfico para a função de beta de g_k para as três parametrizações possui a mesma forma qualitativa do que o resultado aproximado a 1-loop, não produzindo outra vez ponto fixo interagente para a parametrização linear da métrica inversa ($\Omega = 1$) para g positivo. Similarmente, sempre ocorre um ponto fixo trivial na origem para as decomposições linear e exponencial e um ponto fixo não-trivial em

$$g_* = -\frac{d-2}{B_1 + (d-2)B_2}. \quad (4.6.4)$$

O ponto fixo gaussiano possui expoente crítico $2-d$, portanto repulsivo no UV para $d = 4$, ao passo que o ponto fixo não-gaussiano possui expoente crítico

$$\theta = -\left. \frac{\partial \beta_g}{\partial g} \right|_{g_*} = (d-2) \left(1 + (d-2) \frac{B_2}{B_1} \right). \quad (4.6.5)$$

Exibimos a solução para o ponto fixo (4.6.4) em função de d na Fig. (4.3). Importante destacar que o ponto fixo (4.6.4) com $\lambda_k = 0$ apresenta singularidade em $d \approx 11,6$ para a decomposição linear e em $d = 4,8$ para a exponencial. Isto indica que existe uma relação entre a existência do ponto fixo e a dimensão do espaço-tempo. Entretanto, para restringir mais ainda a compatibilidade entre segurança assintótica e a dimensão do espaço-tempo uma atenção maior para a consistência da medida funcional mereça ser dada.

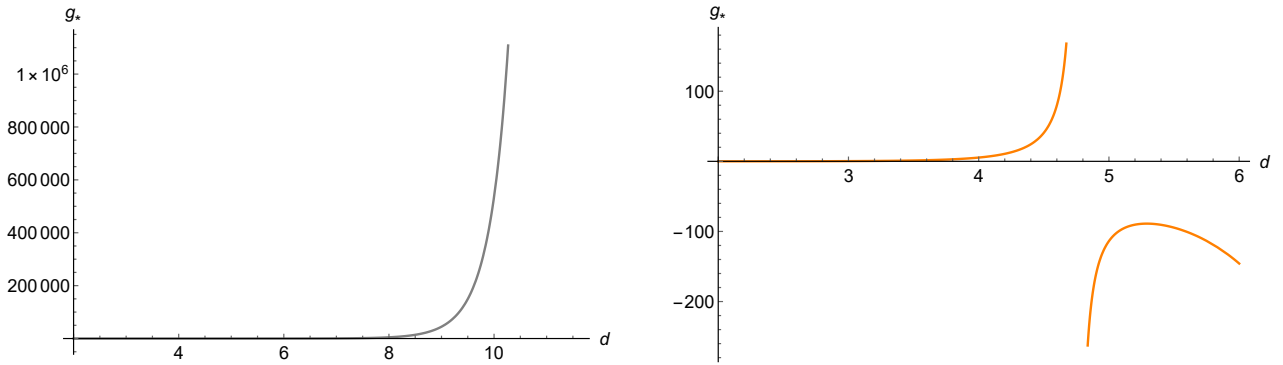


Figura 4.3: Gráficos da posição do ponto fixo g_* em função da dimensão d . O gráfico da esquerda se refere à parametrização linear e apresenta singularidade em $d \approx 11,6$. Já o gráfico da direita se refere à decomposição exponencial e apresenta singularidade em $d \approx 4,8$.

Concluimos esta discussão com a inclusão da constante cosmológica. Pode-se resolver exatamente as equações $\partial_t g_k = 0$ e $\partial_t \lambda_k = 0$ em $d = 4$ e obter os pontos fixos não-triviais para as três parametrizações das flutuações da métrica. Agora a história muda um pouco, pois a inclusão da constante cosmológica gera não só um, mas um conjunto de pontos fixos para a parametrização linear da inversa da métrica, sendo apenas um par de valores positivos para (g_*, λ_*) . Na Tabela (4.1), coletamos os pontos fixos não-gaussianos e expoentes críticos para o truncamento de Einstein-Hilbert com constante cosmológica para as três parametrizações das flutuações da métrica. Note que os expoentes críticos formam um par complexo conjugado.

Ω	λ_*	g_*	θ
0	0,19	0,70	$1,48 \pm 3,04i$
1/2	0,19	0,99	$-0,23 \pm 6,84i$
1	0,12	0,94	$-0,89 \pm 7,10i$

Tabela 4.1: Pontos fixos não-triviais e expoentes críticos para o truncamento de Einstein-Hilbert em $d = 4$ com constante cosmológica. Para o truncamento considerado, apenas na parametrização linear surge uma direção relevante no UV para ambos os acoplamentos gravitacionais.

Para a parametrização linear existe um ponto fixo não-gaussiano atrator no UV, representando uma direção relevante sobre a superfície crítica bidimensional. Entretanto, o resultado é fundamentalmente diferente para as parametrizações exponencial e linear da inversa. Embora encontramos também um ponto fixo não-gaussiano em ambas decomposições, as duas direções sobre a superfície crítica são repulsivas no UV. Lembrando que para nossa discussão, usamos o *cutoff* de Litim, o resultado encontrado para a decomposição exponencial concorda com o da Ref. [107], em que se argumenta que a existência de um ponto fixo repulsivo no UV para esta parametrização é fortemente dependente de *cutoff*. Acreditamos que o mesmo argumento valha para a decomposição linear da inversa, embora seja preciso considerar um truncamento mais refinado, aumentando os operadores-base do espaço das teorias, para se obter resultados mais conclusivos. Uma investigação nessa direção foi realizada em [106] usando a parametrização interpolante a dois parâmetros (4.6.3) para um truncamento polinomial no escalar de Ricci até ordem seis com constante cosmológica.

Interessante observar que, para a parametrização linear da inversa ($\Omega = 1$), o ponto fixo

só surge quando a constante cosmológica é incluída. Isso nos leva a pensar o que ocorreria se empregássemos esta parametrização em teorias classicamente equivalentes à teoria de Einstein, mas em que a constante cosmológica não sofre renormalização, como na gravitação unimodular. A dimensão do espaço das teorias e o número de acoplamentos relevantes diminuem em um [83] na gravitação unimodular [131–133], onde o determinante da métrica é uma densidade escalar fixa, removendo a constante cosmológica da ação. Ou seja, a constante cosmológica surge como uma constante de integração das equações de movimento, e não como um acoplamento. Em [82] uma direção relevante foi obtida para a ação de Einstein-Hilbert unimodular e duas direções relevantes em [83] para a gravitação $f(R)$ unimodular. Espera-se, portanto, que não haja um ponto fixo na gravitação de Einstein unimodular se a parametrização linear da inversa ($\Omega = 1$) for empregada. Este possível trabalho ficará para o futuro, já que a condição de que o determinante da métrica seja fixo é facilmente implementada com a parametrização exponencial. Entretanto, no próximo capítulo estudaremos um truncamento bem mais geral para a gravitação unimodular envolvendo uma lagrangiana que seja função arbitrária do escalar de Ricci e do quadrado do tensor de Ricci e analisaremos a estrutura de pontos fixos interagentes.

Parte IV

Segurança Assintótica Unimodular

Capítulo 5

Gravitação unimodular assintoticamente segura

5.1 Introdução

Diversas observações astronômicas nos mostram que o Universo está em expansão acelerada (ver [134] e referências lá contidas). Do ponto de vista fenomenológico, isto pode ser modelado pela inclusão de uma constante cosmológica não-nula na ação de Einstein-Hilbert. Em particular, a constante cosmológica é uma das candidatas para a energia escura, que é responsável pela expansão cósmica. O modelo Λ -CDM¹ da Cosmologia, apesar de descrever nosso Universo como constituído de 4% de matéria bariônica, 23% de matéria escura fria e 73% de energia escura [135–137], encara uma grande dificuldade: o problema da constante cosmológica. Em particular, o contexto desta seção está *relacionado* a um aspecto do problema: flutuações quânticas do vácuo aparentemente não gravitam.

Afshordi [138] investigou uma abordagem para tentar resolver o problema da constante cosmológica ao propor que a Relatividade Geral (RG)² deveria ser modificada de modo que o lado direito das equações de Einstein seja dado por $T_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}T$ através da introdução de um chamado “éter gravitacional”.

Focaremos, no entanto, em outra abordagem, que também faz uso da ideia de desacoplamento entre gravitação e flutuações quânticas do vácuo: a gravitação unimodular. Explorada pela primeira vez em 1919 pelo próprio pai da Relatividade Geral, Albert Einstein [139], a gravitação unimodular (UG)³ é uma reformulação da Relatividade Geral na qual o determinante da métrica é fixado *a priori* e não é sujeito à variação [140–143]. Isto tem o efeito de reduzir a simetria por difeomorfismos para invariância apenas sob difeomorfismos que preservam este elemento de volume não-dinâmico (difeomorfismos transversos, *TDiff*⁴). As equações de movimento são idênticas às da Relatividade Geral. A única diferença, que é um dos motivos de grande interesse recente nessa abordagem, é que a constante cosmológica surge como uma constante de integração, cujo valor é determinado pelas condições iniciais, ao invés de ser um acoplamento da lagrangiana. Consequentemente, a constante cosmológica não sofre renormalização, o que fornece uma nova maneira de se encarar o problema do ajuste fino da constante

¹Do inglês, Λ *cold dark matter* - matéria escura fria. Matéria escura não-bariônica não emite, absorve ou espalha luz, além de possuir movimento aleatório desprezível [135].

²Do inglês, *General Relativity*.

³Do inglês, *Unimodular Gravity*.

⁴Do inglês, *Transverse Diffeomorphisms*.

cosmológica [142, 144, 145].

Concretamente, no nível quântico, ambas teorias podem apresentar diferenças, ainda que a excitação que se propaga em ambas as teorias em uma expansão em torno de um *background* plano seja uma excitação de *spin-2* sem massa. Dito de outra maneira, a gravitação unimodular se baseia no grupo de simetria por difeomorfismos transversos que surge da análise da representação de *spin-2* do grupo de Poincaré [83, 130, 146, 147]. Além disso, o fato de o determinante da métrica não sofrer variação, produz duas implicações imediatas: (i) infinitos vértices de interação deixam de existir no tratamento linearizado e (ii) força o traço da flutuação a ser zero, isto é, $h = \bar{g}^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = 0$. Isto significa que o fator conforme é removido do espectro de flutuações da teoria, resolvendo o problema do fator conforme na versão euclidiana da ação de Einstein-Hilbert. Isto porque o escalar de Ricci passa a não poder mais assumir valores arbitrariamente positivos e, portanto, a ação euclidiana não é mais ilimitada inferiormente. Além disso, devido a $h = 0$, a integral sobre as flutuações quânticas na função de partição para as duas teorias diferem. Como sugerido em [82], isto pode implicar que apenas uma das teorias classicamente equivalentes exista como uma teoria quântica.

Uma teoria quântica baseada no cenário da segurança assintótica unimodular foi estudada para o truncamento de Einstein-Hilbert em [82] e para a gravitação $f(R)$ em [83]. Evidências para um ponto fixo interagente em ambos os casos foram encontradas. Nesta seção, estendemos esses estudos e consideraremos a segurança assintótica unimodular para ações construídas com termos além do escalar de Ricci. A fim de acessar os efeitos devidos a derivadas superiores sobre o acoplamento de Newton, investigaremos o fluxo do grupo de renormalização funcional baseado em ações que dependem do escalar de Ricci e do quadrado do tensor de Ricci na forma [60, 84]

$$f(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) = F(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) + RZ(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}), \quad (5.1.1)$$

onde F e Z são funções, a princípio, não especificadas. Discutiremos o porquê de escolhermos essa forma de decompor a função $f(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})$ mais adiante. Iremos nos referir à teoria quântica construída com a métrica dinâmica completa e com simetria completa por difeomorfismo como simplesmente “gravidade de Einstein quântica” (QEG)⁵, mesmo no caso em que a ação for da forma (5.1.1), e ao correspondente unimodular como “gravidade quântica unimodular” (UQG)⁶. Discutiremos então a equivalência clássica entre a gravidade de Einstein e a gravidade unimodular para uma ação construída com a métrica completa. Em seguida discutiremos o grupo de renormalização funcional para a gravitação unimodular, apresentaremos a equação de fluxo para o truncamento $f(R, X)$, onde $X = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, e analisaremos os pontos fixos e suas propriedades.

5.2 Gravitação unimodular clássica

A forma mais direta de formular a gravitação unimodular é pela restrição sobre o espaço de configuração de modo que o determinante da métrica seja não-dinâmico. Dito de outra maneira, impomos que a métrica satisfaça

$$\sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} = \omega(x), \quad (5.2.1)$$

onde a função $\omega(x)$ é uma densidade escalar fixa. No contexto quântico, tomamos o ponto de vista de que isto não é equivalente a impor $\det g_{\mu\nu} = \omega^2$ como uma condição de calibre

⁵Do inglês, *Quantum Einstein Gravity*.

⁶Do inglês, *Unimodular Quantum Gravity*.

na integral de caminho sobre todas as configurações da métrica. Em princípio, poder-se-ia impor a condição de unimodularidade na ação através de um multiplicador de Lagrange, e a constante cosmológica permaneceria um acoplamento que poderia variar com a escala de energia. No entanto, isto não representaria a gravidade quântica unimodular. De fato, na gravidade quântica de Einstein, a condição $\sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} = \omega$ pode ser imposta como uma condição de calibre devido ao fato de que, sob uma transformação de coordenadas, vale a relação $\sqrt{|g(x')|} = \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) \sqrt{|g(x)|}$, de modo que é sempre possível ajustar $\sqrt{|g(x)|}$ para ser qualquer função que se queira. Portanto, no caso da gravitação quântica de Einstein, a condição de unimodularidade pode ser vista como uma condição de calibre, em vez de um vínculo sobre a teoria. A gravidade quântica unimodular se baseia, a nível clássico, no fato de a métrica satisfazer de partida a condição $\sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} = \omega$.

Convenientemente, a condição de o determinante da métrica ser fixo é facilmente implementada com a parametrização exponencial,

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\lambda} [\exp(h \cdot)]^\lambda{}_\nu. \quad (5.2.2)$$

Esta parametrização nos permite expressar $\det g_{\mu\nu} = (\det \bar{g}_{\mu\nu})e^h$ e a condição de unimodularidade é naturalmente imposta sobre a métrica de fundo (ou seja, $\det \bar{g}_{\mu\nu} = \omega^2$) se anularmos o traço do campo de flutuação, *i.e.*, $h = \bar{g}^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = 0$, removendo-o, portanto, da integral de caminho. A condição de unimodularidade (5.2.1) essencialmente quebra o grupo de difeomorfismo, *Diff*, no subgrupo de difeomorfismos transversos⁷, *TDiff*, que preservam o volume, ou seja, aqueles que deixam a forma de volume $\omega(x)$ fixada. A álgebra de *TDiff* consiste de campos vetoriais ϵ^μ que satisfazem $\nabla_\mu \epsilon^\mu = 0$. De fato, sob $x'^\mu = x^\mu - \epsilon^\mu$,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &\mapsto g_{\mu\nu}(x) + \delta_\epsilon g_{\mu\nu}(x) \\ &= g_{\mu\nu}(x) + \mathcal{L}_\epsilon g_{\mu\nu} \\ &= g_{\mu\nu}(x) + \nabla_\mu \epsilon_\nu + \nabla_\nu \epsilon_\mu, \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

onde \mathcal{L}_ϵ é a derivada de Lie ao longo do vetor ϵ^μ . A condição de unimodularidade implica que $\delta\sqrt{|g|} = \frac{1}{2}\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\mathcal{L}_\epsilon g_{\mu\nu} = 0$, onde $\mathcal{L}_\epsilon g_{\mu\nu} = 2\nabla_{(\mu}\epsilon_{\nu)}$. Dessa forma, a álgebra de Lie do grupo *TDiff* é a subálgebra de campos vetoriais transversais.

5.2.1 Equivalência entre a gravitação de Einstein e a gravitação unimodular

Antes de tratarmos da formulação quântica, analisemos a relação entre a gravitação de Einstein e a gravitação unimodular para uma langrangiana que seja função do tensor métrico [148]. Seja $S_{GR} = S_{GR}^g + S_{GR}^m$ uma ação arbitrária de gravidade e de matéria invariante por difeomorfismo completo (*Diff*), onde

$$S_{GR}^g[g] = \int d^d x \sqrt{|g|} \mathcal{L}_g[g] \quad \text{e} \quad S_{GR}^m[\psi, g] = \int d^d x \sqrt{|g|} \mathcal{L}_m[\psi, g] \quad (5.2.4)$$

são as ações gravitacional e de matéria respectivamente. Usando que $\delta\sqrt{|g|} = \frac{1}{2}\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$, temos

$$\delta S_{GR} = (\delta S_{GR}^g)_1 + (\delta S_{GR}^g)_2 + \delta S_{GR}^m, \quad (5.2.5)$$

⁷Podemos considerar que a relação entre *TDiff* e *Diff* é similar à relação entre $SO(n)$ e $O(n)$ ou entre $SL(n)$ e $GL(n)$.

onde

$$\begin{aligned}
(\delta S_{GR}^g)_1 &= \frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{|g|} \mathcal{L}_g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\
(\delta S_{GR}^g)_2 &= \int d^d x \sqrt{|g|} E^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \\
\delta S_{GR}^m &= \frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{|g|} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

e usamos as definições

$$E^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{(\delta S_{GR}^g)_2}{\delta g_{\mu\nu}} \quad \text{e} \quad T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_{GR}^m}{\delta g_{\mu\nu}} \tag{5.2.7}$$

para o tensor $E^{\mu\nu}$, que fornece as equações de movimento descontando a variação de $\sqrt{|g|}$, e para o tensor de energia-momento simétrico da Relatividade Geral. As equações de movimento correspondentes são dadas por

$$-E^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L}_g = \frac{1}{2} T^{\mu\nu}. \tag{5.2.8}$$

Ao tomar ∇_μ em ambos os lados de (5.2.8) e usar as identidades de Bianchi

$$\nabla_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = 0, \tag{5.2.9}$$

deduz-se a lei de conservação para o tensor de energia-momento.

Para obter as equações de movimento para a gravitação unimodular, comecemos por definir a ação $S_{UG} = S_{UG}^g + S_{UG}^m$ ao substituir $\sqrt{|g|}$ por ω em S_{GR} , ou seja,

$$S_{UG}^g[g] = \int d^d x \omega \mathcal{L}_g[g] \quad \text{e} \quad S_{UG}^m[\psi, g] = \int d^d x \omega \mathcal{L}_m[\psi, g]. \tag{5.2.10}$$

É crucial lembrar que agora devemos impor que a variação da métrica possui traço nulo, $\delta\sqrt{|g|} = \frac{1}{2}\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = 0$. Isto fornece as equações de movimento de traço nulo:

$$-\tilde{E}^{\mu\nu} + \frac{1}{d} g^{\mu\nu} \tilde{E} = \frac{1}{2} \left(\tilde{T}^{\mu\nu} - \frac{1}{d} g^{\mu\nu} \tilde{T} \right), \tag{5.2.11}$$

onde

$$\tilde{E}^{\mu\nu} = \frac{1}{\omega} \frac{\delta S_{UG}^g}{\delta g_{\mu\nu}} \quad \text{e} \quad \tilde{T}^{\mu\nu} = \frac{2}{\omega} \frac{\delta S_{UG}^m}{\delta g_{\mu\nu}}, \tag{5.2.12}$$

tal que $\tilde{E}^{\mu\nu} = E^{\mu\nu}$ e $\tilde{T}^{\mu\nu}$ faz o papel do tensor de energia-momento simétrico, mas não conservado. De fato, a variação da ação S_{UG}^m sob $x'^\mu = x^\mu - \epsilon^\mu$ é dada por

$$\begin{aligned}
\delta_\epsilon S_{UG}^m &= \int d^d x \omega \frac{\delta S_{UG}^m}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} \\
&= \int d^d x \omega^2 \tilde{T}^{\mu\nu} \nabla_\mu \epsilon_\nu \\
&= - \int d^d x \omega^2 (\nabla_\mu \tilde{T}^{\mu\nu}) \epsilon_\nu,
\end{aligned} \tag{5.2.13}$$

onde na segunda linha usamos a definição do tensor de energia-momento $\tilde{T}^{\mu\nu}$ e que $\delta_\epsilon g_{\mu\nu} = 2\nabla_{(\mu}\epsilon_{\nu)}$. Na terceira linha realizamos uma integração por partes. Note que para a ação S_{UG}^m ser invariante por *TDiff*, é preciso que a condição $\nabla_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = \nabla^\nu \Sigma$ seja satisfeita para algum campo escalar Σ devido ao vínculo diferencial $\nabla_\nu \epsilon^\nu = 0$. Isto sugere definirmos um tensor de energia-momento modificado $T^{\mu\nu} = \tilde{T}^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\Sigma$ que seja conservado. Para descobrirmos a forma de Σ , olhemos para o tensor de energia-momento para o campo escalar:

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi, \quad (5.2.14)$$

calculado da lagrangiana

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi). \quad (5.2.15)$$

Usando a equação de movimento $\nabla^2 \phi + V'(\phi) = 0$ e as identidades de Bianchi, encontramos que

$$\nabla_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = -\nabla^\nu \mathcal{L}_m \quad (5.2.16)$$

e podemos definir o tensor de energia-momento simétrico

$$T_{\mu\nu} = \tilde{T}_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m, \quad (5.2.17)$$

satisfazendo $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$. Observe ainda que, como $\tilde{T}_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$ possuem a mesma componente de traço nulo, ou seja, $\tilde{T}^{\mu\nu} - \frac{1}{d} g^{\mu\nu} \tilde{T} = T^{\mu\nu} - \frac{1}{d} g^{\mu\nu} T$, podemos trocar $\tilde{T}_{\mu\nu}$ por $T_{\mu\nu}$ no lado direito de (5.2.11) e obter

$$- \tilde{E}^{\mu\nu} + \frac{1}{d} g^{\mu\nu} \tilde{E} = \frac{1}{2} \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{d} g^{\mu\nu} T \right). \quad (5.2.18)$$

Atuando com ∇_μ em ambos os lados da Eq. (5.2.8), obtemos a identidade

$$\nabla_\mu \tilde{E}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \nabla^\nu \mathcal{L}_g = 0. \quad (5.2.19)$$

Finalmente, usando (5.2.19) e (5.2.18), resulta

$$\nabla^\nu \left(\frac{1}{d} \tilde{E} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_g + \frac{1}{2d} T \right) = 0, \quad (5.2.20)$$

o que nos permite identificar

$$\frac{1}{d} \tilde{E} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_g + \frac{1}{2d} T = \frac{\Lambda}{16\pi G_N}, \quad (5.2.21)$$

com G_N sendo a usual constante de Newton e a constante arbitrária Λ como sendo a constante cosmológica. Inserindo esta identidade na Eq. (5.2.18), obtemos

$$- E^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L}_g + \frac{\Lambda}{16\pi G_N} = \frac{1}{2} T^{\mu\nu}. \quad (5.2.22)$$

que é a mesma Eq. (5.2.8) com uma constante arbitrária adicional⁸ determinada ao se resolver as equações de movimento. Isto nos mostra que, com exceção da constante arbitrária Λ que surge das equações de movimento, não se pode distinguir a gravidade unimodular clássica da gravidade de Einstein.

⁸A presença de um termo do tipo $-\tilde{\Lambda}/8\pi G_N$ na lagrangiana de partida \mathcal{L}_g não contribui para as equações de movimento por se tratar de uma constante e, mais uma vez, um termo proporcional a Λ , independente de $\tilde{\Lambda}$, surge [148].

5.3 Grupo de renormalização funcional para a gravitação unimodular

Esquemáticamente a dinâmica da gravidade quântica unimodular é governada pela integral de caminho sobre configurações da métrica que satisfaçam a condição de unimodularidade. Neste sentido, a função de partição euclidiana da gravidade quântica unimodular é da forma

$$\mathcal{Z}_{\text{UQG}} = \int (\mathcal{D}g)_{\text{UQG}} e^{-S_{\text{UQG}}[g]}. \quad (5.3.1)$$

A aplicação direta das ferramentas do grupo de renormalização funcional requer a seguinte modificação dependente de escala da função de partição euclidiana:

$$\mathcal{Z}_{\text{UQG},k} = \int (\mathcal{D}\mu)_{\text{UQG}} e^{-S_{\text{UQG}}[g] - S_{gf}[h;\bar{g}] - S_{gh}[h,\bar{C},C;\bar{g}] - \Delta S_k[h,\bar{C},C;\bar{g}] - S_{\text{fontes}}}, \quad (5.3.2)$$

onde a medida de integração $(\mathcal{D}\mu)_{\text{UQG}} = \mathcal{D}h_{\mu\nu} \mathcal{D}\bar{C}^\mu \mathcal{D}C_\mu$ é restrita à condição de que $h_{\mu\nu}$ tenha traço nulo.

5.3.1 Truncamento $f(R, R_{\mu\nu}^2)$

Setor gravitacional

Neste trabalho, consideramos a seguinte ação gravitacional no espaço-tempo euclidiano quadridimensional:

$$\Gamma_k^{\text{grav}}[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^4x \omega f_k(R, R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}), \quad (5.3.3)$$

onde G_N é a constante de Newton e f é uma função arbitrária do escalar de Ricci R e do quadrado do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$. Para o cálculo das equações de fluxo é necessário expandir a ação até segunda ordem nas flutuações. Começemos analisando, por simplicidade, a expansão levando em conta a decomposição linear e, após uma substituição direta, obteremos a expansão de interesse considerando a decomposição exponencial [84]. Admitamos que a função f possua uma expansão em série de Taylor em R e $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ na forma

$$\begin{aligned} f(R, R_{\mu\nu}^2) &= \bar{f} + \bar{f}_R(R^{(1)} + R^{(2)}) + \frac{1}{2}\bar{f}_{RR}(R^{(1)})^2 \\ &+ \bar{f}_X(X^{(1)} + X^{(2)}) + \frac{1}{2}\bar{f}_{XX}(X^{(1)})^2 + \bar{f}_{RX}R^{(1)}X^{(1)} + \dots, \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

onde omitimos a dependência em k por simplicidade de notação. Naturalmente os subscritos na função f denotam derivada com relação aos seus argumentos, de modo que

$$f_R = \frac{\partial f}{\partial R}, \quad f_X = \frac{\partial f}{\partial X}, \quad f_{RR} = \frac{\partial^2 f}{\partial R^2}, \quad f_{RX} = \frac{\partial^2 f}{\partial R \partial X}, \quad f_{XX} = \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \quad (5.3.5)$$

e a barra sobre qualquer quantidade indica que é computada com a métrica de fundo [por exemplo, $\bar{f}_R = f_R(\bar{R}, \bar{X})$]. Seguindo a notação do Apêndice D, o superescrito entre parênteses denota a potência de $h_{\mu\nu}$ contida em cada termo da expansão. Os invariantes então podem ser escritos, até segunda ordem em $h_{\mu\nu}$, como

$$\begin{aligned} R &= \bar{R} + R^{(1)} + R^{(2)}, \\ R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} &\equiv X = \bar{X} + X^{(1)} + X^{(2)}. \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

A forma explícita para $R^{(1)}$ e $R^{(2)}$ para a decomposição linear pode ser encontrada no Apêndice D, Eqs. (D.0.9) e (D.0.10) fazendo $\Omega = 0$ e $\chi = 1$. As expressões para a expansão do tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)}$, que precisaremos logo abaixo, também podem ser encontradas nas Eqs. (D.0.7) e (D.0.8) seguindo a mesma prescrição para Ω e χ . Exibimos abaixo as expressões para $X^{(1)}$ e $X^{(2)}$ para a decomposição linear:

$$\begin{aligned} X^{(1)}(h_{\mu\nu}) &= 2(\bar{R}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(1)} - \bar{R}_{\mu\nu} \bar{R}^\mu{}_\rho h^{\nu\rho}), \\ X^{(2)}(h_{\mu\nu}) &= (R_{\mu\nu}^{(1)})^2 + 2\bar{R}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(2)} - 4\bar{R}^{\mu\nu} h_\nu{}^\rho R_{\mu\rho}^{(1)} + 2\bar{R}_{\mu\lambda} \bar{R}_\nu{}^\lambda h^\mu{}_\rho h^{\rho\nu} + \bar{R}_{\mu\nu} \bar{R}_{\lambda\rho} h^{\mu\lambda} h^{\nu\rho}. \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

Ao longo deste trabalho, restringiremo-nos a um espaço maximalmente simétrico:

$$\bar{R}_{\mu\nu} = \frac{\bar{R}}{4} \bar{g}_{\mu\nu}, \quad \bar{R}_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{\bar{R}}{12} (\bar{g}_{\mu\alpha} \bar{g}_{\nu\beta} - \bar{g}_{\mu\beta} \bar{g}_{\nu\alpha}). \quad (5.3.8)$$

O escalar de curvatura calculado com a métrica de fundo, \bar{R} , é constante e positivo, correspondendo ao espaço de-Sitter euclidiano. Com vistas à utilização da decomposição exponencial, consideraremos uma parametrização mais geral das flutuações na forma

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \quad (5.3.9)$$

onde a flutuação pode ser expandida como

$$\delta g_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}^{(1)} + \delta g_{\mu\nu}^{(2)} + \dots, \quad (5.3.10)$$

onde $\delta g_{\mu\nu}^{(n)}$ contém n potências de $h_{\mu\nu}$. Em seguida, inserimos esta parametrização na expansão linear da métrica de segunda ordem e obtemos

$$\begin{aligned} f(R, R^2) &= \bar{f}_R \left(R^{(1)} \Big|_{h_{\mu\nu} \rightarrow \delta g_{\mu\nu}^{(2)}} + R^{(2)} \Big|_{h_{\mu\nu} \rightarrow \delta g_{\mu\nu}^{(1)}} \right) + \frac{1}{2} \bar{f}_{RR} \left(R^{(1)} \Big|_{h_{\mu\nu} \rightarrow \delta g_{\mu\nu}^{(1)}} \right)^2 \\ &+ \bar{f}_X \left(X^{(1)} \Big|_{h_{\mu\nu} \rightarrow \delta g_{\mu\nu}^{(2)}} + X^{(2)} \Big|_{h_{\mu\nu} \rightarrow \delta g_{\mu\nu}^{(1)}} \right) + \frac{1}{2} \bar{f}_{XX} \left(X^{(1)} \Big|_{h_{\mu\nu} \rightarrow \delta g_{\mu\nu}^{(1)}} \right)^2 \\ &+ \bar{f}_{RX} \left(R^{(1)} X^{(1)} \Big|_{h_{\mu\nu} \rightarrow \delta g_{\mu\nu}^{(1)}} \right) + \frac{1}{2} \bar{f} \delta g^{(2)} + \frac{1}{8} \bar{f} \left((\delta g^{(1)})^2 - 2(\delta g_{\mu\nu}^{(1)})^2 \right) \\ &+ \frac{\delta g^{(1)}}{2} \left(\bar{f}_R R^{(1)} + \bar{f}_X X^{(1)} \right) \Big|_{h_{\mu\nu} \rightarrow \delta g_{\mu\nu}^{(1)}}. \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

onde $\delta g^{(1)} = \bar{g}^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}^{(1)}$ e $\delta g^{(2)} = \bar{g}^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}^{(2)}$. Portanto, a expansão de Γ_k^{grav} até segunda ordem em $h_{\mu\nu}$ é dada por

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,2}^{\text{grav}}[h_{\mu\nu}; \bar{g}_{\mu\nu}] &= \frac{1}{16\pi G_N} \int_x \omega \left[\frac{1}{8} \bar{f} \left(4\delta g^{(2)} + (\delta g^{(1)})^2 - 2(\delta g_{\mu\nu}^{(1)})^2 \right) + \bar{f}_R \left(R^{(1)}(\delta g_{\mu\nu}^{(2)}) + R^{(2)}(\delta g_{\mu\nu}^{(1)}) \right) \right. \\ &+ \frac{\delta g^{(1)}}{2} R^{(1)}(\delta g_{\mu\nu}^{(1)}) \left. \right) + \frac{1}{2} \bar{f}_{RR} \left(R^{(1)}(\delta g_{\mu\nu}^{(1)}) \right)^2 + \frac{1}{2} \bar{f}_{XX} \left(X^{(1)}(\delta g_{\mu\nu}^{(1)}) \right)^2 \\ &+ \bar{f}_X \left(X^{(1)}(\delta g_{\mu\nu}^{(2)}) + X^{(2)}(\delta g_{\mu\nu}^{(1)}) + \frac{\delta g^{(1)}}{2} X^{(1)}(\delta g_{\mu\nu}^{(1)}) \right) + \bar{f}_{RX} R^{(1)}(\delta g_{\mu\nu}^{(1)}) X^{(1)}(\delta g_{\mu\nu}^{(1)}) \left. \right]. \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

Como a condição de unimodularidade é facilmente implementada com a decomposição exponencial, os primeiros termos da expansão $\delta g_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}^{(1)} + \delta g_{\mu\nu}^{(2)} + \dots$ serão parametrizados na forma $\delta g_{\mu\nu}^{(1)} = h_{\mu\nu}$ e $\delta g_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{2} h_{\mu\rho} h^\rho{}_\nu$.

Decomposição de York

Na construção da equação de fluxo o inverso do propagador regularizado, $\Gamma_k^{(2)} + \mathbf{R}_k$, precisa estar na forma diagonal para que dificuldades técnicas sejam evitadas em aplicações práticas como em truncamentos que envolvem derivadas superiores ou acoplamentos com matéria, por exemplo. Isto é obtido quando efetuamos a decomposição de York [149] para as flutuações da métrica:

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{\text{TT}} + \bar{\nabla}_\mu \xi_\nu + \bar{\nabla}_\nu \xi_\mu + \left(\bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu - \frac{1}{4} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{\nabla}^2 \right) \sigma, \quad (5.3.13)$$

onde $h_{\mu\nu}^{\text{TT}}$ é o grau de liberdade tensorial de *spin*-2 transverso e de traço nulo, *i.e.*, $\bar{\nabla}^\mu h_{\mu\nu}^{\text{TT}} = 0$ e $\bar{g}^{\mu\nu} h_{\mu\nu}^{\text{TT}} = 0$. Já ξ_μ é o campo vetorial transverso de *spin*-1, *i.e.*, $\bar{\nabla}^\mu \xi_\mu = 0$ e σ é campo escalar de *spin*-0. Note que o modo escalar h não comparece devido à condição de unimodularidade. Além disso, configurações de campo (ξ, σ) que satisfazem a equação de Killing e a equação de Killing conforme, respectivamente,

$$\bar{\nabla}_\mu \xi_\nu + \bar{\nabla}_\nu \xi_\mu = 0 \quad \text{e} \quad \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu \sigma + \bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\mu \sigma - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{\nabla}^2 \sigma = 0, \quad (5.3.14)$$

não contribuem para $h_{\mu\nu}$ e devem ser removidas do espectro da integral de caminho [33, 101, 119]. Este procedimento está descrito esquematicamente no Apêndice C e será adotado neste trabalho. Além disso, a decomposição de York produz uma mudança de variáveis com a introdução de um jacobiano, cujo efeito será discutido em breve.

Setores de *gauge-fixing* e de *ghost*

À ação (5.3.12) adicionamos a ação de *gauge-fixing* dada por [82]

$$S_{\text{gf}} = \frac{1}{2\alpha} \int d^4x \omega \bar{g}^{\mu\nu} F_\mu^{\text{T}}[h] F_\nu^{\text{T}}[h], \quad (5.3.15)$$

com a condição de fixação de calibre $F_\mu^{\text{T}}[h] = 0$ e α sendo o parâmetro de calibre adimensional. Focaremos neste trabalho no calibre de Landau que corresponde a fazer $\alpha = 0$ no cálculo dos traços funcionais da equação de fluxo. Além disso, definimos a função de fixação de calibre transversa:

$$F_\mu^{\text{T}}[h] = \sqrt{2\kappa} (\Pi_{\text{T}})_{\mu\nu} \bar{g}^{\nu\alpha} \bar{\nabla}^\beta h_{\alpha\beta}, \quad (5.3.16)$$

com $\kappa = (32\pi G_N)^{-1/2}$ e $(\Pi_{\text{T}})_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} - \bar{\nabla}_\mu (\bar{\nabla}^2)^{-1} \bar{\nabla}_\nu$ sendo o projetor transverso. É imediato ver que $\bar{\nabla}^\mu F_\mu^{\text{T}}[h] = 0$. Esta escolha de fixação de calibre é necessária para respeitar a transversalidade do difeomorfismo. Em outras palavras, não podemos simplesmente impor a condição de calibre linear padrão, $F_\mu[h] = \sqrt{2\kappa} (\bar{\nabla}^\beta h_{\mu\beta} - \frac{1+\beta}{4} \bar{\nabla}_\mu h)$, já que esta condição fixa quatro condições de calibre independentes, ao passo que precisamos fixar apenas três condições de calibre independentes devido ao vínculo diferencial $\nabla_\mu \epsilon^\mu = 0$. Passando para as variáveis de York, a função de fixação de calibre resulta

$$F_\mu^{\text{T}}[h] = -\sqrt{2\kappa} \left(\bar{\square} - \frac{\bar{R}}{4} \right) \xi_\mu, \quad (5.3.17)$$

onde $\bar{\square} = -\bar{\nabla}^2$ é o laplaciano de Bochner (análogo euclidiano do d'alembertiano). A ação de *gauge-fixing* se torna, portanto,

$$S_{\text{gf}} = \frac{Z_N}{2\alpha} \int d^4x \omega \xi_\mu \left(\bar{\square} - \frac{\bar{R}}{4} \right)^2 \xi^\mu, \quad (5.3.18)$$

onde $Z_N = (16\pi G_N)^{-1}$. A ação de fantasmas de Faddeev-Popov correspondente é

$$S_{\text{gh}} = \sqrt{2} \int d^4x \omega \bar{C}_\mu^{\text{T}} \left(\bar{\square} - \frac{\bar{R}}{4} \right) C^{\text{T}\mu}. \quad (5.3.19)$$

onde os campos vetoriais de fantasma e de antifantasma respeitam transversalidade imposta pelo grupo de simetria $TDiff$, *i.e.*, $\bar{\nabla}_\mu C^{\mu\text{T}} = \bar{\nabla}_\mu \bar{C}^{\text{T}\mu} = 0$. Além disso, já restringimos o operador de Faddeev-Popov à métrica de *background*, *i.e.*, $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}$. Para uma discussão sobre a quantização BRST da gravitação unimodular, ver [150, 151].

Jacobiano e campos auxiliares

A mudança de variáveis para o setor gravitacional, $h_{\mu\nu} \rightarrow \{h_{\mu\nu}^{\text{TT}}, \xi_\mu, \sigma\}$, produz um jacobiano na medida de integração funcional [33, 101]. Para ver isto, defina o produto interno

$$\begin{aligned} \langle h, h \rangle &\equiv \int d^4x \omega h_{\mu\nu} \bar{g}^{\mu\rho} \bar{g}^{\nu\sigma} h_{\rho\sigma} \\ &= \int_x \omega \left[h_{\mu\nu}^{\text{TT}} h^{\text{TT}\mu\nu} + 2\xi_\mu \left(\bar{\square} - \frac{\bar{R}}{4} \right) \xi^\mu + \frac{3}{4} \sigma \bar{\square} \left(\bar{\square} - \frac{\bar{R}}{3} \right) \sigma \right], \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

Podemos realizar uma integral gaussiana sobre $h_{\mu\nu}$ e usar o produto interno definido acima para obtermos

$$\begin{aligned} 1 &= \int \mathcal{D}h_{\mu\nu} e^{-\frac{1}{2} \langle h, h \rangle} \\ &= J \int \mathcal{D}\Sigma \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_x \omega \left[h_{\mu\nu}^{\text{TT}} h^{\text{TT}\mu\nu} + 2\xi_\mu \left(\bar{\square} - \frac{\bar{R}}{4} \right) \xi^\mu + \frac{3}{4} \sigma \bar{\square} \left(\bar{\square} - \frac{\bar{R}}{3} \right) \sigma \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.3.21)$$

onde $\mathcal{D}\Sigma = \mathcal{D}h_{\mu\nu}^{\text{TT}} \mathcal{D}\xi_\mu \mathcal{D}\sigma$. Dessa maneira o jacobiano da transformação de variáveis toma a forma⁹

$$J = \left[\det'_{(1\text{T})} \left(\bar{\square} - \frac{\bar{R}}{4} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \det''_{(0)} \left[\bar{\square} \left(\bar{\square} - \frac{\bar{R}}{3} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (5.3.22)$$

onde as “linhas” ($'\dots'$) indicam o respectivo número de modos espúrios (primeiro e segundo autovalores) a serem removidos do determinante (ver Apêndice C.5). Aqui, (1T) denota o setor vetorial transverso. O jacobiano pode ser escrito em termos de integrais gaussianas de campos auxiliares na forma

$$\begin{aligned} J &= \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\theta \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\zeta \mathcal{D}\bar{\zeta} \exp \left\{ -\int_x \omega \left[\frac{1}{2} \chi_\mu \left(\bar{\square} - \frac{\bar{R}}{4} \right)' \chi^\mu + \frac{1}{2} \theta \left[\bar{\square} \left(\bar{\square} - \frac{\bar{R}}{3} \right) \right]'' \theta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \bar{\zeta}_\mu \left(\bar{\square} - \frac{\bar{R}}{4} \right)' \zeta^\mu - \bar{\psi} \left[\bar{\square} \left(\bar{\square} - \frac{\bar{R}}{3} \right) \right]'' \psi \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.3.23)$$

⁹No procedimento usual de quantização de Faddeev-Popov o volume do grupo de calibre é fatorado e incluído no fator de normalização. Esse procedimento aplicado à quantização da gravidade unimodular leva a um determinante escalar a mais dentro do volume do grupo de calibre na forma $V_{\text{TDiff}} = \int \mathcal{D}\epsilon^{\text{T}} [\det \bar{\square}]^{-1/2}$, onde ϵ^{T} é a parte transversal do gerador infinitesimal. A inclusão deste modo escalar altera o valor numérico dos pontos fixos, mas não modifica sua estrutura, de maneira que não levamos em conta sua contribuição na versão preliminar deste trabalho.

onde χ_μ é um campo vetorial bosônico real, θ é um campo escalar bosônico real, $(\bar{\zeta}_\mu, \zeta^\nu)$ são fantasmas vetoriais anticomutantes e $(\bar{\psi}, \psi)$ são fantasmas escalares anticomutantes. A ação auxiliar correspondente é

$$S_{\text{aux}} = \int_x \omega \left[\frac{1}{2} \chi_\mu \left(\bar{\square} - \frac{\bar{R}}{4} \right)' \chi^\mu + \frac{1}{2} \theta \left[\bar{\square} \left(\bar{\square} - \frac{\bar{R}}{3} \right) \right]'' \theta - \bar{\zeta}_\mu \left(\bar{\square} - \frac{\bar{R}}{4} \right)' \zeta^\mu - \bar{\psi} \left[\bar{\square} \left(\bar{\square} - \frac{\bar{R}}{3} \right) \right]'' \psi \right] \quad (5.3.24)$$

Embora o jacobiano possa ser igualado à unidade realizando uma redefinição dos campos ξ_μ e σ , neste trabalho levaremos em conta estas contribuições na equação de fluxo sem redefinição de campos, como feito em [106, 128]. Isto pode ser obtido com a prescrição do *cutoff* do tipo Ia, fazendo $\bar{\square} \mapsto P_k(\bar{\square}) = \bar{\square} + R_k(\bar{\square})$. As contribuições do setor auxiliar para a equação de fluxo ficam, portanto,

$$\mathcal{T}_{\text{aux}} = -\frac{1}{2} \text{Tr}'_{(1\text{T})} \left[\frac{\partial_t P_k}{P_k - \bar{R}/4} \right] - \frac{1}{2} \text{Tr}''_{(0)} \left[\frac{\partial_t P_k (2P_k - \bar{R}/3)}{P_k (P_k - \bar{R}/3)} \right]. \quad (5.3.25)$$

Estamos prontos para discutir a equação do grupo de renormalização funcional para a gravidade quântica unimodular.

5.3.2 Construindo a equação de fluxo para $f(\mathbf{R}, \mathbf{R}_{\mu\nu}^2)$ unimodular

Escolha de esquemas de regularização

É interessante investigar como o esquema de regularização afeta a estrutura de pontos fixos [85, 124, 152]. Neste sentido, estudaremos o papel do operador $\bar{\Delta}$ sobre o regulador $\mathbf{R}_k(\bar{\Delta})$, interpolando entre o laplaciano de Bochner, $\bar{\Delta} = \bar{\square}$, e os laplacianos de Lichnerowicz, $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}_{Ls}$, que definiremos em breve. Defina, portanto, os operadores

$$\bar{\Delta}_{1\text{T}, 2\text{TT}} \equiv \bar{\square} + \gamma_{1\text{T}, 2\text{TT}} \bar{R}, \quad (5.3.26)$$

onde adicionamos ao laplaciano de Bochner, $\bar{\square}$, termos proporcionais ao escalar de curvatura, sendo a constante de proporcionalidade o parâmetro de endomorfismo $\gamma_{1\text{T}, 2\text{TT}}$. Os subscritos indicam se o operador pertence ao setor vetorial transverso (1T) ou ao setor tensorial transverso e de traço nulo (2TT). Os laplacianos de Lichnerowicz em um espaço maximalmente simétrico e em $d = 4$ são dados por:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_{L0} \phi &= \bar{\square} \phi, \\ \bar{\Delta}_{L1} \xi_\mu &= \left(\bar{\square} + \frac{\bar{R}}{4} \right) \xi_\mu, \\ \bar{\Delta}_{L2} h_{\mu\nu} &= \left(\bar{\square} + \frac{2}{3} \bar{R} \right) h_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.3.27)$$

Formas mais gerais dos laplacianos de Lichnerowicz estão representadas no Apêndice C.4. Em termos do operador (5.3.26), todos os termos da ação efetiva podem ser escritos em função do laplaciano de Bochner quando $\{\gamma_{1\text{T}} = 1/4, \gamma_{2\text{TT}} = 2/3\}$ ou em função dos laplacianos de

Lichnerowicz quando $\{\gamma_{1T} = 0, \gamma_{2TT} = 0\}$. À guisa de exemplo, a ação de *gauge-fixing* pode ser escrita na forma

$$S_{\text{gf}} = \frac{Z_N}{2\alpha} \int d^4x \omega \xi_\mu \left(\bar{\square} + \gamma_{1T} \bar{R} - \frac{\bar{R}}{2} \right)^2 \xi^\mu \quad (5.3.28)$$

$$\xrightarrow{\gamma_{1T}=1/4} \frac{Z_N}{2\alpha} \int d^4x \omega \xi_\mu \left(\bar{\square} - \frac{\bar{R}}{4} \right)^2 \xi^\mu, \quad (5.3.29)$$

$$\xrightarrow{\gamma_{1T}=0} \frac{Z_N}{2\alpha} \int d^4x \omega \xi_\mu \left(\bar{\Delta}_{L1} - \frac{\bar{R}}{2} \right)^2 \xi^\mu. \quad (5.3.30)$$

Raciocínio similar para os demais setores da ação efetiva média, como veremos na próxima subsubseção.

A ação quadrática da gravitação $f(R, R_{\mu\nu}^2)$ unimodular

O truncamento para a gravitação $f(R, R_{\mu\nu}^2)$ unimodular, sem levar em conta S_{aux} , lê-se

$$\Gamma_k^{\text{UQG}} = Z_N \int d^4x \omega f_k(R, R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}) + S_{\text{gf}} + S_{\text{gh}}. \quad (5.3.31)$$

A expansão da Eq. (5.3.31) até segunda ordem nos campos de flutuação, após a implementação da decomposição de York, possui o seguinte hessiano decomposto:

$$\Gamma_{k,2}^{\text{UQG}} = \int_x \omega \left[\frac{1}{2} h_{\mu\nu}^{\text{TT}} \Gamma_{\text{TT}}^{(2)} \mathbb{I}^{\mu\nu, \alpha\beta} h_{\alpha\beta}^{\text{TT}} + \frac{1}{2} \xi_\mu \bar{g}^{\mu\nu} \Gamma_{\xi\xi}^{(2)} \xi_\nu + \frac{1}{2} \sigma \Gamma_{\sigma\sigma}^{(2)} \sigma + \bar{C}_\mu^{\text{T}} \bar{g}^{\mu\nu} \Gamma_{C^{\text{T}} C^{\text{T}}}^{(2)} C_\nu^{\text{T}} \right], \quad (5.3.32)$$

com $\mathbb{I}^{\mu\nu, \alpha\beta} = (1/2)(\bar{g}^{\mu\alpha} \bar{g}^{\nu\beta} + \bar{g}^{\mu\beta} \bar{g}^{\nu\alpha})$. Seguindo os resultados de [84], podemos escrever as seguintes expressões para os hessianos:

$$\Gamma_{\text{TT}}^{(2)} = Z_N \left[\bar{f}_X \left(\bar{\square} + \gamma_{2\text{TT}} \bar{R} - \bar{R} \right) - \bar{f}_R \right] \left(\bar{\square} + \gamma_{2\text{TT}} \bar{R} - \frac{\bar{R}}{2} \right), \quad (5.3.33)$$

$$\Gamma_{\xi\xi}^{(2)} = \frac{2Z_N}{\alpha} \left(\bar{\square} + \gamma_{1T} \bar{R} - \frac{\bar{R}}{2} \right)^2, \quad (5.3.34)$$

$$\Gamma_{\sigma\sigma}^{(2)} = \frac{9Z_N}{8} \left[\mathcal{P} \bar{\square} \left(\bar{\square} - \frac{\bar{R}}{3} \right) + \mathcal{Q} \bar{\square} \right] \bar{\square} \left(\bar{\square} - \frac{\bar{R}}{3} \right), \quad (5.3.35)$$

$$\Gamma_{C^{\text{T}} C^{\text{T}}}^{(2)} = \sqrt{2} \left(\bar{\square} + \gamma_{1T} \bar{R} - \frac{\bar{R}}{2} \right), \quad (5.3.36)$$

onde usamos as definições

$$\mathcal{P} = \bar{f}_{RR} + \frac{\bar{R}^2}{4} \bar{f}_{XX} + 4\bar{R} \bar{f}_{RX} + \frac{2}{3} \bar{f}_X, \quad (5.3.37)$$

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{3} \bar{f}_R + \frac{2}{9} \bar{R} \bar{f}_X. \quad (5.3.38)$$

Equação de fluxo

Através da prescrição usual $\bar{\Delta} \mapsto P_k(\bar{\Delta}) = \bar{\Delta} + R_k(\bar{\Delta})$, a equação de fluxo para a ação efetiva média,

$$\Gamma_k[h, \bar{C}, C; \bar{g}] = \Gamma_k^{\text{UQG}}[h, \bar{C}, C; \bar{g}] + S_{\text{aux}}, \quad (5.3.39)$$

pode ser escrita explicitamente de termos dos campos componentes da decomposição de York de $h_{\mu\nu}$, dos fantasmas de Faddeev-Popov e dos campos auxiliares como

$$\partial_t \Gamma_k[0, 0, 0; \bar{g}] = \mathcal{T}_{(2\text{TT})} + \mathcal{T}_{(1\text{T})} + \mathcal{T}_{(0)} + \mathcal{T}_{\text{aux}}, \quad (5.3.40)$$

onde as contribuições \mathcal{T}_i são dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{(2\text{TT})} &= \frac{1}{2} \text{Tr}_{(2\text{TT})} [G_{\text{TT}} \partial_t \mathbf{R}_k^{\text{TT}}], & \mathcal{T}_{(0)} &= \frac{1}{2} \text{Tr}_{(0)}'' [G_{\sigma\sigma} \partial_t \mathbf{R}_k^{\sigma\sigma}], \\ \mathcal{T}_{(1\text{T})} &= \frac{1}{2} \text{Tr}_{(1\text{T})}' [G_{\xi\xi} \partial_t \mathbf{R}_k^{\xi\xi}] - \text{Tr}_{(1\text{T})} [G_{\bar{C}^T C^T} \partial_t \mathbf{R}_k^{\bar{C}^T C^T}], \\ \mathcal{T}_{\text{aux}} &= -\frac{1}{2} \text{Tr}_{(1\text{T})}' \left[\frac{\partial_t P_k}{P_k + \gamma_{1\text{T}} \bar{R} - \bar{R}/2} \right] - \frac{1}{2} \text{Tr}_{(0)}'' \left[\frac{\partial_t P_k (2P_k - \bar{R}/3)}{P_k (P_k - \bar{R}/3)} \right], \end{aligned} \quad (5.3.41)$$

onde definimos $G_{\Phi_i \Phi_j} = (\Gamma_{\Phi_i \Phi_j}^{(2)} + \mathbf{R}_k^{\Phi_i \Phi_j})^{-1}$ como o propagador completo regularizado dos campos Φ_i e Φ_j . As linhas (\dots) nos traços denotam, como anteriormente, os modos a serem excluídos. Lembramos que estamos fazendo uso da aproximação de *background* em que impomos $h_{\mu\nu} = 0$. Todos os outros termos, como o setor de *ghost*, não contribuirão para a equação de fluxo quando a aproximação $h_{\mu\nu}$ é imposta. Utilizando as técnicas de *heat kernel* fornecidas no Apêndice C, a equação do grupo de renormalização Funcional pode ser calculada. Não exibiremos sua forma final explicitamente por ser extremamente grande.

5.4 Pontos fixos interagentes

Para a obtenção de resultados concretos para os pontos fixos interagentes, é preciso especificar a forma funcional da ação gravitacional. A princípio, poderíamos considerar uma decomposição da lagrangiana na forma

$$f(R, R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}) = -R + aR^2 + bR_{\mu\nu} R^{\mu\nu}. \quad (5.4.1)$$

Em geral, os termos em $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ e em R^2 gerariam contribuições distintas na equação de fluxo, mas em um espaço de Einstein em $d = 4$, estes dois termos se fundem em único termo proporcional a R^2 com acoplamento $c = a + b/4$, já que $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = R^2/4$. Isto dificultaria a identificação das contribuições vindas do termo em $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$. Portanto, deveríamos considerar espaços mais complicados do que espaços de Einstein para distinguir as diferentes contribuições que vêm dos termos de derivadas superiores. Dito isso, consideraremos uma decomposição mais geral para a lagrangiana na forma

$$f(R, R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}) = F(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}) + RZ(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}), \quad (5.4.2)$$

de modo que a ação gravitacional se escreve

$$\Gamma_k^{\text{grav}}[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^4x \omega [F_k(X) + RZ_k(X)]. \quad (5.4.3)$$

Como dito anteriormente, o invariante $X = R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$, quando avaliado em um *background* de Einstein, escreve-se $\bar{X} = \bar{R}^2/4$. Em seguida, expandimos as funções F_k e Z_k em potências de

X , ou, equivalentemente, em potências do escalar de curvatura R [60] em ordem crescente de dimensão canônica de massa:

$$F_k(X) = \sum_{j=1}^{m_F} \bar{a}_{2j}(k) X^j \quad (5.4.4)$$

$$Z_k(X) = \sum_{j=0}^{m_Z} \bar{a}_{2j+1}(k) X^j, \quad (5.4.5)$$

onde os \bar{a}_j denotam acoplamentos dependentes de escala e a constante cosmológica está ausente. Em particular, $\bar{a}_1 = -1$. A grande vantagem dessas expansões é que permitem identificar de maneira imediata os acoplamentos pares \bar{a}_{2j} como sendo associados aos invariantes do tipo $(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})^j$ e os acoplamentos ímpares \bar{a}_{2j+1} como sendo associados aos invariantes do tipo $R(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})^j$, ambos para j arbitrário, quando postas na decomposição (5.4.2). Os limites superiores dos somatórios são escritos em termos da ordem de aproximação N na forma $m_F = \lceil (N-1)/2 \rceil$ e $m_Z = \lceil (N-2)/2 \rceil$, onde $\lceil x \rceil$ é a função teto, tal que $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} | n \geq x\}$. Analisamos o truncamento até $N = 10$ em $d = 4$ no calibre de Landau $\alpha = 0$. Como discutido anteriormente, esta escolha de calibre corresponde a uma imposição forte da condição de calibre e constitui um ponto fixo do fluxo do grupo de renormalização [110, 111].

O lado esquerdo da equação de fluxo (5.3.40) é dado por

$$\partial_t \Gamma_k[\vec{0}; \vec{g}] = \partial_t \left\{ \frac{1}{16\pi G_N} \int d^4x \omega [F_k(X) + RZ_k(X)] \right\}. \quad (5.4.6)$$

Os acoplamentos G_N , \bar{a}_{2j} e \bar{a}_{2j+1} podem ser expressos em termos de seus correspondentes adimensionais G , a_{2j} e a_{2j+1} como

$$G_N = k^{-2}G, \quad \bar{a}_{2j} = k^{2-4j}a_{2j}, \quad \bar{a}_{2j+1} = k^{-4j}a_{2j+1}. \quad (5.4.7)$$

Desse modo, a Eq. (5.4.6) é expressa como

$$\partial_t \Gamma_k[\vec{0}; \vec{g}] = \frac{k^2}{16\pi G} \int_x \omega \left\{ (2G - G^{-1}\beta_G)F_k + \partial_t F_k + [(2G - G^{-1}\beta_G)Z_k + \partial_t Z_k] \bar{R} \right\}, \quad (5.4.8)$$

onde

$$\partial_t F_k(X) = \sum_{j=1}^{m_F} k^{2-4j} [\beta_{2j} + (2-4j)a_{2j}(k)] X^j \quad (5.4.9)$$

$$\partial_t Z_k(X) = \sum_{j=1}^{m_Z} k^{-4j} [\beta_{2j+1} - 4ja_{2j+1}(k)] X^j. \quad (5.4.10)$$

Além disso, definimos as funções beta dos acoplamentos adimensionais como $\beta_G = \partial_t G$, $\beta_{2j} = \partial_t a_{2j}$ e $\beta_{2j+1} = \partial_t a_{2j+1}$. A forma final da equação de fluxo resulta então

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{16\pi G} \int_x \omega \left\{ (2 - G^{-1}\beta_G)F_k + \partial_t F_k + [(2 - G^{-1}\beta_G)Z_k + \partial_t Z_k] \bar{R} \right\} = \\ = \mathcal{T}_{(2TT)} + \mathcal{T}_{(1T)} + \mathcal{T}_{(0)} + \mathcal{T}_{\text{aux}}. \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

Ao expandir ambos os lados da Eq. (5.4.11) em potências dos invariantes de curvatura e projetar em um espaço maximalmente simétrico, as funções beta podem ser extraídas ao comparar os coeficientes dos mesmos invariantes de ambos os lados, como feito nos capítulos anteriores.

5.4.1 Resultados numéricos para os pontos fixos e expoentes críticos

As funções beta dos acoplamentos adimensionais possuem a estrutura

$$\beta_i = f_i(g) + \alpha_{ij}(g)\beta_j, \quad (5.4.12)$$

onde $f_i(g)$ e $\alpha_{ij}(g)$ são funções conhecidas dos acoplamentos $g = \{G, \{a_j\}\}$. Vê-se que a função beta do i -ésimo acoplamento possui contribuição de funções beta de acoplamentos associados a potências maiores dos invariantes (não necessariamente de todos) na forma de uma combinação linear. As funções beta podem ser resolvidas como

$$\beta_j = f_j(g)(\delta_{ij} - \alpha_{ij})^{-1}. \quad (5.4.13)$$

Os candidatos a ponto fixo a cada ordem de aproximação N são identificados impondo a condição $\beta_j = 0$ na Eq. (5.4.13). É computacionalmente menos dispendioso, entretanto, se calcularmos a matriz de estabilidade pela Eq. (5.4.12), principalmente quando a ordem de aproximação N se torna muito grande. Dessa forma, a matriz de estabilidade \mathbf{M} , definida por $M_{jk} = \partial\beta_j/\partial g_k|_{g=g^*}$, pode ser obtida a partir da relação

$$M_{jk} = [(\delta_{ij} - \alpha_{ij})^{-1}A_{ik}]|_{g=g^*}, \quad (5.4.14)$$

onde g^* é o ponto fixo e $A_{ik} = \partial f_i/\partial g_k|_{g^*}$. A matriz de estabilidade pode ser diagonalizada na forma $S^{-1}\mathbf{M}S = -\text{diag}(-\theta_1, \dots, -\theta_N)$, com $S = (V^1, \dots, V^N)$, onde V^I é o I -ésimo autovetor de \mathbf{M} com autovalor $-\theta_I$ tal que

$$\sum_{j=1}^N M_{ij}V_j^I = -\theta_I V_i^I, \quad I = 1, \dots, N. \quad (5.4.15)$$

A álgebra de todo este capítulo é direta, mas se torna rapidamente longa e complicada, de modo que a maioria das manipulações deste trabalho foram convenientemente realizadas com o auxílio do programa computacional Mathematica. No que se segue, exibiremos os resultados.

No truncamento de Einstein-Hilbert, *i.e.*, $N = 1$, obtemos o seguinte resultado não-perturbativo para $\beta_G = \partial_t G$ com o laplaciano de Bochner e o de Lichnerowicz, respectivamente:

$$\beta_G \Big|_{\text{Boch}} = \frac{G(659G - 720\pi)}{22G - 360\pi}, \quad (5.4.16)$$

$$\beta_G \Big|_{\text{Lich}} = 2G + \frac{720G^2}{193G - 240\pi}. \quad (5.4.17)$$

Ambas funções beta do acoplamento adimensional G exibem um ponto fixo interagente, atrator no UV. De fato, o expoente crítico que controla o fluxo para o ponto fixo não-gaussiano em $G^*|_{\text{Boch}} = 3,43$ vale $\theta_1|_{\text{Boch}} = 2,14$. Analogamente, o fluxo para o ponto fixo não-gaussiano em $G^*|_{\text{Lich}} = 1,36$ é controlado pelo expoente crítico $\theta_1|_{\text{Lich}} = 3,07$. Ambos resultados apontam que a gravitação quântica unimodular seja uma teoria quântica da gravidade completa no ultravioleta.

Resultados similares e que também apontam para esta conclusão foram obtidos em [82], onde o truncamento de Einstein-Hilbert no contexto unimodular foi investigado pela primeira vez com o laplaciano de Bochner. Lá, um expoente crítico $\theta_{\text{UQG}} = 3,88$ foi obtido controlando o fluxo para o ponto fixo não-trivial em $G_{\text{UQG}}^* = 0,88$. A origem da pequena discrepância

numérica entre o nosso resultado e o de [82] possivelmente está na redefinição do modo vetorial. Em [82] uma parte do jacobiano é cancelada pela redefinição $\xi_\mu \rightarrow \sqrt{\square - R/4} \xi_\mu$. Além disso, a imposição do calibre de Landau $\alpha = 0$ faz com que o modo vetorial não gere contribuição alguma à equação de fluxo. No nosso caso, no entanto, ainda há uma contribuição residual do modo vetorial ξ_μ proveniente diretamente do jacobiano. Isto sugere que a redefinição de campos, mesmo em um truncamento simples, possui uma influência fraca sobre a estrutura de pontos fixos.

As expressões para as funções beta dos acoplamentos adimensionais para os truncamentos de ordem $N > 1$ podem ser resolvidas analiticamente e vários pontos fixos são obtidos. Restringimo-nos aos que apresentaram maior estabilidade. Além de $N = 3$ e dependendo do esquema de regularização, as expressões ficam complicadas o suficiente para o programa computacional conseguir resolver de forma analítica. De $N = 4$ até $N = 10$ realizamos uma busca numérica com o comando *FindRoot* de forma iterativa. A estratégia adotada consiste em atribuir um valor aleatório inicial para o ponto fixo G^* entre 2 e 4 e um valor aleatório inicial para o acoplamento de ordem $N = n$ entre -1 e 1 e, com isso, resolver numericamente o sistema de equações de forma iterativa 10.000 vezes para garantir que encontrássemos o maior número de soluções. Um conjunto de pontos fixos sendo encontrado, repetimos o procedimento aumentando a ordem de truncamento, atribuindo um valor aleatório inicial para G^* , para o acoplamento de ordem $N = n$ e para o acoplamento de ordem $N = n + 1$, seguindo os mesmos intervalos designados para G^* e para os acoplamentos superiores. Como condições de contorno, impomos $a_n = 0$ e $\beta_n = 0$ para todo $n > N$. O procedimento como um todo foi realizado para ambos esquemas de regularização: Bochner e Lichnerowicz. Pontos fixos que exibiram inconsistências quanto ao número de direções relevantes foram descartados, bem como acoplamentos da ordem 10^{-5} ou menor. Exibimos na Tabela (5.1) a coleção de pontos fixos e acoplamentos adimensionais G^* e a_j^* , $j = 2, \dots, 10$ para o regulador de Lichnerowicz (quando os parâmetros de endomorfismo assumem os valores $\gamma_{1T} = \gamma_{2TT} = 0$) em ordem crescente de truncamento. A partir do truncamento $N = 5$, há uma convergência bem estável para os valores de pontos fixos com este esquema de regularização. Todos os acoplamentos surgem com o sinal correto em sua primeira ocorrência, com exceção do acoplamento a_2 que apresenta sinal correto a partir de $N = 5$.

Os expoentes críticos correspondentes são dados na Tabela (5.2) e apresenta uma convergência razoável dos valores, embora tardia se comparada com a convergência rápida dos valores de pontos fixos da Tabela (5.1). Alargar o espaço das teorias considerando truncamentos para $N \geq 10$ seria uma forma de checar a convergência e estabilidade dos valores dos expoentes críticos. No entanto, a Tabela (5.2) fornece indícios de que de fato a gravitação quântica unimodular seja uma teoria quântica completa no UV, apresentando uma superfície crítica de dimensão finita. Em particular, vemos que há duas direções relevantes com o esquema de regularização de Lichnerowicz. Os dois expoentes críticos reais observados aparentemente são induzidos pelo escalar de Ricci $\int \omega R$ e pelo quadrado do tensor de Ricci $\int \omega R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$. Entretanto, a base definida pelos autovetores V^I em que a matriz de estabilidade é diagonal não corresponde aos autovetores associados aos eixos de G e a_j para $j \geq 2$, ou seja, os autovetores V^I são superposições, de modo que uma análise mais minuciosa sobre os ângulos formados entre os autovetores V^I e todos os eixos coordenados precisa ser realizada, algo que faremos no trabalho final a ser publicado. Dessa maneira, não há como afirmarmos de forma conclusiva que, por exemplo, o conjunto de expoentes críticos θ_2 a cada ordem de truncamento de fato é induzido pelo invariante $\int \omega R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ ou pelo invariante $\int \omega R R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$, apesar de termos um resultado finito para a dimensão da superfície crítica, caracterizada por duas direções relevantes, compatível com

Tabela 5.1: Coleção de pontos fixos para os acoplamentos adimensionais G^* e a_n^* em ordem crescente de truncamento com o regulador de Lichnerowicz.

N	G^*	a_2^*	a_3^*	a_4^*	a_5^*	a_6^*	a_7^*	a_8^*	a_9^*	a_{10}^*
1	1,36
2	1,81	-3,18
3	2,46	-0,32	0,26
4	1,99	-0,29	0,15	0,28
5	1,29	0,21	0,30	0,44	0,11
6	1,29	0,21	0,30	0,44	0,11	$-2,13 \times 10^{-3}$
7	1,29	0,21	0,28	0,39	$8,40 \times 10^{-2}$	$-3,54 \times 10^{-2}$	$-3,21 \times 10^{-2}$
8	1,29	0,21	0,27	0,38	$7,80 \times 10^{-2}$	$-4,44 \times 10^{-2}$	$-3,75 \times 10^{-2}$	$-2,42 \times 10^{-2}$
9	1,29	0,21	0,27	0,39	$8,19 \times 10^{-2}$	$-3,90 \times 10^{-2}$	$-3,35 \times 10^{-2}$	$-1,48 \times 10^{-2}$	$8,06 \times 10^{-3}$...
10	1,29	0,21	0,28	0,40	$8,80 \times 10^{-2}$	$-3,00 \times 10^{-2}$	$-2,75 \times 10^{-2}$	$3,07 \times 10^{-3}$	$1,90 \times 10^{-2}$	$3,81 \times 10^{-2}$

Tabela 5.2: Coleção de expoentes críticos calculados nos pontos fixos da Tabela 5.1.

N	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8	θ_9	θ_{10}
1	3,07
2	3,51	-1,07
3	3,60	2,04	-3,08
4	3,08	1,23	-2,42	-3,79
5	3,70	1,56	-0,93	-3,34	-5,50
6	3,96	1,60	-1,01	-3,23	-5,28	-7,30
7	4,01	1,55	-1,15	-3,15	-4,66	-7,16	-9,31
8	3,89	1,51	-1,16	-3,22	-4,56	-6,96	-9,07	-11,30
9	3,75	1,50	-1,09	-3,33	-4,91	-6,84	-8,52	-11,20	-13,31	...
10	3,75	1,51	-1,07	-3,31	-5,10	-6,98	-8,47	-11,00	-13,14	-15,30

[83] para a gravitação $f(R)$ unimodular. Embora na Ref. [60] para a gravitação $f(R, R_{\mu\nu}^2)$ padrão foram encontradas três direções relevantes, é de se esperar que na gravitação $f(R, R_{\mu\nu}^2)$ unimodular o número de direções relevantes seja menor (duas, no caso) devido à ausência da constante cosmológica no espaço da teorias de partida.

É relevante lembrar que operadores além dos considerados no nosso truncamento são gerados no lado direito da equação de fluxo pela expansão em coeficientes de *heat kernel*, mas que não estão sendo considerados por causa da escolha da forma funcional de $f(R, R_{\mu\nu}^2)$. Entretanto, esses operadores trariam contribuições para o espectro de flutuações que entra na

Tabela 5.3: Coleção de pontos fixos para os acoplamentos adimensionais G^* e a_n^* em ordem crescente de truncamento com o regulador de Bochner.

N	G^*	a_2^*	a_3^*	a_4^*	a_5^*	a_6^*	a_7^*	a_8^*	a_9^*	a_{10}^*
1	3,43
2	1,33	0,50
3	3,69	0,20	0,71
4	3,06	0,36	$1,02 \times 10^{-2}$	-1,35
5	3,29	0,39	$0,92 \times 10^{-3}$	-0,35	0,31
6	3,12	0,39	$0,38 \times 10^{-2}$	-0,37	$7,52 \times 10^{-2}$	0,82
7	3,12	0,37	$0,63 \times 10^{-2}$	-0,81	$5,20 \times 10^{-2}$	0,78	0,42
8	3,11	0,40	$0,32 \times 10^{-2}$	-0,29	0,26	0,50	-0,14	-2,00
9	3,18	0,39	$0,31 \times 10^{-2}$	-0,41	0,12	0,71	$2,30 \times 10^{-2}$	-0,51	-0,45	...
10	3,18	0,38	$0,42 \times 10^{-2}$	-0,61	$9,24 \times 10^{-2}$	0,79	0,21	-0,30	-0,37	-2,05

determinação das funções beta dos acoplamentos adimensionais. Apesar disso, acreditamos que a desconsideração de termos proporcionais ao tensor de Riemann, por exemplo, no lado direito da equação de fluxo não deva afetar de sobremaneira a estabilidade dos valores de pontos fixos. Uma extensão envolvendo teorias mais gerais explorando o impacto de invariantes construídos com o tensor de Riemann ou o tensor de Weyl, também em espaços de Einstein, pode ser objeto de trabalhos futuros. Possíveis modificações sobre a estrutura de ponto fixo podem surgir pela mudança de esquema de regularização. Nesse sentido, exibimos os resultados na Tabela (5.3) para a coleção de pontos fixos e acoplamentos adimensionais G^* e a_j^* , $j = 2, \dots, 10$ para o regulador de Bochner (quando os parâmetros de endomorfismo assumem os valores $\gamma_{1T} = 1/4$ e $\gamma_{2TT} = 2/3$) em ordem crescente de truncamento. Neste caso, a convergência nos valores dos pontos fixos não é regular e é mais lenta do que usando o esquema de regularização de Lichnerowicz. A partir de $N = 5$, os valores passam a oscilar em torno de valores fixos, o que pode ser visto com facilidade pelos valores de G^* e a_2^* . Para o esquema de regularização usando o laplaciano de Bocher, é imprescindível considerar truncamentos para $N \geq 10$ para que possa surgir uma melhor convergência. Os expoentes críticos correspondentes são exibidos na Tabela (5.4) e apresentam três expoentes críticos positivos, ou seja, uma direção relevante a mais se comparado com o esquema de regularização anterior. Isto está em desacordo com os resultados para os expoentes críticos com o regulador de Bochner para o truncamento $f(R)$ unimodular [83]. Devemos notar que os resultados foram obtidos dentro da aproximação de *background*. Portanto, seria necessário investigar se a discrepância persiste em esquemas de truncamento mais sofisticados. Entretanto, o número de direções relevantes, a rapidez de convergência e a dimensionalidade naturalmente reduzida do espaço das teorias indicam que o esquema de regularização de Lichnerowicz possa ser mais adequado para descrever as propriedades da gravitação $f(R, R_{\mu\nu}R)$ unimodular.

Por fim, cabe ressaltar que em ambos esquemas de regularização um número finito de dire-

Tabela 5.4: Coleção de expoentes críticos calculados nos pontos fixos da Tabela 5.3.

N	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8	θ_9	θ_{10}
1	2,14
2	4,87-1,71i	4,87+1,71i
3	2,34	1,63	-1,35
4	2,34	2,16	4,53	-1,63
5	2,13	3,35	6,20	-1,12-1,37i	-1,12+1,37i
6	2,27	3,62	6,44	-2,60-1,11i	-2,60+1,11i	-2,69
7	2,34	2,52	5,23	-5,23-0,37i	-5,23+0,37i	-1,76	-7,53
8	2,19	3,59	6,87	-5,84-0,32i	-5,84+0,32i	-0,68-1,25i	-0,68+1,25i	-9,56
9	2,26	3,30	6,31	-7,96-0,46i	-7,96+0,46i	-2,30-1,13i	-2,30+1,13i	-3,53	-12,77	...
10	2,26	2,80	5,58	-6,48	-10,32	-1,91	-4,42	-5,19	-10,99	-14,87

ções relevantes foi obtido, o que significa que a gravitação quântica unimodular assintoticamente segura pode descrever a dinâmica a baixas energias com um número finito (dois ou três) de parâmetros livres. Em [153] uma versão unimodular da Relatividade Geral foi implementada com a introdução da condição de unimodularidade pelo método de multiplicadores de Lagrange com simetria de difeomorfismo completa garantida por campos de Stückelberg. Mesmo com um truncamento mais simples, um número bem maior de direções relevantes foi obtido então. Isto mostra o poder preditivo de nossa formulação e a diferença entre uma versão unimodular da gravitação de Einstein e uma gravitação com simetria de difeomorfismo transversal de partida com a condição de unimodularidade imposta como uma restrição na medida da integral de caminho. Como observado em [83], a moral da história é que, enquanto as duas implementações são equivalentes classicamente, não é de se esperar que o sejam quanticamente.

Capítulo 6

Discussão e Conclusões

Nesta dissertação, a aplicação do grupo de renormalização funcional para a gravidade quântica no cenário da segurança assintótica foi estudado. Por um lado, em caráter introdutório e pedagógico, abordamos alguns aspectos fundamentais que procuraram investigar como diferentes escolhas de parametrização das flutuações quânticas afetam a estrutura de ponto fixo no truncamento de Einstein-Hilbert. Em particular, este estudo foi realizado na aproximação de *background* para a ação efetiva média. As flutuações quânticas foram parametrizadas pelo parâmetro livre Ω e os cálculos foram realizados no calibre de Feynman-de Donder ($\alpha = 1, \beta = d/2 - 1$). Analisamos a dependência de parametrização para três escolhas do parâmetro Ω : 0, $1/2$ e 1. Com a constante cosmológica igual a zero por simplicidade, calculamos a função beta para o acoplamento de Newton adimensional a *1-loop* e observamos que um ajuste fino de Ω em valores próximos da unidade pode inviabilizar a existência de um ponto fixo para valores positivos do acoplamento de Newton adimensional. Em particular, a escolha $\Omega = 1$ é de particular interesse, porque corresponde à decomposição linear da métrica inversa. Para a escolha de calibre considerada, os resultados para as parametrizações linear ($\Omega = 0$) e exponencial ($\Omega = 1/2$) possuem algumas diferenças. Há dois tipos de ponto fixo, quais sejam um com duas direções relevantes para a parametrização linear e um com duas direções irrelevantes para a exponencial. Esta aparente discrepância se deve fundamentalmente a dois fatores: o truncamento de Einstein-Hilbert é simples o suficiente para permitir extrair com relativa facilidade informações não-perturbativas sobre os acoplamentos gravitacionais, mas pobre por não levar em conta contribuições de derivadas superiores que tornariam a estrutura de ponto fixo mais confiável. Além disso, a escolha do calibre de Landau $\alpha = 0$, em contraste com o calibre de Feynman, otimiza a qualidade e confiabilidade da estrutura de ponto fixo para o truncamento de Einstein-Hilbert. Isto é apoiado por resultados que levam em conta contribuições de derivadas superiores [106] em um truncamento polinomial no escalar de Ricci com o *cutoff* de Litim. Qualitativamente, os resultados, para este truncamento, são similares se levarmos em conta correções do grupo de renormalização, ou seja, se não desprezarmos a dimensão anômala do gráviton. Se restaurarmos a constante cosmológica, um ponto fixo surge com o emprego da parametrização linear da inversa da métrica. Esses resultados sugerem que controlar a dependência de parametrização das funções beta é importante no que diz respeito à tarefa de estabelecer a existência de pontos fixos. Alguns resultados nesta direção foram estabelecidos no contexto da segurança assintótica [56, 108, 109, 154, 155]. Outras investigações analisaram a dependência de calibre e de parametrização sobre os coeficientes das divergências a *1-loop* [156–158].

Por outro lado, investigamos o cenário de segurança assintótica em uma teoria gravitacio-

nal classicamente equivalente, do ponto de vista dinâmico, à Relatividade Geral: a gravidade unimodular. Nesta abordagem, o determinante da métrica é fixado *a priori* e não é sujeito à variação. A teoria é então invariante pelo subgrupo de difeomorfismos transversos, $TDiff$. A relação clássica entre as equações de movimento da gravitação de Einstein e da gravitação unimodular é facilmente obtida por meio das identidades de Bianchi. O preço que se paga é que a condição de unimodularidade impõe uma redefinição do tensor de energia-momento para que seja conservado. Do ponto de vista quântico, ganha-se uma nova perspectiva sobre a constante cosmológica. De fato, agora as equações de movimento podem ser deduzidas a partir da ação efetiva quântica usual, ou seja, quando todas as flutuações quânticas forem integradas no infravermelho. Com o auxílio das identidades de Bianchi, a constante cosmológica surge como uma constante de integração, ao invés de ser um acoplamento da lagrangiana. A escala natural consequentemente é $k = 0$, o que pode nos levar a conjecturar [130] que a escolha mais natural para o valor da constante de integração nesta abordagem é perto de zero em unidades da massa de Planck. Isto talvez possa fornecer uma nova perspectiva sobre o problema do ajuste fino da constante cosmológica. Além do mais, o fato de o determinante da métrica não sofrer variação devido à condição de unimodularidade produz a remoção do fator conforme do espectro de flutuações da teoria, resolvendo o problema da versão euclidiana da ação de Einstein-Hilbert ser ilimitada inferiormente.

Com o objetivo de estender os estudos no cenário da segurança assintótica unimodular iniciados pelo truncamento de Einstein-Hilbert e para a gravitação $f(R)$, a aplicação das ferramentas do grupo de renormalização funcional nos permitiu encontrar um ponto fixo para a gravitação $f(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})$ unimodular seguindo uma base de invariantes de curvatura cujos acoplamentos correspondentes permitem distinguir entre potências de $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ e potências de $RR_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$. Em particular, observamos que, na aproximação de *background*, modificações nos parâmetros de endomorfismo levam a modificações no número de direções relevantes no ponto fixo ultravioleta. Especificamente, com o regulador de Lichnerowicz, duas direções relevantes são encontradas, em acordo com [83], ao passo que, com o regulador de Bochner, encontramos três direções relevantes. Esta discrepância é compatível com os resultados reportados em [85], onde modificações nos parâmetros de endomorfismo presentes no regulador podem levar a diferentes números de direções relevantes do ponto fixo UV para sistemas de gravidade acoplados com matéria. Do nosso ponto de vista, isto é uma limitação da aproximação de *background* e indica que outros vínculos independentes devam ser impostos sobre os cálculos como, por exemplo, compatibilidade com as identidades de Ward¹. Entretanto, de acordo com [159], para um tratamento correto de campos fermiônicos, o regulador de Lichnerowicz deve ser adotado. Assim, parece haver um esquema de regularização “preferencial”. Isto está sendo investigado no momento [160].

Embora um resultado inequívoco para o número de direções relevantes não possa ser dado, ainda obtemos um ponto fixo não-gaussiano com a dimensionalidade da superfície crítica menor do que a dimensão do espaço das teorias considerado neste truncamento. Isto mostra que a existência de um ponto fixo não é uma peculiaridade do esquema de aproximação.

Concretamente, estabelecer precisamente o número de direções relevantes associadas ao ponto fixo não-gaussiano não é meramente um exercício formal [106]. De fato, a possibilidade de o ponto fixo apresentar duas, três ou outro número finito de direções relevantes é crucial pelo

¹A introdução da ação de *gauge-fixing* e da ação reguladora quebram a simetria de difeomorfismo transversal e, como consequência, o fluxo do grupo de renormalização gera termos de massa que violam a invariância pela simetria original [130]. Para acomodar a possibilidade de geração de termos de massa, pode-se adicionar à ação efetiva média “parâmetros de massa do gráviton” sujeitos a identidades de Slavnov-Taylor modificadas. Isto possibilita emular na gravitação quântica unimodular os resultados obtidos no cenário da gravitação padrão.

fato de que o número de direções relevantes conta o número de parâmetros livres na teoria que precisam, no fim das contas, ser fixados por experimentos. Concretamente, como consequência, de acordo com o número de direções relevantes, sabe-se se acoplamentos de derivadas superiores, por exemplo, podem ser considerados como uma previsão ou não do cenário da segurança assintótica. Este trabalho mostra que, embora a gravidade unimodular assintoticamente segura possa descrever a dinâmica a baixas energias com poucos parâmetros livres, estudos futuros que vão além da aproximação de *background* são necessários para determinar a estrutura de ponto fixo com maior precisão quantitativa.

Extensões naturais futuras que pretendemos estudar dentro do cenário da gravidade unimodular assintoticamente segura incluem abordar o impacto de invariantes construídos com o tensor de Riemann ou o tensor de Weyl sobre a estrutura de ponto fixo dentro ainda da aproximação de *background* e em espaços compactos ou não-compactos, como espaços hiperbólicos em que não há a necessidade de eliminação de modos espúrios. Nessa mesma linha, os efeitos da inclusão de campos de matéria sobre a estabilidade do ponto fixo podem ser explorados. Em particular, investigar como a relação entre gravidade e matéria pode fornecer testes fenomenológicos e vínculos para possíveis candidatos para a gravitação quântica ao requerer que o Modelo Padrão seja uma teoria completa no ultravioleta [128, 160]. Inspirados na abordagem de segurança assintótica para modelos livres de singularidades em configurações unimodulares [80, 81], pretendemos investigar correções à termodinâmica de buracos negros e o destino de estrelas em colapsos gravitacionais, olhando para correções para a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff e para a razão massa-raio. Além disso, as equações que descrevem perturbações lineares do espaço-tempo, *i.e.*, modos quase-normais de buracos negros, podem diferir das equações deduzidas da gravitação quântica de Einstein [161]. Por fim, estudos sobre independência de *background* são de nosso interesse futuro. Em particular, uma rota independente de *background* rumo a um limite do contínuo universal em modelos discretos de gravidade quântica pode ser feita por meio dos chamados modelos tensoriais, que podem ser encarados como uma generalização para dimensões mais altas do programa de modelos matriciais para a gravidade quântica em duas dimensões. O grupo de renormalização funcional é uma ferramenta versátil e que pode ser adaptada para tratar tanto do cenário da segurança assintótica para a gravitação quântica quanto para modelos tensoriais. Resultados preliminares [7] indicam que ambas teorias pertencem à mesma classe de universalidade, de modo que ambas abordagens podem ser vistas como dois lados da mesma moeda. Todos esses tópicos são deixados para trabalhos futuros.

Parte V
Apêndices

Apêndice A

Propriedades das transformações de calibre

Neste Apêndice estudaremos as propriedades de transformação de calibre da métrica sob transformações gerais de coordenadas, ou difeomorfismos, de um espaço-tempo d -dimensional.

Sob um difeomorfismo infinitesimal definido por $x'^{\mu} = x^{\mu} - \epsilon^{\mu}(x)$, a métrica se transforma como

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &\mapsto g_{\mu\nu}(x) + \delta_{\epsilon}g_{\mu\nu}(x) \\ &= g_{\mu\nu}(x) + \mathcal{L}_{\epsilon}g_{\mu\nu} \\ &= g_{\mu\nu}(x) + \nabla_{\mu}\epsilon_{\nu} + \nabla_{\nu}\epsilon_{\mu}, \end{aligned} \tag{A.0.1}$$

onde ∇ é derivada covariante com respeito a g e o índice de ϵ foi abaixado com $g_{\mu\nu}$. Na discussão que se segue nos restringiremos à análise da decomposição exponencial e argumentaremos que excluindo termos de primeira ordem em $h_{\mu\nu}$, a transformação de calibre (A.0.1) é satisfeita quando empregamos tanto a decomposição linear quanto a exponencial no contexto do método de *background*.

Existem duas possibilidades [162] de efetuar a transformação de calibre $\delta_{\epsilon}g_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\epsilon}g_{\mu\nu}$ quando usamos o método de *background* de modo a satisfazer a Eq. (A.0.1):

- A transformação de *background* $\delta_{\epsilon}^{(B)}$ é definida de tal modo que, sob difeomorfismos, todos os campos se transformam tensorialmente, *i.e.*,

$$\delta_{\epsilon}^{(B)}\bar{g}_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\epsilon}\bar{g}_{\mu\nu} = \bar{\nabla}_{\mu}\epsilon_{\nu} + \bar{\nabla}_{\nu}\epsilon_{\mu}, \tag{A.0.2}$$

$$\delta_{\epsilon}^{(B)}h^{\mu}_{\nu} = \mathcal{L}_{\epsilon}h^{\mu}_{\nu}, \tag{A.0.3}$$

o que também implica que

$$\delta_{\epsilon}^{(B)}(e^h)^{\mu}_{\nu} = \mathcal{L}_{\epsilon}(e^h)^{\mu}_{\nu}. \tag{A.0.4}$$

- Por outro lado, podemos definir a transformação de calibre *quântica* $\delta_{\epsilon}^{(Q)}$ ao assumir que o *background* seja invariante e que a variação recaia sobre a flutuação:

$$\delta_{\epsilon}^{(Q)}\bar{g}_{\mu\nu} = 0, \tag{A.0.5}$$

$$\bar{g}_{\mu\rho}\delta_{\epsilon}^{(Q)}(e^h)^{\rho}_{\nu} = \mathcal{L}_{\epsilon}g_{\mu\nu}. \tag{A.0.6}$$

Pelas propriedades da derivada de Lie, podemos escrever o lado direito da Eq. (A.0.6) como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\epsilon g_{\mu\nu} &= (\mathcal{L}_\epsilon \bar{g}_{\mu\rho})(e^h)^\rho{}_\nu + \bar{g}_{\mu\rho}(\mathcal{L}_\epsilon(e^h)^\rho{}_\nu) \\ &= (\bar{\nabla}_\rho \epsilon_\mu + \bar{\nabla}_\mu \epsilon_\rho)(e^h)^\rho{}_\nu + g_{\mu\lambda}(e^{-h})^\lambda{}_\rho \mathcal{L}_\epsilon(e^h)^\rho{}_\nu,\end{aligned}\tag{A.0.7}$$

onde usamos a regra de Leibniz satisfeita pela derivada de Lie e a identidade $\bar{g}_{\mu\rho} = g_{\mu\lambda}(e^{-h})^\lambda{}_\rho$. Ao contrair a expressão anterior com $g^{\mu\alpha} = (e^{-h})^\alpha{}_\lambda \bar{g}^{\mu\lambda}$, obtemos

$$(e^{-h} \delta_\epsilon^{(Q)} e^h)^\alpha{}_\nu = (e^{-h})^\alpha{}_\lambda (\bar{\nabla}^\lambda \epsilon_\rho + \bar{\nabla}_\rho \epsilon^\lambda)(e^h)^\rho{}_\lambda + (e^{-h} \mathcal{L}_\epsilon e^h)^\alpha{}_\nu.\tag{A.0.8}$$

Expandindo as exponenciais de $h_{\mu\nu}$ em série até primeira ordem na flutuação, resulta

$$\delta_\epsilon^{(Q)} h^\alpha{}_\nu = \bar{\nabla}^\alpha \epsilon_\nu + \bar{\nabla}_\nu \epsilon^\alpha + [\mathcal{L}_\epsilon \bar{g}, h]^\alpha{}_\nu + [\mathcal{O}(\epsilon h^2)]^\alpha{}_\nu.\tag{A.0.9}$$

Os primeiros três termos coincidem com a transformação quântica quando usamos a decomposição linear da métrica. Na aproximação de campo de *background*, os hessianos são calculados e, logo em seguida, tomado o valor esperado da flutuação igual a zero, ou seja, $\delta\Gamma_k/\delta\Phi\delta\Phi|_{h_{\mu\nu}=0}$, de modo que é suficiente nos restringirmos na Eq. (A.0.9) até ordem zero em $h_{\mu\nu}$:

$$\delta_\epsilon^{(Q)} h^\alpha{}_\nu = \bar{\nabla}^\alpha \epsilon_\nu + \bar{\nabla}_\nu \epsilon^\alpha + [\mathcal{O}(h)]^\alpha{}_\nu\tag{A.0.10}$$

e a transformação quântica possui a mesma forma quer usemos a decomposição linear, quer usemos a exponencial.

Apêndice B

Quantização de Faddeev-Popov para a gravitação

A função de partição gravitacional envolve uma integral sobre geometrias $[g]$, ou seja, classes de equivalência módulo difeomorfismos. Entretanto, a simetria de calibre estabelece que há uma infinidade de configurações de campo equivalentes relacionadas por transformações de calibre. Portanto, cada configuração de campo é contada a mais infinitas vezes. Para se definir formalmente a medida de integração $\mathcal{D}g_{\mu\nu}$ de modo a levar em conta configurações de campo distintas entre todas as configurações equivalentes (conectadas por transformações de calibre), é necessário *fixar o calibre* na ação gravitacional pelo procedimento de Faddeev-Popov [163].

Neste Apêndice, apresentamos os passos do procedimento de quantização de Faddeev-Popov para a gravitação.

A ideia crucial é escolher uma ação de *gauge-fixing* que quebre a simetria quântica, mas que mantenha a simetria de *background*. Denotando por $h_{\mu\nu}^\epsilon$ e $\bar{g}_{\mu\nu}^\epsilon$ os campos transformados sob uma mudança infinitesimal de coordenadas $x'^\mu = x^\mu - \epsilon^\mu$, a ação gravitacional é simétrica sob as variações infinitesimais

$$h_{\mu\nu}^\epsilon - h_{\mu\nu} = \delta_\epsilon^{(Q)} h_{\mu\nu} = \mathcal{L}_\epsilon g_{\mu\nu} \quad (\text{B.0.1})$$

$$\bar{g}_{\mu\nu}^\epsilon - \bar{g}_{\mu\nu} = \delta_\epsilon^{(Q)} \bar{g}_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{B.0.2})$$

Considere a função $F_\mu[h; \bar{g}]$, satisfazendo a condição de calibre $F_\mu[h; \bar{g}] = b_\mu(x)$, e usemos o “truque” de Faddeev-Popov de escrever formalmente a unidade na forma

$$1 = \int \mathcal{D}\epsilon^\mu \det \left(\frac{\delta F_\mu[h^\epsilon; \bar{g}]}{\delta \epsilon^\nu} \right) \delta(F_\mu[h^\epsilon; \bar{g}] - b_\mu(x)). \quad (\text{B.0.3})$$

Com este fator formal inserido, a função de partição lê-se

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}\epsilon^\mu \int \mathcal{D}h_{\mu\nu} e^{-S[g]} \det \left(\frac{\delta F_\mu[h^\epsilon; \bar{g}]}{\delta \epsilon^\nu} \right) \delta(F_\mu[h^\epsilon; \bar{g}] - b_\mu(x)), \quad (\text{B.0.4})$$

onde \mathcal{N} é um fator de normalização. Pode-se mostrar [34] que, se a função $F_\mu[h; \bar{g}]$ for linear na flutuação $h_{\mu\nu}$, o determinante na Eq. (B.0.4) é independente do vetor ϵ^μ .

Denotaremos por $S[h; \bar{g}]$ tanto a ação escrita em termos da decomposição linear, $S[\bar{g} + h; \bar{g}]$ quanto a ação escrita em termos da decomposição exponencial, $S[\bar{g}(e^h); \bar{g}]$. Evidentemente a ação é invariante por transformações quânticas e de *background*, de modo que podemos escrever

$$S[h^\epsilon; \bar{g}] = S[h; \bar{g}]. \quad (\text{B.0.5})$$

Supondo que a medida de integração seja invariante por difeomorfismos, $\mathcal{D}h_{\mu\nu}^\epsilon = \mathcal{D}h_{\mu\nu}$, o integrando de (B.0.4) é independente de ϵ e podemos fatorar o volume do grupo de calibre. De fato,

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{\mathcal{N}} \left(\int \mathcal{D}\epsilon^\mu \right) \int \mathcal{D}h_{\mu\nu} e^{-S[h;\bar{g}]} \det(\mathcal{M}[h;\bar{g}]) \delta(F_\mu[h;\bar{g}] - b_\mu(x)), \quad (\text{B.0.6})$$

onde o operador de Faddeev-Popov é dado por

$$\mathcal{M}[h;\bar{g}]^\mu{}_\nu = \left. \frac{\delta F_\mu[h^\epsilon;\bar{g}]}{\delta \epsilon^\nu} \right|_{\epsilon=0}. \quad (\text{B.0.7})$$

O determinante de Faddeev-Popov pode ser expresso como uma integral gaussiana sobre campos de fantasmas anticomutantes \bar{C}_μ e C^μ :

$$\begin{aligned} \det \mathcal{M} &= \int \mathcal{D}C^\mu \mathcal{D}\bar{C}_\mu \exp \left(\int_x \sqrt{\bar{g}} \bar{C}_\mu \mathcal{M}^\mu{}_\nu C^\nu \right) \\ &= \int \mathcal{D}C^\mu \mathcal{D}\bar{C}_\mu e^{-S_{gh}[h,C,\bar{C};\bar{g}]}, \end{aligned} \quad (\text{B.0.8})$$

onde S_{gh} é a ação de *ghost*. Por fim, integramos sobre $b_\mu(x)$ com um peso gaussiano, aplicando a integral

$$\int \mathcal{D}b_\mu \exp \left(-\frac{1}{2\alpha} \int_x \sqrt{\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} b_\mu b_\nu \right) \quad (\text{B.0.9})$$

a ambos os lados da Eq. (B.0.6). Absorvendo na constante de normalização o fator de volume e fatores de integração irrelevantes, obtemos finalmente para a função de partição

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}h_{\mu\nu} \exp(-S[h;\bar{g}] - S_{gf}[h;\bar{g}] - S_{gh}[h,C,\bar{C};\bar{g}]), \quad (\text{B.0.10})$$

onde omitimos o fator de normalização e definimos a ação de *gauge-fixing* como

$$S_{gf}[h;\bar{g}] = \frac{1}{2\alpha} \int_x \sqrt{\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} F_\mu F_\nu, \quad (\text{B.0.11})$$

onde α é um parâmetro de calibre adimensional. Para determinar a forma explícita de S_{gf} e de S_{gh} , é preciso fornecer a expressão da função de calibre $F_\mu[h;\bar{g}]$.

Apêndice C

Técnicas de *heat kernel* e tecnologia para o cálculo de traços funcionais

Para efetuar os traços do lado direito da equação de Wetterich, faremos uso neste apêndice de técnicas usuais de *heat kernel*. Revisaremos a definição do *heat kernel* e a expansão assintótica de seu traço. Em particular, discutiremos os coeficientes de *heat kernel* tanto para campos sem vínculos quanto para campos sujeitos a vínculos diferenciais. Seguiremos de perto as referências [33, 34, 36, 164].

C.1 O *heat kernel*

Estruturalmente o lado direito de Wetterich é dado por um traço sobre uma função com valores em operadores. Tipicamente os operadores diferenciais envolvidos possuem uma estrutura intrincada de se operar. No entanto, uma escolha de *background* adequada pode simplificar sua forma estrutural de modo que suas propriedades possam ser facilmente encontradas na literatura. Um exemplo típico são operadores diferenciais de segunda ordem na forma

$$\Delta \equiv -g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + \mathbf{E}, \quad (\text{C.1.1})$$

onde $\nabla_\mu \equiv D_\mu + \mathbf{A}_\mu$ é uma derivada covariante que, além de incluir a conexão de Levi-Civita na definição de D_μ , pode incluir uma conexão de calibre \mathbf{A}_μ para Yang-Mills, por exemplo. O endomorfismo \mathbf{E} é um mapa linear que atua sobre os índices internos dos campos e sobre os índices de espaço-tempo. Em uma esfera S^d , sua estrutura é do tipo $\mathbf{E} = qR\mathbf{1}$, onde $\mathbf{1}$ é a identidade no espaço dos campos e q é um número real.

Uma ferramenta útil para efetuar o traço de funções de operadores deste tipo se encontra nas técnicas de *heat kernel*, cuja definição é

$$K(s; x, y; \Delta) \equiv \langle x | e^{-s\Delta} | y \rangle. \quad (\text{C.1.2})$$

O *heat kernel* satisfaz a equação de condução do calor¹

$$(\partial_s + \Delta_x) K(s; x, y; \Delta) = 0, \quad (\text{C.1.3})$$

sujeito à condição de contorno

$$\lim_{s \rightarrow 0} K(s; x, y; \Delta) = \delta(x, y). \quad (\text{C.1.4})$$

¹Daí o nome, em uma tradução livre, de *núcleo do calor*.

À guisa de exemplo, em uma variedade plana \mathbb{R}^d com $\mathbf{A}_\mu = 0$ e $\mathbf{E} = m^2$ sendo a massa de um campo escalar, de modo que $\Delta = -\partial^2 + m^2$, o núcleo do calor é conhecido como “núcleo de Gauss” e pode ser facilmente calculado. De fato, a transformada inversa de Fourier de $K(s; x, y; \Delta)$ sobre a primeira coordenada é dada por

$$K(s; x, y; \Delta) = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tilde{K}(s; q, y; \Delta) e^{iq \cdot x}, \quad (\text{C.1.5})$$

satisfazendo a equação

$$(\partial_s + q^2 + m^2) \tilde{K} = 0, \quad (\text{C.1.6})$$

com a condição inicial

$$\lim_{s \rightarrow 0} \tilde{K}(s; q, y; \Delta) = e^{-iq \cdot y}. \quad (\text{C.1.7})$$

A solução, atendendo à condição inicial, é $\tilde{K}(s; q, y; \Delta) = e^{-(q^2 s + iq \cdot y + s m^2)}$. E, portanto, a transformada de Fourier inversa é uma integral gaussiana do tipo

$$\begin{aligned} K(s; x, y; \Delta) &= \langle x | e^{-s(-\partial^2 + m^2)} | y \rangle \\ &= e^{-s m^2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} e^{-q^2 s + iq \cdot (x-y)} \\ &= \frac{1}{(4\pi s)^{d/2}} \exp\left(\frac{-|x-y|^2}{4s} - s m^2\right). \end{aligned} \quad (\text{C.1.8})$$

Vamos voltar a espaços curvos. O traço do operador $e^{-s\Delta}$ pode ser calculado para valores coincidentes $x \equiv y$ em termos do *heat kernel*

$$\begin{aligned} \text{Tr}[e^{-s\Delta}] &= \int d^d x \sqrt{g} K(s; x, x; \Delta) \\ &= \int d^d x \sqrt{g} \langle x | e^{-s\Delta} | x \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.1.9})$$

Logo, no espaço plano \mathbb{R}^d , o traço da Eq. (C.1.8) fica

$$\begin{aligned} \text{Tr}[K(s; x, y; \Delta)] &= \int d^d x \sqrt{g} \langle x | e^{-s(-\partial^2 + m^2)} | x \rangle \\ &= \frac{\text{Vol}}{(4\pi s)^{d/2}} e^{-s m^2}, \end{aligned} \quad (\text{C.1.10})$$

onde $\text{Vol} = \int d^d x \sqrt{g}$. Como estamos nos restringindo a variedades que são localmente isomorfas ao espaço euclidiano, no limite $s \rightarrow 0$, o traço do operador $e^{-s\Delta}$ deve se reduzir à sua forma funcional em espaços planos, Eq. (C.1.10).

C.2 Expansão assintótica

O traço do *heat kernel* de Δ possui a famosa expansão assintótica para $s \rightarrow 0$ [33, 34, 36, 164]

$$\begin{aligned} \text{Tr}[e^{-s\Delta}] &\approx \frac{1}{(4\pi s)^{d/2}} [B_0(\Delta) + s B_2(\Delta) + s^2 B_4(\Delta) + \dots] \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n}(\Delta) s^{-(d/2-n)}, \end{aligned} \quad (\text{C.2.1})$$

onde

$$B_{2n}(\Delta) = \int d^d x \sqrt{g} \text{tr}[\mathbf{b}_{2n}(\Delta)] \quad (\text{C.2.2})$$

são os coeficientes integrados de *heat kernel* para o operador Δ e $\mathbf{b}_{2n}(\Delta)$ são escalares construídos a partir de invariantes de curvatura e suas derivadas. Também são conhecidos como coeficientes não-integrados de *heat kernel*. Além disso, tr denota o traço sobre os índices internos de $\mathbf{1}$, \mathbf{A}_μ e \mathbf{E} .

Os primeiros três coeficientes possuem a seguinte forma [33, 34, 36]

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{1}, \quad (\text{C.2.3})$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{1}{6} R \mathbf{1} - \mathbf{E}, \quad (\text{C.2.4})$$

$$\mathbf{b}_4 = \frac{1}{180} \left(R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} - R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \frac{5}{2} R^2 + 6 \nabla^2 R \right) \mathbf{1} + \quad (\text{C.2.5})$$

$$+ \frac{1}{12} \Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} - \frac{1}{6} R \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 - \frac{1}{6} \nabla^2 \mathbf{E}, \quad (\text{C.2.6})$$

onde $\Omega_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ é a curvatura total da conexão de calibre em ∇_μ e $\mathbf{1}$ é a identidade no espaço dos campos. Para escalares (S), vetores (V) e tensores de segunda ordem simétricos (TS), temos

$$\mathbf{1}_S = 1, \quad [\mathbf{1}_V]_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu, \quad [\mathbf{1}_{TS}]_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta + \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha). \quad (\text{C.2.7})$$

Os traços tr das matrizes identidade contam o número de componentes independentes e valem

$$\text{tr}_{(S)} \mathbf{1} = 1, \quad \text{tr}_{(V)} \mathbf{1} = d, \quad \text{tr}_{(TS)} \mathbf{1} = \frac{1}{2} d(d+1). \quad (\text{C.2.8})$$

Os coeficientes \mathbf{b}_{2n} escritos acima são para campos sem vínculos. Os coeficientes correspondentes para campos sujeitos a vínculos diferenciais como $h_{\mu\nu}^{\text{TT}}$ e ξ_μ na decomposição de York serão dados na próxima seção.

C.3 Fórmula para traços funcionais

Como dito anteriormente, a equação de Wetterich para a ação efetiva média contém traços funcionais de funções com valores em operadores. Consideremos o traço de uma função $W(\bar{\Delta}_s)$, onde $\bar{\Delta}_s = -\bar{\nabla}^2 + \mathbf{E}_s$ é o operador diferencial construído com a métrica de fundo \bar{g} e o subscrito s denota o *spin* do campo sobre o qual $\bar{\Delta}_s$ atua. Usando a transformada de Laplace inversa

$$W(z) = \int_0^\infty dt \tilde{W}(t) e^{-tz}, \quad (\text{C.3.1})$$

podemos escrever

$$\text{Tr}[W(\bar{\Delta}_s)] = \int_0^\infty dt \tilde{W}(t) \text{Tr}[e^{-t\bar{\Delta}_s}]. \quad (\text{C.3.2})$$

Substituindo a expansão assintótica (C.2.1) do *heat kernel* resulta

$$\text{Tr}[W(\bar{\Delta}_s)] = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \sum_{n=0}^{\infty} Q_{\frac{d}{2}-n}[W] B_{2n}(\bar{\Delta}_s), \quad (\text{C.3.3})$$

onde os funcionais- Q são definidos por

$$Q_n[W] \equiv \int_0^\infty dt t^{-n} \tilde{W}(t). \quad (\text{C.3.4})$$

Para $n > 0$, o funcional- Q (C.3.4) se relaciona com $W(z)$ pela transformada de Mellin:

$$Q_n[W] = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dz z^{n-1} W(z). \quad (\text{C.3.5})$$

Pode-se provar [33, 34, 36] que o funcional- Q pode ser escrito em termos da seguinte expressão, para um valor arbitrário de n real,

$$Q_n[W] = \frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k)} \int_0^\infty dz z^{n+k-1} \frac{d^k W(z)}{dz^k}, \quad (\text{C.3.6})$$

onde k denota algum inteiro positivo (arbitrário) satisfazendo a restrição $n+k > 0$.

Por motivos didáticos ilustremos o cálculo do funcional- Q para um caso típico. A equação de Wetterich consiste de traços funcionais cuja função a ser tomada o traço tem a seguinte forma

$$W(\Delta) = \frac{\partial_t R_k(\Delta) + \eta R_k(\Delta)}{(P_k(\Delta) + A)^\ell} \quad (\text{C.3.7})$$

para alguma função A e um número inteiro arbitrário ℓ . As funções $W(\Delta)$ encontradas nos Capítulos 4 e 5 são casos mais complicados da Eq. (C.3.7), mas cujo cálculo dos funcionais- Q correspondentes seguem a mesma lógica que será discutida abaixo.

É conveniente reescalonar as quantidades em termos de k^2 . Defina então $z = k^2 y$ e $\tilde{q} = q/k^2$. Além disso, a fim de realizar cálculos explícitos, usaremos a função *cutoff* de Litim:

$$R_k(z) = (k^2 - z)\theta(k^2 - z), \quad (\text{C.3.8})$$

onde $\theta(k^2 - z)$ representa a função de Heaviside. Derivando a equação anterior com respeito ao parâmetro t , obtemos

$$\partial_t R_k(z) = 2k^2\theta(k^2 - z) + 2k^2(k^2 - z)\delta(k^2 - z). \quad (\text{C.3.9})$$

Entretanto, lembrando que sob o sinal de integral vale a propriedade $f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma

$$\partial_t R_k(z) = 2k^2\theta(k^2 - z). \quad (\text{C.3.10})$$

Levando em conta os resultados obtidos acima, os funcionais- Q podem ser escritos como

$$\begin{aligned} Q_n \left(\frac{\partial_t R_k(z)}{(P_k(z) + A)^\ell} \right) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dz z^{n-1} \frac{2k^2\theta(k^2 - z)}{[(k^2 - z)\theta(k^2 - z) + z + A]^\ell} \\ &= \frac{2}{\Gamma(n)} \frac{k^{2-2\ell}}{(1 + \tilde{A})^\ell} \int_0^\infty dz z^{n-1} \theta(k^2 - z), \end{aligned} \quad (\text{C.3.11})$$

onde $\tilde{A} = A/k^2$. Note que a integral anterior é a transformada de Mellin da função de Heaviside, cuja solução para $\mathbf{Re}(n) > 0$ é

$$\int_0^\infty dz z^{n-1} \theta(k^2 - z) = \frac{k^{2n}}{n}. \quad (\text{C.3.12})$$

Lembrando ainda que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, a expressão para os funcionais- Q (C.3.11) pode ser calculada explicitamente:

$$Q_n \left(\frac{\partial_t R_k(z)}{(P_k(z) + A)^\ell} \right) = \frac{2}{\Gamma(n+1)} \frac{1}{(1 + \tilde{A})^\ell} k^{2(n-\ell+1)}, \quad n > 0. \quad (\text{C.3.13})$$

De modo análogo, podemos escrever

$$Q_n \left(\frac{R_k(z)}{(P_k(z) + A)^\ell} \right) = \frac{1}{\Gamma(n+2)} \frac{1}{(1 + \tilde{A})^\ell} k^{2(n-\ell+1)}, \quad n > 0. \quad (\text{C.3.14})$$

C.4 Coeficientes de *heat kernel* para campos sujeitos a vínculos diferenciais

Os campos $h_{\mu\nu}^{\text{TT}}$ e ξ_μ estão sujeitos a vínculos diferenciais associados à decomposição de York. Portanto, os coeficientes de *heat kernel* precisam ser modificados. Não é nosso intuito discutir a dedução destas modificações (sugerimos ao leitor as Refs. [33, 34, 101, 119]) e apenas exibiremos os coeficientes de *heat kernel* até ordem 10 em invariantes de curvatura tanto para o chamado laplaciano de Bochner quanto para o laplaciano de Lichnerowicz, que passaremos a discutir.

Denotaremos por $\bar{\nabla}$ a derivada covariante definida pela métrica de fundo \bar{g} , $\bar{\nabla}^2$ o d'alembertiano e $\Delta_B = -\bar{\nabla}^2$ seu análogo euclidiano, conhecido como laplaciano de Bochner. Por outro lado, para eliminar termos não-mínimos do tipo $\bar{g}_{\mu\nu} \bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}^\sigma \bar{\nabla}^2 h_{\rho\sigma}$ que surgem da segunda variação da ação do truncamento $f(R, R_{\mu\nu} R^{\mu\nu})$, os operadores diferenciais podem ser organizados na forma de laplacianos de Lichnerowicz:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_{L0} \phi &= -\bar{\nabla}^2 \phi, \\ \bar{\Delta}_{L1} \xi_\mu &= -\bar{\nabla}^2 \xi_\mu + \bar{R}_\mu{}^\rho \xi_\rho, \\ \bar{\Delta}_{L2} h_{\mu\nu} &= -\bar{\nabla}^2 h_{\mu\nu} + \bar{R}_\mu{}^\rho h_{\rho\nu} + \bar{R}_\nu{}^\rho h_{\mu\rho} - 2\bar{R}_{\mu\rho\nu\sigma} h^{\rho\sigma}, \end{aligned} \quad (\text{C.4.1})$$

ou seja, operadores diferenciais não-mínimos $\bar{\Delta}_{Ls} = -\bar{\nabla}^2 + \mathbf{E}_s$, com \mathbf{E}_s atuando em tensores transversos e sem traço ($s = 2$), vetores transversos ($s = 1$) e escalares ($s = 0$). Daqui para frente nos restringiremos a $d = 4$. Desta forma, para um espaço de Einstein, obtemos

$$\mathbf{E}_0 = 0, \quad [\mathbf{E}_1]_{\mu\nu} = \frac{\bar{R}}{4} \bar{g}_{\mu\nu}, \quad [\mathbf{E}_2]_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\bar{R}}{2} \bar{g}_{\mu\rho} \bar{g}_{\nu\sigma} - 2\bar{R}_{\mu\rho\nu\sigma}. \quad (\text{C.4.2})$$

Na Tabela (C.1) apresentamos os valores de $\text{tr}[b_{2n}(\bar{\Delta}_{Ls})]$, *i.e.*, os coeficientes de *heat kernel* para os operadores de Lichnerowicz para cada setor de spin s e para cada ordem derivativa n após a decomposição de York, calculados sobre a esfera S^4 . Similarmente, na Tabela (C.2) apresentamos os valores de $\text{tr}[b_{2n}(\bar{\Delta}_B)]$, *i.e.*, os coeficientes de *heat kernel* com o regulador de Bochner.

Tabela C.1: Coeficientes de *heat kernel* para o laplaciano de Lichnerowicz sobre S^4 .

		n						
s		0	2	4	6	8	10	12
0	1	$\frac{\bar{R}}{6}$	$\frac{29\bar{R}^2}{2160}$	$\frac{37\bar{R}^3}{54432}$	$\frac{149\bar{R}^4}{6531840}$	$\frac{179\bar{R}^5}{431101440}$	$-\frac{1387\bar{R}^6}{201755473920}$	
1	3	$-\frac{\bar{R}}{2}$	$\frac{19\bar{R}^2}{720}$	$-\frac{5\bar{R}^3}{18144}$	$-\frac{11\bar{R}^4}{2177280}$	$-\frac{19\bar{R}^5}{143700480}$	$-\frac{347\bar{R}^6}{67251824640}$	
2	5	$-\frac{25\bar{R}}{6}$	$\frac{719\bar{R}^2}{432}$	$-\frac{23125\bar{R}^3}{54432}$	$\frac{101981\bar{R}^4}{1306368}$	$-\frac{952135\bar{R}^5}{86220288}$	$\frac{50728409\bar{R}^6}{40351094}$	

(a) Coleção de coeficientes de $n = 0$ até $n = 12$.

		n			
s		14	16	18	20
0		$-\frac{6581\bar{R}^7}{6052664217600}$	$-\frac{348679\bar{R}^8}{4938974001561600}$	$-\frac{145260499\bar{R}^9}{35471711279215411200}$	$-\frac{547102417\bar{R}^{10}}{2128302676752924672000}$
1		$-\frac{7\bar{R}^7}{26202009600}$	$-\frac{27719\bar{R}^8}{1646324667187200}$	$-\frac{14595181\bar{R}^9}{11823903759738470400}$	$-\frac{72735617\bar{R}^{10}}{709434225584308224000}$
2		$-\frac{28794823\bar{R}^7}{242106568704}$	$\frac{9465023657\bar{R}^8}{987794800312320}$	$-\frac{73150996817\bar{R}^9}{109143727012970496}$	$\frac{132306832871\bar{R}^{10}}{3200455153011916800}$

(b) Coleção de coeficientes de $n = 14$ até $n = 20$.

Tabela C.2: Coeficientes de *heat kernel* para o laplaciano de Bochner sobre S^4 .

		n						
s		0	2	4	6	8	10	12
0	1	$\frac{\bar{R}}{6}$	$\frac{29\bar{R}^2}{2160}$	$\frac{37\bar{R}^3}{54432}$	$\frac{149\bar{R}^4}{6531840}$	$\frac{179\bar{R}^5}{431101440}$	$-\frac{1387\bar{R}^6}{201755473920}$	
1	3	$\frac{\bar{R}}{4}$	$-\frac{7\bar{R}^2}{1440}$	$-\frac{541\bar{R}^3}{362880}$	$-\frac{157\bar{R}^4}{2488320}$	$\frac{4019\bar{R}^5}{2299207680}$	$\frac{141853\bar{R}^6}{430411677696}$	
2	5	$-\frac{5\bar{R}}{6}$	$-\frac{\bar{R}^2}{432}$	$\frac{311\bar{R}^3}{54432}$	$\frac{109\bar{R}^4}{1306368}$	$-\frac{317\bar{R}^5}{12317184}$	$-\frac{6631\bar{R}^6}{4483454976}$	

(a) Coleção de coeficientes de $n = 0$ até $n = 12$.

		n			
s		14	16	18	20
0		$-\frac{6581\bar{R}^7}{6052664217600}$	$-\frac{348679\bar{R}^8}{4938974001561600}$	$-\frac{145260499\bar{R}^9}{35471711279215411200}$	$-\frac{547102417\bar{R}^{10}}{2128302676752924672000}$
1		$\frac{2304031\bar{R}^7}{129123503308800}$	$\frac{6065837\bar{R}^8}{16209965953843200}$	$-\frac{90668329\bar{R}^9}{4233453653836431360}$	$-\frac{86062922233\bar{R}^{10}}{27940794115320446976000}$
2		$\frac{11051\bar{R}^7}{403510947840}$	$\frac{692539\bar{R}^8}{89799527301120}$	$\frac{675686119\bar{R}^9}{1418868451168616448}$	$\frac{290538299\bar{R}^{10}}{25038855020622643200}$

(b) Coleção de coeficientes de $n = 14$ até $n = 20$.

C.5 Eliminação de modos espúrios

A decomposição de York introduz campos (ξ_μ, σ) que possuem configurações que satisfazem a equação de Killing e a equação de Killing conforme, respectivamente, e não contribuem para o lado esquerdo da equação de fluxo. Estas configurações (ou modos) precisam ser removidas nas expressões dos traços funcionais. Isto é indicado com a presença de um número adequado de “linhas” ($'\dots'$) nos traços associados a cada campo. Do ponto de vista prático, a eliminação destes modos espúrios através dos traços com linhas pode ser calculada por meio do traço usual com a seguinte expressão [33, 101, 106, 119]:

$$\text{Tr}'\dots'[W(\bar{\Delta})] = \text{Tr}[W(\bar{\Delta})] - \sum_{l \in M} D_l(d, s) W(\lambda_l(d, s)), \quad (\text{C.5.1})$$

onde $M = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ para campos escalares; $M = \{1, 2, \dots, m\}$ para campos vetoriais e assim em diante. O parâmetro m denota o número de modos espúrios (linhas). Além disso, $\lambda_l(d, s)$ denota o l -ésimo autovalor do laplaciano $\bar{\Delta}$ em d -dimensões agindo sobre o espaço de campos de $spin - s$. Para o laplaciano de Bochner, $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}_B = -\bar{\nabla}^2$, o l -ésimo autovalor possui a seguinte expressão para $d = 4$:

$$\lambda_l(4, s) \Big|_{\bar{\Delta}=\bar{\Delta}_B} = \frac{l(l+3) - s}{12} \bar{R}. \quad (\text{C.5.2})$$

Já para o laplaciano de Lichnerowicz, $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}_{Ls}$, o l -ésimo autovalor possui a forma, também em $d = 4$,

$$\lambda_l(4, s) \Big|_{\bar{\Delta}=\bar{\Delta}_{Ls}} = \left[\frac{l(l+3) - s}{12} + \frac{\delta_{1,s}}{4} + \frac{2\delta_{2,s}}{3} \right] \bar{R}. \quad (\text{C.5.3})$$

Por fim, o grau de degenerescência, $D_l(d, s)$, associado com $\lambda_l(d, s)$, possui a seguinte expressão em $d = 4$ independente da forma do operador $\bar{\Delta}$:

$$D_l(4, s) = \frac{1}{6} (2l+3) [(l+1)\delta_{0,s} + 3l(l+3)\delta_{1,s} + 5(l-1)(l+4)\delta_{2,s}]. \quad (\text{C.5.4})$$

Apêndice D

Variação dos símbolos de Christoffel e de invariantes de curvatura

Neste apêndice listamos as expansões de objetos geométricos até segunda ordem no campo de flutuações $h_{\mu\nu}$ em torno de um campo de fundo arbitrário $\bar{g}_{\mu\nu}$ na parametrização interpolante.

Na nossa convenção, o tensor de Riemann e o tensor de Ricci são definidos, respectivamente, como

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\beta\mu}, \quad (\text{D.0.1})$$

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}. \quad (\text{D.0.2})$$

A primeira e segunda variação dos símbolos de Christoffel são

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha(1)}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha(2)}_{\mu\nu}, \quad (\text{D.0.3})$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \bar{g}^{\alpha\beta} (\partial_\mu \bar{g}_{\nu\beta} + \partial_\nu \bar{g}_{\mu\beta} - \partial_\beta \bar{g}_{\mu\nu}), \\ \Gamma^{\alpha(1)}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\bar{\nabla}_\mu h^\alpha_\nu + \bar{\nabla}_\nu h^\alpha_\mu - \bar{\nabla}^\alpha h_{\mu\nu}), \\ \Gamma^{\alpha(2)}_{\mu\nu} &= \frac{\Omega}{2} [\bar{\nabla}_\mu (h_{\nu\sigma} h^{\sigma\alpha}) + \bar{\nabla}_\nu (h_{\mu\sigma} h^{\sigma\alpha}) - \bar{\nabla}^\alpha (h_{\mu\sigma} h^\sigma_\alpha)] + \\ &\quad - \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} (\bar{\nabla}_\nu h_{\mu\beta} + \bar{\nabla}_\mu h_{\nu\beta} - \bar{\nabla}_\beta h_{\mu\nu}) + (\Omega - 1 + \chi) \bar{\Gamma}^\sigma_{\mu\nu} (h^{\alpha\lambda} h_{\lambda\sigma}), \end{aligned} \quad (\text{D.0.4})$$

e definimos a derivada covariante com respeito à conexão de fundo $\bar{\Gamma}^\mu_{\nu\alpha}$, sujeita à condição de metricidade $\bar{\nabla}_\mu \bar{g}_{\nu\alpha}$. Das expressões para as expansões dos símbolos de Christoffel, obtém-se a primeira e segunda variação do tensor de Riemann:

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \bar{R}^\alpha{}_{\beta\mu\nu} + R^{\alpha(1)}_{\beta\mu\nu} + R^{\alpha(2)}_{\beta\mu\nu}, \quad (\text{D.0.5})$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{R}^\alpha{}_{\beta\mu\nu} &= \partial_\mu \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\mu} + \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\lambda} \bar{\Gamma}^\lambda_{\beta\nu} - \bar{\Gamma}^\alpha_{\nu\lambda} \bar{\Gamma}^\lambda_{\beta\mu}, \\ R^{\alpha(1)}_{\beta\mu\nu} &= \bar{\nabla}_\mu \Gamma^{\alpha(1)}_{\beta\nu} - \bar{\nabla}_\nu \Gamma^{\alpha(1)}_{\beta\mu}, \\ R^{\alpha(2)}_{\beta\mu\nu} &= \bar{\nabla}_\mu \Gamma^{\alpha(2)}_{\beta\nu} - \bar{\nabla}_\nu \Gamma^{\alpha(2)}_{\beta\mu} + [\Gamma^{(1)}_\mu, \Gamma^{(1)}_\nu]^\alpha{}_\beta. \end{aligned} \quad (\text{D.0.6})$$

Contraindo uma vez, obtém-se as variações do tensor de Ricci:

$$R_{\beta\nu} = \delta_\alpha^\mu R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \bar{R}_{\beta\nu} + R_{\beta\nu}^{(1)} + R_{\beta\nu}^{(2)}, \quad (\text{D.0.7})$$

onde

$$\begin{aligned} R_{\beta\nu}^{(1)} &= \frac{1}{2} [\bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}_\alpha h_\nu^\alpha + \bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\alpha h_\beta^\alpha - \bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}_\nu h - \bar{\nabla}^2 h_{\beta\nu}] + \frac{1}{2} \bar{R}_{\nu\lambda} h_\beta^\lambda + \frac{1}{2} \bar{R}_{\beta\lambda} h_\nu^\lambda + \bar{R}_{\beta\lambda\alpha\nu} h^{\lambda\alpha}, \\ R_{\beta\nu}^{(2)} &= \frac{\Omega}{2} \bar{\nabla}_\mu [\bar{\nabla}_\beta (h_{\nu\sigma} h^{\sigma\mu}) + \bar{\nabla}_\nu (h_{\beta\sigma} h^{\sigma\mu}) - \bar{\nabla}^\mu (h_{\beta\sigma} h_\nu^\sigma)] - \frac{1}{2} \bar{\nabla}_\mu [h^{\mu\lambda} (\bar{\nabla}_\nu h_{\beta\lambda} + \bar{\nabla}_\beta h_{\nu\lambda} - \bar{\nabla}_\lambda h_{\beta\nu})] + \\ &\quad - \left(\Omega - \frac{1}{2} \right) \bar{\nabla}_\nu (h_{\mu\sigma} \bar{\nabla}_\beta h^{\sigma\mu}) + (\Omega + \chi - 1) [\bar{\nabla}_\mu (\bar{\Gamma}_{\beta\nu}^\sigma (h^{\mu\lambda} h_{\lambda\sigma})) - \bar{\nabla}_\nu (\bar{\Gamma}_{\beta\mu}^\sigma (h^{\mu\lambda} h_{\lambda\sigma}))] + \\ &\quad + \frac{1}{4} \bar{\nabla}_\sigma h (\bar{\nabla}_\beta h_\nu^\sigma + \bar{\nabla}_\nu h_\beta^\sigma - \bar{\nabla}^\sigma h_{\nu\beta}) - \frac{1}{4} (\bar{\nabla}_\sigma h_\nu^\mu + \bar{\nabla}_\nu h_\sigma^\mu - \bar{\nabla}^\mu h_{\nu\sigma}) (\bar{\nabla}_\beta h_\mu^\sigma + \bar{\nabla}_\mu h_\beta^\sigma - \bar{\nabla}^\sigma h_{\mu\beta}). \end{aligned} \quad (\text{D.0.8})$$

Definimos também $h \equiv \bar{g}^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$. O escalar de Ricci é definido por

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = (\bar{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \chi h^{\mu\lambda} h_\lambda^\nu) (\bar{R}_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)}), \\ &= \bar{R} + R^{(1)} + R^{(2)}, \end{aligned} \quad (\text{D.0.9})$$

de modo que as variações do escalar de Ricci são

$$\begin{aligned} R^{(1)} &= \bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}_\nu h^{\beta\nu} - \bar{\nabla}^2 h - h^{\beta\nu} \bar{R}_{\beta\nu}, \\ R^{(2)} &= \bar{\nabla}_\beta h^{\beta\lambda} \bar{\nabla}_\lambda h + h^{\beta\lambda} \bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}_\lambda h - \frac{1}{4} \bar{\nabla}_\sigma h \bar{\nabla}^\sigma h - \left(2\Omega - \frac{3}{4} \right) \bar{\nabla}^\beta h_\sigma^\mu \bar{\nabla}_\beta h_\mu^\sigma + \\ &\quad - (2\Omega - 1) h_{\beta\sigma} \bar{\nabla}^2 h^{\sigma\beta} + (\Omega - 1) \bar{\nabla}_\beta h^{\sigma\beta} \bar{\nabla}^\mu h_{\mu\sigma} + 2(\Omega - 1) h^{\sigma\beta} \bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}^\mu h_{\mu\sigma} + \\ &\quad + \left(\Omega - \frac{1}{2} \right) \bar{\nabla}_\beta h_{\mu\sigma} \bar{\nabla}^\mu h^{\sigma\beta} + (\Omega + \chi - 1) [\bar{\nabla}_\beta (\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\sigma \bar{g}^{\mu\nu} (h^{\beta\lambda} h_{\lambda\sigma})) - \bar{\nabla}^\mu (\bar{\Gamma}_{\mu\beta}^\sigma (h^{\beta\lambda} h_{\lambda\sigma}))] + \\ &\quad + (\Omega - 1) \bar{R}_{\lambda\beta\mu} h^{\lambda\beta} h_\sigma^\mu + (\Omega + \chi - 1) \bar{R}_{\lambda\mu} h_\sigma^\mu h^{\sigma\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{D.0.10})$$

Como temos o objetivo de utilizar os elementos acima na construção de ações que sejam invariantes por transformações gerais de coordenadas, precisamos ainda realizar a expansão da densidade tensorial $\sqrt{|g(x)|}$. Para isso, devido à relação

$$g \equiv \det(g_{\mu\nu}) = \exp(\text{Tr}(\ln g_{\mu\nu})) \quad (\text{D.0.11})$$

e utilizando a decomposição interpolante para o tensor métrico

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\alpha} (\delta_\nu^\alpha + h_\nu^\alpha + \Omega h_\lambda^\alpha h_\nu^\lambda), \quad (\text{D.0.12})$$

a densidade tensorial $\sqrt{|g(x)|}$ possui a seguinte expansão, após uma álgebra simples:

$$\sqrt{|g|} = \sqrt{|\bar{g}|} \left(1 + \frac{1}{2} h + \frac{1}{2} \left(\Omega - \frac{1}{2} \right) h_\lambda^\alpha h_\alpha^\lambda + \frac{1}{8} h^2 \right), \quad (\text{D.0.13})$$

onde $h = \bar{g}^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ é o traço do campo de flutuação.

Referências Bibliográficas

- [1] B. P. Abbott et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116(6):061102, 2016.
- [2] Kazunori Akiyama et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. IV. Imaging the Central Supermassive Black Hole. *Astrophys. J.*, 875(1):L4, 2019.
- [3] Gerard 't Hooft and M. J. G. Veltman. One loop divergencies in the theory of gravitation. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Theor.*, A20:69–94, 1974.
- [4] S. M. Christensen and M. J. Duff. Quantizing Gravity with a Cosmological Constant. *Nucl. Phys.*, B170:480–506, 1980.
- [5] Marc H. Goroff and Augusto Sagnotti. The Ultraviolet Behavior of Einstein Gravity. *Nucl. Phys.*, B266:709–736, 1986.
- [6] John F. Donoghue. Leading quantum correction to the Newtonian potential. *Phys. Rev. Lett.*, 72:2996–2999, 1994.
- [7] Antônio D. Pereira. Quantum spacetime and the renormalization group: Progress and visions. In *Progress and Visions in Quantum Theory in View of Gravity: Bridging foundations of physics and mathematics Leipzig, Germany, October 1-5, 2018*, 2019.
- [8] Christian F. Steinwachs. Towards a unitary, renormalizable and ultraviolet-complete quantum theory of gravity. 4 2020.
- [9] K. S. Stelle. Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity. *Phys. Rev.*, D16:953–969, 1977.
- [10] J. Julve and M. Tonin. Quantum Gravity with Higher Derivative Terms. *Nuovo Cim.*, B46:137–152, 1978.
- [11] E. S. Fradkin and Arkady A. Tseytlin. Renormalizable Asymptotically Free Quantum Theory of Gravity. *Phys. Lett.*, 104B:377–381, 1981.
- [12] E. S. Fradkin and Arkady A. Tseytlin. Renormalizable asymptotically free quantum theory of gravity. *Nucl. Phys.*, B201:469–491, 1982.
- [13] E. T. Tomboulis. Unitarity in Higher Derivative Quantum Gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 52:1173, 1984.
- [14] I. G. Avramidi and A. O. Barvinsky. Asymptotic Freedom in Higher Derivative Quantum Gravity. *Phys. Lett.*, 159B:269–274, 1985.

- [15] M. Ostrogradsky. Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres. *Mem. Acad. St. Petersbourg*, 6(4):385–517, 1850.
- [16] Guilherme de Berredo-Peixoto and Ilya L. Shapiro. Conformal quantum gravity with the Gauss-Bonnet term. *Phys. Rev.*, D70:044024, 2004.
- [17] Guilherme de Berredo-Peixoto and Ilya L. Shapiro. Higher derivative quantum gravity with Gauss-Bonnet term. *Phys. Rev.*, D71:064005, 2005.
- [18] Philip D. Mannheim. Solution to the ghost problem in fourth order derivative theories. *Found. Phys.*, 37:532–571, 2007.
- [19] Alessandro Codello and Roberto Percacci. Fixed points of higher derivative gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 97:221301, 2006.
- [20] Nobuyoshi Ohta and Roberto Percacci. Higher Derivative Gravity and Asymptotic Safety in Diverse Dimensions. *Class. Quant. Grav.*, 31:015024, 2014.
- [21] Nobuyoshi Ohta and Roberto Percacci. Ultraviolet Fixed Points in Conformal Gravity and General Quadratic Theories. *Class. Quant. Grav.*, 33:035001, 2016.
- [22] Luis Alvarez-Gaume, Alex Kehagias, Costas Kounnas, Dieter Lüst, and Antonio Riotto. Aspects of Quadratic Gravity. *Fortsch. Phys.*, 64(2-3):176–189, 2016.
- [23] Leonardo Modesto and Ilya L. Shapiro. Superrenormalizable quantum gravity with complex ghosts. *Phys. Lett.*, B755:279–284, 2016.
- [24] John F. Donoghue. Quartic propagators, negative norms and the physical spectrum. *Phys. Rev.*, D96(4):044007, 2017.
- [25] John F. Donoghue and Gabriel Menezes. Gauge Assisted Quadratic Gravity: A Framework for UV Complete Quantum Gravity. *Phys. Rev.*, D97(12):126005, 2018.
- [26] John F. Donoghue and Gabriel Menezes. Massive poles in Lee-Wick quantum field theory. *Phys. Rev.*, D99(6):065017, 2019.
- [27] John F. Donoghue and Gabriel Menezes. Unitarity, stability and loops of unstable ghosts. *Phys. Rev.*, D100(10):105006, 2019.
- [28] Damiano Anselmi and Marco Piva. Quantum Gravity, Fakeons And Microcausality. *JHEP*, 11:021, 2018.
- [29] Max Niedermaier and Martin Reuter. The Asymptotic Safety Scenario in Quantum Gravity. *Living Rev. Rel.*, 9:5–173, 2006.
- [30] M. Niedermaier. The Asymptotic safety scenario in quantum gravity: An Introduction. *Class. Quant. Grav.*, 24:R171–230, 2007.
- [31] Roberto Percacci. Asymptotic Safety. pages 111–128, 2007.
- [32] Martin Reuter and Frank Saueressig. Quantum Einstein Gravity. *New J. Phys.*, 14:055022, 2012.

- [33] Alessandro Codello, Roberto Percacci, and Christoph Rahmede. Investigating the Ultraviolet Properties of Gravity with a Wilsonian Renormalization Group Equation. *Annals Phys.*, 324:414–469, 2009.
- [34] Robert Percacci. *An Introduction to Covariant Quantum Gravity and Asymptotic Safety*, volume 3 of *100 Years of General Relativity*. World Scientific, 2017.
- [35] Astrid Eichhorn. An asymptotically safe guide to quantum gravity and matter. *Front. Astron. Space Sci.*, 5:47, 2019.
- [36] Martin Reuter and Frank Saueressig. *Quantum Gravity and the Functional Renormalization Group*. Cambridge University Press, 2019.
- [37] Steven Weinberg. Ultraviolet Divergencies in Quantum Theories of Gravitation. In *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, pages 790–831. 1980.
- [38] C. Wetterich. Quantum scale symmetry. 2019.
- [39] Juergen Berges, Nikolaos Tetradis, and Christof Wetterich. Nonperturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics. *Phys. Rept.*, 363:223–386, 2002.
- [40] C. Bagnuls and C. Bervillier. Exact renormalization group equations. An Introductory review. *Phys. Rept.*, 348:91, 2001.
- [41] Janos Polonyi. Lectures on the functional renormalization group method. *Central Eur. J. Phys.*, 1:1–71, 2003.
- [42] Jan M. Pawłowski. Aspects of the functional renormalisation group. *Annals Phys.*, 322:2831–2915, 2007.
- [43] Holger Gies. Introduction to the functional RG and applications to gauge theories. *Lect. Notes Phys.*, 852:287–348, 2012.
- [44] M. Reuter. Nonperturbative evolution equation for quantum gravity. *Phys. Rev.*, D57:971–985, 1998.
- [45] Wataru Souma. Nontrivial ultraviolet fixed point in quantum gravity. *Prog. Theor. Phys.*, 102:181–195, 1999.
- [46] M. Reuter and Frank Saueressig. Renormalization group flow of quantum gravity in the Einstein-Hilbert truncation. *Phys. Rev.*, D65:065016, 2002.
- [47] Daniel F. Litim. Fixed points of quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 92:201301, 2004.
- [48] Dario Benedetti, Pedro F. Machado, and Frank Saueressig. Asymptotic safety in higher-derivative gravity. *Mod. Phys. Lett.*, A24:2233–2241, 2009.
- [49] Dario Benedetti, Pedro F. Machado, and Frank Saueressig. Taming perturbative divergences in asymptotically safe gravity. *Nucl. Phys.*, B824:168–191, 2010.
- [50] Elisa Manrique, Martin Reuter, and Frank Saueressig. Bimetric Renormalization Group Flows in Quantum Einstein Gravity. *Annals Phys.*, 326:463–485, 2011.

- [51] Nicolai Christiansen, Daniel F. Litim, Jan M. Pawłowski, and Andreas Rodigast. Fixed points and infrared completion of quantum gravity. *Phys. Lett.*, B728:114–117, 2014.
- [52] Dario Benedetti. On the number of relevant operators in asymptotically safe gravity. *EPL*, 102(2):20007, 2013.
- [53] Alessandro Codello, Giulio D’Odorico, and Carlo Pagani. Consistent closure of renormalization group flow equations in quantum gravity. *Phys. Rev.*, D89(8):081701, 2014.
- [54] Kevin Falls, Daniel F. Litim, Konstantinos Nikolakopoulos, and Christoph Rahmede. Further evidence for asymptotic safety of quantum gravity. *Phys. Rev.*, D93(10):104022, 2016.
- [55] Nicolai Christiansen, Benjamin Knorr, Jan Meibohm, Jan M. Pawłowski, and Manuel Reichert. Local Quantum Gravity. *Phys. Rev.*, D92(12):121501, 2015.
- [56] Holger Gies, Benjamin Knorr, and Stefan Lippoldt. Generalized parametrization dependence in quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 92:084020, Oct 2015.
- [57] Jorn Biemans, Alessia Platania, and Frank Saueressig. Quantum gravity on foliated spacetimes: Asymptotically safe and sound. *Phys. Rev.*, D95(8):086013, 2017.
- [58] Nicolai Christiansen. Four-Derivative Quantum Gravity Beyond Perturbation Theory. 2016.
- [59] Tobias Denz, Jan M. Pawłowski, and Manuel Reichert. Towards apparent convergence in asymptotically safe quantum gravity. *Eur. Phys. J.*, C78(4):336, 2018.
- [60] Kevin Falls, Callum R. King, Daniel F. Litim, Kostas Nikolakopoulos, and Christoph Rahmede. Asymptotic safety of quantum gravity beyond Ricci scalars. *Phys. Rev.*, D97(8):086006, 2018.
- [61] Holger Gies, Benjamin Knorr, Stefan Lippoldt, and Frank Saueressig. Gravitational Two-Loop Counterterm Is Asymptotically Safe. *Phys. Rev. Lett.*, 116(21):211302, 2016.
- [62] Kevin G. Falls, Daniel F. Litim, and Jan Schröder. Aspects of asymptotic safety for quantum gravity. *Phys. Rev.*, D99(12):126015, 2019.
- [63] Roberto Percacci and Daniele Perini. Constraints on matter from asymptotic safety. *Phys. Rev.*, D67:081503, 2003.
- [64] Roberto Percacci and Daniele Perini. Asymptotic safety of gravity coupled to matter. *Phys. Rev.*, D68:044018, 2003.
- [65] Astrid Eichhorn and Holger Gies. Light fermions in quantum gravity. *New J. Phys.*, 13:125012, 2011.
- [66] Astrid Eichhorn. Quantum-gravity-induced matter self-interactions in the asymptotic-safety scenario. *Phys. Rev.*, D86:105021, 2012.
- [67] Pietro Donà, Astrid Eichhorn, and Roberto Percacci. Matter matters in asymptotically safe quantum gravity. *Phys. Rev.*, D89(8):084035, 2014.

- [68] P. Donà, Astrid Eichhorn, and Roberto Percacci. Consistency of matter models with asymptotically safe quantum gravity. *Can. J. Phys.*, 93(9):988–994, 2015.
- [69] Jan M. Pawłowski, Manuel Reichert, Christof Wetterich, and Masatoshi Yamada. Higgs scalar potential in asymptotically safe quantum gravity. *Phys. Rev.*, D99(8):086010, 2019.
- [70] Mikhail Shaposhnikov and Christof Wetterich. Asymptotic safety of gravity and the Higgs boson mass. *Phys. Lett.*, B683:196–200, 2010.
- [71] Astrid Eichhorn and Aaron Held. Top mass from asymptotic safety. *Phys. Lett.*, B777:217–221, 2018.
- [72] Astrid Eichhorn and Fleur Versteegen. Upper bound on the Abelian gauge coupling from asymptotic safety. *JHEP*, 01:030, 2018.
- [73] Astrid Eichhorn and Aaron Held. Mass difference for charged quarks from asymptotically safe quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 121(15):151302, 2018.
- [74] Nicolai Christiansen and Astrid Eichhorn. An asymptotically safe solution to the U(1) triviality problem. *Phys. Lett.*, B770:154–160, 2017.
- [75] C. Wetterich. Graviton fluctuations erase the cosmological constant. *Phys. Lett.*, B773:6–19, 2017.
- [76] Alfio Bonanno and Alessia Platania. Asymptotically safe inflation from quadratic gravity. *Phys. Lett.*, B750:638–642, 2015.
- [77] Alfio Bonanno and Frank Saueressig. Asymptotically safe cosmology – A status report. *Comptes Rendus Physique*, 18:254–264, 2017.
- [78] Kevin Falls, Daniel F. Litim, Kostas Nikolakopoulos, and Christoph Rahmede. On de Sitter solutions in asymptotically safe $f(R)$ theories. *Class. Quant. Grav.*, 35(13):135006, 2018.
- [79] Alfio Bonanno, Alessia Platania, and Frank Saueressig. Cosmological bounds on the field content of asymptotically safe gravity–matter models. *Phys. Lett.*, B784:229–236, 2018.
- [80] Ademola Adeifeoba, Astrid Eichhorn, and Alessia Platania. Towards conditions for black-hole singularity-resolution in asymptotically safe quantum gravity. *Class. Quant. Grav.*, 35(22):225007, 2018.
- [81] Ramon Torres. Nonsingular black holes, the cosmological constant, and asymptotic safety. *Phys. Rev.*, D95(12):124004, 2017.
- [82] Astrid Eichhorn. On unimodular quantum gravity. *Class. Quant. Grav.*, 30:115016, 2013.
- [83] Astrid Eichhorn. The Renormalization Group flow of unimodular $f(R)$ gravity. *JHEP*, 04:096, 2015.
- [84] N. Ohta, R. Percacci, and A. D. Pereira. $f(R, R_{\mu\nu}^2)$ at one loop. *Phys. Rev.*, D97(10):104039, 2018.
- [85] Natália Alkofer and Frank Saueressig. Asymptotically safe $f(R)$ -gravity coupled to matter I: the polynomial case. *Annals Phys.*, 396:173–201, 2018.

- [86] Kenneth G. Wilson and John B. Kogut. The Renormalization group and the ϵ expansion. *Phys. Rept.*, 12:75–199, 1974.
- [87] Kenneth G. Wilson. The Renormalization Group: Critical Phenomena and the Kondo Problem. *Rev. Mod. Phys.*, 47:773, 1975.
- [88] Andreas Wipf. *Statistical approach to quantum field theory: an introduction*, volume 864. Springer, 2012.
- [89] P. Di Francesco, Paul H. Ginsparg, and Jean Zinn-Justin. 2-D Gravity and random matrices. *Phys. Rept.*, 254:1–133, 1995.
- [90] Astrid Eichhorn and Tim Koslowski. Continuum limit in matrix models for quantum gravity from the Functional Renormalization Group. *Phys. Rev.*, D88:084016, 2013.
- [91] Alessio Baldazzi, Roberto Percacci, and Vedran Skrinjar. Wicked metrics. *Class. Quant. Grav.*, 36(10):105008, 2019.
- [92] Alfio Bonanno, Astrid Eichhorn, Holger Gies, Jan M. Pawłowski, Roberto Percacci, Martin Reuter, Frank Saueressig, and Gian Paolo Vacca. Critical reflections on asymptotically safe gravity. 4 2020.
- [93] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.
- [94] Christof Wetterich. Exact evolution equation for the effective potential. *Phys. Lett.*, B301:90–94, 1993.
- [95] Oliver J. Rosten. Fundamentals of the Exact Renormalization Group. *Phys. Rept.*, 511:177–272, 2012.
- [96] Daniel F. Litim. Optimized renormalization group flows. *Phys. Rev.*, D64:105007, 2001.
- [97] Steven Weinberg. *The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations*. Cambridge University Press, 2005.
- [98] M. Reuter. Nonperturbative evolution equation for quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 57:971–985, Jan 1998.
- [99] David J. Gross and Frank Wilczek. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. *Phys. Rev. Lett.*, 30:1343–1346, Jun 1973.
- [100] H. David Politzer. Reliable perturbative results for strong interactions? *Phys. Rev. Lett.*, 30:1346–1349, Jun 1973.
- [101] O. Lauscher and M. Reuter. Ultraviolet fixed point and generalized flow equation of quantum gravity. *Phys. Rev.*, D65:025013, 2002.
- [102] O. Lauscher and M. Reuter. Is quantum Einstein gravity nonperturbatively renormalizable? *Class. Quant. Grav.*, 19:483–492, 2002.
- [103] O. Lauscher and M. Reuter. Towards nonperturbative renormalizability of quantum Einstein gravity. *Int. J. Mod. Phys.*, A17:993–1002, 2002.

- [104] G. W. Gibbons, S. W. Hawking, and M. J. Perry. Path Integrals and the Indefiniteness of the Gravitational Action. *Nucl. Phys.*, B138:141–150, 1978.
- [105] L. F. Abbott. The Background Field Method Beyond One Loop. *Nucl. Phys.*, B185:189–203, 1981.
- [106] Gustavo P. De Brito, Nobuyoshi Ohta, Antonio D. Pereira, Anderson A. Tomaz, and Masatoshi Yamada. Asymptotic safety and field parametrization dependence in the $f(R)$ truncation. *Phys. Rev.*, D98(2):026027, 2018.
- [107] Andreas Nink. Field parametrization dependence in asymptotically safe quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 91:044030, Feb 2015.
- [108] N. Ohta, R. Percacci, and A. D. Pereira. Gauges and functional measures in quantum gravity I: Einstein theory. *JHEP*, 06:115, 2016.
- [109] N. Ohta, R. Percacci, and A. D. Pereira. Gauges and functional measures in quantum gravity II: Higher derivative gravity. *Eur. Phys. J.*, C77(9):611, 2017.
- [110] Ulrich Ellwanger, Manfred Hirsch, and Axel Weber. Flow equations for the relevant part of the pure Yang-Mills action. *Z. Phys.*, C69:687–698, 1996.
- [111] Daniel F. Litim and Jan M. Pawłowski. Flow equations for Yang-Mills theories in general axial gauges. *Phys. Lett.*, B435:181–188, 1998.
- [112] Daniel F. Litim and Jan M. Pawłowski. On gauge invariant Wilsonian flows. In *The exact renormalization group. Proceedings, Workshop, Faro, Portugal, September 10-12, 1998*, pages 168–185, 1998.
- [113] Mahmoud Safari. Splitting Ward identity. *Eur. Phys. J.*, C76(4):201, 2016.
- [114] I. Hamzaan Bridle, Juergen A. Dietz, and Tim R. Morris. The local potential approximation in the background field formalism. *JHEP*, 03:093, 2014.
- [115] Astrid Eichhorn. Status of the asymptotic safety paradigm for quantum gravity and matter. *Found. Phys.*, 48(10):1407–1429, 2018.
- [116] K. Falls, D. Litim, K. Nikolakopoulos, and C. Rahmede. Further evidence for asymptotic safety of quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 93:104022, May 2016.
- [117] Nicolai Christiansen, Kevin Falls, Jan M. Pawłowski, and Manuel Reichert. Curvature dependence of quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 97:046007, Feb 2018.
- [118] Alessandro Codello, Roberto Percacci, and Christoph Rahmede. Ultraviolet properties of $f(R)$ -gravity. *Int. J. Mod. Phys.*, A23:143–150, 2008.
- [119] Pedro F. Machado and Frank Saueressig. Renormalization group flow of $f(R)$ gravity. *Phys. Rev. D*, 77:124045, Jun 2008.
- [120] Dario Benedetti and Francesco Caravelli. The Local potential approximation in quantum gravity. *JHEP*, 06:017, 2012. [Erratum: *JHEP*10,157(2012)].
- [121] Juergen A. Dietz and Tim R. Morris. Asymptotic safety in the $f(R)$ approximation. *JHEP*, 01:108, 2013.

- [122] Maximilian Demmel, Frank Saueressig, and Omar Zanusso. RG flows of Quantum Einstein Gravity on maximally symmetric spaces. *JHEP*, 06:026, 2014.
- [123] Nobuyoshi Ohta, Roberto Percacci, and Gian Paolo Vacca. Flow equation for $f(R)$ gravity and some of its exact solutions. *Phys. Rev. D*, 92:061501, Sep 2015.
- [124] Nobuyoshi Ohta, Roberto Percacci, and Gian Paolo Vacca. Renormalization Group Equation and scaling solutions for $f(R)$ gravity in exponential parametrization. *Eur. Phys. J.*, C76(2):46, 2016.
- [125] Kevin Falls and Nobuyoshi Ohta. Renormalization Group Equation for $f(R)$ gravity on hyperbolic spaces. *Phys. Rev.*, D94(8):084005, 2016.
- [126] K. Falls, D. F. Litim, K. Nikolakopoulos, and C. Rahmede. A bootstrap towards asymptotic safety. 2013.
- [127] Yuta Hamada and Masatoshi Yamada. Asymptotic safety of higher derivative quantum gravity non-minimally coupled with a matter system. *JHEP*, 08:070, 2017.
- [128] Gustavo P. De Brito, Yuta Hamada, Antonio D. Pereira, and Masatoshi Yamada. On the impact of Majorana masses in gravity-matter systems. *JHEP*, 08:142, 2019.
- [129] Dario Benedetti. Essential nature of Newton’s constant in unimodular gravity. *Gen. Rel. Grav.*, 48(5):68, 2016.
- [130] Gustavo P. De Brito, Astrid Eichhorn, and Antonio D. Pereira. A link that matters: Towards phenomenological tests of unimodular asymptotic safety. *JHEP*, 09:100, 2019.
- [131] W. G. Unruh. Unimodular theory of canonical quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 40:1048–1052, Aug 1989.
- [132] David R. Finkelstein, Andrei A. Galiatdinov, and James E. Baugh. Unimodular relativity and cosmological constant. *J. Math. Phys.*, 42:340–346, 2001.
- [133] George F. R. Ellis, Henk van Elst, Jeff Murugan, and Jean-Philippe Uzan. On the Trace-Free Einstein Equations as a Viable Alternative to General Relativity. *Class. Quant. Grav.*, 28:225007, 2011.
- [134] Malcolm Hicken, W. Michael Wood-Vasey, Stephane Blondin, Peter Challis, Saurabh Jha, Patrick L. Kelly, Armin Rest, and Robert P. Kirshner. Improved Dark Energy Constraints from 100 New CfA Supernova Type Ia Light Curves. *Astrophys. J.*, 700:1097–1140, 2009.
- [135] Writambhara Chakraborty. *Accelerating Expansion of the Universe*. PhD thesis, Bengal Engin. Sci. U., Howrah, 2009.
- [136] Philip Bull et al. Beyond Λ CDM: Problems, solutions, and the road ahead. *Phys. Dark Univ.*, 12:56–99, 2016.
- [137] Antonino Del Popolo and Morgan Le Delliou. Small scale problems of the Λ CDM model: a short review. *Galaxies*, 5(1):17, 2017.
- [138] Niayesh Afshordi. Gravitational Aether and the thermodynamic solution to the cosmological constant problem. 2008.

- [139] Albert Einstein. Do gravitational fields play an essential part in the structure of the elementary particles of matter? *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1919:349–356, 1919.
- [140] J. L. Anderson and D. Finkelstein. Cosmological constant and fundamental length. *Am. J. Phys.*, 39:901–904, 1971.
- [141] M. Henneaux and C. Teitelboim. The Cosmological Constant and General Covariance. *Phys. Lett.*, B222:195–199, 1989.
- [142] Lee Smolin. The Quantization of unimodular gravity and the cosmological constant problems. *Phys. Rev.*, D80:084003, 2009.
- [143] R. de León Ardón, N. Ohta, and R. Percacci. Path integral of unimodular gravity. *Phys. Rev.*, D97(2):026007, 2018.
- [144] Antonio Padilla and Ippocratis D. Saltas. A note on classical and quantum unimodular gravity. *Eur. Phys. J.*, C75(11):561, 2015.
- [145] R. Bufalo, M. Oksanen, and A. Tureanu. How unimodular gravity theories differ from general relativity at quantum level. *Eur. Phys. J.*, C75(10):477, 2015.
- [146] J. J. van der Bij, H. van Dam, and Yee Jack Ng. The Exchange of Massless Spin Two Particles. *Physica*, 116A:307–320, 1982.
- [147] Mario Herrero-Valea. What do gravitons say about (unimodular) gravity? *JHEP*, 12:106, 2018.
- [148] R. Percacci. Unimodular quantum gravity and the cosmological constant. *Found. Phys.*, 48(10):1364–1379, 2018.
- [149] James W. York, Jr. Conformally invariant orthogonal decomposition of symmetric tensors on Riemannian manifolds and the initial value problem of general relativity. *J. Math. Phys.*, 14:456–464, 1973.
- [150] Enrique Álvarez, Sergio González-Martín, Mario Herrero-Valea, and Carmelo P. Martín. Quantum Corrections to Unimodular Gravity. *JHEP*, 08:078, 2015.
- [151] S. Upadhyay, M. Oksanen, and R. Bufalo. BRST Quantization of Unimodular Gravity. *Braz. J. Phys.*, 47(3):350–365, 2017.
- [152] Maximilian Demmel, Frank Saueressig, and Omar Zanusso. A proper fixed functional for four-dimensional Quantum Einstein Gravity. *JHEP*, 08:113, 2015.
- [153] Ippocratis D. Saltas. Uv structure of quantum unimodular gravity. *Phys. Rev. D*, 90:124052, Dec 2014.
- [154] Kevin Falls. Renormalization of newton’s constant. *Phys. Rev. D*, 92:124057, Dec 2015.
- [155] Kevin Falls. Physical renormalization schemes and asymptotic safety in quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 96:126016, Dec 2017.
- [156] M. Yu Kalmykov. Gauge and parametrization dependencies of the one loop counterterms in the Einstein gravity. *Class. Quant. Grav.*, 12:1401–1412, 1995.

- [157] M. Yu. Kalmykov, K. A. Kazakov, P. I. Pronin, and K. V. Stepanyantz. Detailed analysis of the dependence of the one loop counterterms on the gauge and parametrization in the Einstein gravity with the cosmological constant. *Class. Quant. Grav.*, 15:3777–3794, 1998.
- [158] Jeferson D. Gonçalves, Tibério de Paula Netto, and Ilya L. Shapiro. Gauge and parametrization ambiguity in quantum gravity. *Phys. Rev.*, D97(2):026015, 2018.
- [159] Pietro Dona and Roberto Percacci. Functional renormalization with fermions and tetrads. *Phys. Rev. D*, 87(4):045002, 2013.
- [160] Gustavo P. de Brito, Antonio D. Pereira, and Arthur F. Vieira. in preparation.
- [161] Dao-Jun Liu, Bin Yang, Yong-Jia Zhai, and Xin-Zhou Li. Quasinormal modes for asymptotic safe black holes. *Class. Quant. Grav.*, 29:145009, 2012.
- [162] Roberto Percacci and Gian Paolo Vacca. Search of scaling solutions in scalar-tensor gravity. *Eur. Phys. J.*, C75(5):188, 2015.
- [163] L. D. Faddeev and V. N. Popov. Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field. *Phys. Lett.*, 25B:29–30, 1967. [325(1967)].
- [164] D. V. Vassilevich. Heat kernel expansion: User’s manual. *Phys. Rept.*, 388:279–360, 2003.